Лекции по теории игр и политологии

С. Г. Коковин

26 июля 2003 г.

Содержание

Предисловие

Данное пособие (которое дорабатывается) составляет курс лекций “Элементы теории игр и политологии” – обязательный курс 3-го года обучения экономического факультета Новосибирского государственного университета.

Курс опирается на курсы Микроэкономика-1, Оптимизация, и Теория экономического равновесия. Поэтому здесь уже изученные студентами понятия предпочтений, оптимизации, кооперативная теория игр – затрагиваются минимально. Курс служит базисом для всех последующих курсов, использующих гипотезу рационального поведения и игровые понятия, включая “Микроэкономику-2”, теории отраслевых рынков и общественного сектора. Он обучает скорее методам и средствам анализа, чем эмпирическим фактам. Какие "практики"или типы поведения логически объяснимы гипотезой индивидуальной рациональности, а какие нет - вот главный вопрос во всех рассматриваемых ситуациях, и умение точно рассуждать об этом является главным вырабатываемым навыком. Студенты должны освоить формализацию и решение наиболее типичных игр, прежде всего экономических и политических. В соответствии с задачами, курс организован в виде 2 частей: первая часть - “Теория Игр” сфокусирована на общих понятиях игр и методах решения, а вторая - “Политическая Теория” - на моделях политических объектов и процессов.

Как основа подхода, здесь использованы известные международные учебники по играм и моделям политики, прежде всего: R.B.Myerson - *Game Theory (Analysis of Conflict)* (продвинутый уровень), P.C. Ordeshook- *Political Theory Primer,* (вводный уровень). Использованы нужные разделы из учебников микроэкономики (где необходимый экономистам игровой материал дан более сжато) H.Varian - *Microeconomic Analysis.*, D. Krebs - *A Course in Microeconomic Theory,* J. Tirole - *Industrial Organization,*. Дополнительно использована литература из приведенного списка литературы, и пособия изданные в НГУ: В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков (1999) - *Микроэкономический анализ несовершенных рынков* (вводный уровень игр, основные концепции), продвинутое пособие В.И.Данилова *Лекции по теории игр*, изданное в РЭШ. К этим материалам рекомендуется обращаться.

Характер изложения практически приспособлен к типу и возможностям восприятия студентов НГУ, к ограничениям учебного плана. Во многих случаях предпочтение отдано не общности формального изложения понятий, а их освоению на примерах, по возможности – занимательных. Важной частью пособия (курса) является задачник, поскольку упор сделан на практическое освоение ключевых идей теории игр и политической теории.

Курс занимает 18 лекций (36 академических часов), без семинаров, с несколькими контрольными и заключительным дифференцированным зачетом. Раздел 1 пособия является базовым; он вводит необходимые понятия теории игр. Раздел 2 применяет их к моделям политики. Задачи собраны в задачнике - см. www.math.nsc.ru/ mathecon.

Автор приносит благодарность В.М.Полтеровичу за советы по выбору политического материала, А.Савватееву и А.Тонису за сотрудничество в методической разработке преподавания теории игр и ценные замечания по тексту.

Раздел I. Элементы теории игр

Введение: классификация игр

В изучаемой здесь теории принятия решений под понятие игры подходит *любая* ситуация с рациональными, то есть целеполагающими, оптимизирующими субъектами (“ участниками”), а также некоторые ситуации с неполной рациональностью.[1] В частности, любая оптимизационная задача - это, по сути дела, просто игра с одним участником. Напротив, задачу поиска многоцелевого оптимума, то есть сильного или слабого Парето-оптимума, игрой назвать еще нельзя. Недостает описания *индивидуальных* прав или возможностей участников в рамках общих возможностей, и описания информационно-поведенческих особенностей ситуации.

Описание структуры любой игры содержит три блока: 1)физические возможности, то есть допустимые множества ходов или стратегий участников, их связи ; 2)цели участников; 3)тип поведения участников, зависящий от их информированности, характера взаимодействия друг с другом, рациональности мышления, способа рассуждений и др. Для блоков (1) и (2) выработаны достаточно удобные описывающие модели – допустимые множества или графы, целевые функции. Но трудно указать единый для всех игр формальный способ описать тип поведения; часто это описание формализуют прямо “концепцией решения” игры.

Задача анализа игры — по этим трем известным блокам параметров ситуации уметь прогнозировать действия игроков, то есть множество возможных действий и их результатов (исходов), называемое “*решением*” игры:

1. Возможности ходов участников
   (допустимые множества)
2. Цели участников
   (предпочтения, целевые функции)
3. Информация и тип поведения
   (информационные множества, “ожидания”, рациональность, контекст игры, ...)

$\Rightarrow$ Исход (решение) игры

По каждому из этих трех признаков, и по некоторым другим, огромное разнообразие игр можно классифицировать. Например, игры разделяют по характеру доступных стратегий — на конечные или бесконечные (в частности, бесконечные во времени, дискретные или непрерывные и др.), на статические - с одновременными ходами, или динамические. По соотношению целей участников — на антагонистические или неантагонистические (с непротивоположными интересами). По типу поведения — на кооперативные, где участники ищут решение в переговорах, и некооперативные (где договоры неосуществимы или не обеспечены механизмом выполнения). По информационной структуре игры можно делить на игры с совершенной или несовершенной рациональностью, с общим или не-общим знанием данных. А

[1]Напротив, в психологии и в быту под игрой понимают лишь деятельность, непосредственные цели которой кажутся условными, не связанными с жизненными интересами участников.

также, учитывая внешний контекст игры, на 1)*уникальные*, 2)*популяционные* (где игроки пользуются знанием об аналогичных происходивших ранее играх), 3)*повторяющиеся* в том же коллективе (где игроки пользуются угрозами).

Для строгого анализа условия игры обычно формализуют в одной из трех форм: в *развернутой* (детальное описание последовательностей возможных ходов), в *характеристической* (описываются значения выигрышей каждой коалиции, для анализа кооперативных игр) или в *стратегической* (описываются цельные стратегии). Последняя подразделяется на *нормальную* стратегическую форму и *мультиперсонную* (*ситуационную*) форму. В каком-то смысле, разные формы – это разные модели, иногда соответствующие разным явлениям. Они заслуживают отдельного рассмотрения до попыток их соединения.

1 Глава. Игры в нормальной форме ("статические" или "одновременные")

Мы начнем с варианта "нормальной" формы игры. Часто ее соотносят со случаем "статической" игры (однократные одновременные ходы участников), а развернутую форму — с "динамическими" играми (последовательные ходы), но мы увидим, что возможны и другие трактовки. Нормальная форма означает, что исходная физическая и целевая структура игры описана как объект

$$G := \langle I, X, u(.)\rangle = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_i(.)\}_{i\in I}\rangle \ , \ \text{где}$$

$I := \{1, ..., m\}$ — множество участников i,

$X := (X_i)_{i\in I} := \prod_i X_i = (X_1 \times X_2 \times ... \times X_m)$ — набор (профиль) допустимых множеств стратегий участников,

$u := (u_i)_I = (u_i)_{i\in I}$ — набор (профиль) целевых функций участников (заметим: каждая целевая функция $u_i : X_i \mapsto I\!R$ зависит, вообще говоря, от всех $(x_j)_{j\in I}$).

> (Возможно также более общее представление игр в нормальной форме (оно соответствует, в частности, Вальрасовскому равновесию игр обмена): не только выигрыши, но и текущее допустимое множество стратегий $B_i(x_{j\neq i}) \subset X_i$ каждого участника может зависеть от текущих действий $x_{j\neq i}$ других участников. Однако, изменение допустимого множества можно представить как изменение целей, или как динамическую игру, и нет нужды отдельно рассматривать эту иную формализацию.)

Состоянием игры в нормальной форме будем называть пару (x, β) выбранных стратегий и ожиданий всех участников. Ожидание β_i каждого участника о всех его партнерах может совпадать с их настоящими (намеченными к исполнению) стратегиями, или не совпадать.

Найти *решение* игры означает, вообще говоря, указать множество ее состояний, соответствующих нашим гипотезам о принципах поведения и информации участников. Эти гипотезы задают некоторое согласование стратегий и ожиданий, обычно формализуемым в “концепции решения”. В том числе, часто под решениями подразумеваются “равновесия”, то есть состояния, от которых участники не станут переходить к другим состояниям, если игра повторится. (Равновесий может и не быть: иногда процесс выбора стратегий и корректировки ожиданий не останавливается).

Проиллюстрируем используемые далее **принципы обозначений** и простейшее понятие решения на примере. Рассмотрим “игру координации”, (известную в одном из вариантов как “семейный спор” = “Battle of Sexes”: Luce, Raiffa, 1953), нами незначительно модифицированную. Пусть Анна (персонаж, который далее во всех обсуждаемых динамических играх ходит первым и обозначается A) и Виктор (персонаж, который в других играх, не как здесь, ходит *позже* Анны и, соответственно, обозначается буквой V стоящей *позже* в латинском алфавите). Здесь Анна и Виктор ходят одновременно, после хода "Природы", сформировавшей у них какие-то "ожидания"(beliefs) о поведении партнера. Они не имеют возможности переговариваться (возможно, это период симпатии ДО знакомства, или это супруги в сложных отношениях, уставшие спорить :-)), и каждый выбирает, пойти ли вечером на футбол или в кино. Оба предпочли бы оказаться где-нибудь вместе, что отражено в *таблице выигрышей* на Рис. 1. А именно, совместное попадание в кино ($x = (x_A, x_V) := (c_A, c_V)$) дало бы вектор полезностей (выигрышей) $(u_A(c_A, c_V),\ u_V(c_A, c_V)) := (3, 2)$, а совместное попадание на футбол дает выигрыши $(u_A(f_A, f_V),\ u_V(f_A, f_V)) := (1, 4)$.

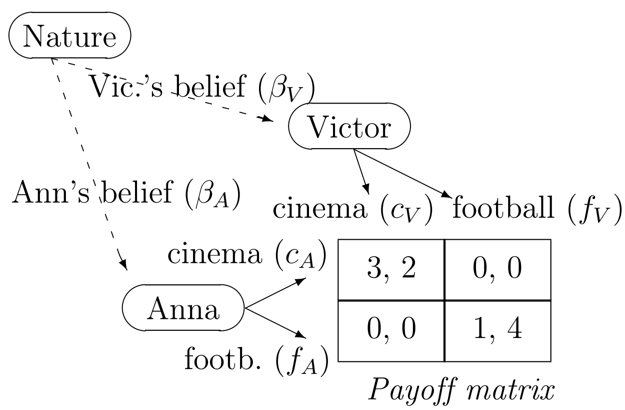


Рис. 1: “Игра координации” (или “Семейный спор”, “Battle of Sexes”). (Приношу извинения, английские надписи на рисунках вынуждены программным обеспечением.)

В каждой клетке, соответствующей одному из 4-х возможных исходов, помещен сначала субъективный выигрыш строчного игрока – Анны (измеренный в некоторых единицах полезности), затем - выигрыш Виктора. Стрелки отражают последовательность ходов, в данном случае - то, что игроки вынуждены принять решения одновременно, не зная выбора другого, а только имея какие-то *"ожидания"* (beliefs) об этом выборе, предопределенные природой (случаем). В частности, если оба ожидают от партнера выбор "футбол", то есть $\beta_A = footb_V$, $\beta_V = footb_A$, тогда рациональный выбор каждого — присоединиться к выбору партнера, и исходом будет счастливая (более счастливая для Виктора) встреча на футболе: $x_A = footb_A$, $x_V = footb_V$. (Аналогично, совпадающие гипотезы о кино привели бы к счастливой, особенно для Анны, встрече в кино, а несовпадающие гипотезы – к развлечениям порознь.)

Далее, как и здесь, мы будем большими буквами обозначать участников (или множества), малыми латинскими буквами – переменные стратегий. Греческие буквы используются для ожиданий или вероятностей, в данном случае β_V – это ожидание Виктора о ходе Анны. Нечетные цифры выигрышей во многих наших примерах соответствуют первому игроку, четные – второму.

О понятиях решения. В данном случае, для предсказания исхода мы использовали простейшую концепцию решения – *решение с заданными заранее ожиданиями ходов*, известными откуда-то нам – предсказывающему наблюдателю. Причем ожидания не предполагались "согласованными", "обоснованными истинными чужими намерениями".[2] Более сложные гипотезы о характере поведения и информации (ожиданий) участников, порождают другие типы или концепции решений. Перечислим некоторые решения игр в нормальной форме, изучаемые далее (далеко не все возможные). (Табл.1):

Информация, на которую ориентируется участник $j \in I$:	*Тип возникающих решений (равновесий) :*
- только на знание множеств $(X_i)_I$	$\Rightarrow MM$ — "осторожное" (максимин), $\mathbb{D}E$ — "доминирующее",
- еще и на чужие цели $(u_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow INDS, INDW, SE$ — "сложное",
- на текущий чужой ход $(x_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow NE$ — "Нэшевское"
- на текущую вероятность ходов	$\Rightarrow NEm$ — "Нэшевское в смешанных стратегиях"
- лидер знает цели, ведомые - текущий ход	$\Rightarrow StE$ — "Штакельберговское"
- на соглашение с партнерами	$\Rightarrow \mathcal{C}_W$ — "Ядро"

Таблица 1: Разные типы решений игр в нормальной форме, в зависимости от информации о партнерах (это не значит, что решение Нэша нельзя применять в ситуации знания чужих целей или в ситуации переговоров, таблица говорит только о типичности применения понятий). Всюду в таблице подразумевается знание собственных целей, и "общее знание" множества возможных стратегий всех участников.

Обсудим последовательно каждую из концепций решения, начав с простых.

[2]Попутно заметим, что здесь независимое не-кооперативное принятие решений, как и во многих других случаях, может приводить к не-Паретовскому, то есть неэффективному, невозможному при кооперации исходу.

1.1 Максимин и доминирование

Будем обозначать через $x_{-i} := (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ профиль (набор) стратегий всех игроков кроме i, и аналогично индексировать множества и функции.

Сначала рассмотрим случай, когда игроки не обладают информацией ни о целях, ни о намеченных стратегиях партнеров. Если они к тому же ведут себя "очень осторожно", то подходит следующая концепция решения.

Определение 1.1.1 Множество X_{MMi} *осторожных* или *максиминных стратегий* игрока i задается как аргументы, максимизирующие гарантированный выигрыш:[3]

$$X_{MMi} \ := \ \{x_i \in X_i | \ \forall x_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq \sup_{y_i \in X_i} (\inf_{z_{-i} \in X_{-i}} u_i(y_i, z_{-i}) \ ) \ \}, \qquad (1)$$

при этом $\quad MM := \prod_{i \in I} X_{MMi}$ – множество *максиминных решений* игры.

Поясним: в осторожном решении игроки ожидают от партнеров самого худшего для себя (равновесием это решение называть не совсем точно, поскольку ожидание всего худшего может не оправдываться), и максимизируют гарантированный выигрыш. Это иногда кажется правдоподобным поведением при неизвестности целей партнеров, крайней осторожности, и однократном розыгрыше (см. пример "Перекресток" - Табл. 2); либо в ситуации антагонистической игры, то есть игры с противоположными интересами (определяемой ниже).

		Victor	
		Go_V	$Stop_V$
Anna	Go_A	-1000, -1000	1, -1 (NE)
	$Stop_A$	-1, 1 (NE)	0, 0 (MM)

		Victor	
		Go_V	$Stop_V$
A	Go_A	0, 0	1, -1
	$Stop_A$	-1, 1	0, 0

Таблица 2: Игра координации "Нерегулируемый перекресток". Нет правил, и каждый может продолжать быстро ехать или затормозить. Худший исход – столкновение – игроки оценивают для себя в -1000$, а возможность опередить соперника – в 1$. Осторожное решение – MM: $(Stop_A, Stop_V)$. Рядом, для сравнения - "антагонистический" вариант этой игры при невозможности разбить машины: нулевая сумма выигрышей всюду.

В антагонистической игре (т.е. игре "с нулевой суммой" или, шире, с постоянной суммой выигрышей) концепция максимина очень естественна. Но, как видно из приведенного примера, не все максиминные решения вызывают доверие как возможный результат *повторяющейся* игры. Это обсуждается далее и в понятии "седла".

Во многих случаях применимость концепции максимина вызывает и другие сомнения: если игроки осторожны, то почему не внести степень их неприятия риска в явном виде в значения выигрышей, приписывая одновременно некоторые вероятности ожидаемым ходам партнеров? К тому же, игра типа "Перекресток", но разыгрываемая многократно, вряд ли будет приводить к такому же взаимно-осторожному

[3] Как обычно, $\sup = \max, \ \inf = \min$, если $\max, \min$ существуют.

решению с *несогласованными* ожиданиями, ожидания тем или иным путем скорректируются и согласуются (см. “повторяющиеся игры”).

Впрочем, бывают ситуации, когда ожидания не играют роли; это ситуации **“доминирования”**. Для описания их введем понятия сравнимости стратегий.

Естественно считать, что одна моя стратегия “слабо доминирует” вторую, то есть “лучше” для меня чем вторая моя стратегия – когда первая стратегия при любых действиях партнеров не хуже второй стратегии и по крайней мере для одного варианта действий партнеров строго лучше (приносит мне больший выигрыш). Формально:

Определение 1.1.2 Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i (слабо) *доминирует* стратегию $y_i \in X_i$, если

$$\forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$
$$\exists x_{-i} \in X_{-i} : \quad u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}),$$

где $-i := I \setminus \{i\}$, $X_{-i} := (X_j)_{j \neq i}$. Если же оба приведенные неравенства строгие, то x_i *сильно доминирует* над y_i (то есть x_i лучше при любых действиях партнеров).

Если две стратегии x_i, y_i доставляют одинаковые выигрыши при любых действиях партнеров (то есть $u_i(x_i, x_{-i}) = u_i(y_i, x_{-i})\ \forall x_{-i}$), то они *эквивалентны* для игрока i. Если же из пары стратегий ни одна не слабо-доминирует другую и они не эквивалентны, то они *несравнимы*.

Понятие доминирования позволяет разбить множество стратегий X_i на классы:

Определение 1.1.3 Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i называется (слабо) *доминирующей* стратегией (среди его стратегий) или (слабо) *независимо-оптимальной* — если она доминирует любую другую его стратегию либо эквивалентна ей:

$$\forall y_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$

и *сильно доминирующей* если все такие неравенства строгие. Множество всех (слабо) доминирующих стратегий игрока i далее обозначается $\mathbb{D}_{Wi}$, а сильно доминирующих стратегий – $\mathbb{D}_{Si}$. Множество всех *недоминируемых* слабо (ни одной другой стратегией) стратегий игрока i обозначается далее $\mathcal{ND}_{Wi}$, множество всех *недоминируемых сильно* – $\mathcal{ND}_{Si}$. Очевидно,

$$\mathbb{D}_{Si} \subset \mathbb{D}_{Wi}, \quad \text{но} \quad \mathcal{ND}_{Wi} \subset \mathcal{ND}_{Si}$$

По сути, доминирующей или независимо-оптимальной называют стратегию, приносящую выигрыш не менее любой другой *независимо от действий партнеров*. Понятно, что это не часто встречается. Но уж если встретилось - это позволяет сделать довольно надежное предсказание о ходе рассматриваемого игрока независимо от информационной структуры!

Сопоставьте доминирование с максиминной стратегией игрока на примере.

Пример доминирования. Пусть множество стратегий Анны есть $X_A = (a, b, c, d, e)$, и выигрыши ее заданы таблицей (выигрыши Виктора не приведены):

$Ann\backslash\ Victor$	x	y	z
a	$2, *$	$3, *$	$5, *$
b	$3, *$	$3, *$	$4, *$
c	$2, *$	$4, *$	$5, *$
d	$3, *$	$3, *$	$3, *$
e	$1, *$	$3, *$	$4, *$

В этом примере $\{b, d\} = X_{MM,A} \subset \mathcal{ND}_{S,A} = \{a, b, c\} \supset \mathcal{ND}_{W,A} = \{b, c\}$.

Сопоставляя далее доминирование с максимином, проверьте

Утверждение. *Осторожная стратегия игрока не может быть сильно- доминируемой, и среди осторожных есть слабо- недоминируемые:*
$X_{MMi} \subset \mathcal{ND}_{Si} \qquad [X_{MMi} \neq \emptyset, \mathcal{ND}_{Wi} \neq \emptyset] \Rightarrow X_{MMi} \cap \mathcal{ND}_{Wi} \neq \emptyset.$

1.1.1 Равновесие по доминированию

Понятия доминирования, примененные *ко всем игрокам* сразу, позволяют сформулировать четыре типа решений, по два для сильной и для слабой концепции.

Определение 1.1.4 Множество *равновесий в (слабо) доминирующих стратегиях* есть множество профилей (наборов) слабо-доминирующих стратегий игроков:
$W\mathbb{D}E := \prod_{i\in I} \mathbb{D}_{Wi} = (\mathbb{D}_{W1} \times \mathbb{D}_{W2} \times ... \times \mathbb{D}_{Wm})$.
Аналогично, множество *равновесий в сильно-доминирующих стратегиях* есть:
$S\mathbb{D}E := \prod_{i\in I} \mathbb{D}_{Si} = (\mathbb{D}_{S1} \times \mathbb{D}_{S2} \times ... \times \mathbb{D}_{Sm})$.

Множество профилей (наборов) слабо-недоминируемых стратегий игроков обозначим:
$W\mathcal{ND} := \prod_{i\in I} \mathcal{ND}_{Wi} = (\mathcal{ND}_{W1} \times \mathcal{ND}_{W2} \times ... \times \mathcal{ND}_{Wm})$.
Аналогично, множество профилей *сильно-недоминируемых стратегий* обозначим:
$S\mathcal{ND} := \prod_{i\in I} \mathcal{ND}_{Si} = (\mathcal{ND}_{S1} \times \mathcal{ND}_{S2} \times ... \times \mathcal{ND}_{Sm})$.

Пример 1.1 ("Симбиоз") Крупный грызун "медоед" типа россомахи, живущий в Африке, питается преимущественно медом диких пчел, а птичка "медовед" питается преимущественно воском от разоренных им диких "ульев". При этом она разведывает дупла - ульи, и ведет туда медоеда, криком призывая его за собой. Каждый из них может выбрать, объединиться ли с партнером. Решение этой игры (и всех подобных "симбиозов" в быту или экономике!) очевидно и объяснимо по доминированию:

Сопоставим четыре концепции связанных с доминированием. Очевидно, всегда $\mathcal{ND}_{Wi} \subset \mathcal{ND}_{Si}$, поэтому $W\mathcal{ND} \subset S\mathcal{ND}$. Кроме того, очевидно, когда $S\mathbb{D}E \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{r} \\ \text{alone} \\ \text{together} \end{array} \left[\begin{array}{cc} \textit{alone} & \textit{together} \\ (0,\ 0) & (0,\ 0) \\ (0,\ 0) & (1,\ 1) \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow WDE \end{array} \qquad (2)$$

Таблица 3: Пример игры координации “симбиоз”.

то $W\mathbb{D}E = S\mathbb{D}E$. При этом $W\mathbb{D}E$ имеет больше шансов существовать: если есть слабо-доминирующие стратегии, это еще не значит, что есть сильно-доминирующие. Недоминируемые же решения существуют всегда (при компактности множеств стратегий и достижимых выигрышей), но часто оставляют слишком большую неопределенность решения. Сопоставляя слабо-доминирующие и слабо-недоминируемые стратегии некоторого игрока i, легко доказать (см. Мулен, 1985):

Утверждение 1.1.1 Попарно эквивалентны три утверждения: *1)* $\mathbb{D}_{Wi} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ *2)* $\mathcal{ND}_{Wi} = \mathbb{D}_{Wi} \Leftrightarrow$ *3) все стратегии в* $\mathcal{ND}_{Wi}$ *эквивалентны.*
Отсюда, $W\mathcal{ND} = W\mathbb{D}$ *когда* $W\mathbb{D} \neq \emptyset$.

Выбор между введенными концепциями доминирования — сильной и слабой — неочевиден, с точки зрения правдоподобия их применимости. Иногда гипотеза поведения со слабым доминированием оправдана смыслом игры, а иногда – нет, как видно из игры на Таб. 4:

		Victor x	y
Anna	a	\$ 101, \$ 100	\$ 1, \$ 100
	b	\$ 101, \$ 0	\$ 3, \$ 2 (WDE)

Таблица 4: Применимость слабого доминирования - неочевидна.

Здесь по слабому доминированию игра приходит к мало выгодному решению b, y. Оно вполне возможно в однократной игре без всякой информации, а другое, более выгодное, решение a, x кажется менее разумным прогнозом их поведения. Однако, если a, x – состояние не в однократной игре, а в некоторой *популяции*, то игроки могут не захотеть переходить на индивидуально- нестрого-более выгодные позиции b и y, основательно опасаясь сползания популяции к выигрышам $(3, 2)$ при $(b,\ y)$ (в сущности, здесь мы неявно подразумеваем использование этой статической модели для описания динамической ситуации). Тем более подобные динамические соображения могут удержать от слабого доминирования, если это модель повторяющейся игры двух лиц. Даже и при однократном розыгрыше втемную, исход (a, x) не кажется слишком глупым: достаточно ли велика разница между 0 и 2, чтобы мотивировать отбрасывание слабо доминируемой стратегии x? Не повлияет ли на выбор Виктора его “порог чувствительности” или (не учтенное пока в таблице выигрышей) нежелание причинить вред своему партнеру? Впрочем, это бы означало, что игра неточно формализована в данной таблице: в ней учтены лишь денежные выигрыши, а должны быть учтены “полезности”. Так или иначе, прежде чем применять ту или иную концепцию решения, желательно сопоставить ее с нашими представлениями о поведении и психологии партнеров.

Та же проблема и в популярном примере "Дилемма заключенных", где оба доминирующих решения существуют ($SDE = WDE \neq \emptyset$), и ярко показывают возможный вред некооперативного поведения.

Пример 1.2 "Дилемма заключенных" (R.Luce, H.Raiffa,1957).

Двух человек арестовали по подозрению в совершении двух разных преступлений, причем у каждого есть улики на партнера. Известно, что если один "стучит" на другого, а другой нет, то информатор получает 1 год наказания, а "молчун" – 10 лет. Если информируют оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным известно, что если никто из них не информирует, то оба получат по 3 года.

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (Табл.5), в клетках которой слева внизу стоит выигрыш первого заключенного, а справа вверху – второго. Таким образом, две матрицы выигрышей совмещены в одной диаграмме, каждая клетка отражает один из исходов. Это типичный способ представления игр с конечным множеством стратегий — "матричных" ("биматричных", по другой терминологии, не поддерживаемой нами).

		Victor: стучать	Victor: молчать
Anna	стучать	-7 (Anna), -7 (Victor) SDE	-1 (Anna), -10 (Victor)
Anna	молчать	-10 (Anna), -1 (Victor)	-3 (Anna), -3 (Victor)

Таблица 5: "Дилемма заключенных".

Здесь у каждого игрока имеется стратегия сильно доминирующая среди возможных стратегий – стучать. Ведь соответствующий вектор возможных выигрышей (-7,-1) строго доминирует над вектором (-10,-3), то есть $(-7, -1) \gg (-10, -3)$ поэтому SDE ={(стучать, стучать) }.

Забегая вперед, заметим, что все рассмотренные ниже виды некооперативных решений (равновесий) в этой игре совпадают (ниже формулируются их определения и соответствующее общее утверждение о совпадении разных решений в случае $SDE = WDE \neq \emptyset$). Действительно, худшее, что может получить заключенный, если стучит это 7 лет, если же не стучит, то 10 лет. Поэтому "осторожным" поведением для них будет сознаться. С другой стороны, каждому из них не выгодно изменять этот выбор при текущем выборе партнера, поскольку при этом он ухудшил бы свое положение. Поэтому это будет и равновесием по Нэшу. Далее, если первому из заключенных предложили сделать свой выбор первым (он находится в положении лидера), то он, зная, что реакцией второго на любой его выбор будет информировать, выберет наилучшее для себя – стучит. То есть равновесие Штакельберга будет там же. Сложное равновесие тоже совпадает с равновесием в доминирующих стратегиях. Любой некооперативный исход выглядит парадоксально- неудачным: ведь если бы оба не выбирали лучшее для себя по отдельности, и не стучали, то оба получили бы меньшее наказание, достигнув Парето-оптимума ($u_1 = -3, u_2 = -3$).

Такая неоптимальность довольно типична для некооперативных решений в разных играх. Если же участники способны скооперироваться и верят в выполнение соглашения партнером, то достигают ядра $(-3, -3)$, и одновременно Парето-оптимума.

Структуру игры аналогичную дилемме заключенных мы видим во многих играх, в частности, при рассмотрении *гонки вооружений* двух сверхдержав (СССР и США): при невысокой вооруженности обоих их безопасность выше, чем при высокой вооруженности обоих. Но при любой фиксированной вооруженности партнера безопаснее поднимать свою. Поэтому, при отсутствии сдерживающих договоров (кооперативного поведения) страны скатываются к не-Парето оптимальному, то есть невыгодному обоим состоянию: чрезмерной вооруженности.

Такая же структура игры у дуополии. Например, в дуополии Бертрана каждому конкуренту выгодно отклониться от монопольно- высокой цены, но после таких шагов обоих, оба продавца прогадают (и выгадают покупатели).

Пример игры с непрерывными стратегиями, где есть доминирующее равновесие – аукцион Викри (аукцион второй цены – см. задачник).

Во многих ситуациях, в отличие от оговоренных выше случаев (повторяющиеся ситуации и др.), концепция доминирующих равновесий WDE, весьма убедительна, а SDE - тем более. Но к сожалению, оба редко существуют, из-за частого отсутствия доминирующих стратегий.

Итак, когда доминирующее равновесие существует, то оно кажется вполне естественным (особенно – строго доминирующее) исходом некооперативной игры, причем не требующим от игрока никаких знаний о партнерах. Однако, игры чаще всего не имеют равновесия в доминирующих стратегиях. В этом случае возникает проблема выбора концепции равновесия (решения), которая бы наилучшим образом подходила к моделируемой ситуации. Как и во всяком моделировании, этот выбор подчинен интуиции исследователя, в нем трудно дать точные общие рекомендации. Мы рассмотрим здесь некоторый арсенал концепций, различающихся, в сущности, *ожиданиями* игроков: IND, SE, NE, MM, StE, а позже коснемся попыток универсализации концепции решения.

Рассмотрим концепции решений, в которых подразумевается, что игроки информированы о целях друг друга, причем, это является “общим знанием”: все знают, что все всё знают о целях (рекурсия “я знаю, что ты знаешь” любой глубины). Также подразумевается, что игроки неограниченно дальновидны и расчетливы, и это тоже является общим знанием. В том числе, в “итерационно недоминируемом” равновесии считается, что игроки, зная цели друг друга, последовательно отбрасывают свои доминируемые стратегии и ожидают того же от других, взаимно просчитывая ходы (я отбросил свои доминируемые стратегии, знаю, как партнер отбросил свои, и он знает о моих отброшенных, следовательно...). Итерации этих расчетов взаимного предсказывания могут привести к решению, называемому "итерационно-недоминирующим решением". Оно возможно и в сильном и в слабом варианте.

Определение 1.1.5 Определим последовательность игр $G^1 \subseteq G^2 \subseteq ..., G^t, ...$, задавая каждый раз множество всех стратегий новой игры как прошлое множество (слабо) недоминируемых стратегий: $X^{t+1} := \mathcal{ND}^t_W$ $(t = 1, 2, ...)$ (предполагается что все игроки отбрасывают доминируемые стратегии одновременно).[4] Множество $INDW$ *итерационно недоминируемых (слабо) исходов* игры G^1 есть стационарное множество этой последовательности: $INDW := \mathcal{ND}^{\hat{t}}_W = \mathcal{ND}^{\hat{t}-1}_W$ $(\exists \hat{t} \geq 1)$. Аналогично определена концепция *итерационно сильно-недоминируемых исходов* $INDS$, отличаясь только типом доминирования.

Множество *сложных равновесий* SE_W (sophisticated equilibrium) есть такое $INDW$, где каждый игрок имеет только эквивалентные стратегии[5] в финальной игре $G_{\hat{t}}$, иначе считают, что $SE_W = \emptyset$. Если $SE_W \neq \emptyset$, тогда говорят, что игра "разрешима по (слабому) доминированию". Аналогично определяется разрешимость по сильному доминированию'.

[Неформально, решение в итерационно- (слабо-)недоминируемых стратегиях (INDW) - это исход игры в случае одновременного итерационного отбрасывания (слабо-) доминируемых стратегий каждым игроком и соответствующего редуцирования игры: исключения отброшенных стратегий из рассмотрения ВСЕМИ игроками. Требует знания или целей партнеров или факта отбрасывания стратегий. Аналогично INDS, только доминирование - сильное. Сложное равновесие SE - это INDW, при эквивалентности, по доминированию, финальных стратегий.]

Заметим, что эквивалентность моих стратегий в финальной игре не означает, что выигрыши не зависят от деятельности партнера, и сложные равновесия (как и доминирующие) могут включать исходы с различными выигрышами всех игроков:

	$--x--$	$-----y--$
a	2, 2 (SDE)	0, 2 (SDE)
b	2, 0 (SDE)	0, 0 (SDE)

Таблица 6: Множество неэквивалентных доминирующих решений, SDE=SE.

В игре на Табл. 6 у обоих участников все стратегии эквивалентны, поэтому вся игра есть $SDE = SE = \{(a, x), (b, x), (a, y), (b, y)\}$. Но выигрыши различны!

Применение концепций сильного и слабого итерационного доминирования – рассмотрите на примере "Экзамен" (Табл. 9).

Заметим, что решение $INDW$ может зависеть от порядка слабого доминирования (см. пример (Табл. 15)), в отличие от сильного, где порядок ходов **безразличен**

[4]Рассматривают также сложные равновесия с неодновременным отбрасыванием худших стратегий, а с заданной последовательностью отбрасываний (Мулен, 1985, стр.40). Они подобны вводимым ниже равновесиям игр в развернутой форме и равновесиям Штакельберга.

[5]Это не значит, что все исходы приносят одинаковые выигрыши, см. Табл. 6.

(докажите). Какую из концепций – сильную или слабую – предпочесть, и какой порядок отбрасывания является реалистичным – тонкий вопрос. Ответ определяется дополнительной информацией об игре (далее мы касаемся этого в динамических играх).

1.2 Игры в популяциях и равновесие Нэша

Заметим, что разрешение игры по итеративному доминированию не обязательно отражает знание целей и соображений партнеров, а может быть применимо и к другим ситуациям. Эти *"популяционные"* ситуации играют в дальнейшем изложении большую роль. (см. Васин "Популяционные игры".)

Подразумевается, что конкретная однократная игра между партнером типа A и партнером типа B – есть одна из *типичных* игр в достаточно большой популяции подобных игр. Тогда свои ожидания о поведении партнера (и, возможно, косвенно о его целях) каждый игрок строит по прошлому опыту подобных игр. Скажем, конкретный пассажир, раздумывая, торговаться ли с таксистом или это бесполезно, учитывает свой опыт в этом деле с другими таксистами. В таких ситуациях устойчивое в каком-то смысле решение игры естественно называть "равновесием" этой популяции.

Интерпретация итеративного доминирования здесь иная, чем ранее: однажды некоторые игроки отбросили (перестали использовать) доминируемые стратегиями – игра уменьшилась, их партнеры это наблюдали, в следующих розыгрышах кто-то отбросил еще какие-то стратегии, это все наблюдали, и т.д. Очевидно, когда итеративно строго-недоминируемое решение единственно, то оно выглядит вполне естественным "равновесием" такой популяционной игры, и не требует знания целей. Не-единственность же равновесия и/или только слабое доминирование могут вызывать вопросы. Какое из нескольких равновесий более правдоподобно? Какая концепция – сильная или слабая – лучше прогнозирует исход? Прежде чем сопоставить на примерах сильное и слабое доминирование, введем еще одну, конкурирующую с ними (особенно в популяционных ситуациях), концепцию равновесий.

Наиболее часто к ситуациям без знаний целей партнеров применяют концепцию равновесия Нэша — это *"рациональное решение при таких ожиданиях ходов партнеров, где все ожидания оправдались"*.

Выражая это формально, обозначим $\beta_i^j \in X_j$ ожидание (belief) игрока i о выбранной стратегии игрока j. Набор стратегий и ожиданий $(\bar{x}, \bar{\beta}) = (\bar{x}_i, (\bar{\beta}_i^1, ..., \bar{\beta}_i^n))_{i \in N} \in X \times (X \times ... \times X)$ можно назвать Нэшевским равновесием если:
1) решение $\bar{x}_i \in X_i$ каждого игрока является наилучшим для него ответом на ожидаемые ходы $\bar{\beta}_i^{-i} \in X_{-i}$ прочих игроков, в смысле: $u_i(\bar{x}_i, \bar{\beta}_i^{-i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \bar{\beta}_i^{-i})$;
2) все ожидания совпадают с истинным выбором: $\bar{x}_i = \bar{\beta}_j^i$ $(\forall i, j)$.

В примере "Семейный спор" (Футбол или кино) на Рис. 1 два таких равновесия ((футбол,футбол),(кино,кино)), причем одно из них выгоднее для Анны, другое – для Виктора. Аналогично и в игре "Перекресток" два неравноценных равновесия Нэша.

В некоторых играх равновесие Нэша может выражать идею *наблюдаемости текущих ходов* партнеров. Скажем, в игре "Перекресток", если Анна видит, что Виктор не тормозит, а Виктор видит, что Анна тормозит, то этот исход и реализуется; никто не отступит от текущей стратегии. Впрочем, подобные динамические рассуждения (в том числе об игре "Перекресток") не совсем корректны, возникают мотивы угроз. Точнее было бы обсуждать подробно последовательность моментов сохранения стратегии, то есть повторяющуюся динамическую игру (см. далее). Более адекватно концепция Нэша применима к повторяющейся игре среди *популяции* игроков, а не пары игроков. Тогда мои ожидания некоторого поведения от моего сегодняшнего партнера могут быть основаны на прошлом опыте взаимодействия с *другими* подобными партнерами, но мотивы угроз не возникают, и не искажают решения.

По сути, Нэшевское равновесие родственно равновесиям в доминирующих стратегиях в том смысле, что $I\!\!DE, INDS, INDW$ "глобально стационарны" среди всех стратегий, а Нэшевское равновесие — по крайней мере "локально стационарно". Совпадение ожиданий с истинным выбором позволяет упростить его определение, не формулируя ожиданий явно, ограничиваясь стратегиями:

Определение 1.2.1 Множество *равновесий по Нэшу* (нэшевских равновесий) есть

$$NE := \{\bar{x} \in X|\ y_i \in X_i \Rightarrow u_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \geq u_i(y_i, \bar{x}_{-i}) \ \ (i \in I)\}, \tag{3}$$

если же все неравенства строгие, то говорят о *строгих равновесиях по Нэшу* (SNE).[6]

Иными словами, Нэшевское равновесие – точка из которой ни одному игроку нет пользы уходить (он либо ничего от этого не приобретает, либо теряет) при текущих ходах партнеров, а строгое Нэшевское равновесие – точка, из которой *вредно* уходить.[7] Иначе эту идею можно выразить через понятие "рационального отклика" или лучшего ответа на действия партнеров ("best response").

Отображение (то есть многозначная функция) $\mathcal{X}^*{}_i(.) : \ X_{-i} \mapsto X_i$ *рационального отклика* i-го участника на ожидаемые действия x_{-i} его партнеров состоит из аргументов, максимизирующих его целевую функцию:

$$\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i}) = \{x_i \in X_i|\ u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i})\ \forall y_i \in X_i\}. \tag{4}$$

В этих терминах, Нэшевское равновесие – это профиль рациональных откликов всех игроков на рациональные отклики партнеров:

$$\bar{x} \in NE \Leftrightarrow \bar{x} \in \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(\bar{x}_{-i}).$$

Понятие NE может оказаться применимо в разных случаях. Наряду с популяционной ситуацией, и в однократной игре может случиться, что ожидания партнеров

[6]Еще есть понятие сильного равновесия Нэша, подразумевая коалиционную устойчивость.

[7]Иногда еще вводят понятие *сильных* или коалиционных равновесий Нэша - когда ни одна коалиция не может улучшить своего положения. Такие равновесия редки.

почему-либо "сфокусированы" на каком-либо профиле стратегий, считающемся вероятным. Например, в игре координации "семейный спор", если оба почему-то ожидают от партнера выбор "кино", или хотя бы я ожидаю, что партнер ожидает такой выбор от меня (например, известна уступчивость Виктора, или было сделано какое-то намекающее сообщение), то это и случится. Этот довольно распространенный эффект "самоподдерживающихся ожиданий" называют еще **"эффектом фокальной точки"** (focal point, подробнее обсуждается ниже). В некоторых ситуациях эта фокальная точка возникает в результате предварительных переговоров. Тогда Нэшевское равновесие рассматривают как полу-кооперативную концепцию: если оно принадлежит ядру (определяемому ниже), то это "такое соглашение, от которого никто не склонен отступать", по крайней мере, если ожидает не отступления партнеров.

Напротив, в "Дилемме заключенных" хороший для обоих участников исход (молчать,молчать) таким естественно-устойчивым соглашением быть не может, а требует каких-то мер принуждения к выполнению такого соглашения. В этом смысле принадлежность некоторого соглашения к NE – важное преимущество.[8]

Оказывается, Нэшевское решение, может быть естественным исходом и в противоположной – "совсем некооперабельной" ситуации, то есть в *антагонистических* играх.

Определение 1.2.2 *Антагонистической* называют игру с одинаковой (например, нулевой) суммой выигрышей при любом исходе, т.е. такую, что
$\sum_{i\in I} u_i(x) = s \ \ \exists s \in I\!R, \forall x \in X$.[9]

В таких играх тоже применяют NE, точнее, его сужение, называемое "седлом" или седловой точкой.

Определение 1.2.3 Множество *седловых точек* есть

$$Sad := MM \cap NE$$

Это те Нэшевские равновесия, где худшие предположения о партнерах сбываются.

Например, в играх "Семейный спор" и "Перекресток" седла нет: максимин и Нэшевское решение не пересекаются. Впрочем, существование и самого NE не всегда гарантировано, см. игру "Монетки" (Табл. 7).

В повторяющихся играх типа игры "Монетки" под NE может подразумеваться, что каждый игрок наблюдает определенный текущий выбор партнеров на предыдущем шаге и ведет себя *близоруко* – не учитывает, что партнеры могут изменить свой выбор когда он изменит свой (неполная рациональность). Пустоту $NE = \emptyset$ тогда надо рассматривать как несуществование стационарных точек такой игры: игра

[8] В качестве упражнения на эту тему, рассмотрите всевозможные варианты подобных игр 2x2 с точки зрения совместимости кооперативного и не-кооперативного поведения.

[9] Синонимы – игра "с противоположными интересами", "с нулевой суммой". Как ни покажется странным, но в этой терминологии войну, в отличие от шахмат, нельзя назвать антагонистической игрой, поскольку обе стороны могут очень пострадать в одних вариантах действий и не очень – при других.

		Victor: guessing	
		guess Left	guess Right
Anna	hold Left	-1, 1	1, -1
	hold Right	1, -1	-1, 1

Таблица 7: Игра “Монетки”: Нужно угадать, в какой руке у партнера монетка, тогда ее забираешь, иначе – отдаешь свою (Анна держит, Виктор угадывает). $NE = \emptyset$.

"болтается". Заметим, что применение концепций доминирования (INDW, INDS) в этой игре тоже никак не увеличивает определенность наших предсказаний о ее исходах: вся исходная игра недоминируема.

1.2.1 Смешанные стратегии и NE_m

Мы отмечали, что в повторяющихся играх типа игры “Орлянки или Чет-нечет (Монетки)” несуществование решений $NE = \emptyset$ можно рассматривать как “раскачивание” игры. При отсутствии стационарного решения типа NE (а иногда и в других случаях, в популяциях игр) естественно пользоваться вероятностной концепцией решения (исхода) игры: как игроки будут ходить *в среднем*? Для этого используется понятие ожидаемой полезности.

> **Лотереи, ожидаемая полезность.** Пусть имеется множество $Q = \{1, 2, ..., q\}$ возможных в мире событий, причем оно задано полным (все возможные события учтены), события взаимоисключающие, и субъективные вероятности событий (мнение рассматриваемого игрока i) есть $\sigma_i := (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iq}) \in \mathbb{R}^q_+, \sum_{k \leq q} \sigma_{ik} = 1$. Пусть полезность набора $x \in X$ для рассматриваемого игрока выражена “элементарной” целевой функцией $u_i(x)$. Вектор $(x_1, ..., x_q) \in (X \times ... \times X)$ вместе с ассоциированными вероятностями событий $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iq})$ можно назвать *лотереей*: заданы уровни выигрыша в каждом событии и вероятности. Мы называем участника максимизирующим ожидаемую полезность (участником типа Неймана-Моргенштерна), если его выбор среди всех возможных лотерей описывается функцией вида $U_i(\bar{x}) = \sum_{j \in Q} \sigma_j u_i(x_{ij})$, то есть функцией линейной по вероятности, или, иначе, матожиданием полезности. Именно такими мы и будем считать участников игр далее.

Итак, пользуясь идеей "средней полезности”, в повторяющейся игре “Орлянка или Чет-нечет (Монетки)” мы можем искать вероятностное решение: насколько часто каждый игрок в среднем будет делать тот или иной ход. Для этой игры естественная гипотеза - с равной вероятностью оба ходят левой и правой рукой: ((0.5,0.5),(0.5,0.5)).

Но как проверить эту догадку и обосновать ответ, если он верен? Идею равновесия, о котором мы догадываемся, можно сформулировать так.

Нэшевское равновесие в смешанных стратегиях исходной игры - есть Нэшевское равновесие в ее смешанном расширении, то есть профиль

		Victor: guessing	
		guess Left =0.5	guess Right =0.5
Anna	hold Left =0.5	-1, 1	1, -1
	hold Right =0.5	1, -1	-1, 1

Таблица 8: Смешанное расширение игры "Монетки": вероятности ходов есть $NE_m = ((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$.

(набор) вероятностей применения чистых стратегий, такой, что ни один игрок не может меняя свою смешанную (вероятностную) стратегию улучшить матожидание своего выигрыша, при неизменных смешанных стратегиях партнеров.

То же самое в более формальных терминах:

Определение 1.2.4 Для игры G, где у каждого игрока $i \in I$ есть конечное число $(n_i \geq 1)$ стратегий $X_i = \{x_{i1}, ..., x_{in_i}\}$, определим *смешанную стратегию* каждого игрока i как набор вероятностей[10]
$\sigma_i = (\sigma_i^k)_{k=1}^{n_i} = (\sigma_i^k(x_i^k))_{k=1}^{n_i} \in \Omega_i := \{\sigma_i \in I\!R_+^{n_i} | \quad \sum_{k=1}^{n_i} \sigma_i^k = 1\}$ с которыми данный игрок применяет соответствующие исходные "чистые" стратегии $x_i^k \in X_i$. Определим *смешанное расширение игры* $G_m := \langle I, (\Omega_i)_I, (U_i)_I \rangle$, как игру, где допустимые множества есть наборы вероятностей $\Omega_1, ..., \Omega_m$, а целевая функция любого игрока есть матожидание выигрыша:

$$U_i(\sigma) := \sum_{(x_1, x_2, ..., x_m) \in X} \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2) \cdot ... \cdot \sigma_m(x_m) \cdot u_i(x_1, x_2, ..., x_m) \tag{5}$$

Нэшевское равновесие в смешанных стратегиях $\bar{\sigma} \in NE_m$ исходной игры G есть Нэшевское равновесие в ее смешанном расширении G_m, то есть набор $(\bar{\sigma}_i)_I$, таких, что ни один игрок не может меняя смешанную стратегию улучшить матожидание своего выигрыша, при неизменных (смешанных) стратегиях партнеров.

(Аналогично можно определить понятие NE_m для игры с бесконечным множеством стратегий, только смешанные стратегии σ_i оказываются не векторами, а вероятностными мерами, матожидания – из сумм превратятся в интегралы. Переход к смешанному расширению (то есть к вероятностному варианту) игры овыпукляет ее множество стратегий и множество достижимых уровней полезности. Это благоприятно сказывается и на существовании Нэшевских равновесий (см. теорему Нэша ниже), и на возможности их охарактеризовать.)

Итак, пользуясь введенным определением решения, легко для примера "Монетки" составить неравенства, которым должны бы удовлетворять вероятности (α_L, α_R), применяемые Анной к левому и правому ходу, и аналогичные неравенства для смешанных стратегий Виктора (ν_L, ν_R). А именно, тот факт, что Анна не хочет ни

[10]Обычно имеют в виду популяционную или повторяющуюся игру. Обозначение m – от англ. "mixed".

увеличивать ни уменьшать частоту применения Левой стртегии за счет правой, означает, что обе приносят одинаковую ожидаемую полезность при заданных вероятностях (смешанных стратегиях (ν_L, ν_R)) Виктора:

$$U_A((\alpha_L = 1, \alpha_R = 0), (\nu_L, \nu_R)) = -1 * \nu_L + 1 * \nu_R =$$

$$= U_A((\alpha_L = 0, \alpha_R = 1), (\nu_L, \nu_R)) = -1 * \nu_R + 1 * \nu_L.$$

Это уравнение укажет, что равенство полезностей возможно лишь при равных вероятностях ходов партнера $\nu_L = \nu_R = 0.5$. Аналогичное уравнение относительно равных полезностей Виктора даст искомые равновесные стратегии Анны $\alpha_L = \alpha_R = 0.5$.

(Упражнение: Найдите аналогично NE_m в аналогичной игре герцога де Монмора (см. Мулен 1985): Отец, герцог, желая развить сообразительность сына, каждое утро предлагал ему сыграть в "Монетки", но не брал с него ничего при не-угадывании (в какой руке у отца монетка), давал золотой за угадывание в левой руке, и два золотых - за угадывание в правой.)

Возвращаясь к теории, легко заметить, что к расширенной в вероятностное пространство игре можно применять все те же приемы, что и к исходной, а обычные равновесия Нэша остаются равновесиями и в вероятностном расширении игры (ведь чистые стратегии – это просто орты в пространстве вероятностных стратегий).

Теперь, применяя уже для смешанного расширения игры ранее использованное понятие сильного доминирования, можно сузить множество недоминируемых стратегий еще одним методом, альтернативным к слабому доминированию и расширяющим множество сильно доминируемых:

Определение 1.2.5 Стратегию x_i назовем смешанно-доминируемой, если существует смешанная стратегия $\sigma_i \in \Omega_i$ сильно доминирующая над x_i.

Пример: три стратегии дают игроку выигрыши (4,1), (1,4), и (2,2) соответственно. Ясно, что ни одна из трех не доминирует другую ни сильно ни слабо, но комбинация первых двух с весами 0.5 смешанно-доминирует третью. Полезно -

Утверждение. *Некоторая чистая стратегия может быть смешанно- недоминируемой тогда и только тогда, когда является рациональным откликом на некоторую смешанную стратегию партнеров (в частности, возможно, на чистую стратегию).*

Этот факт следует из овыпукления игры при ее смешанном расширении (док. см. Myerson 1999, Данилов 2002). Из него можно вывести вложение $NE \subseteq INDS$ (покажите).

Наиболее интересно он отражается на антагонистических играх.

Для антагонистической игры двух лиц *ценой игры* u_{sad} называют полезность первого игрока в седловой точке Sad, то есть

$$u_{sad} := \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2) \ = \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) \ .$$

Если седловой точки, то есть пары стратегий удовлетворяющей этому равенству нет, то игру считают неразрешимой по принципу седла, то есть "не имеющей цены".

Легко заметить, что
антагонистическая игра двух лиц (где $u_1(x_1, x_2) = -u_2(x_1, x_2)$*) имеет цену тогда и только тогда, когда функция* $u_1(.,.)$ *имеет седловую точку на* $X_1 \times X_2$.

Смешанное же расширение игры всегда имеет цену (теорема фон Неймана, см. ниже).

1.3 Множественность равновесий Нэша, "фокальные точки" и борьба за лидерство: равновесие Штакельберга (последовательные ходы)

Рассмотрим проблему, возникающую, когда равновесие Нэша не одно. Какое из них считать более вероятным исходом? Это популярная тема "сужения" или "очищения", рафинирования (refinement) множества равновесий от малоправдоподобных. Мы уже касались одного способа рафинирования. Это пересечение NE с другими решениями: с DE или с максимином, или с итерационно-недоминируемым множеством. Вообще говоря, исход, удовлетворяющий не одной концепции решения, а двум и более - вызывает больше доверия, кажется правдоподобнее.

Впрочем, в некоторых играх нет никаких оснований предпочитать, в качестве предсказания, одно равновесие другому. Наиболее хорошо это видно в игре координации с односторонними преимуществами типа "Перекресток"(Chicken game). В таких случаях часто можно считать, что выбор из многих возможных равновесий произойдет по принципу "фокальной точки", то есть не зависит от включенных в рассмотрение данных.

Поясним это важное в играх с множеством равновесий понятие. Положив шарик в строго вогнутую чашу, мы единственным образом предскажем равновесие - это "обусловленное" равновесие, а не "фокальное". Напротив, положив шарик на горизонтальную поверхность, мы можем предсказать, что куда его положишь, там он и останется в равновесии. Это и называют

эффект "фокальной точки": зависимость положения равновесия от начальной точки, или даже превращение любой начальной позиции в равновесие.

Как уже говорилось, в примере игры координации "семейный спор", если оба почему-то ожидают от партнера выбор "кино", (например, известна уступчивость Виктора, или было сделано какое-то намекающее сообщение), то это и случится. Этот довольно распространенный эффект "самоподдерживающихся ожиданий" как раз и является **"эффектом фокальной точки"**.

Так, культурные нормы и традиции часто порождают фокальные равновесные точки в определенных играх с многими потенциальными равновесиями (или порождаются как фокальные точки?). Скажем, левостороннее движение транспорта в Англии и правостороннее на континенте - типичные фокальные точки.

Более интересен пример фокальной точки нелегитимного политика. Тут тоже действет правило самоподдерживающихся ожиданий: "если люди верят, что у тебя есть власть, то у тебя она есть (люди слушаются)". От дополнительных факторов игра может перескочить в другое равновесие, тоже устойчивое.

Аналогично, в игре координации "Перекресток", если Анна верит, что Боб никогда не тормозит, то сама будет тормозить. В результате сложится равновесие более выгодное для Боба. Аналогично можно рассуждать при противоположных ожиданиях партнеров - Анна в выигрыше. И оба равновесия устойчивы (в смысле строгой невыгодности индивидуальных отклонений).

Из этих рассуждений следует, что в игре координации с многими разно-выгодными равновесиями выгодно бы сходить первым, и захватить лучшую позицию (в "Перекрестке" – позицию "не торможу"). В некоторых ситуациях такая возможность нарушить одновременность и симметрию есть, и приводит к следующей концепции решения (строго говоря, относящейся уже не к этому разделу, а к последовательным играм).

В *равновесии Штакельберга* (Stackelberg), в отличие от рассмотренных концепций решения "симметричных" относительно игроков, ожидания разных игроков формируются по разным принципам. Первый игрок (лидер) ориентируется на индивидуально - оптимальные ответы партнеров зная их предпочтения, а остальные (ведомые) играют, как в NE, близоруко реагируя на его ход и на ходы друг друга. Скажем, на рынке алмазов фирма Де Бирс, контролирующая более 70% продаж, при выборе цен просчитывает отклики на это мелких продавцов, а они играют примитивно подстраиваясь под лидера. Ведь каждый из "мелких" не рассчитывает существенно повлиять на рынок в целом! Эта несимметричная концепция решений годится также для случая, когда лидер просто ходит первым, независимо от силы его влияния (последовательная игра).

Равновесие Штакельберга с лидером No 1 есть такой профиль (набор) стратегий всех, что первый игрок (лидер) с учетом цедей партнеров адекватно прогнозирует равновесия Нэша, складывающиеся после его хода, и оптимизирует свою стратегию соответственно, а остальные поступают согласно его прогнозу. Более формально:

Определение 1.3.1 Считая 1-го игрока лидером, обозначим решение Нэша среди последователей при фиксированной стратегии $\bar{x}_1$ лидера – через $NE_{-1}(\bar{x}_1)$.

Равновесие Штакельберга с лидером No 1 ($StEP_1$) есть такой набор $\bar{x}$ что

$$\bar{\mathbf{x}}_{-\mathbf{1}} \in NE_{-1}(\bar{x}_1), \tag{6}$$

$$\nexists \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} \in X_1 : \ \mathbf{u_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_{-1}) > \mathbf{u_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1}) \ \ \forall (\tilde{x}_{-1} \in NE_{-1}(\tilde{x}), \bar{x}_{-1} \in NE_{-1}(\bar{x})). \tag{7}$$

В частности, осторожное (пессимистическое) равновесие Штакельберга[11] с лидером N 1 есть такой набор $\bar{x} \in StEP_1$, что

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} \in \arg\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_{-1} \in NE_{-1}(x_1)} \mathbf{u_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_{-1}}),$$
$$\bar{\mathbf{x}}_{-\mathbf{1}} \in \arg \min_{x_{-1} \in NE_{-1}(\bar{x}_1)} \mathbf{u_1}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}, \mathbf{x_{-1}}).$$

[11]Наши определения $StEO_i, StEP_i$ не традиционны. Обычное же StE есть, забегая вперед, просто SPE в двух-стадийной игре.

Оптимистическое равновесие Штакельберга с лидером N 1 $\bar{x} \in StEO_1$ определяется так же, но с заменой min на max.

Повторим, равновесие Штакельберга может возникать, например, когда один из игроков (лидер) делает свой выбор раньше других ("ведомых") и знает их цели. Или когда он один, а однотипных "ведомых" достаточно много, чтобы каждый не пытался просчитывать общие последствия своего хода. Концепция $StEO_1$ предполагает доброжелательность партнеров к лидеру при выборе из эквивалентных для себя вариантов (из $\mathcal{X}^*$), а $StEP_1$ — недоброжелательность; если же выбор "ведомых" однозначен, то разницы между $StEO$ и $StEP$ нет. Если не различать оптимистические и пессимистические решения, то можно определить $StE = \{StEO, StEP\}$

Повторим рассуждения о "борьбе за лидерство". Смысл борьбы за лидерство, скажем, в игре "Семейный спор" ("Battle of Sexes" - Рис. 1) таков. Рассмотрите возможность одному из игроков, например, Виктору, сообщить другому (Анне) свое решение: футбол. Эта возможность ставит его в положение Штакельберговского лидера, и позволяет форсировать более выгодное для себя из двух Нэшевских равновесий. Аналогично и для второго игрока. (А есть игры, где выгодно, наоборот, уступить первый ход - "борьбе за не-лидерство".) То есть, понятие "борьбы" предполагает, что рассматриваемая игра вложена в более широкую, где можно выбрать, совершать ли первый ход, попадая в игру с решением Штакельберга.

1.4 Кооперативные решения - Парето-оптимум и ядро

В заключение обзора наиболее типичных решений статических игр, напомним также основные понятия *кооперативных* решений, то есть возможных исходов *переговоров* участников.

Определение 1.4.1 *Ядром* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_W$ (обычным, слабым ядром) называется множество состояний неблокируемых никакой коалицией $T \subset I$, при обычном (сильном) определении блокирования: T *блокирует* вариант $x \in X$ если существует альтернатива $\tilde{x}_i \in X_i$ $(i \in T)$ такая, что все участники из T выигрывают по сравнению с x, т.е.[12] $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x_T, x_{-T})$ — при любых действиях x_{-T} не входящих в коалицию T игроков. *Сильным ядром* $\mathcal{C}_S$ назовем множество состояний, неблокируемых никакой коалицией при слабом блокировании (что означает $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) > u_T(x)$ вместо $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x)$ в определении блокирования).

Слабое ядро - множество вариантов, вне которого соглашений *заведомо* быть не может, а сильное - менее очевидная концепция.

Определение 1.4.2 Назовем (сильным) *множеством Парето* (*Парето-оптимумом*, или "сильной Парето-границей") множество неулучшаемых по Парето точек

[12] Для пар векторов знак $>$ здесь и далее означает $\geq\neq$, а знак $\gg$ — покомпонентно больше. В сущности, здесь вектор выигрышей коалиции T от альтернативы $\tilde{x}_i$ сильно доминирует ($\gg$) над вектором выигрышей от альтернативы x_i.

(исходов), то есть множество исходов неблокируемых-слабо большой коалицией I:

$\mathcal{P} := \{\hat{x} |\ \nexists x \in X\ : u(x) > u(\hat{x})\}$,

Слабая Парето-граница есть множество исходов неблокируемых-сильно большой коалицией I: $\mathcal{P}_W := \{\hat{x} |\ \nexists x \in X\ : u(x) \gg u(\hat{x})\}$.

Итак, Парето-оптимум — это такое состояние, в котором никто из участников не может увеличить своего выигрыша не уменьшив выигрыша кого-то другого, а слабый Парето-оптимум — это состояние, неулучшаемое для всех сразу (т.е., по сильному доминированию большой коалиции).

1.5 Нахождение и сопоставление разных решений

Сопоставим все введенные понятия решений на примере единой (би-)матричной игры.

Пример 1.3 Студент и экзаменатор (Поиск решений матричной игры)

Рассмотрим гипотетическую популяцию ленивых студентов и более-менее старательных преподавателей. За точку отсчета возьмем случай, когда студент учит, а преподаватель внимательно смотрит на экзамене за наличием шпаргалок: студент имеет 5, и удовлетворение преподователя оценим в 5 (см. Табл. 5). Если при внимательном экзамене студент не учит, то имеет оценку 2, но $+1$ от приятно проведенного в семестре времени, в целом 3, а удовлетворение преподователя 2. Если при невнимательном экзамене, но с дополнительными вопросами, студент учит, то имеет оценку 5, но -1 от утомления на экзамене, в целом 4, а удовлетворение преподователя тоже 5, но -1 от утомления, в целом 4. Если же в этом случае студент не учит, то имеет 3 (все же он что-то рассказал) $+1$ от отдыха в семестре, всего 4. Осталось предположить малое моральное удовлетворение $=3$ преподавателя от плохого экзамена, еще немного гипотез, и получим игру Табл. 9.

	Стратегии и выигрыши	Студент Учить (У)	Шпорить (Ш)	Гарантир. выигрыш	Расчетный выигрыш
Препо-	Смотреть строго (С)	SE 5 5 SNE	3 2	2	5 *
дава-	мягко, но с Вопросами (В)	4 4	4 3 NE	3 *	4 или 3
тель	Мягко, без вопросов (М)	5 3	6 3 NE	3 *	3

Таблица 9: Игра “Экзамен”.

В подобных (“матричных”) играх с конечными множествами стратегий двух игроков легко проверить наличие доминирующих стратегий: достаточно сравнить вектор выигрышей (5,4,5) при стратегии “Учить” с вектором (3,4,6)- “Шпорить”, чтобы заметить, что они несравнимы, следовательно доминирующих стратегий у студента нет, тогда и доминирующего равновесия нет: $\mathbb{D}E = \emptyset$.

Осторожное равновесие практически ищется так: игрок выбирающий строки в каждой строке находит свой гарантированный выигрыш (то есть минимум в строке), а затем в качестве решения принимает строку или строки с максимальным гарантированным выигрышем. Аналогично поступает со столбцами игрок выбирающий столбцы. В данном случае две нижние клетки - среди осторожных решений $MM = \{$(В,У),(М,У)$\}$. Возможно, при однократной встрече некоторой группы с некоторым (впервые приглашенным в университет) преподавателем такое осторожное решение реалистично. Чаще же можно ожидать, что популяция студентов знает по прошлому опыту типичную стратегию преподавателя(-лей), тогда уместнее искать NE.

Множество Нэшевских равновесий ищем перебором всех клеток; равновесия – это клетки из которых первому участнику не выгодно "уйти вверх или вниз", а второму - "уйти в сторону" - то есть сменить стратегию при фиксированной чужой; здесь таких три: $NE = \{$(С,У),(В,Ш),(М,Ш)$\}$. Последнее наиболее благоприятно для студентов, но его реалистичность сомнительна, если преподаватели склонны отбрасывать слабо доминируемые стратегии.

Итерационно недоминируемое (слабо) множество $INDW$ ищем последовательным исключением из игры доминируемых строк и столбцов. На первом шаге рассуждений стратегия В=(4,3)>М=(3,3) слабо доминирует нд М, а у студента нет доминирования (иначе бы мы одновременно отбросили и его доминируемые стратегии). Таким образом, если об типа игроков действительно отбрасывают слабо доминируемые стратегии и знают партнера, то стратегия М невозможна, и по сути рассматривается игра 2x2: $\{$(С,У),(С,Ш),(В,У),(В,Ш)$\}$. Тогда для студента стратегия У=(5,4)>Ш=(3,4), и последняя на втором шаге рассуждений отбрасывается, что понятно преподавателю, остается игра 2x1: $\{$(С,У),(В,У)$\}$. Аналогично, на третьем шаге, по рациональности преподавателя, останется игра 1x1: INDW=SE= $\{$(С,У)$\}$, то есть итерационно-недоминируемое множество свелось к однозначному по выигрышам исходу и является поэтому SE. Напротив, по сильному доминированию здесь нельзя отбросить ни одной стратегии, поэтому INDS - это вся исходная игра.

Решение Штакельберга, если лидер - первый игрок, ищем, приписывая каждой стратегии (строке) расчетные оценки его выигрыша, с учетом ответного ход партнера (Нэшевского отклика). Среди них наилучшей для него является С=5, поэтому решение StE=(С,У)=(5,5). Если бы вместо (5,5) в клетке (С,У) были выигрыши (3.5,5), то преподаватель, просчитывая варианты, оказался бы в неясном положении. Студенту при (В) безразлично, сыграть (У) или (Ш). При оптимистической позиции преподавателя, он выбрал бы StEO=(В,У)=(4,4), а при пессимистической StEP= (С,У)= (3.5,5).

С другой стороны, если бы в правой нижней клетке стояло (М,Ш)=(4,6), то студенты, в случае их организованности и неорганизованности преподавателей, могли бы выступить лидером и форсировать вариант StE_2=(М,Ш)=(4,6).

Равновесие Штакельберга типа StE_1 реалистично, если преподаватель надеется заработать у студентов некоторую личную репутацию (например, "строгого"), и тем самым лидировать в игре. Если же предмет принимает большая группа преподавателей, то его личные усилия мало изменят репутацию "популяции преподавателей", и, соответственно, поведение студентов - тогда лидерство и соответствующее решение StE неправдоподобны. Теперь попробуем представить, что преподаватели за столом переговоров нашли с коллективом студентов общее решение, то есть элемент ядра.

Для нахождения ядра, из множества слабо-Паретовских исходов $\mathcal{P}_W = \{$(С,У),(М,У),(М,Ш)$\}$= $\{(5,5),(3,5),(3,6)\}$ (то есть из множества неблокируемого большой коалицией) нужно отбросить исходы, в которых меньшие коалиции получают менее своего гарантированного выигрыша. В качестве индивидульно- гарантированного выигрыша при нахождении ядра довольно реалистичным будет взять ожидаемые (но не фактические) значения полезностей рассматривающиеся в максимине; ведь именно их каждый игрок может себе гарантировать *независимо от действий партнеров*. Здесь преподаватель может гарантировать себе 3, а студент 4, поэтому никакие варианты не отброшены: (3,4)≤(5,5), (3,4)≤(3,5), (3,4)≤(3,6), и $C = \mathcal{P}_W$.

Аналогично из сильной Парето-границы $\mathcal{P} = C$ ={(С,У), (М,Ш)}={(5,5), (3,6)} получим сильное ядро, совпадающее здесь с ней.

На первый взгляд, если переговоры начинались из ситуации решения Штакельберга, то реалистичным будет предполагать, что преподаватели в них в качестве альтернативы договоренностям (точки угрозы) станут выдвигать не свой гарантированный выигрыш 3, а выигрыш 5 в точке (С,У). Тогда ядро могло бы сузится до (С,У). Но этот вариант правдоподобен только при "слабой" организации коалиции студентов, ведь студенты могут ответить контругрозой (Ш). А вводя "силу и слабость" коалиций мы уже отступили бы от стандартной концепции ядра.

Для поиска решения Нэша в смешанных стратегиях, обозначим три стратегии преподавателя $0 \leq (s, v, m) : \ s + v + m = 1$, и две стратегии студента $u, (1 - u)$. Нам нужно найти пару $[(s, v, m), u]$, при которой популяция студентов и преподавателей не изменяет вероятности своих "чистых" ходов. Поскольку решения в чистых статегиях всегда присутствуют среди решений в смешанных, то $NE_m \subset \{[(s, v, m) = (1, 0, 0), u = 1], [(s, v, m) = (0, 1, 0), u = 0], [(s, v, m) = (0, 0, 1), u = 0]\}$. Но будут ли среди NE_m еще какие-либо (дробные) решения? В данной здаче - да, только в смеси $0 < v < 1$. При любом нетривиальном $0 < u < 1$ чистая стратегия преподавателя (С) оказывается строго выгоднее прочих, а откликом на нее будет (У). Напротив, все смеси $(s, v, m) = (0, v, 1 - v) : \ 0 < v < 1$ дают студенту ожидаемый выигрыш от (Ш) больше, чем от (У), откликом же на (Ш) может быть любое $(s, v, m) = (0, v, 1 - v) : \ 0 < v < 1$.

Вообще говоря, в подобных задачах поиск NE_m ведется перебором гипотез о целых (0,1) значениях некоторых переменных и решением уравнений относительно системы прочих (предполагаемых дробными) переменных (здесь - только v). Уравнения составляются соответственно гипотезе рациональности выбора: все стратегии с дробным значением должны давать одинаковый выигрыш.

Способ нахождения NEm методом перебора базисов: Прямое и двойственное решения найденные (однозначно) по базису приравненному к вектору (1,1,. . . ,1) должны давать равновыгодность каждой базисной стратегии и не большую выгодность любой не-базисной. Это необходимое и достаточное условие NEm.

1.5.1 Сравнение концепций решений

В каких ситуациях логично применять какие из концепций решений? Из примеров мы уже видели, что трудно дать однозначный ответ, выбор решается интуицией, знанием особенностей конкретных участников и ситуации. Вот, скажем, две простые игры (см. Данилов 2001).

Ann \ Bob	x	y
a	7 ,99	1 ,-1000
b	8 ,99	1 ,100 (NE)

Ann \ Bob	x	y
a	3 ,3 (NE)	0 ,1
b	1 ,0	2 ,2 (NE)

В первой у Анны слабо-доминирующая стратегия b, и исход (b, y) является разумным решением и по слабому доминированию, и единственным равновесием Нэша. Поэтому, зная цели друг друга, или играя однократную игру в популяции, игроки должны бы остановиться на этом решении. Но если Боб допускает хоть малую вероятность того, что Анна из безразличных для нее (при ожидаемой стратегии Боба y) может выбрать a, тогда осторожность требует от него сходить x, а теряет он от этого немного. Поэтому, осторожная стратегия и максиминное решение (b, x) вполне реалистичны.

Во второй игре верхнее из Нэшевских равновесий с выигрышами (3,3) выгоднее нижнего, и в случае переговоров оно может быть точкой соглашения, причем устойчивого. Но при однократной игре втемную каждый может осторожничать, и среди двух Нэшевских решений выбирать то, где выше гарантированный выигрыш, то есть худшее: MM=$\{(b, y)\}$. Итак, выбор концепции решения бывает нетривиален, и должен учитывать информационные особенности ситуации. В конце раздела мы остановимся на идеях универсальной концепции.

Теперь – о соотношении кооперативных концепций ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_W$, $\mathcal{P}_W$) с различными некооперативные решениями. Не всегда, но очень часто результаты некооперативного поведения оказываются не оптимальными по Парето, как показывают следующие примеры.

Пример 1.4 Покажем разнообразие возможных ситуаций *совпадения или несовпадения некооперативных решений с кооперативными* на примерах.

В частности, можно разобрать все симметричные игры 2×2 с неодинаковыми выигрышами каждого участника. Для этого достаточно посмотреть все различные (с точностью до перестановок) расположения чисел 0,1,2,3 по матрице, и дополнить их симметрично полезностями второго игрока:

Simbios, or stable co-operation. Some co-oper-n

0, 0	2, 1
1, 2	DE 3, 3 C

0, 0	1, 3 C
3, 1 C	DE 2, 2 C

1, 1	0, 2
2, 0	DE 3, 3 C

NE 1, 1	2, 0
0, 2	NE 3, 3 C

Struggle for leader-ship, or unstable co-operation

0, 0	NE 2, 3 C
NE 3, 2 C	1, 1

0, 0	NE 1, 3 C
NE 3, 1 C	2, 2 C

NE 2, 2	0, 1
1, 0	3, 3 C

2, 2 C	0, 3 P
3, 0 P	DE 1, 1

Таблица 10: Разнообразие симметричных игр 2x2: (не-)совпадение некооперативных решений с кооперативными.

New:

Симметричные игры 2x2 (повтор подробнее):

Domination yields “co-ordination” and stable co-operation, or “prisoners’ dilemma”

0	1
0	2
2	DE 3
1	3 C

“Simbiosis”

0	3
0	1 C
1	DE 2
3 C	2 C

“Simbiosis”

1	2
1	0
0	DE 3
2	3 C

“Simbiosis”

2	3
2 C	0 P
0	DE 1
3 P	1

“Prisoners’ d.”

Nash solution yields struggle for leader-ship, with unstable co-operation (co-ordination

0	NE 3
0	2 C
NE 2	1
3 C	1

“Chicken co-ordination”

0	NE 3
0	1 C
NE 1	2
3 C	2 C

“Chicken co-ordination”

NE 2	1
2	0
0	NE 3
1	3 C

“Good co-ordination”

NE 1	0
1	2
2	NE 3
0	3 C

“Good co-ordina

Игры, где 0 на главной диагонали:

“Услуга за услугу” “Борьба за лидерство”

```
      a      b            a      b            a      b            a      b
   ------------        ------------        ------------        ------------
  |    0 |    1 |     |    0 |    3 |     |    0 | N 3 |     |    0 | N 1 |
y |0     |2     |   y |0     |1 C   |   y |0     |2 C  |   y |0     |3 C  |
  |-----------|       |-----------|       |-----------|       |-----------|
  |    2 | D 3 |      |    1 | D 2 |      | N 2 |    1 |      | N 3 |    2 |
z |1     |3 C  |    z |3 C   |2 C  |    z |3 C  |1     |    z |1 C  |2 C  |
   -----------         -----------         -----------         -----------
```

Игры, где 0 вне главной диагонали:

“Услуга за услугу” “Дилемма заключенных”

```
      a      b            a      b           a      b            a      b
  ------------        ------------        ------------        ------------
  |    1 |    0 |     |    1 |    2 |     |    2 |    3 |     | N 2 |    1 |
y |1     |2 C   |   y |1     |0     |   y |2 C  |0 P  |    y |2     |0     |
  |-----------|       |-----------|       |-----------|       |-----------|
  |    2 | N 3 |      |    0 | D 3 |      |    0 | D 1 |      |    0 |    3 |
z |0 C   |3 C  |    z |2     |3 C  |    z |3 P  |1     |    z |1     |3 C  |
   -----------         -----------         -----------         -----------
```

“Обходимая ловушка” “Дилемма заключенных”

```
      a      b            a      b           a      b            a      b
  ------------        ------------        ------------        ------------
  |  N 2|    0 |      | N   3|    2 |     | D 2 |    0 |      | N 2 |    0 |
```

```
y |2    |1    |   y |3 C  |0    |   y |2 C  |3  P |   y |2    |1    |
  |-----------|     |-----------|     |-----------|     |-----------|
  |   1 | N 3 |     |   0 | N 1 |     |   3 |   1 |     |   1 | N 3 |
z |0    |3 C  |   z |2    |1    |   z |0 P  |1    |   z |0    |3 C  |
   -----------       -----------       -----------       -----------
```

В первой игре участникам незачем вступать в переговоры: наилучшее решение из ядра (C) и так доминирующее (D). Во второй - аналогично, с той разницей, что есть еще два потенциальных соглашения (C), одно выгодное для одного, а другое для другого, но они неустойчивы относительно некооперативного поведения. В третьей игре два Нэшевских равновесия (N), оба из ядра, но одно выгоднее для одного, а другое для другого, что создает борьбу за лидерство: кто первый займет выгодную позицию, это осложняет переговоры. Четвертая аналогична, только переговоры могли бы иметь компромисс с выигрышами (2,2), если бы было принуждение к выполнения соглашений, иначе договор неустойчив. Прочие игры прокомментируйте самостоятельно.

1.6 О совпадениях различных решений

Приведем утверждения о соотношениях разных некооперативных концепций.

Лемма 1.6.1 (см. Мулен, 1985) *Попарно эквивалентны три случая:*
1) $\mathbb{D}E \neq \emptyset$; 2) Все стратегии в $\mathcal{ND}$ эквивалентны; 3) $\mathbb{D}E = \mathcal{ND}$.

Теперь соберем вместе несколько фактов.

Утверждение 1.6.2 *1) $NE \subset NE_m$; $\mathcal{ND} \cap MM \neq \emptyset$,*

2) если $\mathbb{D}E \neq \emptyset$, то $MM \supset \mathbb{D}E = \mathcal{ND} = SE \subset NE$, $\mathbb{D}E \subset Sad$, причем если доминирующее равновесие сильное, то $MM = S\mathbb{D}E = SNE = NE = SE \supset StE_O$.[13]

3) $SE \subset NE \subset INDS$.

4) $SNE \subset INDW$, причем если $SE \neq \emptyset$, то $SNE \subset SE$.

5) Обозначая через $NE(_I ND)$ решение Нэша в редуцированной по доминированию игре, можно утверждать

$NE(_I NDS) = NE$, $NE(_I NDW) = NE \cap INDW$. То есть, **редукция игры по доминированию не образует новых равновесий Нэша***, а сильное доминирование вообще не изменяет их.*

Доказательство. 1) Вложения $NE \subset NE_m, \mathcal{ND} \cap MM \neq \emptyset$ очевидны из определений: среди смешанных стратегий могут быть и чистые, аргмаксимум по векторам пересекает аргмаксимум по их минимумам. Доказательсто (2) элементарно, при использовании приведенной леммы: поскольку доминирующие стратегии покомпонентно "не хуже" остальных стратегий, то принадлежат и другим некооперативным решениям. Пункт (3): предположим противное: существует равновесие $\bar{x}$: $\bar{x} \in SE$, $\bar{x} \notin NE$, то есть для некоторого (например 1-го) участника $(\exists \tilde{x}_1 : u_1(\tilde{x}_1, \bar{x}_{-1}) > u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1}))$. Эта альтернативная стратегия $\tilde{x}_1$ не может входить в финальное множество $INDW = SE$, поскольку в нем все эквивалентны. Тогда, на каком-то этапе итеративного доминирования, она была продоминирована какой-либо стратегией $\hat{x}_1$: $u_1(u_1(\hat{x}_1, \bar{x}_{-1}) \geq \tilde{x}_1, \bar{x}_{-1}) > u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1})$. Продолжая

[13]Последнее вложение сравните на игре Табл. 6 и Табл. 11.

аналогичные рассуждения, по индукции получим, что в финальном множестве есть стратегия не хуже, чем $\tilde{x}_1$, - противоречие. (ср. доказательство $SE \subset NE$ в [Мулен, 1985, Теорема 1, стр 74]).

Вложение $NE \subset INDS$ доказывается аналогично: $\bar{x} \in NE$ означает $[u_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \geq u_i(x_i, \bar{x}_{-i}) \forall i \forall x_i]$. Но такая стратегия не может строго доминироваться какой-либо другой. (4) доказывается аналогично.

(5)- доказывается по определениям (см. Данилов, Лекция 12.) Действительно, строго доминируемая стратегия игрока i не может входить в NE. Поэтому, отбросив ее мы не сузим NE. Но и не расширим, так как ни возможности игрока i, ни возможности его партнеров в доминировании стратегий не сузились. Поэтому $NE(INDS) = NE$.

Аналогично, множество NE не расширяется при слабом доминировании. Оно может сузиться только за счет отбрасывания слабо-доминируемых равновесных стратегий, ведь новых стратегий, которые могли бы опровергнуть какое-либо решение Нэша – не возникает. Поэтому $NE(INDW) = NE \cap INDW$. ▥

Относительно соотношения разных решений и равновесия Штакельберга: хотя StE совпадает со строго доминирующим равновесием (если то непусто), но может лежать вне отдельной строго доминирующей стратегии(!), как в Табл. 11, и не совпадать ни с итерационно-недоминируемым, ни с Нэшевским решением.

		Victor	
		x	z
Anna	a	101, 0	1, 1 (SE)
	b	100, 100 (StE)	0, 0

Таблица 11: Несовпадение SE и StE.

Утверждение 1.6.3 В конечной антагонистической игре двух лиц $SE \subset Sad$.

Следствие: если $SE \neq \emptyset$ (игра разрешима по доминированию), то у игры есть цена (игра разрешима и по принципу седла).

Доказательство см. в [Мулен, 1985, Лемма 4, с. 49].

Кооперативные концепции легко сравнить по определениям:

Утверждение 1.6.4 Ядро принадлежит слабой Парето-границе, а сильное ядро — сильной (обычной) Парето-границе:

$$\mathcal{C}_W \subset \mathcal{P}_W \ , \ \mathcal{C}_s \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_W \ .$$

Совпадение или несовпадение кооперативных концепций ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_W$, $\mathcal{P}_W$) с различными некооперативные решениями мы уже обсуждали, и видели что часто результаты некооперативного поведения оказываются не оптимальными по Парето (см. примеры).

1.7 О существовании и компактности множеств решений

Утверждение 1.7.1 *Если все допустимые множества X_i компактны, функции u_i непрерывны, то*
1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$;   2) множества $I\!DE, MM, NE, \mathcal{P}_W$ компактны.
3) также непусты множества: осторожных решений ($MM \neq \emptyset$), решений Штакельберга, ($StE \neq \emptyset$), множества итерационно- недоминируемых стратегий ($INDS \supseteq INDW \neq \emptyset$).

Доказательство (см. в [Мулен, 1985, с. 79] более подробное доказательство этой теоремы.). Пункт (1) и компактность MM – см. [Мулен, 1985,, стр. 26]. Пункт (2): компактность NE проверена в теореме Нэша (ниже), а компактность $I\!DE$ доказывается опираясь на приведенную лемму (докажите самостоятельно) [Мулен, 1985]. Компактность слабой Парето-границы доказывается рассмотрением пределов.

3) Непустота множеств MM, StE, $INDW$ при конечности X_i очевидна из определений. Для случая компактных множеств доказательство существования MM, StE - по теореме Вейерштрасса, учитывая для StE теорему Нэша.

Рассмотрим вложенную последовательность допустимых множеств $X = \mathcal{ND}^1 \supset \mathcal{ND}^2 \supset ... \supset \mathcal{ND}^k$... заданную определением $INDW$. На каждом шаге последующее множество $\mathcal{ND}^k$ задается как вычитание из предыдущего множества $\mathcal{ND}^{k-1}$ другого множества D доминируемых стратегий. Замкнутость каждого недоминируемого множества $\mathcal{ND}^k$ можно доказать от противного по непрерывности $u(x_i, x_{-i})$: если бы предел последовательности доминировался, то и близкие к нему точки доминировались бы. Как известно, пересечение последовательности вложенных компактов непусто.

▥

Теорема 1 (Нэш, 1951) *Пусть все X_i ($i \in I$) компактны и выпуклы, все функции $u_i(.)$ ($i \in I$) непрерывны по совокупности переменных и вогнуты по x_i, тогда непусто множество нэшевских равновесий ($NE \neq \emptyset$), и оно компактно.*

Следствие 1.1 Если все X_i конечны, то непусто множество равновесий в смешанных стратегиях ($NE_m \neq \emptyset$), и оно компактно.

Следствие 1.2 *[см. Мулен, 1985,, с. 79]* В конечной антагонистической игре удовлетворяющей условиям теоремы есть седло (Sad) и, следовательно, цена.

Доказательство (для случая, когда множества $X_i \in I\!R^l$ - в действительном пространстве). Определим отображение $\mathcal{F}: I\!R^l \mapsto I\!R^l$ как декартово произведение Нэшевских откликов (см. выше) каждого игрока: $\mathcal{F}(x_1, ..., x_n) := \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$. Каждое отображение $\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ выпуклозначно и замкнуто, как аргмаксимум по x_i непрерывной вогнутой функции (зависящей непрерывно также от x_{-i}) на выпуклом компакте X_i (док. см. напр. в [Гильденбранд, стр.26], там же см. теорему Какутани).

Тогда к $\mathcal{F}(.)$ применима теорема Какутани о неподвижной точке,[14] следовательно имеется неподвижная точка $\tilde{x}: \ \tilde{x} \in \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(\tilde{x}_{-i})$, то есть $\tilde{x} \in NE$, что и требовалось.

Для проверки компактности NE можно построить последовательность неподвижных точек $\{\tilde{x}_t\}_{t=1,2,...} \in NE$ сходящуюся к некоторой точке $\bar{x}$. Равновесность каждого элемента последовательности $\tilde{x}_t \in NE$, в терминах неравенств (3) сохраняется и в пределе, что завершает доказательство. ▥

Для доказательства Следствия 1.1 достаточно проверить, что рассматриваемое в нем смешанное расширение G_m исходной конечной игры удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, выпуклая оболочка любого конечного множества стратегий есть выпуклый компакт. Кроме того, матожидание полезности $U_i(\sigma_1, ...\sigma_n)$ определенное в (5), есть не только непрерывная, но и линейная (следовательно вогнутая) по переменным σ_i функция, что и требовалось для применения Т.Нэша. ▥

1.8 Нахождение решений в непрерывных играх и NE_m

Связь матричных игр с линейным программированием и нахождение NE_m.

Доказательство Следствия 1.1 для антагонистических конечных (т.е. "матричных") игр двух лиц можно проводить и независимо от теоремы Нэша, через линейное программирование, которое дает также *способ поиска* решений NE_m для этих игр.

Для этого задачу 1-го игрока записывают в форме максимизации (неизвестной игрока заранее) цены игры u_s по переменным u_s, μ, (где $\mu := \sigma_1$) при ограничениях

$$\mu \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n_1} \mu^k = 1, \quad \mu a^k \geq u_s \ (k = 1, ..., n_2),$$

где $a^k \in I\!\!R^{n_i}$ — столбцы матрицы платежей $(a_j^k) := (u_1(x_1^j, x_2^k))$. Здесь ограничения типа $\geq$ выражают гипотезу 1-го о неблагоприятном поведении противника (максимин, который совпадает здесь с седлом из-за антагонизма игры). Легко проверить, что задача противника есть двойственная к описанной задаче. В обеих двойственных друг другу задачах есть допустимые решения, следовательно симплекс- методом можно найти седловую пару в игре G_m. Она является и Нэшевской парой и максимином, по смыслу неравенств – ограничений.

Для случая биматричной (то есть не обязательно антагонистической) игры задачи игроков не окажутся двойственными друг к другу, и поиск NE_m методом линейного программирования не очевиден. Все же его общая идея - перебор возможных базисов (наборов активных ограничений) сохраняет ценность для поиска решений. В сущности, нужно перебрать все гипотезы о возможных комбинациях стратегий применяемых с ненулевой интенсивностью (это не всегда все стратегии!), для обоих игроков. Например, рассмотрим повторяющуюся игру матери с сыном из

[14] Теорема Какутани о неподвижной точке: замкнутое (т.е. имеющее замкнутый график) выпуклозначное отображение $\mathcal{F}(.)$ выпуклого компакта X в себя имеет неподвижную точку $x: \ x \in \mathcal{F}(x)$.

известного детского стишка.[15] Сыну могут давать чаще или реже карманные деньги, в зависимости от того, часто ли от него пахнет табаком, а если пахнет сигарами - то пороть. Посчитайте вероятности (смешанные стратегии) при такой, например, матрице выигрышей (субъективных полезностей) исходов:

Сын Мать	Давать	Не давать	Пороть
Не курить	$\|+0, +0$	$+1, -2$	$-5, -5$
Курить	$\|+2, -2$	$+0, -1$	$-4, -4$
Сигары	$\|+1, -5$	$-1, -4$	$-3, -3$

Решение NE_m окажется включающим только первые две стратегии и у матери и у сына.

Для простого случая биматричной игры 2×2 также можно найти NE_m графически, строя функции (или отображения) $\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ — отклики игроков на действия партнеров; их пересечение окажется равновесием. Эту же идею нахождения решения для неантагонистической игры, даже с большим числом стратегий, можно реализовать и в терминах системы равенств и неравенств: все активные (имеющие ненулевой вес) стратегии игрока должны быть равновыгодны, а неактивные менее выгодны. Перебирая все потенциальные базисы (наборы активных стратегий) найдем те, в которых система совместна, то есть NE_m.

Решение NE_m можно найти также на компьютере многократными итерациями, опираясь на следующую теорему [см.??].

Теорема 2 (Брауна-Джексон) *Пусть в повторяющейся матричной (антагонистической) игре двух лиц каждый игрок при выборе своего отклика на каждой итерации считает прошлую среднюю частоту, с которой выбиралась конкретная стратегия партнера за вероятность ее будущего появления. Тогда эти итерации асимптотически сходятся к элементу из NE_m.*

Данная теорема служит также идейной опорой понятия NE_m. Ее сложное доказательство не приводим.

.

При нахождении равновесия по Нэшу, особенно в играх с непрерывными стратегиями, можно воспользоваться понятием *функции (отображения) отклика* $\mathcal{F}_i(x_{-i}) = \mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ определенном в (4). Тогда можно переформулировать определение NE так:

Точка $\bar{x}$ является равновесием по Нэшу т. и т. т., когда

$$\bar{x}_i \in \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \quad \text{или} \quad \bar{x}_i = \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \qquad \forall i \in I. \tag{8}$$

Здесь равенство – если функции $\mathcal{F}_i(.)$ являются однозначными, тогда нэшевское равновесие задается просто системой уравнений и соответственно вычисляется.

Найдем этим путем NE, StE в примере игры с непрерывными стратегиями.

[15]"...сын курил сигары по рублю за штуку. Мать, узнав об этом, дала сыну порку: не кури сигары, а кури махорку."

Пример 1.5 Рэкетиры (или орган налогообложения) выбирают, какую долю $\tau \in [0,1]$ валовой выручки y забирать у фирмы. Они при этом максимизируют функцию вида $T(\tau, y) = \tau y$, то есть желают побольше получить. Фирма имеет функцию $\pi(\tau, y) = (1-\tau)y - y^2$, то есть максимизирует прибыль при квадратичной функции затрат выбирая объем продаж $y \geq 0$. Найдем решения этой игры при различных гипотезах о поведении: 1)осторожном, 2)"близоруком" (ситуативном), 3)когда рэкетиры - лидер игры, знающий цели и просчитывающий ответы фирмы.

1) Осторожное равновесие (MM). Оно не очень правдоподобно в рассматриваемой ситуации: ведь участники должны бы знать ходы друг друга; но найдем MM для примера. Самое худшее, что может сделать фирма с точки зрения рэкетира – не выпустить ничего: $y = 0$. При этом рэкетиру все равно, какую долю $\tau \in [0,1]$ установить. С другой стороны, самое худшее, что может сделать рэкетир с точки зрения фирмы – установить максимальную $\tau = 1$. При этом фирма максимизирует прибыль

$$\pi(y) = (1-\tau)y - y^2.$$

Находим функцию отклика, приравняв производную этой функции по l к нулю:

$$y^*(\tau) = (1-\tau)/2,$$

равное нулю при $\tau = 1$. Таким образом, осторожное равновесие $MM = [0,1] \times 0 \ni (\tau, y)$.

2) Равновесие по Нэшу (NE). При любом ненулевом выпуске y близорукому рэкету выгодно установить максимальную долю ($\tau = 1$). Поэтому его (многозначной) функцией отклика будет:

$$\tau^*(y) = 1 \text{ при } y > 0; \quad \tau^*(y) = [0,1] \text{ при } y > 0.$$

Функция отклика фирмы $y^*(\tau)$ получена выше. Решив систему $\{\tau^*(\bar{y}) \ni \bar{\tau}, \quad y^*(\bar{\tau}) = \bar{y}\}$, найдем единственное Нэшевское равновесие $(\bar{\tau}, \bar{y}) = (1, 0)$, которое совпадает с одним из осторожных, поэтому является и седлом.

3) Равновесие по Штакельбергу (StE) (лидер – рэкет). Рэкет знает функцию отклика фирмы, и подставляя ее в свою целевую функцию, максимизирует

$$\tau(1-\tau)/2.$$

Очевидно, максимум достигается при уровне $\tau = 1/2$, чему соответствует уровень выпуска $y = 1/4$.

4) Парето-оптимум ($\mathcal{P}$). Если предполагать, что фирма способна передавать рэкету не только налог, но и фиксированную сумму r, то Парето-оптимум можно найти как максимум суммы целевых функций. Получим $\mathcal{P} = \{\tau = 0,\ y = 1/2,\ r \in [0, 1/2]\}$ (здесь же и слабый Парето-оптимум). Этот исход достижим, если фирма обещает рэкету некоторую сумму r за нулевой налог (кооперативное поведение). Очевидно, что ни одно из перечисленных некооперативных равновесий не является Парето-оптимальным.

5) Ядро ($\mathcal{C}_W$). Какова упомянутая сумма r достижимая в переговорах? Точки ядра не должны блокироваться ни одной коалицией: ни коалицией из обоих участников (т.е. должны принадлежать слабой Парето-границе), ни коалицией из одного участника. Если в качестве индивидуально достижимых выигрышей берем гарантированные *минимаксные* выигрыши $T(\tau, y) = 0, \pi(\tau, y) = 0$, то ядро состоит из всех точек $\mathcal{P}$. Если же считать, что лидирующее положение рэкета известно обо-

им участникам, то он считает гарантированным доходом свой доход 1/8 достижимый в равновесии Штакельберга, тогда ядро меньше Парето-границы: $C = \{\tau = 0, y = 1/2,\ r \in [0, 1/2]\}$.

Пример 1.6 Пусть есть отрасль с функцией цены P от суммарного выпуска $Y = \sum y_i$ (обратной функцией спроса) вида $P(Y) = 40 - 2Y$. Пусть есть $n > 1$ одинаковых конкурентов $i = 1, ..., n$ с линейными издержками, то есть с постоянными предельными издержками, причем $\dot{C}_i = 1$. Найдите решение y_i каждого об объеме выпуска при разных гипотезах о поведении: 1)MaxMin, 2)StE (один из конкурентов лидирует, например, имея возможность первым объявить выпуск), 3)NE, 4)C-ядро.

Приближается ли при росте числа конкурентов n решение по Нэшу (каждый понимает, что при росте его выпуска цена уменьшится) к решению совершенной конкуренции (каждый считает себя несущественно влияющим на общую цену)?

Нарисуйте для числа конкурентов $n = 2$ график кривых безразличия в пространстве y_1, y_2 и отметьте на нем все 4 типа решений.

1.9 Что общего в разных концепциях решений?

Завершая раздел статических (одновременных) игр, попробуем сформулировать для них универсальную, достаточно широкую концепцию решения, охватывающую прочие некооперативные решения как частные случаи.

Определение 1.9.1 Набор $\bar{x} \in (X \times X \times ... \times X)$ ожидаемых стратегий (гипотез о всех партнерах, включая себя, причем ожидания любого игрока о себе совпадают с реально выбранной его стратегией) $\bar{x}_{i*} = (\bar{x}_{i1}, ..., \bar{x}_{in}) \in X \quad (i = 1, ..., n)$ можно назвать равновесием с правилом ожиданий – отображением $E: \ (X \times X \times ... \times X) \Rightarrow (X \times X \times ... \times X)$ если

1) выбор $\bar{x}_{ii} \in X_i$ каждого игрока i является одним из наилучших для него ответов на ожидаемые стратегии $x_{ij} \in X_j$ прочих игроков $j \neq i$, то есть: $u_i(\bar{x}_{ii}, \bar{x}_{ij}) = \max_{x_{ii} \in X_i} u_i(x_{ii}, \bar{x}_{ij})$;

2) ожидания любого игрока i о всех игроках соответствуют заданному правилу согласования ожиданий: $(\bar{x}_{1*}, ..., \bar{x}_{n*}) \in E(\bar{x}_{1*}, ..., \bar{x}_{n*})$.

В частности, для Нэшевской концепции решения, правило соответствия ожиданий очень простое $E(x) = (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \times (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \times ... \times (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn})$, то есть ожидания должны соответствать действительно выбранным стратегиям. Напротив, для концепции осторожного решения (MaxMin) ожидания соответствуют наихудшим гипотезам о партнерах.[16]

Возможно записать в форме отображения предположений $E(.)$ и другие правила, в том числе, соответствующие равновесию Штакельберга и итерационному доминированию, но это громоздко, и мы этого не коснемся.

[16]Как уже отмечено, в ситуации антагонистической игры это достаточно реалистично, но в других случаях одновременные решения игроков при таком правиле ожиданий могут приводить к исходу, неожиданному для них: пессимизм не всегда оправдается. В этом смысле MaxMin, в отличие от NE, не во всех играх можно назвать равновесием, ведь трудно представить себе популяционную игру, где одни и те же ожидания нарушаются из раунда в раунд.

Итак, в этом параграфе выражен взгляд, возможно, спорный, на различные концепции решений, как на ситуации, различающиеся именно ожиданиями о партнерах, но не типами рациональности поведения (методами рассуждений игроков).

2 *Глава.* Игры в развернутой форме ("динамические"или "последовательные")

Перейдем к рассмотрению игр, заданных в развернутой форме, то есть в виде описания не стратегий, а отдельных ходов и их последовательностей. Для этой цели часто применяются сетевые структуры – графы, причем преимущественно — “исходящие” деревья.

2.1 Формализация последовательных игр, соответствие развернутой и нормальной формы игры

Исходящим деревом (out-tree) называют связный направленный (ориентированный) граф с единственным истоком (“корнем”), если в графе нет циклов, и каждый узел имеет единственного непосредственного предшественника.

Часто полезно отражать игры и графами более общего вида, но, как правило, "фундированными". *Фундированным* называют связный направленный граф с одним истоком (корнем) и без циклов.

Упражнение. Чтобы понять, что дерево - не всегда самое экономное представление игры из возможных, представьте девятиклеточные “Крестики-нолики” фундированным графом, не являющимся деревом (в некоторые позиции можно попадать из разных предшественников). Для упрощения можно считать первый ход “X - в центр” уже сделанным, и идентифицировать ходы именами типа “0 - вВ угол”, “X - в противоположный угол”, отождествляя тем самым эквивалентные ситуации. Докажите, что цена игры - “ничья”.

Граф игры мы будем обозначать $\Gamma(G)$, точки выбора участников будут “узлами”, а ходы – “дугами” графа. Каждому конечному узлу, то есть (финальной) “вершине”, или “исходу” игры, приписываются некоторые выигрыши всех участников. Тем самым, граф игры задает физическую и целевую структуры игры, а информационная структура игры отражается “информационными множествами”, а также отдельно от графа, например, в той или иной концепции решения.

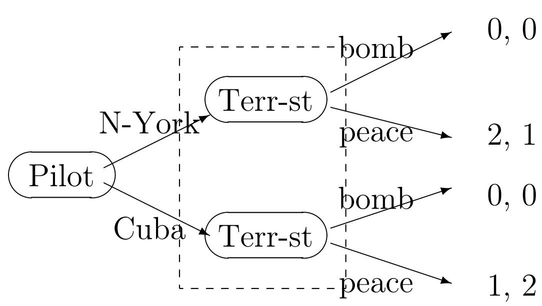
Определение 2.1.1 *Информационное множество* или информационная позиция игры есть несколько узлов (физических позиций) дерева игры, соответствующих ходу одного участника, который не может различать между ними (не знает, в котором узле он находится). Одновременная игра есть частный случай последовательной, где у каждого игрока просто всего одно информационное множество.

Чтобы подойти к концепции решения последовательных игр, рассмотрим примеры.

Пример 2.1 (“Террорист”) Предположим, в самолете летящем из Майами в Нью-Йорк обнаруживается террорист, обещающий взорвать бомбу, если самолет не повернет на Кубу. Допустим, пилот, от которого зависит решение, оценивает, что смерть (неважно где) хуже посадки на Кубе, которая, в свою очередь, хуже посадки в Нью-Йорке. Это можно отразить, например, его выигрышами $U_{Pilot}(...) := (Bomb \to 0, Cuba \to 1, New\text{-}York \to 2)$. Предположим, данный террорист также жизнелюбив и не хочет умирать, и это видно по его лицу, только он Кубу предпочитает Нью-Йорку. То есть его цели можно задать в виде $U_{Terrorist}(...) := (Bomb \to 0, Cuba \to 2, New\text{-}York \to 1)$. Пилот должен выбрать, поворачивать ли на Кубу, а затем террорист – взрывать ли бомбу, как обещал. Что произойдет, если летчик почему-то, например, по жизнелюбивому виду террориста, вполне уверен в своем (истинном) предположении о целях террориста, то есть его ожидания о целях партнера истинны: $\beta_{pilot}(u_{terr}) = (Bomb \to 0, Cuba \to 2, N - Y \to 1)$?

Для ответа формализуем игру. Можно представить варианты этой игры с последовательными ходами двумя деревьями: Рис. 3 отражает случай, когда террорист НАБЛЮДАЕТ ход пилота, а Рис. 2 - противоположный случай (довольно глупый: что ж тогда угрожать? Но нам важно сравнить их.). То есть, в случае "Б" террорист не способен глядя в иллюминатор определить, куда ведут самолет. Это *игра с несовершенной (неполной) информацией о сделанных ходах*. Это отражается на дереве игры объединением *пунктиром* узлов, неразличимых для игрока принимающего здесь решение, объединенные так узлы составляют **информационное множество**, или "историческую позицию" игры.

В этом случае игрок вынужден принимать решение вслепую, и то, что он ходит вторым, а не первым – не имеет значения, равно как и его объявленная в духе cheap-talk (пустые слова) стратегия [N-Y → bomb, Cuba → peace]. Тогда мы можем представить соответствующее дерево "Б" (Рис. 2) в уже известной нам нормальной стратегической форме следующей матрицей стратегий и выигрышей:

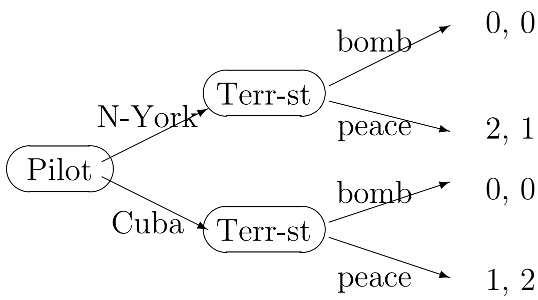


		Pilot	
		New-York	Cuba
Terrorist	bomb	0, 0	0, 0
	peace	1, 2*	2, 1

Рис. 2: Игра "Террорист"-Б — без наблюдаемости хода. Развернутая (слева) и нормальная (справа) формы.

Если пилот знает цели партнера, то легко предсказать, что он определит его стратегию "peace" как строго доминирующую, и выберет для себя "New-York". Это произойдет и в том случае когда он рассуждает как Штакельберговский лидер, и по концепции "сложного равновесия", и просто по доминированию – независимо от знания целей партнера. По сути, подобная игра без наблюдаемости хода эквивалентна одновременным играм, изученным выше, и новых понятий не требует.

Интереснее случай "Н" с наблюдаемостью курса самолета. Для прояснения соотношения развернутой и нормальной форм игры на Рис. 3 она переведена и в нормальную форму.



Pilot:

Ter-st:	N-York	Cuba
(b,b)	0, 0	0, 0
(b,p)	0, 0	2, 1*
(p,b)	1, 2*	0, 0
(p,p)	1, 2*	2, 1

(N,C)

Рис. 3: Игра "Террорист-Н" — с наблюдаемостью хода. Развернутая (слева) и нормальная (справа) формы.

Здесь стратегия (b, b) означает намерение бомбить и в случае поворота на Нью-Йорк (первая компонента вектора (b, b)), и в противоположном случае. Все стратегии террориста, кроме последней (p, p), выглядят глупо с точки зрения его целей, но они физически возможны, поэтому вносятся в матрицу. Важно заметить: стратегией является не ход, а полная инструкция себе — как ходить в ответ на каждый ход противника, то есть *в каждом информационном множестве* (исторической позиции). Поэтому, в отличие от случая "Б" с несовершенной информации о сделанных ходах (который можно интерпретировать и как игру с одновременными ходами) матрица нормальной формы соответствующая новому дереву оказывается размером не 2×2, а 2×4 — матрица стратегий уже обширнее матрицы выигрышей (возможных исходов). Более того, в отличие от случая "Б", по ней уже нельзя однозначно восстановить дерево из которого она построена, часть информации утеряна. В этом смысле развернутая форма записи игр более информативна, чем нормальная.

Итак, **каждая последовательная игра, заданная графом, однозначно может быть представлена и в нормальной форме (свернута)**. Но обратное действие - восстановление развернутой формы по нормальной - может быть неоднозначно, поскольку свертывание теряет информацию о последовательности ходов.

Что есть стратегия? Абстрактно, стратегия — это план-предписание своего поведения в любой ситуации. В данном же контексте, в терминах графа, можно сказать, что стратегии есть наборы ходов в каждой информационной позиции. Формально, если мы обозначим последовательные исторические позиции (historical nodes) игрока A символами $h_{1A}, h_{2A}, h_{3A}, ...$, а переменные ходов в этих позициях $x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...$ (каждая может принимать столько значений, сколько выходов из этой позиции), то нормальная стратегия s_A есть набор $s_A = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...)$

описывающий поведение в каждой позиции. Соответственно, выписав по ходам все возможные стратегии и приписав выигрыши всем профилям стратегий, развернутую игру можно свести к нормальной.

Достаточно ли этого свернутого представления игры и уже введенных концепция решений (NE, IND), чтобы предсказывать исходы, или нужно пользоваться графом и вводить новые идеи? Несколько последующих разделов убеждают во втором мнении.

2.2 Совершенное в подыграх равновесие и мультиперсонная форма игры

В матрице стратегий примера "Террорист-H" можно заметить целых три Нэшевских равновесия, и одно из них $((b,p)$,(Cuba)) соответствует простой послушной реакции пилота на объявленную на словах стратегию террориста (b,p). Но это равновесие и еще одно $((p,b)$,(N-York)) – кажутся неправдоподобными с точки зрения содержательного описания игры, и с точки зрения дерева игры. Разве можно поверить, что жизнелюбивый террорист действительно взорвет бомбу после того как увидит, что его не послушались? Эти стратегии слабо доминируются стратегией "peace" (p,p). Кроме того, и это важнее, они сильно доминируются стратегией "peace" как в подыгре исходящей из узла N-York, так и в "подыгре" исходящей из узла Cuba.

Подыгрой называют подграф исходной игры, связный от некоторого узла — корня подграфа — до финальных вершин, не имеющий связей с другими подграфами, кроме своего корня.

В нашем примере правдоподобным в смысле рациональности поведения в подыграх представляется только одно из трех Нэшевских равновесий ((N-York),(p,p)). То есть, террорист, если он рационален, остановится на стратегии "не бомбить ни в каком случае", а пилот, понимая это, полетит в Нью-Йорк.

Итак, в примере "Террорист" мы выделили среди нескольких NE равновесий одно правдоподобное, с учетом складывающихся по ходу игры ситуаций. Эту идею сужения множества потенциальных исходов благодаря рациональности поведения *не только в начальной точке* можно задать так.

Определение 2.2.1 Назовем *совершенными в подыграх равновесиями* (SPE = Subgame Perfect (Nash) Equilibrium) Нэшевские равновесия, являющиеся Нэшевскими равновесиями во всех подыграх.[17]

Заметим, что эту концепцию можно отразить и через другую форму стратегического представления исходной игры, называемую *мультиперсонной.* Ее стратегии также называют поведенческими (behavioral) или пошаговыми. Она представлена в Таблице 12.

[17]Строго говоря, в подыграх стратегии другие, "уменьшенные", определение нужно понимать соответственно.

Pilot↓ \ N-Y-Terr-st→	bomb	peace	Pilot↓ \ Cuba-Terr-st→	bomb	peace
N-Y	0, 0, 0	2, 1, 1	N-Y	0, 0, 0	2, 1, 1
Cuba	0, 0, 0	1, 2, 2	Cuba	0, 0, 0	1, 2, 2

Таблица 12: Мультиперсонное представление игры "Террорист".

В мульти-персонном представлении один и тот же игрок, действующий в разных ситуациях (узлах дерева) представлен разными ("условно-ситуационными") игроками, в данном случае – Террористом в Нью-Йорке, и Террористом на Кубе. Естественно, выигрыши обоих Террористов в образующейся при этом игре трех лиц (Пилота и двух разных террористов) совпадают, но действуют они каждый за себя. Это соответствует гипотезе действия "по ситуации", в противоположность действию по заранее объявленному плану. Тем самым, при мультиперсонном представлении используется гипотеза *отсутствия возможности "creadible commitment"*, то есть "обязательства, вызывающего доверие". В этом примере мы предполагали, что пилот верит в поведение партнера "по ситуации", а не в обязательство бомбить в Нью-Йорке. Выражая это в мультиперсонных терминах, он просто выбирает, с кем из "условно-ситуационных" Террористов столкнуться. (Если бы летчик верил в обещание Террориста бомбить в Нью-Йорке, игру следовало бы представлять другим деревом, или вместо SPE применять другую концепцию решения.) Таким образом, оказывается, что (легко проверить по определениям):

Упражнение: Опровергнуть примером следующее утверждение:

Некоторый профиль стратегия является совершенным в подыграх решением (SPE) тогда и только тогда, когда это есть Нэшевское равновесие, являющееся Нэшевским равновесием и в мультиперсонном (пошаговом) представлении игры.[18]

Заметим в заключение введения в динамику, что стратегии или ходы в динамических играх могут быть не только целыми, но и смешанными, как и в статических (одновременных) играх. Решите: выгодно ли для игрока смешивать полные стратегии вида $s_A = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...)$, или выгоднее сначала смешивать отдельные ходы, а потом объединять их в полную смешанную стратегию, или все равно? Одинаково ли множество NE_m в том и другом случае?

Заметьте, что мы всюду стараемся вести рассуждения в общей форме, пригодной для применения и к исходной, конечной или бесконечной, и к расширенной (смешанной) игре. (Правда, смешивания стратегий бесконечных игр мы здесь не касаемся.)

2.3 Обратная индукция

Во многих динамических играх (при отсутствии гипотезы "creadible commitment") довольно естественно решения типа SPE искать *алгоритмом обратной индукции*,

[18] О недостаточности только мультиперсонного (пошагового) представления для определения SPE см. "решение дискоординации" в примере ???.

то есть “алгоритмом Куна”, по сути эквивалентным определению SPE (проверьте это самостоятельно). Он описывается так:

1. Отбрасываем (вычеркиваем) сильно доминируемые стратегии во всех финальных подыграх (содержащих только вершины и предвершинные узлы).

2. Невычеркнутые значения выигрышей переносим на предвершинные узлы. Если невычеркнутых значений несколько – то переносим все эти варианты, или, что то же, создаем несколько вариантов дерева игры.

3. Редуцируем каждую игру (каждый из вариантов дерева), удаляя уже рассмотренные вершины, то есть считаем бывшие предвершинные узлы новыми финальными вершинами. Если остался не только корневой узел, то повторяем операцию, уже над редуцированной игрой.

END: В конце останутся возможные значения выигрышей в корневом узле и цепочки, которые их породили — каждая из них означает одно из равновесий SPE, и включает нереализовавшиеся, но подразумеваемые ветви дерева (ожидания).

Проще всего этот алгоритм срабатывает, когда (в отличие от примера “Террорист”) каждый игрок имеет различные выигрыши в различных вершинах.[19] Тогда результат алгоритма (то есть SPE) единственен. По сути дела, понятие SPE эквивалентно множеству итерационно-недоминируемых (сильно) стратегий, только понятие $INDS$ здесь несколько изменяется: порядок отбрасывания доминируемых стратегий определен деревом игры Γ, а не требованием одновременности: $SPE = INDS_{\Gamma}$. Это может иметь значение: например, в игре “Террорист” $INDS_{\Gamma}$ не совпадает с $INDS$ игры в нормальной форме, а только с $INDS$ мультиперсонной формы игры.

Заметим, что пользуясь обратной индукцией и отбрасывая СИЛЬНО доминируемые в подыграх стратегии, мы по сути отбрасываем СЛАБО доминируемые стратегии нормального представления этой игры, причем в определенном порядке, заданном графом. (Это легко понять на любом примере.) Из этого следует два соображения. Во первых SPE $\subset$ NE (имея в виду NE нормальной формы игры), опираясь на выше-доказанное утверждение, о том, что отбрасывание доминируемых стратегий не расширяет NE.

Второе, менее тривиальное - это выделение случаев, когда SPE можно находить через INDW нормальной формы, не обращаясь к графу (см. теорему Куна ниже).

2.3.1 “Дискоординация” в мультиперсонном представлении игры и “обязательство” (commitment)

Мы дали вариант определения SPE через пересечение NE в нормальной форме и NE в мультиперсонной. Отметим, что решение Нэша в мультиперсонном пред-

[19] К однозначности выигрышей игру иногда можно привести, объединяя вполне эквивалентные вершины графа в одну. Тогда, скажем, шахматы имеют всего три финальные вершины, только достигаемые многими путями: выигрыш, проигрыш, или ничья белых.

ставлении может быть шире чем NE в нормальном. Рассмотрим соответствующий пример "дискоординации".

...

Суть "дискоординации" в том, что в решении NE_{mul} благодаря неадекватным и несогласованным верам, я завтрашний поступаю несогласованно со мной сегодняшним, возможно упуская часть выгоды от координации. Поэтому NE_{mul} неадекватно для описания полной рациональности. Напротив, SPE свободно от этого недостатка. Но в некоторых играх оно обладает другим недостатком этого типа, называемом проблемой "невозможности обязательств" (lack of credible commitment). Скажем, в разобранной игре "Террорист", если бы Террорист на предварительной стадии, до игры, мог связать себя обещанием автоматически взорвать бомбу при посадке в Нью-Йорке, то он выиграл бы больше! Это парадоксальное на первый взгляд связывание себя[20], то есть ограничение своих последующих возможностей, часто приносит выгоду. А обратное – невозможность связать себя обязательством – воспринимается как обидная неэффективность, препятствующая взаимовыгодным сделкам. (См. также в задачнике примеры: Мосты Цезаря, Веревки Одиссея, Цена репутации при кредите.)

С точки зрения моделирования всех таких ситуаций, появление возможности обязательства (commitment) должна изображаться на дереве игры *дополнительной веткой*, не имеющей последующих разветвлений для игрока, дающего обязательство. В примере Террорист это выглядело бы так:

....

Таким образом, возможность связать себя есть *дополнительная* возможность, это новая игра, и получение большего выигрыша в равновесии при возможности обязательств (commitment) не так уж парадоксально.

2.3.2 О существовании решений SPE, единственности и совпадении концепций

Утверждение 2.3.1 *В развернутой форме конечной игры с совершенной информацией (о ходах) существование и обычных и совершенных решений Нэша гарантировано: $SPE \neq \emptyset$ (следовательно и $NE \neq \emptyset$).*

Действительно, существование решений очевидно из алгоритма Куна. Он по существу лишь задает (конечный) алгоритм отбрасывания сильно доминируемых стратегий; но отбрасывая одну стратегию, мы всегда сохраняем в множестве допустимых стратегий ту, что ее продоминировала, так что множество не может остаться пустым. Включение $NE \supset SPE$ следует из определения SPE и гарантирует $NE \neq \emptyset$. ▥

Существование же решений для игр с несовершенной информацией (нетривиальными информационными множествами) не гарантировано, как мы видели в разделе статических (одновременных) игр.

[20]Сравн. пример "веревки Одиссея" в задачнике.

В динамической игре (на дереве Γ) можно рассматривать и сложное равновесие SE_Γ. Оно определяется так же, как и в статических играх, через итерационное слабое доминирование и понятие $INDW_\Gamma$. Только в нем порядок отбрасывания стратегий задается деревом игры Γ, а не одновременен, что иногда существенно, а иногда - нет. Скажем, в игре "Террорист" порядок слабого доминирования не важен: решение $INDW = INDW_\Gamma = SE_\Gamma$ оказалось одно и то же. Это не всегда так, как мы увидим в примере (Табл. 15). Итак, в общем случае совпадение SE_Γ=SPE или $INDW_\Gamma = INDW$ не обязательно, можно гарантировать только $INDW_\Gamma \subset SPE$, и вообще, вложение итерационно-слабо-недоминируемых решений в сильные при совпадении порядка отбрасывания. Это вложение можно доказать (проверьте это самостоятельно), поскольку "слабое" доминирование вычеркивает больше стратегий, чем "сильное", принятое для SPE.[21]

Частное достаточное условие единственности и, следовательно, совпадения решений SE_Γ=SPE есть "отсутствие неполного совпадения выигрышей в исходах". Здесь это утверждение распространено на фундированные графы, что упрощает формулировку (это позволяет пару вполне эквивалентных по выигрышам вершин объединить в графе, и считать одной вершиной). Заодно мы сформулируем теорему Куна:

Теорема 3 *Пусть в динамической конечной игре с совершенной информацией, описанной фундированным графом, каждый игрок имеет различные выигрыши в любой паре вершин. Тогда*

1) Совпадают решения $SPE = SE_\Gamma$, и результат алгоритма Куна, причем он существует и единственен по выигрышам (по исходу).

2)(Кун) Эти решения совпадают с решением SE (образующемся при одновременном *порядке слабого итерационного доминированию в стратегическом представлении игры).*

Доказательство пункта (1) о существовании SE_Γ (см. Мулен-1985) — довольно очевидно из алгоритма. Действительно, каждый шаг отсечения вершин в алгоритме Куна даст при принятых гипотезах единственный вектор выигрышей. По индукции получаем единственное решение алгоритма. Легко проверить, что это и есть SPE= SE_Γ, и что других равновесий SPE, SE_Γ нет.

Доказательство пункта (2) – теоремы Куна – нетривиально и опускается (см. Мулен, 1985). ▥

Отсюда следует, что если игра в стратегической форме представима фундированным графом с различными исходами, то SE существует и единственно. Это означает, в частности, существование решения SE в шахматах (теорема Цермело), шашках, и всех конечных настольных играх с совершенной информацией о ходах и целях, но не в карточных играх, где информация о текущем положении игры обычно скрыта (несовершенна).

Упражнения:

[21] Напомним дополнительное различие SPE от SE: в определении SPE нет требования совпадения выигрышей во всех элементах множества равновесий, как в SE.

Пример 2.2 "Пираты". *(Мулен, 1985).* Пусть на пиратском корабле 50 разного старшинства пиратов делят 100 кусков золота по следующему обычаю. Старший предлагает дележ – кому сколько. Если половина команды (включая его) согласна, то так и будет, иначе его выбросят за борт, а оставшийся старшим предложит дележ, и так далее.

Предскажите, кто сколько получит, вплоть до младшего юнги (SPE = INDW_Γ?).

Пример 2.3 "Камешки". Пусть Андрей и Борис договорились, что из лежащих перед ними n=10 камушков Андрей возьмет 1 или 2, по желанию. Потом Борис 1 или 2, и так далее, а взявший последний камень проиграл.

Кто выиграет при идеальной игре обоих, первый или второй? Сохранится ли результат, если можно брать 1 или 2 или 3? Каков общий метод решения всех таких задач $\forall n$? (SPE = INDW_Γ?)

2.4 Решение SPE в непрерывной игре

В непрерывных (по стратегиям и/или времени) играх применение тех же идей и алгоритма обратной индукции аналогично. Только вместо дерева нужно представлять себе (даже если не удается нарисовать) некоторый граф с бесконечными разветвлениями типа секторов.

Пример 2.4 ("Последовательный торг по Рубинштейну") *(Дележ убывающего пирога= дележ выгоды при инфляции).*
(A.Rubinstein, 1959, see also H.Varian "Microec.Analysis")
Уезжая из дома, мать оставила двум жадным детям пирог, с таким условием. Сначала Анна предложит дележ $\bar{a}_1 \in [0,1]$ (свою долю), если Виктор согласен, то так и будет, иначе через час Виктор предложит дележ $\bar{v}_2 \in [0,1]$ (свою долю). Если Анна не согласна, она через час сделает третье предложение дележа $\bar{a}_3 \in [0,1]$, и так далее. С каждым часом полезность пирога убывает некоторым темпом (возможно, от нетерпения, или от засыхания пирога, когда $\alpha = \beta$). Конкретнее, через час остается $\alpha \in (0,1)$ исходной полезности для Анны и $\beta \in (0,1)$ полезности Виктора. Если, скажем, на k-й итерации они согласились на дележ $(\bar{a}_k, \bar{v}_k)$; $\bar{a}_k + \bar{v}_k = 1$, то полезность Анны от него будет $A(\bar{v}_k) = a_k = \alpha^k \bar{a}_k$, полезность Виктора — $V(\bar{v}_k) = v_k = \beta^k \bar{v}_k$. Зная конечный период T, в течение которого пирог остается съедобен, нужно предсказать, на какой итерации и как (рациональные и жадные) дети поделятся (подобная игра очень типична в ситуации, когда две фирмы способны осуществить взаимовыгодный проект, но надо договориться о разделе прибыли, а время переговоров означает упущенную прибыль).

Анализируя эту игру торга, для простоты будем считать $\alpha = \beta = 1/2$, T=4, и нарисуем дерево (если можно так выразиться) этой непрерывной по стратегиям игры:

Решение игры в изображенном простом случае (общий случай, и бесконечный вариант игры рассмотрите самостоятельно) легко найти с помощью ступенчатой диграммы уровней полезностей, алгоритмом обратной индукции. Действительно,

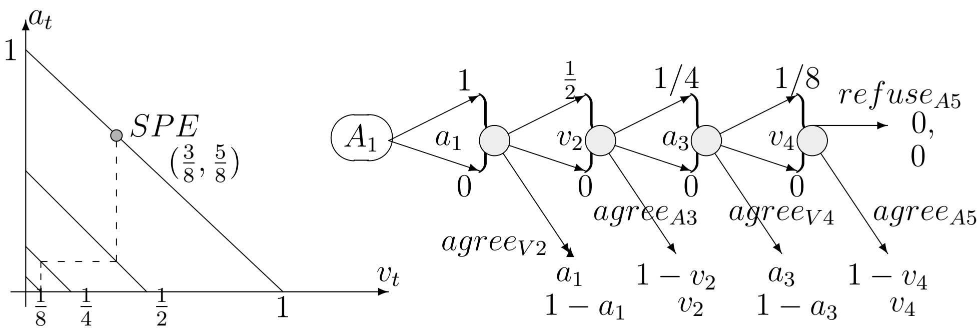


Рис. 4: Игра: дележ убывающего пирога по Рубинштейну (последовательный торг).

решим игру с конца: предположим она дошла до последнего, четвертого периода, где Виктор предлагает дележ. Если Анна откажется, то оба получат 0, поэтому она согласится на дележ $a_4 > 0$ сколь угодно близкий к нулю, что изображено нижним концом пунктира. Виктор же тогда получит почти все от оставшегося пирога, то есть почти 1/8. Зная это, на третьем шаге Анна должна предложить партнеру полезность не менее $v_3 = 1/8$, тогда пунктирная линия дает точку 2, где оба имеют примерно по 1/8. Зная это, Виктор на втором шаге предложит партнеру примерно $a_2 = 1/8$, а сам получит остальные 3/8. Аналогично мы получаем SPE: дележ первого шага $a_1 = 5/8,\ v_1 = 3/8$, который и случится, при принятой гипотезе полной рациональности.

Упражнение. Предположите, что дисконты ("кофициенты терпения") Анны α и Виктора β разные, как и в чью пользу (терпеливого ли) изменится решение? Обобщите решение для произвольного числа периодов T, и для бесконечного $T = \infty$, например, переходом к пределу. (Проверьте $A = (1-\beta)/(1-\alpha\beta)$, $V = (1-\alpha)\beta/(1-\alpha\beta)$.)

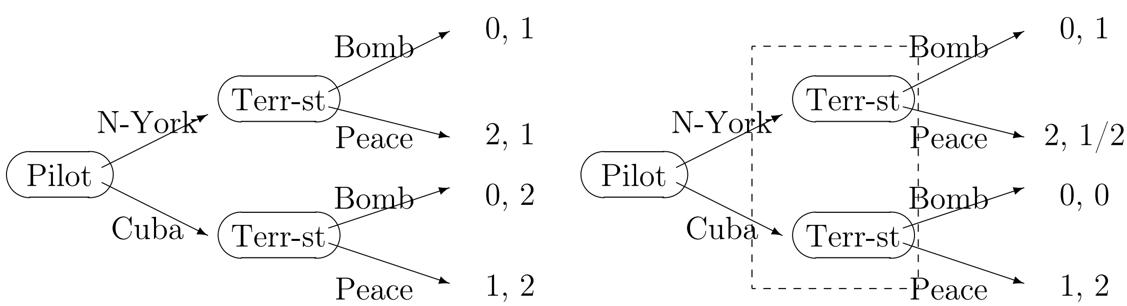
Пример 2.5 Упражнение: Игра входа в отрасль.

Пусть есть отрасль с функцией обратного спроса (ценой от суммарного объема) вида $p(Y) = 9-Y$ и монополистом - старожилом в этой отрасли, с постоянными предельными издержками $\dot{c}_1(y_1) = 1$ (проверьте, что монопольная цена $p^M = 5$). Пусть потенциальный новичок, входя в отрасль, должен сделать невозвратные начальные капиталовложения $K = 1$ и ожидает предельные издержки $\dot{c}_2(y_2) = 2$. Пусть отрасль может просуществовать два периода (можно обобщить на n) и дисконта нет: прибыли сегодня и завтра равноценны, альтернативное вложение капитала K - с нулевым процентом. Старожил обещает новичку в случае входа добиться (повышением выпуска) снижения цены достаточно низко (< 2), чтобы заставить новичка прекратить производство, предполагая, что после этого новичок банкрот и во втором периоде можно сохранять монополию. Если же новичок войдет, то ожидается решение Штакельберга (т.е. $SPE_{Old,New}$): лидер- старожил установит выпуск раньше). Стоит ли верить этой угрозе или он блефует и можно входить? Обобщите задачу для различных данных $\dot{c}_2(y_2) \neq 2,\ K \neq 1$.

2.5 SPE и INDW$_\Gamma$ при равновыгодных исходах или несовершенстве информации

Теперь рассмотрим SPE и INDW$_\Gamma$ в более сложном случае: при совпадении некоторых значений выигрышей и/или при неполной информации о сделанных ходах. Легко увидеть, что здесь, в отличие от случая предыдущей теоремы, решений может быть множество. Но с существованием проблемы могут возникать только при несовершенстве информации.

Пример 2.6 Случай “С” описанной на (Рис. 5) игры возможен, если террорист — психически особенный человек (это с ними бывает): ему все равно, жить или нет (решение он примет случайным образом), но приятнее умереть или жить на Кубе. Тогда возникает много равновесий SPE (все 4 исхода), но ни одного SE_Γ. Действительно, вектор выигрышей пилота при курсе Нью-Йорк (2,0) слабо доминирует над альтернативным, и множество $INDW_\Gamma$ итерационно (слабо) недоминируемых стратегий состоит из двух неэквивалентных исходов: $INDW_\Gamma = \{(N_Y, Peace) \Rightarrow (2,1);\ (N_Y, B) \Rightarrow (0,1)\}$.



Case C: full information, but equal payoffs

Case D: imperfect information

Рис. 5: Игра “Террорист - камикадзе”: много решений SPE $\neq$ SE$_\Gamma$.

В варианте “D” игры “Террорист” выигрыши различны, но неинформированность террориста о ходе летчика (не видно, куда летим) позволяет ожидать от него любых ходов. В результате опять много равновесий SPE (все стратегии), но ни одного SE, поскольку множество $INDW_\Gamma$ итерационно (слабо) недоминируемых стратегий снова состоит из двух неэквивалентных исходов: $INDW_\Gamma = \{(N_Y, Peace) \Rightarrow (2, 0.5);\ (N_Y, B) \Rightarrow (0,1)\}$.

В подобной игре, которая эквивалентна одновременной, и мы видели, что при некоторых вариантах выигрышей (скажем, "Монетки": ((1,0),(0,1),(0,1),(0,1)) ни Нэшевского, ни тем более совершенного в подыграх решения не существует.

Упражнение. Формализуйте графом игру “Выбери масть и картинку” (см. Таблицу 2.7 ниже) и сравните SPE и INDW.???

2.6 Неполная информация о типе партнеров: Байесовское равновесие

Ранее мы предполагали, что игроки либо ничего не знают о целях партнеров (концепции MM, DE), либо знают их точно (SE,SPE). Теперь рассмотрим случай, когда игрок имеет представление о нескольких типах возможных партнеров с известными целями и гипотезу о вероятности встретить каждого из них (Байесовское равновесие). Для этого мы используем общее представление о выборе в условиях риска, разработанное Нейманом и Моргенштерном - максимизацию ожидаемой полезности (см. микроэкономику).

Чтобы ввести понятие Байесовского равновесия, рассмотрим пример “Инспекция”. По сути, это описание равновесия в некоторой популяции инспекторов и нарушителей, но отдельный эпизод встречи такой пары - есть двухшаговая игра. Сначала ходит природа (случай), выбирая типы, которые встретились, а затем одновременно (не видя типа партнера) ходят настоящие игроки.

Пример 2.7 Нарушитель и инспектор. Рассмотрим игру, где две роли: потенциальный нарушитель и инспектор. Например, нарушение состоит в том, чтобы выпить садясь за руль, а инспектор — сотрудник ГАИ. Предположим, в первой роли бывает по два подтипа: “наглый” водитель, который не очень боится штрафов, или “робкий” водитель. Также и инспектор может быть “старательный”, или “ленивый” — то есть сильно недовольный, когда проверит зря. Эти гипотезы отражены в следующей матрице - Таблице 13.

Таблица 13:

Инспекторы:

	Стара-	тельный	Лени-	вый
	Контр-ть	Лениться	Контр-ть	Лениться
Наглый: Пить	3 -1	0 2	1 -1	0 2
Наглый: Не пить	-1 1	0 0	-4 1	0 0
Робкий: Пить	3 -3	0 1	1 -3	0 1
Робкий: Не пить	-1 1	0 0	-4 1	0 0

Чтобы предсказать, какая обстановка сложится на этом посту ГАИ: часто ли водители станут проезжать его с нарушением, и часто ли их будут проверять (что, очевидно, связано), нужно задать гипотезы о частоте, с которой встречаются в природе типы. Пусть “наглым” водитель бывает с частотой $\nu \in [0, 1]$, а робким — $(\nu - t)$, а инспектор бывает старательным с частотой $\mu \in [0, 1]$. Зададим концепцию решения.

Определение 2.6.1 Рассмотрим игру, где имеется n игроков (ролей) $i = 1, .., n$ и каждый из них может оказаться одним из нескольких (T) типов $t = 1, .., T$, (для простоты записи пусть T одинаково во всех ролях) различающихся целевыми функциями, но не возможностями ходов. Пусть каждый игрок/тип (jt) знает "объективные", то есть известные всем вероятности $(\mu_{i1}, .., \mu_{iT})_{\forall i}$ появления типов и максимизирует матожидание своей полезности $U_{jt}(\bar{x})$, зависящее от матрицы $\bar{x} := (x_{it})_{i=1,..,n}^{t=1,..,T}$ текущих стратегий выбранных всеми игроками/типами.[22]

Тогда *Байесовское равновесие* BE есть такой набор $\bar{x}$ стратегий (возможно, смешанных) что ни одному игроку/типу нет выгоды отступать от текущей стратегии при знании частоты типов и гипотезе, что все остальные не отступают от своих. Равновесие называют "вполне разделяющим" (separating equilibrium), если разные типы всех ролей действуют в нем по-разному, его называют "вполне объединяющим" (pooling equilibrium), если разные типы действуют в нем одинаково в своих ролях. В других случаях говорят о частично разделяющем (объединяющем) решении.

Легко заметить, что BE есть (смешанное) SPE в двухшаговой игре, или просто Нэшевское равновесие в подходящим образом заданной игре, а именно в такой, где дополнительный игрок – природа – задал раз и навсегда свои смешанные стратегии $\mu_{i1}, .., \mu_{iT}$ $\forall i$.[23]

Чтобы найти BE в примере "инспектор/нарушитель", будем проверять все варианты. Проверим сначала "разделяющее" равновесие вида ($N_{nagl}, N_{robk}, I_{star}, I_{leni} =$ (Пить,Непить, Проверять, Непр.). Запишем условие, необходимое, чтобы "Наглый" не отступил в этой ситуации от стратегии Пить:

U_{nagl}(Пить, Непить, Контр., Лень)$= -1\nu + 2(1 - \nu) \geq U_{nagl}$(Непить, Непить, Контр., Лень)$= 1\nu + 0(1 - \nu) \Leftrightarrow 2 \geq 4\nu \Leftrightarrow 1/2 \geq \nu$.

Аналогично, чтобы "Робкий" не отступил в этой ситуации от стратегии Непить:

U_{robk}(Непить, Непить, Контр., Лень)$= 1\nu + 0(1-\nu) \geq U_{robk}$(Пить, Непить, Контр., Лень)$= -3\nu + 1(1 - \nu) \Leftrightarrow \nu \geq 1/5$.

Так же проверяя совместимость стратегий Проверять для Старательного и Непроверять для Ленивого с текущими стратегиями Наглого и Робкого, найдем, что огрничения на вероятность $\mu = t$, при которой обсуждаемое "вполне разделяющее" равновесие возможно, должна лежать в пределах ... $\leq t \leq$ ..., ... $\leq \nu \leq$ ....

Могут ли в этой игре быть "объединяющие" или "частично объединяющие" равновесия, то есть такие, где типы в одной из ролей ведут себя одинаково? Рассмотрев матрицу выинрышей, легко установить, что это невозможно. Например, если оба инспектора "Ленятся", тогда оба водителя начинают "Пить". После этого оба инспектора начнут проверять, и так далее, так или иначе, игра не стабилизируется в этом "объединяющем" состоянии. Аналогично проверяется и неравновесность остальных объединяющих состояний. Поэтому решения могут быть только среди "вполне разделяющих" вариантов.

---

[22] Зависимость от ходов игроков той же роли и своего хода практически не используется, но формально удобнее аргументом считать всю матрицу.

[23] Подобного игрока с фиксированной стратегией называют "болваном" ("dummy").

Что же тогда произойдет, когда ν, t не попадают в пределы, при которых возможно "разделяющее" равновесие? Очевидно, Байесовского равновесия в чистых стратегиях тогда нет, игра раскачивается, и нужно обсуждать Байесовское равновесие в смешанных стратегиях, подобное NE_m. Впрочем, легко догадаться, что это и есть NE_m в подходящим образом сформулированной игре описанных игроков; игре между собой и с природой.

Упражнение: найти такое решение.

2.7 Совершенное Байесовское равновесие

Теперь рассмотрим более сложную концепцию, совмещающую вероятностный подход Байесовского равновесия и смешанные стратегии с развернутой (динамической) формой игры.

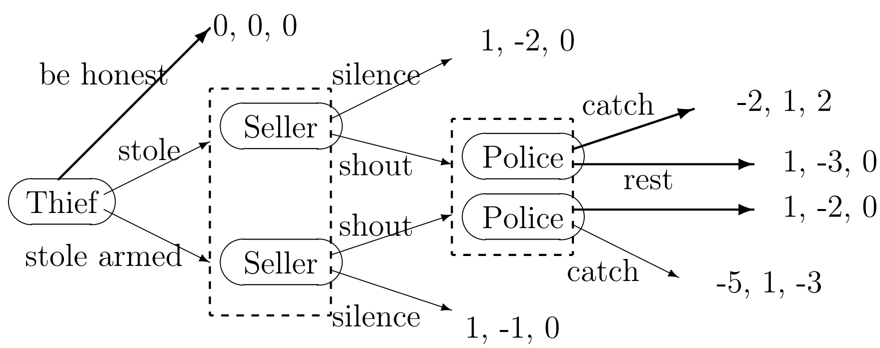


Рис. 6: Игра "Базар": решения SBE.

Пример 2.8 ("Вор на базаре") На Рис.6 представлена игра с несовершенной информация о ходах: второй и третий игроки не способны различать, какой ход сделан первым. Подразумевается популяция трех ролей: Воров, Торговок, Полисменов. Базарный вор может или отдыхать (быть честным), или воровать просто, или воровать с оружием. Торговка может кричать или молчать, когда у нее с лотка тянут товар. Полисмен может или бежать на крик и ловить, или лениться (отдыхать). Записанные на рисунке выигрыши берут за точку отсчета (0,0,0) вариант, когда Вор отдыхает, и остальные - тоже. Когда торговка что-то теряет, ей неприятно, но неприятно вдвойне, если она еще и кричит при этом зря (еще, она побаивается кричать, когда вор вооружен, а не кричать о безоружном считает стыдным, это отражает выигрыш -2 в этом варианте). Если же ее врага-вора поймают - она довольна. О Полисмене, предполагается, что он любит премии за поимку воров, но не любит риска с вооруженными, хотя справится и с таким. О Воре - что он больше отсидит, если пойман с оружием.

Будем рассматривать смешанные стратегии игроков ($\sigma_{thief} \in [0,1]^3, \sigma_{seller} \in [0,1]^2, \sigma_{police} \in [0,1]^2$) как вероятности, с которыми эти ходы в среднем встречаются на описанном базаре. Разыскивая равновесие (то есть стабильное поведение каждого типа), предположим, что ОЖИДАНИЯ всех игроков (предполагаемые вероятности ходов партнеров), а именно: ожидания вора, ожидания торговки, ожидания полисмена — соответствуют наблюдаемым частотам делаемых ходов. Но этого мало, поскольку нужно еще и вне пути игры задать так называемые ВЕРЫ, то есть ожидаемые вероятности нахождения в том или ином узле информационного множества, если игра вдруг, каким-нибудь чудом, туда попадет. Скажем, если все Воры обычно отдыхают, то Торговке, а еще более - Полисмену, все же любопытно знать, с ножом ли тот, кто стащил у нее вещь с лотка, если это случится. Это и есть их (Торговки и Полисмена) априорные, не проверенные жизнью, веры, которые между собой могут не совпадать. Например, Торговка может предполагать частоты верхнего и нижнего узлов графа типа (0.2, 0.8), а Полисмен - (0.9, 0.1), и каждый объявлять свою (возможно, ненаблюдаемую, но известную партнерам) стратегию, исходя из этих априорных вер.

Определение 2.7.1 Совершенное Байесовское равновесие (PBE, называемое также слабым секвенциальным равновесием) в игре n лиц есть набор (σ, μ) смешанных пошаговых (поведенческих) стратегий $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Delta X$ и вер $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \Delta M$ всех игроков,[24] таких что
1) стратегии σ являются секвенциально-рациональными (то есть итеративно недоминируемыми строго на графе), при данных верах μ;
2) веры μ слабо (только на пути игры) согласованы с наблюдаемым стратегиям σ, в смысле Байесовского правила условных вероятностей.[25]
3) это равновесие Нэша.

Проверим, может ли быть решением (Отдыхать,[Кричать,Ловить]) (в квадратных скобках, как обычно, ходы вне пути игры) хоть при каких-либо верах. Заметим, что стратегия торговки КРИЧАТЬ лучше противоположной при ее ожидании от Полисмена хода "Ловить". Полисмен же может продолжать объявлять (только на словах, пока Вор не ворует) стратегию Ловить, только если он верит, что если уж Вор своует, то без оружия. Если же с вероятностью более $2/5$ он верит в противоположное, то отступит от Ловить. Иначе, проверяемое решение может оставаться SBE (а также SPE, NE) при вере более $3/5$ в безоружность, и при любых верах Торговки, возможно и отличающихся от вер Полисмена!

Анализируя эту игру, можно найти, что в ней есть и другие Совершенные Байесовские равновесия, но несовпадение вер торговки и Полисмена в становится невозможным, если Вор хоть иногда ворует: определение PBE не позволяет несоответствие вер практике *на пути игры*.

Упражнение. Пример “Масти и Картинки”.

Здесь предполагается, что строчный игрок выберет: Старшие или Младшие, потом столбцовый - Красные или Черные, потом строчный - конкретную картинку

[24] Множество вероятностных пошаговых стратегий ΔX есть смешанное расширение чистых стратегий - ходов X. Ожидания любого игрока о себе считаем равными его стратегии: $\mu_{ii} = \sigma_i$.

[25] В частности, если все ходы из некоторого узла оканчиваются в одном (последующем) информационном множестве, то веры в нем должны совпадать с вероятностями ходов: $\mu_h = \sigma_{h-1}$.

	Масти:			
	Крас-	*ные*	*Чер-*	*ные*
	Черви ↓	Бубны ↓	Крести ↓	Пики ↓
Старшие: Туз→	8 1	0 3	2 5	0 1
Старшие: Король	6 7	0 1	4 5	2 3
Младшие: Дама	2 3	6 9	8 3	0 1
Младшие: Валет	0 3	4 7	4 9	0 1

Таблица 14: Пример “Масти и Картинки”.

из уже названной группы (из Старших или из Младших), потом столбцовый - конкретную масть из уже названного цвета. Найти SPE, INDW.

Вариант 2: Усложнение задачи - найти SPE, INDW, PBE если последний ход решается жребием - подбрасыванием монетки.

Вариант 3: То же, но результат подбрасывания известен до ходов второму игроку, и только ему.

Вариант 4: Найти SPE, INDW, PBE если *первый* ход решается жребием - подбрасыванием монетки, и никто не видит его.

Пример “Trivial quize” (упрощенный покер)?? Разыгрывая 1 рубль, Анна тянет карту из колоды , где карты от 10-ки включительно до Туза, смотрит, и не показывая Борису (у которого открыт Валет), или удваивает ставку, или пасует и имеет -1, а Борис 1. Если удвоено, Борис или пасует и имеет -2, а Анна 2, или удваивает, и карта открывется. Если она больше, чем Валет, то Анна выиграла 4 у Бориса 4, иначе проигрывает 4. Найти SBE (частоты ходов при каждой карте).

2.8 $PBE(\varepsilon)$, секвенциальное равновесие (SeqE), $THPE$

В примере “Базар” проявилась логическая неясность понятия PBE: в нем разные игроки могут иметь разные ожидания об одном и том же партнере вне пути игры. Реалистично ли это? И вообще, как обосновать ожидания игроков о тех ветках игры, которые никогда не реализуются? Это важно, поскольку от этих ожиданий зависят решения, и они могут оказаться логически сомнительными. Устранению этой неясности и сужению множество возможных решений служат понятие $PBE(\varepsilon)$ и понятие (сильного) секвенциального равновесия SeqE.

Определение 2.8.1 *Для заданного малого $\varepsilon > 0$ назовем ε-совершенным равновесием ($PBE(\varepsilon)$) - такой набор смешанных мультиперсонных стратегий $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ и вер $(\mu_1, ..., \mu_n)$, что веры слабо согласованы со стратегиями, а все стратегии секвенциально- рациональны при дополнительном ограничении: ни один ход не может иметь вероятность применения меньше ε.*

По сути, это определение модифицирует PBE, вводя возможность не-рациональных ходов игроков: у любого может "рука дрогнуть", можно ошибиться. То есть, предполагается, что есть случайности, и вероятность всякого хода не менее $\varepsilon > 0$. Важность этой гипотезы видна из примера.

Пример 2.9 Игра "Возьми или оставь" ("сороконожка"):

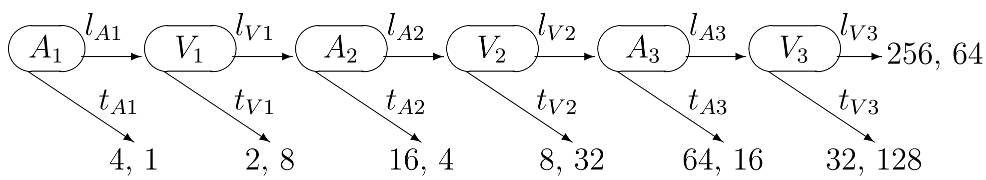


Рис. 7: Игра "Возьми или оставь" (Rosental, 1956?).

Пусть первый из двух игроков (Анна) может взять 4/5 общей прибыли (то есть \$4 из \$5 на ветви $take_{A1}$) на шаге 1, тогда игра закончится, а второму - Виктору - останется \$1. Либо можно оставить банк на столе ($leave_{A1}$). На шаге 2 прибыль удваивается (например, ведущим), и черед 2-го выбирать: взять ли 4/5 прибыли (то есть \$8 из \$10-и) и закончить тем самым игру, или оставить, и т.д. Предсказывая исход для конечной (скажем, по 3 хода каждого) игры по принципу SPE, PBE, или $THPE$ (определено ниже) мы увидим, что игра тривиально закончится на 1-м шаге $take_{A1}$ с выигрышами (4,1). А по принципу решения $PBE(\varepsilon)$ она может дойти до конца с большой суммой прибыли. (Здесь $\varepsilon-$ вероятность не ниже которой ожидается от любого хода, благодаря случайному поведению – иррациональности).

Покажите, что $\varepsilon > 1/7$ достаточно для ходов типа $leave_i$ и продолжения игры до счастливого конца (или хотя бы для продолжения рациональных ходов до узла V_3). Какое ε *необходимо* для рациональности ходов типа $leave_i$ в конечной и бесконечной играх? Достаточно ли его также и в бесконечной игре?

Но гипотеза о некотором $\varepsilon > 0$ кажется произвольной: какое именно ε реально? Можно предполагать "очень малую" вероятность случайных ходов, тогда формируя концепцию решения приходится переходить в предел $\varepsilon - > 0$. Этим путем мы и пойдем, только предполагая неодинаковые частоты случайных ходов $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ у разных игроков, и будем идти в предел по "определенному направлению". Содержательно, идея секвенциального равновесия, вытекающего из этой идеи, описывается так. В популяции игроков (типов), которую мы рассматриваем, была некоторая предыстория нынешнего состояния. Все игроки ошибались, делая случайные ходы, и все предположения и веры о том, что обычно происходит в каждой информационной позиции или узле игры - обоснованы этой предысторией. При этом частоты случайностей уменьшались, возможно неравномерно, и сейчас оказались практически нулевые. Но наши теперешние веры у всех *одинаковы и обоснованы* предысторией, что формально концепцию можно выразить так.

Определение 2.8.2 (Сильное) секвенциальное равновесие SeqE в игре n лиц есть набор $(\bar{\sigma}, \bar{\mu})$ смешанных пошаговых (поведенческих) стратегий $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, ..., \bar{\sigma}_n) \in \Delta X$ и вер $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_n) \in \Delta M$ всех игроков, таких что
1) стратегии $\bar{\sigma}$ являются секвенциально-рациональными (то есть итеративно недоминируемыми строго на графе), при данных верах $\bar{\mu}$;
2) веры $\bar{\mu}$ *сильно* согласованы с наблюдаемым стратегиям $\bar{\sigma}$, в том смысле, что существует последовательность вполне смешанных стратегий $\sigma^{(k)} \to \bar{\sigma}$ сходящаяся к равновесной, по которой однозначно строится последовательность вер $\mu^{(k)} \to \bar{\mu}$, сходящихся к $\bar{\mu}$.[26]

Если к тому же стратегии $\bar{\sigma}$ секвенциально-рациональны не только при финальных верах $\bar{\mu}$, но и при всех поздних (начиная с некоторого номера) членах построенной последовательности вер $\sigma^(k)$, то это равновесие SeqE называют (Совершенным) Равновесием дрожащей руки THPE (Trembling Hand Perfect Equlibrium).

Традиционно решения SeqE и THPE определяют только для смешанных стратегий, так что можно обозначать SeqE $\equiv SeqE_m$ и THPE $\equiv THPE_m$. Однако нам здесь удобно определить эти концепции и для чистых стратегий (pure strategies), а именно — это те чистые стратегии, которые входят в соответствующее множество секвенциальных или "дрожащих"равновесий:

$$THPE_p := \{s \in THPE_m |\ s - \text{integer}\ \}, \quad SeqE_p := \{s \in SeqE_m |\ s - \text{integer}\ \}.$$

2.9 Сопоставление решений SPE, SBE, SeqE, THPE, INDW

Введенные понятия $SeqE$, $THPE$, и идеи случайных ходов оправдывают выделение равновесий со слабым доминированием типа INDW (или SE) среди равновесий типа SPE. Действительно, все слабо доминируемые стратегии отбрасываются, если есть вероятность (даже если она близка к нулю) любого исхода. Поэтому, во многих играх окажется $THPE = INDW$, и в любом случае $THPE \subset INDW$ (проверьте это).

В сущности, понятия $THPE$ и NE_m кажутся полюсами (самое узкое и самое широкое), между которыми вмещается большинство остальных некооперативных концепций как частный случай Нэшевских решений. Действительно, SPE обобщается до смешанного SPE_m, а смешанное - шире прочих концепций. По определениям можно обосновать важный граф вложений (его края смыкаются, что отражено повторами обозначений):[27]

[26]В частности, если все ходы из некоторого узла оканчиваются в одном (последующем) информационном множестве, то веры в нем должны совпадать с вероятностями ходов: $\bar{\mu}_h = \bar{\sigma}_{h-1}$.

[27]Под SPE_{mul} подразумевается решение SPE в мультиперсонном представлении игры, которое бывет шире обычного.

$$\begin{array}{ccccccccc}
SPE_{mul} & SPE_m \supset PBE_m \supset SeqE_m \supset & \mathbf{THPE_m} & \subset INDW_{m\Gamma} \subset SPE_m \subset NE_m & \\
\cup & \cup \quad \cup \quad \cup & \cup & \cup \quad \cup \quad \cup & (9)\\
& SPE \equiv SPE_p \supset PBE_p \supset SeqE_p \supset & THPE_p & \subset INDW_{p\Gamma} \subset SPE_p \subset NE_p \equiv NE. &
\end{array}$$

Здесь центральное положение занимает наиболее узкая, наиболее рафинированная концепция с еще гарантированным существованием (см. теорему ниже) – это THPEm. Из приведенных вложений следует существование и всех включающих THPEm решений. Для существования же всех концепций из нижней цепочки нужны дополнительные условия, как показывают примеры несуществования наиболее широкой из них концепции NE. Например, $INDW_{p\Gamma}$, $SeqE_p$ и более широкие концепции развернутой формы существуют при совершенстве информации (отсутствии нетривиальных информационных множеств).

Благодаря приведенным выше цепочкам вложений, существование всех названных (смешанных) решений можно вывести из существования THPE. Сформулируем его условия (доказательство этой непростой теоремы мы опускаем).

Теорема 4 *В конечной игре с полной рациональностью (хотя, возможно, и несовершенной информацией о ходах) существует смешанное Равновесие дрожащей руки ($THPE \neq \emptyset$).*

Следствие: $NE_m \neq \emptyset,\ PBE \neq \emptyset,\ INDW_\Gamma \neq \emptyset,\ SPE_m \neq \emptyset.$

Сложное доказательство опускаем.

Сопоставим концепции далее: решение $THPE_p$ в большинстве случаев совпадает с $INDW_\Gamma$, расхождение мне (С.К.) неизвестно. Равновесие Нэша – это SPE в одношаговой игре с одновременными ходами. Пара равновесие Штакельберга – это просто SPE двухшаговой игры, когда лидер ходит первым (а по сравнению с "оптимистическим Штакельбергом” SPE может включать еще какие-то исходы). Максимин может быть аппроксимирован $PBE(\varepsilon)$-равновесиями модифицированной игры, при элементарных функциях полезности участников с очень большим неприятием риска.

С другой стороны, полезно продемонстрировать, что понятия SPE, SBE, SeqE не тождественны, и понять, почему.

Пример 2.10 (“Ослик” Зелтена) *.....*

Итак, мы представили широкий арсенал концепций решений, применимых в разных ситуациях игр и их связи. Подбор адекватной модели (графа) и концепции игрового решения под жизненную ситуацию – творческое дело исследователя, требующее знания содержательной стороны дела. Ничем, кроме примеров, учебник здесь не поможет.

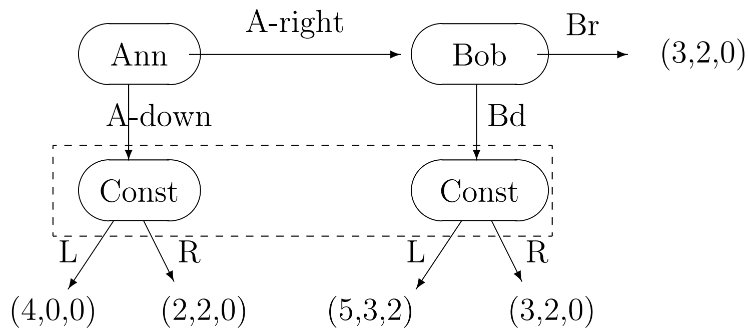


Рис. 8: Игра “Ослик” (Selten, 198..?).

Это завершает рассмотрение "популяционных’ игр, характеризующихся полной рациональностью. Теперь мы займемся играми с более сложной информационной структурой, чем "популяционные”. В принципе, все введенные концепции решений применимы и в них, в том числе в играх с несовершенной рациональностью или необщим знанием, в повторяющихся играх одной пары партнеров. Но в них есть и специфика, и другие решения.

2.10 Отсутствие "общего знания", игры с репутацией, блеф

Изменим гипотезы игры “сороконожка”, добавив к возможности иррациональных ходов неопределенность знаний о степени иррациональности партнера (это уже не “общее знание”). Окажется, что концепция решения $PBE(\varepsilon)$ должна модифицироваться, и включать характеристику информации.

Пример 2.11 (Продолжение игры “Бери или оставь”) (“Сороконожка”)
Пусть, в разобранной выше игре “сороконожка” ситуация изменилась: игрок Victor слышал, что Анна в подобной игре из 10-ти ходов сделала 1 иррациональный (невыгодный, ошибочный), и ожидает, соответственно, вероятность иррациональности около $\alpha = 1/10$. Аналогично, Анна слышала, что Виктор в подобной игре из 30-ти ходов сделал 2 иррациональных хода, она ожидает вероятность иррациональности $\beta = 2/30$ (это окажется не то же, что 1/15!). Предположим, игроки считают рациональным *брать* банк, когда вероятность ошибки партнера больше 1/7 и ожидают от партнера такого же мнения. Очевидно, при такой “простоватой” рациональности, Анна на первом ходу ВОЗЬМЕТ (если не ошибется). Но если он ошибется, возьмет ли Виктор? Он может интерпретировать *оставление* Анной как ошибку, и тогда подправить свою субъективную вероятность ошибок А до величины (1+1)/(10+1)=2/11. Либо считать случившееся *оставление* рациональным ходом, и сделать отсюда вывод о текущих гипотезах ($\beta =$?) Анны относительно себя (Виктора). Независимо от того, верны ли эти гипотезы, выгодно ли теперь Виктору *оставлять* и пойдет ли игра до узла V_3?

1)По сравнению с предыдущей ситуацией, оставим Виктора “простым”, а первого игрока предположим способным рассчитать предыдущую ситуацию. Станет ли он на первом шаге ОСТАВЛЯТЬ, независимо от своих гипотез о партнере (БЛЕФОВАТЬ)? Пойдет ли игра до 6-го хода?

2)Что если теперь оба игрока “сложные”, и В просчитывает возможность блефа первого (считающего второго простым), изменит ли это результат?

2.11 Уточнение понятия рациональности; прямая индукция. Игры с несовершенной рациональностью.

Кольберг и Мертенс (1986) предложили возможность сужения множества совершенных или других равновесий основанных на обратной индукции с помощью “прямой индукции”. По сути дела она означает решение игры по доминированию и в развернутой и в нормальной форме (по определенному порядку), и пересечение множеств ответов. Это затрагивает фундаментальный вопрос о “creadible commitment”,[28] поднятый Нейманом и Моргенштерном: всегда ли игроки могут до игры рассчитать свои оптимальные стратегии (планируемые реакции на возможные ходы/информацию), а затем только придерживаться их? Часто это не так, и игроку было бы выгодно с самого начала объявить свою стратегию, и лишить себя возможности передумать затем в ходе игры (см. игру “Цезарь сжигает мосты” в задачнике). В следующем же примере (Рис. 9) противоречия не возникает, и прямая индукция выглядит обоснованно.

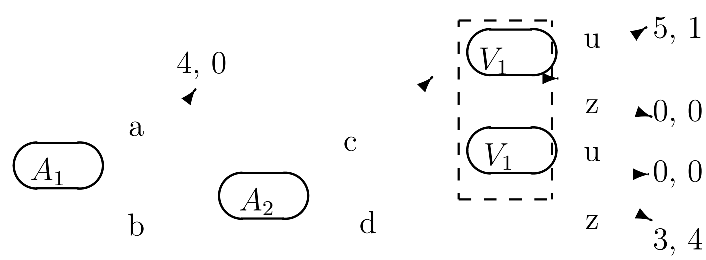


Рис. 9: Прямая индукция.

В этой игре Виктор в ситуации V_1 не знает, сходила ли Анна c или d. Здесь два последовательных равновесия SPE в чистых стратегиях (и еще одно в смешанных): $(a,[d,z])$, (b,c,u). Однако, только последнее остается, если рассматривать прямую индукцию, определяемую так. Приведя эту игру к нормальной форме заметим, что стратегия Анны (b,d), сильно доминируется ее стратегией (a). Зная это, Виктор, в случае наблюдаемого хода (b), должен решить, что Анна имела в виду стратегию (b,c), и сходила (c) а не (d). Тогда ему разумно ходить (u), другой ответ на (b) нерационален. Зная это, Анна пойдет (b) а не (a), и получит 5. Так дополнительные соображения о рациональности по “прямой индукции” сузили множество ожидаемых исходов игры.

[28]Этот термин в играх означает “выполнимое обещание”.

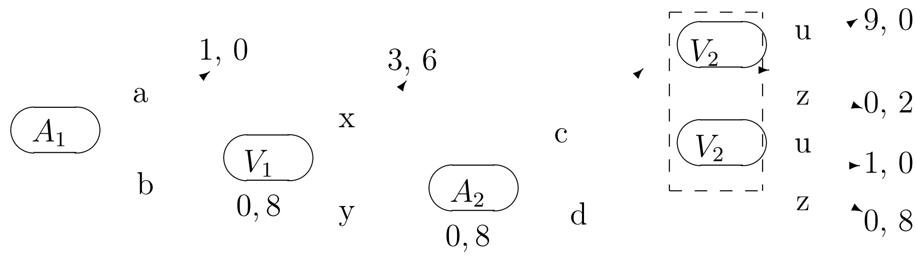


Рис. 10: Прямая индукция при неполной рациональности.

Однако в другой подобной игре (Рис. 10) подобные соображения могут быть обоснованы только неполной рациональностью; множества решений по прямой и по обратной индукции не пересекаются!

На Рис. 10 игроки ходят по очереди, и Виктор также на последнем ходе не знает предыдущего хода Анны. Но это ему и не нужно, ведь в любом случае он сходил бы вниз: (z), этот ход строго доминирует над (u). Поэтому единственное SPE $=(a, [y, d, z])$. Если же мы переведем эту игру в нормальную форму (Табл. 15), то окажется, что стратегия Анны (bc) слабо доминирует над (bd). Одновременно стратегия Виктора (x) слабо доминирует над (yu). Затем (bc) сильно доминирует над (a) и единственное SE$=(b, x, [, z]) \neq$ SPE. Поэтому SE не кажется рациональным: как можно верить, что в ситуации A_2 Анна пойдет вверх на (c) ожидая на это рациональный отклик (z)? Но, с другой стороны, в ситуации V_1 Виктор может рассуждать и так: а почему же она вообще пошла сюда, в этот узел, если предполагает меня рациональным? Это невозможно. Тогда она может ожидать от меня иррационального хода: (u). И ожидая его, планировать ход (c). Тогда Виктор ходит (x) и SE действительно реализуется. При этом, возможно, Анна блефовала, демонстрируя ходом (b) свое неверие в рациональность Виктора, и получила 3 от блефа вместо 1 по тривиальной стратегии a.

Anna\ Victor	x	yu	yz
a	1, 0 (SPE, SE_Γ)	1, 0	1, 0
bc	3, 6 $(SE_{forward})$	9, 0	0, 2
bd	3, 6	1, 0	0, 8

Таблица 15: Прямая индукция.

После хода (b), Виктору надо решить что это: взятие на пушку, глупость или подозрение партнера в глупости. В последних случаях надо ходить вверх! При гипотезе же полной рациональности обоих (известной обоим), нужно не покупаться на блеф, ходить вниз (y, z) и иметь 8. С другой стороны, если бы Анна имела возможность объявить, владея “creadible commitment”, стратегию (b, c) и не отступать от нее, то реализовала бы выигрыш 3. Тогда, при “creadible commitment”, Виктор вынужден отступить на (x).

Мораль из этого примера: в ситуациях неполной рациональности игрок может стараться сделанным ходом сигнализировать о своих гипотезах (истинных или блефовых) относительно партнера, к своей выгоде. Это практически эквивалентно сигнализированию о своем типе в Байесовских играх.

Аналогично, применение стратегий, а не ходов, резонно в повторяемой игре, где игрок способен завоевать репутацию. Тогда прямая индукция правдоподобна.

Упражнение. В примере "футбол или кино" (Рис. 1), рассмотрите следующую модификацию. Пусть, Виктор общается с Михаилом, который наверняка увидится с Анной до вечера, до выбора футбол/кино, но стесняется прямо попросить Михаила передать Анне просьбу прийти на футбол или в кино. Он сжигает 1 рубль на глазах Михаила, никак не объясняя своего поступка, но надеясь, что тот расскажет Анне об этом странном случае, и та сделает выводы. Покажите прямой индукцией, что это сжигание – разумный ход Виктора.

.....

2.12 "Почти-совершенная" информация: повторяющиеся игры с угрозами.

"Почти-совершенной" называют информацию о всех сделанных ходах, кроме последнего или текущего. Подобная ситуация возникает в весьма распространенном классе "повторяющихся" игр. Это такие игры, где участники ходят одновременно, затем одновременно наблюдают результат действий партнеров, еще раз разыгрывают эту же игру, и т.д. Например, игра "Монетки", "Перекресток", "Футбол или кино" – могут быть разыграны в повторяющемся режиме. Что тогда изменится в типе решения?

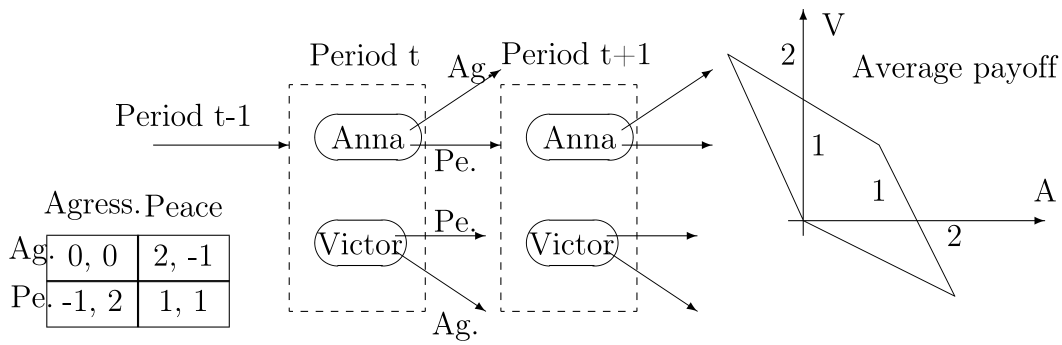


Рис. 11: Повторяющаяся игра “Камень в огород”.

Строго говоря, при анализе такой игры уже нельзя обойтись просто матрицей нормальной формы игры. Правильный подход – рассматривать дерево игры с повторяющимися элементами, конечное или бесконечное. Оказывается, что решения при этом могут существенно отличаться от решений однократной аналогичной игры.

Пример 2.12 (“Камень в огород”) (или повторяющаяся “Дилемма заключенных”) Предположим, два недолюбливающих друг друга соседа имеют выбор: бросить соседу камень в огород, уходя утром на работу, или воздержаться.[29] Выигрыши заданы следующей игрой в нормальной форме..

Очевидно, структура игры та же, что в “дилемме заключенных”. Поэтому единственное строго доминирующее равноесие SDE (и одновременно единственный не-Парето-эффективный исход!) есть (Агрессия,Агрессия). Теперь рассмотрим дерево этой игры на конечном интрвале времени, предполагая цели игроков в виде дисконтированной суммы выигрышей по периодам. Окажется, что совершенное в подыграх равновесие (SPE) то же, что и DE: $(Agress., Agress.)^4 = ((Agr., Agr., Agr., Agr.,),$ $(Agr., Agr., Agr., Agr.,))$. Теперь отметим, что “нормальной стратегией” является не просто ход, а последовательность ходов. А стратегией в более общем смысле является объявляемая функция отклика: это последовательность реакций на каждом этапе на каждую из возможных наблюдаемых ситуаций. Поэтому точнее приведенное решение будет записать так: $SPE = \{((Agr., Agr., Agr., Agr.,)_{anyway},$ $(Agr., Agr., Agr., Agr.,)_{anyway})\}$.

Кроме этого, теоретически, можно рассмотреть и такие стратегии “максимального наказания”:

$\{(Peace, Peace, Peace, Peace,)_{for\ peaceful\ partner},$

$(Peace, ..., Agr., Agr.,)_{for\ agress.\ partner}\},$

[29]Аналогичная игра возникает во многих практических ситуациях. Например, между двумя олигополистами, каждый из которых может снизить цену продукта в некотором периоде, и отнять у конкурента долю рынка, зная, что тот может тоже ответить “агрессией”.

то сеть, обещание быть мирным, пока партнер мирный, иначе переключаться на агрессию до конца веков. Однако эти стратегии "максимальной угрозы" (обещание мстить за агрессию максимально, иначе сохранять мир) не рациональны в смысле SPE в конечной игре, рациональна только чистая агрессия. В бесконечной же игре они могут быть рациональны! (Считают, что целевые цункции бесконечной игры есть взвешенные с некоторым дисконтом выигрыши моментов игр.) Проверьте, что при дисконте близком к 1 (слабое убывание полезности) кроме "максимальной угрозы" много и других решений: скажем, когда оба партнера агрессивны только по понедельникам, а мстят за отступления от этого объявленного правила ограниченное число периодов, Обобщим эту идею.

Теорема 5 ("Народная теорема" (Folk Theorem):) *В бесконечной повторяющейся игре, если дисконт стремится к единице, множество возможных средних выигрышей стремится к множеству всех выигрышей выше гарантированных.*

Доказательство мы опускаем. Иллюстрацией смысла теоремы служит Рис.11. Множество возможных выигрышей - четырехугольник, помеченный (1,1). .....

2.13 Игры с несовершенной памятью, и другие несовершенства рациональности

До сих пор мы предполагали, что каждый игрок помнит все, что он знал ранее, в том числе собственные предыдущие ходы. Иногда это не так: в картах слабые игроки нередко не помнят вышедших карт, даже своих. Как моделировать подобные ситуации? Очевидный ответ – с помощью мультиперсонного представления игры: одного и того же игрока нужно считать другим (хотя с теми же целями), после того, как он забыл часть информации.

Пример 2.13 ("Бабушка и очки".) Бабушка снимает очки, и идет умываться, а очки кладет на видное место у выхода из ванной. Она знает, что не вспомнит, куда их положила, и проектирует ситуацию, чтобы на них наткнуться. В данном случае, она смоделировала себя как другого игрока, чей ход (искать очки) состоится после умывания первого игрока, и приняла адекватное решение (постройте дерево игры и SPE).

Аналогично, мультиперсонное представление помогает моделировать ситуации, когда иррациональность участников заключается в изменении их целей по ходу игры.

Пример 2.14 ("Курильщик" (D.Kahneman, A.Tversky, 1982).) Бывший курильщик наиболее предпочитал бы выкуривать 2 сигареты в день, менее приятно для него совсем не курить, а совсем нехорошо (врачи запрещают) курить пачку в день. Он бы и выбрал 2 сигареты, но знает, что тогда предпочтения его изменятся, он не удержится, и будет курить пачку. Поэтому он останавливается на полном воздержании (постройте дерево игры и SPE).

В противоположность двум приведенным примерам иррациональности, рассмотрим ситуацию, которая кажется иррациональной, но ей не является.

Пример 2.15 ("Честный дележ") *(см. J.Tirole 2001), A.Rubinstein 2002 - доклад в РЭШ)* Паре игроков ведущий обещает $ 100 если дележ, предложенный первым будет принят с первого раза вторым. С точки зрения кооперативных игр, Истинная иррациональность может иметь разные причины: - несовершенный расчет игры; - несовершенная память; - изменение целей в ходе игры; - иррациональные предпочтения (неполные или нетранзитивные). Мы видели, что модели теории игр, с некоторыми модификациями, оказываются пригодны и к этим ситуациям. Теперь мы покажем, что они пригодны и к некоторым ситуациям совсем без рациональности.

2.14 Игроподобные ситуации без рациональности: псевдооптимизация. Эволюционное равновесие.

Биологи, исследуя популяции животных, построили различные модели динамических систем их взаимодействия. Системы могут иметь равновесия или не иметь (раскачиваться). В частности, хорошо известны модели Вольтерра “хищники и жертвы”, описывающие динамику совместных колебаний численности популяций, например, волков и оленей, связанных в экосистеме.

Нас будут интересовать те ситуации, где переменными являются различные варианты поведения. Окажется, что даже если особи совсем иррациональны (болваны), результирующие равновесия чем-то похожи на рациональное (оптимизирующее) поведение. Это не удивительно, поскольку даже в неживой природе некоторые явления хорошо описываются оптимизационной моделью, например, расположение воды налитой в емкость минимизирует высоту ее центра тяжести. Такие явления можно назвать “псевдооптимизацией”: оптимальный, в некотором смысле, исход в отсутствии оптимизирующего субъекта. Это феномен, волновавший религиозных мыслителей и Дарвина, в связи с естественным отбором. Когда игрок не один, то (Парето) оптимальность не гарантирована естественным отбором. Рассмотрим подобную ситуацию - равновесие типа Нэшэвского, но без рациональных субъектов.

Пример 2.16 (“Голуби и ястребы” (см. Ordeshook, p.183)) Пусть популяция воробьев (пример можно применить и к другим животным, или к *популяции типов поведения* людей) состоит из 2 типов птиц: “Агрессивный” (как ястреб) или “Мирный” (как голубь), причем ни один не меняет своего типа поведения (они “болваны”). Но тот тип, который в среднем имеет лучшее благосостояние, обильнее и размножается (либо особи перенимают образ поведения субъектов, выглядящих успешными). Так или иначе, доля агрессивных воробьев в популяции со временем будет возрастать, если они “обыгрывают” более мирных, и наоборот.

Предположим, тип поведения проявляется возле куска корма: двое мирных особей встретившись — вместе его клюют, мирный отступает перед агрессивным, а двое агрессивных деруться, с обоюдными потерями. Эти гипотезы о выигрышах в каждой из 4-х возможных комбинаций (кто с кем окажется возле корки хлеба) отразим матрицей выигрышей:

Обозначим $\alpha(t) \in [0,1]$ текущую долю агрессивных птиц в популяции, тогда $\mu = (1-\alpha(t)) \in [0,1]$ есть доля мирных.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях NE_m, понимая его как стационарное состояние $\bar{\alpha}$ доли агрессивных птиц, то есть решение уравнения:

		Второй воробей	
		агресс.	мирный
Первый воробей	агрессивный	-1 -1	0 2 SNE
	мирный	2 0 SNE	1 1

Таблица 16: “Голуби” и “ястребы”.

$U(\bar{\alpha},(1-\bar{\alpha})) = -1\bar{\alpha} + 2(1-\bar{\alpha}) = 2 - 3\bar{\alpha} = U(1-\bar{\alpha},\bar{\alpha}) = 0\bar{\alpha} + 1(1-\bar{\alpha}) = 1 - \bar{\alpha}$, $\Rightarrow \bar{\alpha} = 0.5$. При такой доле агрессивных эта пропорция могла бы не меняться.

Заметим, что кроме найденного симметричного равновесия NE_m $\bar{\alpha} = 0.5$ в системе есть и два крайних равновесия Нэша в чистых стратегиях: (Агр.,Мирн.), (Мирн.,Агр.), однако они не отвечают содержательной формулировке “игры”: нельзя придумать долю α отвечающую этим ситуациям. Напротив, содержательно возможны крайние ситуации, когда какого-то типа просто нет: $\tilde{\alpha} = 0$, $\hat{\alpha} = 1$. Однако, как легко проверить, в отличие от первого, они неустойчивы к возможным *мутациям*, то есть к ненулевой вероятности случайного появления особей любого типа (аналог случайных ходов в ситуациях с рациональностью).

Понятие *локальной устойчивости* эволюционных равновесий в системах такого типа можно сформулировать так. Пусть есть n типов игроков $i = 1, ..., n$ с одинаковыми целевыми функциями $u_1(.) = ... = u_n(.) = u(.)$, доли их в популяции есть $\alpha_1, ...\alpha_n : \ \alpha_i \in [0,1], \ \sum_i \alpha_i = 1$ (в иной интерпретации, это одинаковые игроки, а $\alpha_1, ...\alpha_n$ есть частоты применения чистых стратегий).

Определение 2.14.1 В описанной ситуации набор стратегий (типов поведения) $(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_n)$ называется “эволюционным равновесием” EvE, если для любого типа поведения i выполняется $u_i(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{-i}) > u_i(\alpha_i, \bar{\alpha}_{-i})$ $\forall \alpha_i$ (стратегия $\bar{\alpha}_i$ строго предпочтительна при равновесных стратегиях партнеров $\bar{\alpha}_{-i}$), либо $u_i(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{-i}) \geq u_i(\alpha_i, \bar{\alpha}_{-i})$, $u_i(\bar{\alpha}_i, \alpha_{-i}) > u_i(\alpha_i, \alpha_{-i})$ $\forall (\alpha_i, \alpha_{-i})$ (стратегия $\bar{\alpha}_i$ нестрого предпочтительна, но начинает строго предпочитаться при отклонении партнеров от Нэшевского решения).

Итак, эволюционно- устойчивые стратегии - это Нэшевские стратегии от которых к тому же строго вредно отклоняться при сохранении позиций партнеров, или при отклонении партнеров. Эволюционное равновесие - профиль таких стратегий. Очевидно, $SNE \subset EvE \subset NE$.

Заметим, что показанный эволюционный подход применим и к случаям частичной рациональности такого типа: участники популяции (особи) — это не люди или животные, а бытующие типы поведения. А игроки — люди или животные — поступают тем или иным образом случайно, с некоторой текущей частотой $\alpha(t)$, не занимаясь настоящей оптимизацией, но несколько увеличивая частоту тех ходов, где они в среднем, по опыту, больше выигрывают. Мутации есть случайные ходы. Концепция равновесия и результат в таких ситуациях те же, что в популяциях с реальными особями типа "болванов" (dummy).

Упражнение. В описанной в предыдущем примере ситуации с воробьями, предположите, что есть еще один тип воробьев, его доля в популяции β, он называется "буржуазным", поскольку уважает собственность. Подразумевается, что если такой воробей нашел корм первым, то считает его своим и дерется с любым претендентом, получая выигрыш (-1), как и претендент. Если же он подходит к корму вторым, то с мирным напарником кормится вместе (выигрыши (1,1)), а агрессивному уступает (выигрыши (0,2)). Считая вероятность быть первым 1/2 и усреднив, получим, что выигрыши равны $u_\beta(\beta, \alpha, \mu) = -1\alpha + 1\mu + 1\beta$... Найдите эволюционное равновесие (β, α, μ) (только ли "буржуазные" типы поведения останутся, единственно ли EvE?).

Пример 2.17 ("Обезьяны: альтруисты и эгоисты") Пусть, на равнине, равномерно покрытой джунглями рассеяна популяция обезьян. Обязьяна может быть типа альтруиста, вычесывая блох у соседей, либо типа эгоиста, подставляя спину другим, но сама не вычесывая. Предположим, что у каждой обезъяны 8 соседей (как у клетки на шахматной доске), и полезность ее возрастает пропорционально числу альтруистов среди них, но убывает по размеру собственных усилий. Покажите, что при подобной целевой функции окажется, что в этом лесу единственное эволюционное равновесие – полный эгоизм. Напротив, при некоторых параметрах подобной целевой функции и возможности парных мутаций нет эволюционных равновесий: возникающая в эгоистичном лесу пара альтруистов растет, как пятно, в ней возникает пятно эгоистов, и т.д. Подобная ситуация возможна и при единичных мутациях: не из всякого начального положения устанавливается равновесие. В другом варианте игры: когда альтруизм гаснет, если не взаимен – возможно равновесие с полным альтруизмом (точнее, дружелюбием), мутации эгоистов подавляются эволюцией.

Эти соображения о возможности предсказания эволюционных равновесий без рациональности хорошо переносятся с популяций животных и на "популяции" типов поведения людей. Дело в том, что в истории многие сообщества чаще всего не были способны свободно "конструировать" типы поведения, даже если они признавались полезными (вопреки Ж.-Ж.Руссо). Традиционализм перевешивал изменчивость. Нормы возникали, скорее, эволюционно. Другая причина применимости эволюционной концепции та, что даже в бизнесе, тот или иной тип маркетингового поведения зачастую слишком трудно просчитать и оптимизировать. Практически, популяция торговцев просто "пробует" (мутации) множество разных типов поведения, и некоторые из них выживают в равновесии, а неуспешные торговцы "обезъянничают" у успешных или выходят из игры (в обоих случаях их прошлый "тип поведения" погибает). Тем самым, ограниченная рациональность торговцев не препятствует описанию ситуации игроподобной моделью с максимизацией прибыли.

2.15 Содержательное сопоставление различных концепций решений игр

В заключение обзора (заведомо неполного) различных концепций решений игр попробуем сопоставить их между собой; в какой мере некоторые концепции могут считаться частным случаем других или, наоборот, отражать принципиально разные ситуации?

Прежде всего, сопоставляя некооперативные (NE, MaxMin) и кооперативные концепции решений (например, ядро, Парето-границу), можно заметить, что вторые, в отличие от первых, служат скорее критериями оптимальности для определенных ситуаций, чем способами предсказать исход. Действительно, указывая ядро как некоторое множество "интересных" исходов в ситуации, где возможны переговоры, следовало бы указать еще процедуру, которой будут вестись переговоры, построить по ней соответствующую некооперативную игру (кто что может предложить, кто отказаться, и т.д.) и тогда уже пытаться предсказать исход. Причем, исход при некоторых механизмах (дележ Шепли) может быть и не в ядре. Однако, польза простой концепции ядра как именно предсказательной концепции в том, что многие сложные реальные процедуры приводят к ядру, и мы можем иногда предсказывать множество потенциальных исходов *не зная конкретной процедуры*, а лишь ее принадлежность этому классу.

Далее, обсуждая некооперативные концепции, из предыдущего должно быть ясно, что статическая игра – это частный случай динамической, а именно, это одно-периодная игра с одновременными скрытыми ходами партнеров. В таком разрезе, прямо по определению, решение Нэша есть SPE этой игры (не имеющей дополнительных подыгр). Но тонкость в том, что это же решение Нэша может быть применимо и к повторяемой игре с такой же структурой возможных ходов и выигрышей, в том числе - к игре бесконечной. Тогда его нужно рассматривать как одно из совершенных в подыграх равновесий (SPE) этой повторяемой игры, такое, где ходы неизменны от раунда к раунду (см. ситуации с Folk Theorem). Именно в этом смысле его называют "равновесием", хотя строгое обоснование того, что это действительно равновесие должно проводиться именно через соответствующую развернутую форму динамической игры. Итак, NE – это простая концепция, иногда применимая к весьма сложной ситуации, которую мы пытаемся прогнозировать *не зная конкретной динамики*.

Напротив, решение Штакельберга, возникшее первоначально для "статических" игр, на самом деле выражает совершенно определенную динамику: на первом этапе ходит лидер, затем одновременно (по Нэшу) – его последователи. Итак, StE есть SPE в подходящим образом сформулированной двухпериодной игре. Небольшое отличие возникает только в "оптимистической" и "пессимистической" вариациях понятия StE.

Аналогично, понятие итерационно-слабо-недоминируемого множества IWND, приводящее к сложному равновесию SE, можно рассматривать как осуществляемое на определенном дереве игры, задающем последовательность отметания (слабо) доминируемых альтернатив. В классическом варианте определения SE последовательность предполагается такой: все игроки одновременно отбросили стратегии в первом раунде, увидели результаты, отбросили во втором, и т.д. Но в определенных случаях (например, при неповторимости выигрышей) и все другие варианты последовательности ходов приводят к тому же результату (см. Мулен, 1985,). Поэтому, опять, ценность данной простой концепции в попытке предсказывать исход *не зная конкретной динамики*. Все же, пытающийся делать такие предсказания должен ясно понимать, что корректным является все же именно анализ динамической игры, и оценивать, насколько принимаемое упрощение исказит прогноз.

Концепции решений динамических некооперативных игр мы уже сравнивали выше. Можно добавить...??

....

Раздел II. Элементы политической теории

Целью второй половины нашего курса является знакомство с некоторыми концепциями и моделями достаточно распространенных политических процессов, не претендующее, конечно, на полноту. Задача раздела - не освоение эмпирического материал, а упражнение в политическом *анализе*, то есть разделении изучаемых ситуаций на составные элементы – модели. Представляется важным применение логики теории игр к политическим ситуациям. С содержательной же стороны, важно сконцентрировать внимание на причинах случающегося нередко **“фиаско государства”** (сравниваемого в общественных дискуссиях со случаям **“фиаско рынка”**).

Под “фиаско государства” подразумевается неоптимальный по Парето (или в ином смысле) исход игры избирателей, парламентов, правительственных органов и др. Анализ механики этих игр помогает сопоставлять по эффективности различные варианты государственного устройства, в частности, виды государственного регулирования (или нерегулирования) различных сфер жизни, типы выборного законодательства.

3 Введение: постановка вопроса о "фиаско государства"и конституционном выборе

3.1 Различные классификации политических теорий и режимов

Чтобы указать место нашего материала в обширной политической проблематике, приведем таблицу сравнений различных политических парадигм.[30]

Парадигмы –	*ислам*	*марксизм*	*либерализм*
Теории:	Святой халифат	Прогресс формаций	Парето-эффективное государство
Модели:	аш-шур (совет)	модель революции	модели выборов
Базовые понятия:	откровение свыше	общественные классы	рациональный индивид

Таблица 17: Разные политические парадигмы и их элементы.

Из всевозможных политических тем, мы затронем почти исключительно модели выборов в рамках либеральной парадигмы, и то не все. Так что, наш курс скорее демонстрирует применение теории игр к некоторым политическим ситуациям, чем дает последовательный взгляд на политику.

[30]Эмпирический обзор заимствован из [Andrew Heywood. 1997. Politics]

Нас будут интересовать различные государственные устройства, и их "эффективность". Трудно описать все многообразие возможных, и встречавшихся, типов государственного устройства. Аристотель предлагал простую шести- элементную классификацию "режимов" правления по двум признакам, количественному и целевому как в Табл. 18 (цит. по [7]):

Кто правит:

		один	**несколько**	**большинство**
В чьих	**общих**	монархия	аристократия	полития
интересах:	**своих**	тирания	олигархия	охлократия

Таблица 18: Классификация режимов власти по Аристотелю.

В этой концепции названия режимов второй строки таблицы несут морально-негативный оттенок (охлократия – власть неразумной толпы), подчеркивающий подавление интересов не-правящих групп, в отличие от режимов первой строки.[31]

Определение 3.1.1 Под *режимом правления* подразумевается совокупность писанных и неписанных законов и правил политического поведения, вместе с реально применяемыми при этих правилах стратегиями игроков, то есть с равновесием некоторого типа.[32]

Кроме концепции Аристотеля, предлагалось много различных классификаций режимов по разным признакам. Марксистская классификация делит режимы по экономико-политическому устройству в соответствии со своими пятью терминами: "капитализм", "социализм" и др. (довольно неопределенными). Классификация времен холодной войны делила их на "демократические" и "тоталитарные", и т.д. Сейчас у некоторых политологов популярна эклектичная классификация режимов на 5 групп, по нескольким признакам, затрагивающим как тип правления так и идеологию (цит. по [7]):

1)западные полиархии[33] (иначе – демократии западного образца, включающие и восточные страны, скажем Японию), 2)посткоммунистические режимы (подчеркивается их предыдущий тоталитаризм с коммунистическими идеями и нынешнее переходное состояние), 3)восточно-азиатские режимы (Гон-Конг, Тайвань и др, с сильным влиянием конфуцианской идеологии), 3)мусульманские режимы (где идеология ислама доминирует в политической практике), 5)военные режимы (без особой идеологии).

[31] Заметим, что сам Аристотель в качестве синонима охлократии уничижительно употреблял слово "демократия", теперь трактуемое большинством политиков близко по смыслу к его одобрительному термину "полития".

[32] Много примеров, когда при близких законах практика их использования сильно отличается, таково отличие Индии от Англии, Мексики от США.

[33] "Полиархия" – власть многих – более специфичный термин, чем "демократия", указывает на разделение реальной власти, что не совсем верно для некоторых "демократических"по конституции режимов.

Можно заметить, что многие реальные страны не попадают в эту классификацию режимов, а являются “особыми”. Остановимся подробнее на режиме, называемом в этой типологии **“западной полиархией”**. Ее первыми признаками считают: формальное и фактическое разделение властей на законодательную, исполнительную и судебную, фактическую выборность законодательных (и частично исполнительных) органов широким электоратом, включающим почти все взрослое население. В группе западных полиархий есть много, конечно, специфичных, неповторимых конституций, например Италия, США, но есть и две довольно распространенные: “Вестминстерская модель” и “Европейская децентрализованная модель” (consociational democracy). К английской “Вестминстерской модели”, более или менее близки также устройства Новой Зеландии, Канады, Израиля. [34] К децентрализованной модели относят Нидерланды, Бельгию, Австрию, Швейцарию, характерно, что она возникла в ходе политической борьбы в странах с населением, существенно неоднородным по религиозным, языковым или другим признакам.

“Вестминстерская модель”	**Децентрализованная модель**
- однопартийное правительство, - слабое разделение законодательной и исполнительной властей, - однопалатный по существу парламент, - 2 существенных политических партии, - мажоритарное правило представительства, - унитарность и централизм государства, - некодифицированная конституция, - суверенитет парламента между выборами: право сменять главу гос-ва.	- коалиционное правительство - существенное разделение этих ветвей власти - двухпалатный по существу парламент - много реальных партий - пропорциональное представительство - федерализм: самоуправление земель - кодифицированная конституция - независимость главы государства от парламента.

Таблица 19: Два “крайних” типа западных полиархий.

Таблица 1 скорее подчеркивает возможность противоположного решения важных конструктивных вопросов полиархии, чем отражает положение в реальных странах. Многие страны сочетают часть признаков “Вестминстерской модели” с признаками децентрализованной, и в чистом виде это противопоставление не наблюдается. Скажем, специфической страной являются США, где присутствуют явная двухпалатность, федерализм, всенародно избираемый президент (черты децентрализованной модели). Но президент имеет весьма существенную власть, участвуя в законодательстве и руководя госдепартаментом как премьер- министр, а правило голосования мажоритарное[35] (черты централизации в духе Вестминстерской модели). Специфической страной является также Италия: унитарная страна, но пропорциональный избирательный закон (то есть, каждая партия получит в парламенте такую долю мандатов, какую долю голосов получила при голосовании по единым для страны партийным спискам). Он обуславливает множество партий в парламенте, и в результате — обычно коалиционное правительство, причем ответственное перед парламентом (что в послевоенные десятилетия приводило к его частым сменам: чаще, чем раз в год!).

[34] А также формально, но не фактически – и Индии.

[35] Мажоритарность – от “majority” (большинство) – свойство того или иного закона давать преимущества большинству, за счет подавления интересов меньшинств.

Идеи двух крайних схем, взятые в чистом виде, можно рассматривать как полюса централизации в демократиях. “Вестминстерская” модель – парламентская, с сильной мажоритарностью и концентрацией власти у правящей партии. Это дает большую работоспособность правительства во всех направлениях, включая возможные злоупотребления против сторон, не представленных во власти. Напротив, устройство “децентрализованной” модели служит цели прежде всего ограничить возможность злоупотребления властью. Для этого устроено существенное разделение власти: на законодательную и исполнительную (президентскую), на нижнюю (общую) верхнюю палату парламента, представляющую все территории, и др. Тогда меньше возможность злоупотреблять, но меньше и дееспособность в целом.

Проблема нашей теории – это “политико-конституционный выбор”, то есть выбор “режима”: правил игры и равновесия, препятствующих явлению “фиаско государства”.

Под "фиаско государства" в либеральной парадигме понимают неспособность государственной машины эффективно удовлетворять интересам граждан. Итак, нас интересует связь различных типов конституций с результирующими равновесиями, то есть практикой использования законов. Это похоже на социальное проектирование. Конечно, конституции чаще всего не были спроектированы, а сложились по частям как исход многоступенчатой политической борьбы. Но все же их "удачность" в том или ином смысле можно обсуждать. Конечно, вопрос, какую конституцию можно считать удачной для конкретной страны – сложен и неразрешим в строгом смысле. Но чтобы понять идею проектирования равновесий с учетом целей игроков, рассмотрим пример обсуждения закона о назначении судей одним из творцов конституции США Бенджаменом Франклином.

Пример 3.1 *Выбор судей (цит. по Ordeshook, p.155. [[2]]).* Бенджамен Франклин рассуждал, что от судьи, назначаемого в любом городе требуется высокая квалификация и справедливость. Предлагаемый им вариант, заимствованный из Шотландской практики, состоял в том, что кандидатуру судьи предлагают местные адвокаты из своего числа. Они заинтересованы устранить сильного конкурирующего адвоката, и перенять его клиентуру (судья не может оставаться и адвокатом), поэтому они предложат известного квалифицированного специалиста. А утверждает судью законодательный орган, депутаты которого заинтересованы выбрать человека слывущего справедливым. Тем самым равновесие в этой игре имеет шанс дать хороший результат, по крайней мере, лучше, чем назначение судей исполнительной властью.

4 Нормативный подход к коллективному выбору: чего желать от избирательных схем?

Напомним известные Вам из курса "Теория Эк. Равновесия" идеи и факты о групповом выборе.

4.1 Задача коллективного выбора в прямой и в представительной формулировке

Задача группового выбора в двух формах. Пусть сообщество участников $N = \{1, ..., n\}$ имеет профиль предпочтений $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ на конечном или бесконечном множестве альтернатив A. Предпочтение $R_i = (\succeq_i)$ каждого участника i предполагается "рациональным", то есть представляет "полный предпорядок" — полное транзитивное упорядочение (допускается эквивалентность альтернатив, но не циклы и противоречия). Задача группового выбора в форме *прямой* демократии состоит в том, чтобы по этому профилю, сообщаемому участниками, выбрать *одну* из альтернатив "наиболее отвечающую" в каком-либо смысле профилю интересов участников. Напротив, задача в форме *представительной* демократии означает необходимость "агрегировать профиль предпочтений": упорядочить ВСЕ имеющиеся альтернативы, то есть построить полное коллективное предпочтение на множестве альтернатив. Подразумевается, что не все из потенциально возможных в мире альтернатив A могут оказаться доступными. Но общественное предпочтение – список (какая альтернатива лучше какой или эквивалентна какой для сообще-

	Участники			
	Анна	*Борис*	*Виктор*	*Григорий*
Порядок	Танцы	Кино	Бар	Бар
предпо-	Бар	Танцы	Кино	Танцы
чтения	Кино	Бар	Танцы	Кино

Таблица 20: Пример профиля предпочтений в групповом выборе.

На некоторых профилях, однако, ни полного транзитивного (т.о. непротиворечивого) полу-упорядочения (т.е. упорядочения допускающего и эквивалентность элементов), ни даже победителя Кондорсе не возникает. Так и в данном случае, окажется, что альтернатива Бар эквивалентна альтернативе Танцы, которая эквивалентна Кино, но Бар предпочтительнее, чем Кино – противоречие: (Б$\sim_N$Т $\sim_N$К,Б$\succ_N$К). Поэтому правило Кондорсе для подведения общего мнения здесь неудачно.

Альтернативно, можно взять метод "очков" предложенный де Борда: максимум очков в бюллетене голосования вписывают наиболее желательной для себя кандидатуре, на 1 меньше – за второе место, и т.д., до 0 за последнее, затем очки всех суммируют. Сумма дает всегда (как легко догадаться) транзитивное упорядочение. В примере будет: Т=9 $\succ_N$ К=8 $\succ_N$ Б=7, т.е. победят Танцы.

То же можно сказать и о наиболее распространенной в мире вариации метода очков – "правиле относительного большинства", когда ненулевые очки (а именно, 1 очко) присуждаются только за первое место в бюллетене: одного оставить, остальных вычеркнуть. Этот метод – "правило относительного большинства" – даст здесь Бар=2 $\succ_N$ Танцы=1 $\succ_N$ Кино=1 (победит Бар). Очевидно, разные методы дают разные результаты (см. Рис. 12).

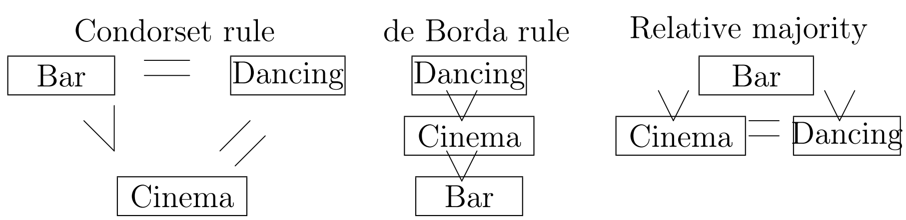


Рис. 12: Нетранзитивность правила большинства, несовпадение правил выбора.

Начиная с времен Великой Французской революции, политики и теоретики обсуждают вопрос:

Какие из методов группового выбора (голосования) считать "лучшими", и в каком смысле?

Есть разные мнения. Например, Кеннетом Эрроу для того или иного правила обобщения предпочтений типа “представительной демократии” сформулированы следующие важные желаемые свойства:

1. Универсальность: на любом рациональном (полном, транзитивном) профиле предпочтений правило должно давать рациональный результат.

2. Слабая Парето-эффективность (“Единогласие”): если все участники считают одну альтернативу лучше другой, то правило не должно этому противоречить.

3. Анонимность: все выборщики должны быть в равном положении, то есть перенумерация (переименование) участников не должна изменять результат.

4. Нейтральность: все альтернативы должны быть в равном положении, то есть их перенумерация (переименование) не должна изменять результат.

5. Независимость от посторонних альтернатив: если при одном профиле предпочтений правило ставило одну альтернативу выше другой ($a_1 \succ_N a_2$), то это соотношение должно сохраниться и при новом профиле, где мнения участников об относительной предпочтительности между (a_1, a_2) не изменились, а изменились относительно других альтернатив. Аналогично для случая ($a_1 \sim_N a_2$).

Для задачи “Прямой демократии” требования к правилу такие же, за исключением модификации пунктов 1 и 5. В соответствии с идеей “прямого выбора”, требование пункта 1 ослабляется: вместо полного упорядочения достаточно хотя бы всегда получать победителя или хотя бы несколько *эквивалентных* победителей, среди которых уже можно бросить жребий (поясним: в примере Танцы-Кино-Бар три таких претендента на победителя по Кондорсе, но они *не эквивалентны*). Требование 5 принимает другую форму: требуется “**неманипулируемость** правила ложными сообщениями”.

Правило выбора называют *манипулируемым*, если возможна ситуация, когда указав ложно свое предпочтение в бюллетене, выборщик имеет шанс улучшить для себя результат голосования.

Оказывется, это свойство очень близко к свойству независимости от посторонних альтернатив, что можно понять на примерах разных правил. Например, правило Кондорсе удовлетворяет и “независимости” и “неманипулируемости”, а правило Борда нарушает и то и другое (попробуйте доказать всеобщность такого совпадения). Скажем, в приведенном примере Борис может отклонить в свою пользу общественный выбор по правилу Борда, переставив (неискренне) в своем бюллетене Танцы ниже Бара (при двух и более победителях, будем считать, решает жребий).

Важный и удивительный результат (изученный Вами на 2 курсе, см. Мулен 1995 [10]), касающийся названных пяти свойств – это

Теорема Эрроу "о диктаторе": При достаточной численности выборщиков и альтернатив $n > 2$, $A > 2$ названные 5 требований несовместны: нельзя придумать удовлетворяющего им всем правила агрегирования профиля индивидуальных предпочтений. Более того, единственным правилом удовлетворяющим требованиям 1,2,4,5 является "диктаторское" правило, приписывающее общественному предпочтению значение предпочтения *одного* из участников, то есть крайним образом нарушающее анонимность.

Аналогична (см. Мулен 1995 [10])

Теорема Жиббарда-Саттертуэйта о методах прямой демократии. Она утверждает несовместность требований 1-5 в формулировках соответствующих этой постановке задачи: нельзя придумать правила выбора победителя по профилю индивидуальных предпочтений, всегда дающего непротиворечивый исход, эффективного, анонимного, нейтрального и неманипулируемого.

Итак, выбирая метод для голосований в некоторой области общественных действий, придется пожертвовать каким-либо из желаемых свойств метода выбора. Рассмотрим примеры отказа от того или иного свойства, начав с последнего - независимости (неманипулируемости).

4.2 Практические решения вопроса выбора правила выборов

Путем игнорирования манипулируемости идут конституции большинства (всех?) стран. Они принимают наиболее простое правило голосования - "относительное большинство" (в бюллетене указывается только наиболее желательный кандидат). Это правило нарушает требование независимости альтернатив, что влечет манипулируемость.[36]

Случай, когда некоторое сообщество предпочитает отказаться от свойства 4 (нейтральности) тоже достаточно типичен: в голосованиях о поправках к конституции в большинстве парламентов текущий вариант конституции (статус-кво) обладает преимуществом по сравнению с новшествами: нужно более 2/3 голосов, чтобы его изменить.

[36] Действительно, если я более всего предпочитаю кандидата А, но считаю, что шансы победить есть только у В и С, среди которых В мне предпочтительнее, то его (В) я и укажу в бюллетене, ложно проявив свое предпочтение и улучшив, возможно, позицию (В).

(Между прочим, можно доказать, что именно “квалифицированного” большинства ($>2/3$) достаточно, чтобы голосование не давало строгих циклов, то есть, чтобы процесс переголосований заканчивался, а не продолжался до бесконечности. Это более слабое требование, чем требование транзитивности: в нашем примере правило Кондорсе цикла не дает, но дает нетранзитивность. Также, правила с требованием более значительного перевеса голосов: $3/4$ и др., вплоть до правила консенсуса, для победы одной альтернативы над другой – исключают строгие циклы, но не исключают нетранзитивность. Можно изменить правило “квалифицированного” большинства, объединив все цепочки эквивалентности в один класс эквивалентности (отбросив противоречивые сравнения “$>$”), но тогда потеряется неманипулируемость.)

Отказ от свойства 3 (анонимности) в наиболее резкой форме наблюдается в “диктаторском” правиле выбора: назначается участник, чье мнение и объявляется мнением коллектива (дополняя правило, можно назначить другого участника – скажем, жену диктатора – решать среди альтернатив, безразличных ему, сына диктатора – решать среди альтернатив безразличных родителям, и т.д.). Пример сообществ охотно идущих на такое решение проблемы выбора можно встретить в некоторых семьях: решает глава семьи – старший, затем второй по старшинству...

Отказ от свойства 2 можно реализовать бросанием жребия: предпочтительнее альтернатива, получившая больше очков. Очевидно, это правило удовлетворяет всем требованиям, кроме (2) – эффективности, но трудно назвать сообщество, согласное с этим недостатком компромисса.

Последнее и наиболее интересное: в каких случаях уместно пренебречь требованием 1 — универсальностью метода? Например, выбор всего из двух альтернатив, или всего двумя выборщиками, страхует нас от возникновения нетранзитивного (противоречивого) результата голосования. Тогда применим метод Кондорсе, обладающий всеми желаемыми достоинствами, кроме универсальности. Но оказывается, есть и более широкий важный класс ситуаций, где его можно смело применять не опасаясь нетранзитивного исхода голосования - *однопиковые предпочтения*.

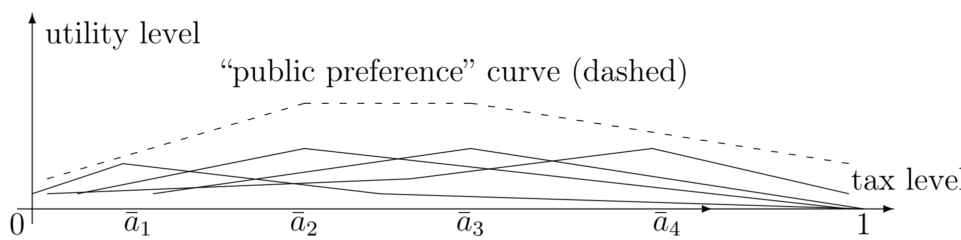


Рис. 13: Пример однопиковых предпочтений: предпочтения 4-х лиц относительно уровня налогов, обеспечивающих их общее благо. Слабые победители Кондорсе – точки $a_2^* = \bar{a}_2,\ a_3^* = \bar{a}_3$, и весь отрезок $[\bar{a}_2, \bar{a}_3]$.

Определение 4.2.1 Профиль предпочтений называется *однопиковым*, если все альтернативы можно упорядочить на прямой таким образом, что каждый участник i обнаружит нестрого монотонное убывание своего предпочтения как влево от своей наиболее предпочитаемой альтернативы a_i^*, так и вправо (унимодальность).

Можно проверить, что предпочтения в примере Бар-Кино-Танцы, приведенном выше, не обладают этим свойством однопиковости. Иначе правило Кондорсе давало бы в этом примере транзитивное упорядочение, как показывает следующая теорема.

Теорема 6 (о медианном избирателе) *Для ситуаций с однопиковыми рациональными предпочтениями правило простого большинства – турнир Кондорсе – дает результат: победителя Кондорсе (хотя бы слабого), и более того – дает полное транзитивное коллективаное предпочтение. При нечетном числе участников n множество слабых победителей Кондорсе совпадает с множеством наиболее предпочитаемых альтернатив a_{med}^* медианного избирателя,*[37] *а при строгом профиле предпочтений и полное предпочтение коллектива совпадет с предпочтением медианного избирателя. В случае четного n слабый победитель Кондорсе совпадает с одним из двух средних пиков или находится между ними.*

Доказательство этого факта элементарно[38]. Но его выводы весьма важны для понимания эффектов голосований. В частности, они проясняют суть нечувствительности результатов голосований (это до некоторой степени распространяется и на правила, отличные от правила Кондорсе) к изменениям вкусов “маргинальных” избирателей и крайнюю чувствительность политики к изменениям вкусов медианного избирателя. Далее мы разберем и “подстраивание” программ политических партий под вкусы медианного избирателя.

4.3 Проблема голосование при двух и более координатах политического выбора

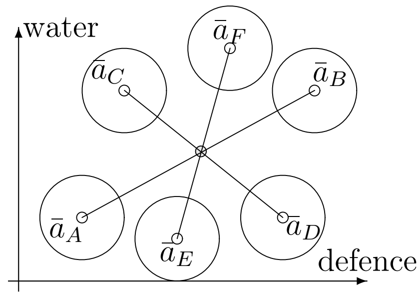


Рис. 14: “Осевая” альтернатива в двумерном пространстве выбора – единственный потенциальный победитель Кондорсе.

Итак, мы указали некоторые ситуации, в которых правило простого большинства (Кондорсе), обладающее всеми преимуществами, кроме универсальности, дает рациональный результат. В общей же ситуации, вероятность получить победителя Кондорсе убывает с числом участников и особенно альтернатив (см. Мулен, 1995 [10]), при бесконечности числа альтернатив стремясь к нулю.

В теории группового выбора (см. книги Мулен, 1995 [10] и Данилов, Сотсков 19??) изучаются и другие недостатки разных правил голосования. Это немонотонность, нарушение свойств "пополнения” и "участия”. Теоремы Мэя и Фишера о несовместности этих требований: все правила состоятельные по Кондорсе нарушают свойства "пополнения” и "участия”.

несостоятельность по Кондорсе,

5 Позитивное описание политического рынка: как действуют безденежные механизмы?

Перейдем к дескриптивным, то есть описательным, моделям процессов выборов. Они не исходят прямо, в отличие от нормативных моделей, из вопроса “какой механизм лучше”. Зато к исходной ситуации группового выбора, описанной в предыдущем разделе (выборщики, альтернативы, предпочтения), добавляются еще некоторые осложняющие элементы политической практики. Наиболее заметный из них - *политические партии*. Они, собственно, и выдвигают альтернативы для голосования выборщиков (например, кандидатов в президенты, варианты конституций), преследуя при этом свои цели – стремясь оказаться у власти. Их “политическое предпринимательство” превращает общественный выбор в “политический рынок”. Как он работает, хорошо это или плохо, насколько это изменяет общественный выбор по сравнению с ситуацией непосредственного действия избирателей?

5.1 Простая линейная модель политического рынка

Рассмотрим простой случай, когда “политическое пространство выбора” одномерно, например, выбирается уровень одного параметра, и он может принимать значение от 0 до 1 как на Рис. 15.[39]

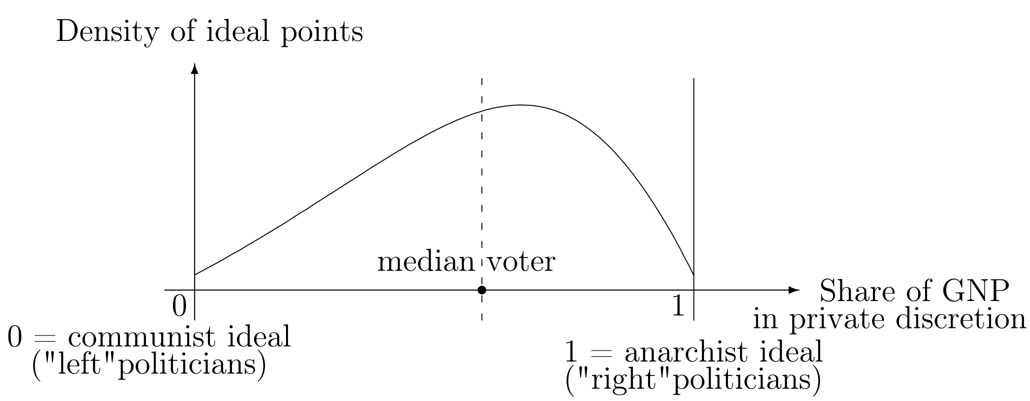


Рис. 15: Простейшее политическое пространство: плотность распределения пиков предпочтений избирателей относительно уровня налогов, обеспечивающих их общественные блага (долей гражданина/ государства в национальном доходе).

Предположим, сообщество выборщиков имеет однопиковые предпочтения на этом отрезке, и пики (идеальные варианты) различных участников распределены *равномерно* между 0 и 1. Пусть также, есть 2 партии, выдвигающие перед выборами свои партийные программы (например, уровень налогов), и каждый избиратель станет голосовать за ту партию, чья программа ближе его вкусам (“гравитационные” предпочтения).

[39]Для формального обсуждения неважно, что означает выбираемый параметр, но в важ-

Пусть каждая партия i стремиться получить больше голосов, чем другая, зная текущую программу другой партии P_{-i} и подстраивая свою программу P_i с учетом чужой. Каков будет исход игры по Нэшу между этими двумя партиями?

Простой анализ показывает, что партийные программы “конвергируют”! На этом политическом рынке, как и в модели Хотеллинга для пространственной конкуренции обычными товарами (“линейный город”), конкуренты должны сойтись в одной точке – медиане распределения (при равномерной плотности это $P_1 = 0.5 = P_2$).[40] Так что все избиратели практически окажутся без выбора, а медианный избиратель – вполне удовлетворен.[41] Важно, что этот исход совпадает с результатом прямой демократии (см. Теорему о медианном избирателе)! Итак, двухпартийные выборы в этом случае практически эквивалентны прямой демократии, и “отсутствие реального выбора” вовсе не беда, а успех механизма выборов.

Совпадение равновесия с медианой кажется серьезным аргументом в пользу двухпартийной системы.

5.1.1 Много партий и разные механизмы их борьбы

Теперь рассмотрим ситуацию с тремя партиями. Будем считать, что выборы мажоритарны (лидер получает все места в парламенте, или речь о президентских выборах). Происходит один тур голосования. Предположим, что три партии максимизируют вероятность своей победы, или, точнее, отношение своего электората к электорату лидера. Существует ли NE? Разберем все возможные варианты расстановки партийных программ: все три программы в одной точке, либо две вместе, третья отдельно, либо все три порознь. Рассматривая полезность альтернативных позиций, получим, что каждый вариант создает стимулы для кого-то изменить позицию, при неизменных позициях партнеров. То есть, равновесия по Нэшу нет.

Таким образом, если ничто (например, идеология) не мешало бы изменению программ трех партий, они то и дело перескакивали бы с одной позиции на другую в ответ на действия соперников.

Число партий и выборный закон Решения, в зависимости от динамики:

	NE	SPE$_1$	
2 партии при любых правилах	P=(0.5,0.5) = Median Voter	P=(0.5,0.5) = Median Voter	
мажорит. 1 тур, 3 партии	$\emptyset$	P=(0.25,0.75,0.5) и ?	?
мажорит. 1 тур, 4 партии	P=(0.25,0.25,0.75,0.75)	?	?
мажорит. 2 тура, 3 партии	P=(0.5,0.5,0.5) = Median Voter	P=(0.5,0.5,0.5) и др.?	?
пропорц. 1 тур, 3 партии	P=(0.25,0.75,0.5)	?	?
пропорц. 1 тур, 4 партии	P=(0.15,0.25,0.75,0.85)?	?	?

Таблица 21:

(Упражнение: Обобщите этот результат на N партий: окажется, что равновесий нет при нечетном N, при нашей гипотезе максимизации относительного электората. Если же предполагать целью абсолютный электорат, то это не так.)

Возможна альтернативная к Нэшевской ситуация (механизм борьбы партий), что приводит к иной концепции решения. Представьте, что уже запланирован съезд одной партии, за ним съезд второй, за ним съезд третьей, и они должны утвердить свои программы на ближайшие выборы, переменить их потом нельзя. Эта ситуация в таблице названа SPE$_1$ (динамическая игра с одним ходом у каждого). Опять предположим, что каждая из трех партий максимизирует вероятность своей победы — отношение своего электората к электорату лидера. Окажется, что набор программ P=(0.25,0.75,0.5) есть одно из равновесий SPE$_1$ (см. Табл. 21).

Действительно, первая и вторая партии имеют по 3/8 электората и равные шансы победить, а третья – меньше. Может ли третья партия, "вставшая" в 0.5 увеличить свою вероятность победы, равную (2/8)/(3/8)? Незначительно смещаясь от центра, она только уменьшит ее, подыграв одному из лидеров, и не изменив свой электорат. Присоединяясь же к одному из лидеров, она поделит с ним 4/8 электората пополам, и сохранит свое положение (2/8)/(3/8). Поэтому, третий не имеет стимула отступить от 0.5. Не отступит ли второй от 0.75? Смещаться к центру ему невыгодно, поскольку третий присоединится к этой новой точке, и позиция 2-го ухудшится. Если смещаться от центра на ε, то третий отодвинется в сторону первого на $\varepsilon/4$, уменьшаая электорат 1-го (лидера) без изменения своего, ведь сам он при любой промежуточной позиции собирает $2/8+\varepsilon/2$. Поэтому смещение 2-го вправо выгоды 2-му не принесет. Видимо, здесь множество равновесий: позиция P=(0.25,0.75+ε,0.5-ε/4) тоже равновесная, дающая 1-му и 2-му равные шансы победы. Первый не может улучшить свои шансы, по этим же причинам, но может их ухудшить, если встанет левее 1/6 или правее 1/4.

[40]В случае неравномерного распределения пиков предпочтений на отрезке [0,1], исход должен быть тот же, только медиана окажется не просто серединой отрезка, а точкой делящей пополам площадь под кривой плотности распределения (пиков) избирателей.

[41]Таким образом, сходство программ, например, республиканцев и демократов в США, объясняется борьбой за медианного избирателя. Аналогичная игра возникает при пространственной конкуренции за потребителя двух продавцов располагающихся на одной улице: потребитель подойдет к ближайшему продавцу, поэтому им есть стимул сходится к центру.

Можно проверить, что 4 партии при тех же правилах выборов и Нэшевском поведении займут попарно две позиции 0.25, 0.75. Решение для последовательного заявления четырех программ нам неизвестно. Что произойдет, когда программу можно один раз заявить, а затем поправить конечное число раз? Видимо, если порядок поправок задан, то значение имеют только три последние поправки, и решение такое же, как SPE_1. Заметим, что оказаться последним невыгодно. Поэтому, если бы на избирательную кампанию не оказывали влияние дополнительные факторы, не включенные в эту модель (обсуждаемые позже), то партии стремились бы раньше выдвигать программы.

Теперь посмотрим, что произойдет при мажоритарных выборах в два тура, с выбыванием отставшего (без пересмотра программ между турами)? Позиция P = (0.5,0.5,0.5) есть Нэшевское равновесие, поскольку отступивший от нее станет лидером в первом туре, но проиграет во втором. Есть ли другие NE, нам неизвестно.

В случае пропорционального представительства (в парламентских выборах) следует считать, что каждая партия просто максимизирует свой электорат. Тогда, можно проверить, NE=P=(0.25,0.5,0.75).

5.1.2 Преимущества разных механизмов в терминах линейной модели

Итак, только при некоторых ситуациях (правилах голосования и числе партий) имеет место тенденция к сближению партийных программ друг с другом и с медианным выбором. В других же случаях "политический рынок" может давать результат отличный от результата прямой демократии, то есть "искажать" выбор. Причем искажение окончательной позиции параметра выбора (например, уровня налогов) может быть существенным, скажем 0.25 вместо 0.5. Это можно бы считать недостатком чрезмерного числа партий. Правда, второй тур голосования исправляет искажение, поскольку усиливает мажоритарность. Может исправить его и пропорциональное представительство, но это не гарантировано. Поясним это.

Идея пропорционального представительства в том, чтобы превратить парламент в уменьшенную копию общества: чтобы все взгляды и интересы были представлены пропорционально, и уже там, в парламенте осуществлен общественный выбор.[42] Тогда, в рамках нашей модели, должен бы реализоваться медианное решение общественного вопроса, и политический рынок "не приводит к искажению" выбора. Однако, есть проблемы. Не расширяя пока модель в иных направлениях, изменим пока только одну гипотезу: а что если парламентские фракции поведут себя не как избиратели, а станут создавать блоки, то есть коалиции?

[42] Дополнительные аргументы в пользу такого решения – возможность изучить вопрос, обсудить, и др.

Политические блоки – действуют при разных выборных законах по-разному. При мажоритарном представительстве, как можно понять из нашей пространственной модели, разные политические силы вынуждены блокироваться вместе ДО выборов, и как правило – в две политические партии или объединения. Потому что мелкие партии имеют тенденцию вымирать: политики неохотно вступают в проигрывающие команды. Напротив, официальный выборный блок, или, например, левое и правое крыло одной партии, имеют возможность выдвинуть как бы ДВЕ программы (по сути, это рассуждение подразумевает, что избирателя удается "обмануть" двумя выдвинутыми программами блока, хотя реализоваться-то будет одна!), и покрыть ими большее политическое пространство, чем одна партия. Это позволяет оттеснить не присоединившегося конкурента. Скажем, выставив программы $P_1 = 0.25,\ P_2 = 0.5$, при легковерности избирателя они могут уверенно победить изолированную третью партию, а затем делить власть. Итак, мажоритарное правило представительства, вообще говоря, благоприятствует двухпартийности. Слабые, чтобы не исчезнуть, должны вступать в выборные блоки.

Напротив, пропорциональное правило представительства дает возможность развиваться многим слабым партиям (и их действительно много в Италии). Это демократично, но уменьшает дееспособность власти. Действительно, тут блоки партий возникают не перед выборами, а *после них*, в парламенте, в котором представлен более широкий политический спектр. Игра между ними может развиваться как по кооперативному, так и по не-кооперативному сценарию. Второй случай можно представить себе так. Лидирующая партия предложит нескольким другим, близким по взглядам и дополняющим его долю в парламенте до большинства, сформировать коалиционное правительство. Это правительство, поддержанное большинством, и определит курс страны, левее или правее. Окажется ли этот курс медианным? С помощью пространственной модели легко понять, что вероятность этого очень мала. Скажем, если относительное большинство у левых, и они пригласили в коалицию центристов, то курс смещен влево. Если большинство у центристов, то смещение курса зависит от того, кого они решат пригласить в коалиционное правительство, но в любом случае попадание компромисса в медиану проблематично!

Действительно, представим, что, в рамках рассмотренной простой модели выборов на отрезке (0,1), при пропорциональном представительстве три партии разместили программы как NE=(P_1, P_2, P_3)=(0.25, 0.5, 0.75). Тогда они получат в парламенте, соответственно, (3/8, 2/8, 3/8) мандатов. Ни одна партия не может сформировать правительство в одиночку, не имея 50% мандатов +1, поэтому какая-то пара из них вынуждена вступить в блок и образовать *коалиционное правительство* (как обычно в Италии и происходило). Если, скажем, две левые партии кооперируют, отвергая правую, и договариваются при этом о среднем курсе правительства между их программами, то этот курс окажется равен 5/16, а вовсе не медиана! Более того, от прихоти центристской партии, решающей, влево или вправо блокироваться, зависит, не будет ли он равен 9/16. При неравных соседях слева и справа, центристу выгоднее блокироваться в меньшую сторону, и иметь большую долю власти. Поэтому выбор еще более смещен от центра.

Итак, пропорциональное представительство в рамках наших предположений отнюдь не гарантирует не-искажение политического выбора. Еще более осложнится этот вопрос, если представить себе (отчасти это и реализуется), что оставшаяся в меньшинстве оппозиция не просто подавляется меньшинством, а имеет шанс блокировать действия большинства – не давать провести никакого решения. В частности, блокирование часто реализуется по вопросам, требующим квалифицированного большинства (2/3). Тогда, в рамках кооперативной теории игр, мы могли бы ожидать исход типа ядра, приближающий общественный выбор к медиане. К сожалению, "торг депутатов", называемый в англоязычных странах "log-rolling" в значительной мере сводится к договоренностям, касающимся их личных выгод, включая лоббируемые особые интересы, чем к решению общих для страны вопросов (подробнее об этом ниже). В целом, не-искажение политического выбора при пропорциональном представительстве выглядит маловероятным.

С другой стороны, мажоритарное представительство при обычном законе относительного большинства и не-сложившихся партиях (как в России) имеет свои недостатки. За счет "зависимости от посторонних альтернатив", оно создает возможность манипулирования выборами с помощью "дублеров". Действительно, можно отнять у своего главного конкурента часть голосов, выставив подставного кандидата-дублера с близкой конкуренту программой или с близкой социальной нишей, или просто поддержав агитацией и деньгами уже имеющегося дублера своего конкурента и "раздробив" тем самым его электорат.[43] Тем самым, с учетом кампании по выдвижению кандидатов, мажоритарные выборы на беспартийной основе дают вообще плохо предсказуемый результат: общественный вопрос решится случайными факторами (динамикой борьбы, самолюбиями и актерскими талантами), или неслучайными побочными факторами типа денег, обсуждаемыми далее. Пропорциональные выборы могут иметь в этом отношении преимущество, способствуя образованию партий, и лучшему отражению профиля предпочтений в парламенте.

Заметим, что можно обсуждать "степень мажоритарности" разных выборных законов, этот параметр может быть не только 0 или 1. Мажоритарность есть преимущество большинства (majority) над меньшинствами. Полная мажоритарность – это один избирательный округ, например, при выборах президента. А наименьшая – пропорциональное представительство партий в парламенте (как в Италии). Промежуточным вариантом являются мажоритарные выборы по многим округам: чем мельче округа, тем ближе (учитывая случайность распределения) распределение мандатов в парламенте к пропорциональному представительству. Пропорциональность, в сущности, подобна малым округам по 1 выборщику в каждом: мнение меньшинств практически не подавляется. Эту идею пропорционального представления в парламенте всех мнений в древних Афинах решали так: в парламент выбирали по жребию из всех полноправных граждан.

[43]Итак, соседство двух партий в политическом спектре может быть полезно их идеям при сотрудничестве партий и отказе от конкуренции в одних и тех же округах (как коммунисты и аграрии в Думе России: они дружно проводят больше родственных депутатов, чем если бы агитировали объединившись в одну партию). Однако родственные по электорату партии, выступающие в одном мажоритарном округе (как Анпиловцы с Зюгановцами) вредят друг другу.

Итак, трудно решить, что благоприятнее для выявления в выборах общественного мнения и не-искаженного решения общественного вопроса, пропорциональность или мажоритарность? С одной стороны, при пропорциональности представители всех групп интересов имеют возможность в парламенте подробно изучить вопрос. Поэтому их мнение может быть осмысленнее, чем мнение малоинформированного среднего избирателя, реализующееся при прямой демократии или двухпартийности. Оно может отклоняться от медианы в "полезную" для самого же медианного избирателя (и прочих) сторону.[44] С другой стороны, выбор может отклониться и в случайную сторону, в результате парламентских блоков.

Дополнительные проблемы пропорционального представительства возникают от *изменений* экономической и политической коньюнктуры, делающей выгодными новые блоки и разрыв старых. Тогда коалиционное правительство распускается, и возникает новое. В Италии несколько политических партий сумели за 50 послевоенных лет около 55 раз поменять правительство (и в 1994 г. отказались от полной пропорциональности). На кого из 55 правительств и на какую из партий можно возложить ответственность за неважные дела в стране в истекший период? Ни на кого. Скорее, в ответе само "пропорциональное" законодательство.

Противоположный полюс в смысле *выявляемой ответственности* – Британская мажоритарная система. Там от выборов до выборов *одна* партия имеет полную власть, следовательно, несет полную ответственность за происходящее и в законодательстве и в управлении (создается сильное устойчивое правительство). Это дает избирателю возможность адекватной оценивать партии *по результатам*, а не по программам (подробнее об этом – в разделе о неинформированности).

Недостатки этой системы – недостаточное представительство меньшинств – могут быть разрушительны в стране с перераспределительными тенденциями и с традициями переноса политической борьбы на улицы. Кроме того, большинство мандатов может получить меньшая партия. Например, если в округе А консерваторы имеют 51 голос из 100, в округе Б – 51 голос из 100, а в округе В всего 1 голос из 100, то они побеждают, имея в стране примерно 1/3 голосов, а в парламенте 2/3 мандатов. Их конкуренты имея 2/3 голосов проиграют! Так, в 1983 г. в Англии консерваторы получили 61% мандатов имея поддержку 43% избирателей. Впрочем, при двухпартийной системе обе программы близки, и это не так важно. Важнее (особенно для стран с высокой коррупцией и малой однородностью общества) – не станет ли партия со слишком большой властью злоупотреблять ею?

Интересный эффект мажоритарности, называемый "electoral colledge" возникает в президентских выборах США. Их причудливое законодательство относит ВСЕ голоса некоторого штата на счет того кандидата в президенты, который получил в этом штате более 50% голосов. Поэтому, в предвыборной борьбе президенты не посещают те штаты, где заведомо выиграли, и штаты, где заведомо проиграли: там им нечего добавить к своему электорату. Упражнение: на условном примере рассчитать выигрыш Никсона от знания стратегий соперника (скандал "Уотергейт"). Искажен ли выбор при таком законе?

[44]Кроме того, считают, что представительство меньшинств способствует консенсусу: оно заставляет большинство не просто подавлять меньшинства, а договариваться с ними, уступая в чем-то другом, что возможно при много-параметрическом выборе.

Итак, мы рассмотрели простейшую модель общественного выбора на линейном пространстве. И отделили ситуации, где борьба политических партий “искажает” общественный выбор, от “не-искажающих” ситуаций. Теперь введем в рассмотрение важные дополнительные факторы.

5.2 Идеологические ограничения и неучастие избирателей

Пополним модель одномерного политического пространства, продолжая обсуждать “искажение выбора”.

В реальности партии не всегда могут так свободно менять свои программы, как в разобранных выше задачах (возможные “прыжки” программ в этой модели, вероятно, уже вызвали Ваше недоумение). Теперь усложним линейную модель политической борьбы, введя в нее гипотезу, что партии на начальном этапе кампании *уже имеют* некоторые “традиционные” программы P_1, P_2. И что избиратель с идеологических позиций осуждает “политических проституток”, меняющих свои взгляды в угоду моменту.[45] Тогда отклонение партии от старой программы приводит к потере партией некоторой части избирателей всех типов за счет “потери доверия”. Предположим, эта потеря пропорциональна дальности передвижения от старой программы (от традиции). Эта гипотеза приводит к новой пространственной модели как на Рис. 16

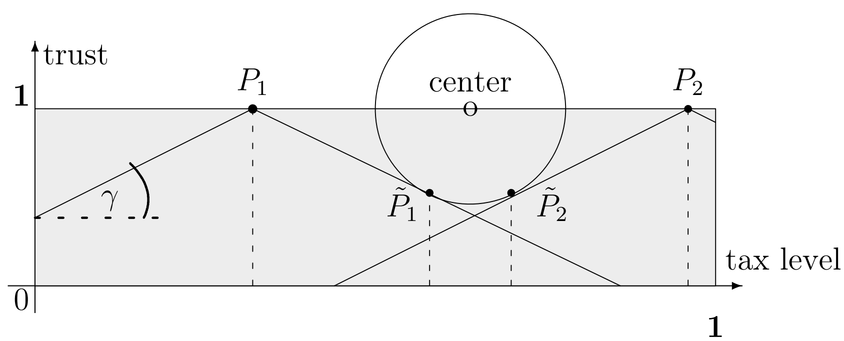


Рис. 16: Конкуренция партийных программ при идеологических ограничениях или традиции.

Подразумевается опять равномерное распределение вкусов избирателей на отрезке (0,1). По вертикали откладывается уровень доверия, убывающий, с некоторым коэфициентом пропорциональности γ (задающим наклон треугольников) по мере удаления новой программы партии $\tilde{P}_i$ от старой ее программы P_i (избиратель может думать: “если партийцы маневрируют – то они просто политические предприниматели, оппортунисты, а не идейные борцы, и после выборов опять отклонятся от обещаний”). По-прежнему предполагется, что *все* избиратели станут голосовать, причем за ближайшую программу; ближайшую по положению на плоскости (лево-право / доверие-недоверие). Располагаются же избиратели на верхней грани заштрихованного прямоугольника. Поэтому, в случае неотклонения новых программ от старых, партии делят электорат по центральной между старыми программами точке “o”. Каждое иное возможное положение новой программы $\tilde{P}_i$ относительно электората задано треугольником с вершиной в сторой точке P_i. Первая партия способна перемещать точку своей программы по левому треугольнику, а вторая – по правому. Приближая свою программу к программе конкурента на величину x, можно приобрести $x/2$ его голосов, но только если не перешагнуть определенного барьера.

[45]В некотором смысле, это может быть и рациональным поведением избирателя. Ведь если мой депутат меняет взгляды как перчатки, то где гарантия, что он останется верен программе, с которой он выступал передо мной на выборах? Тем самым, политикам отчасти выгодно демонстрировать постоянную приверженность неким взглядам, даже если у них вообще никаких взглядов нет.

Легко догадаться, что в этой ситуации Нэшевская (и, возможно, динамическая) программная конкуренция партий (за медианного избирателя, изображенного центральной точкой “о”), приведет к неполному сближению программ, а к такому $\tilde{P}_1$,$\tilde{P}_2$, что новые программы будут от центра равноудалены. При этом историческое положение этого центра до начала выборной компании определяет и победителя, и последующее решение общественного вопроса, следовательно медианный исход не гарантирован!

Что будет происходить от одних выборов к другим? Новый исторический центр раздел электората каждый раз остается тем же, а программы двух партий все более сближаются (конвергируют к нему), по крайней мере, если коэффициент γ падения доверия (из-за непоследовательности партии) не слишком велик. Если же он велик, то программы, наоборот, могут не сходиться! Так же они не сходятся, если форма распределения электората имеет два “горба” (разберите это самостоятельно). В обоих случаях решение общественного вопроса определено не вкусами избирателя, а предысторией. Программы конвергируют недостаточно, и к тому же к случайной точке, то есть политический рынок искажает общественный выбор.

Сходная ситуация, когда вершина допустимого “треугольника доверия” не смещается от выборов к выборам, а стоит на месте благодаря твердо заданной в уставе *идеологии* партий. Программы не конвергируют. Затем, победившая партия реализует свои запросы, выражающие, возможно, центр одной из половин электората, левой или правой, а не целого.

Итак, в некоторых ситуациях “оппортунизм” партий (подгонка программ под запросы) лучше для среднего избирателя, чем твердая идейность, “искажающая” общественный выбор. В других случаях (моделях поведения) это не так.

Рассмотрим сходную модель **с неполной явкой избирателей.**

Она предполагает, что идеологических и традиционных ограничений нет, избиратели также голосуют за ближайшую программу, но чем далее ближайшая из партийных программ от конкретного избирателя, тем меньше вероятность его прихода на выборы, пропорционально некоторому коэффициенту убывания явки γ. Отличие этой пространственной модели от предыдущей (Рис. 16) невелико: оно в том, что не точки новых программ движутся по допустимым множествам – конусам (треугольникам), а “конуса электората” движутся влево или вправо вместе с программами. Теперь площадь этих конусов изображает объем собираемого электората (а заштрихованный прямоугольник – все население); избиратели, не попавшие ни в чей конус – не голосуют совсем. Как и ранее, предположим, что каждая партия борется за преимущество своего электората над электоратом конкурента (их отношение). Тогда результатом конкуренции может бить либо (опять) сближение партий в медианной точке (при пологих конусах), либо произвол в их размещении (при слишком вытянутых вверх конусах, то есть при резком убывании явки избирателей по мере удаления от любимых программ). Таким образом, при достаточно сильном эффекте неявки эффект конвергенции программ может подавляться. Но если он не подавляется, то результат общественного выбора не случаен, а стремиться к медианному. Итак, умеренная “неявка из-за недовольства программами” не опасна для общественного выбора при равномерном распределении предпочтений. Несколько сложнее дело при сложной плотности распределения.

Пример 5.1 “Выборы”: Предположим, три факультета: Геолого-Геофиз.Ф, Эконом.Ф. и Физ.Фак выбирали бы общее представительство, которое имело бы право утверждать стандарт учебной нагрузки на студента: сколько часов лекций, семинаров и обязательных домашних заданий в день. Предположим, предпочтения распределились на шкале от 0 до 12 часов следующим образом:

```
/\  distribution density
|
|           -E=20-------|
|           |           |
|-G=15------|           |
|           |           |-F=10------|
|           |           |           |       learning
---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-------> time
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10  11 12
```

Рис. 17: Пример Выборы.

Здесь числа G, F, E - ордината – задают плотность распределения студентов с соответствующим предпочтением учиться столько-то часов в день. В рисунок заложено (вряд ли верное) предположение, что все геологи ленивее экономистов и предпочитали бы не более 4 часов, а экономисты - от 4 до 8 часов, а физики – более трудолюбивы, и хотели бы от 8 до 12 (шкала непрерывна). Площади 3-х прямоугольников 4G, 4E, 4F - изображают численность факультетов (вряд ли верно), пусть это континуальная величина (люди делимы), кто-то имеет дробные предпочтения: 2.7, 4.5... Таким образом, на ФФ учится 40 человек, на ЭФ - 80, на ГГФ - 60.

Нужно найти:

1) Результат референдума при голосовании простым большинством всего электората (по турниру Кондорсе) за уровень нагрузки – точку на отрезке [0,12] (сколько будут учиться?).

2) Пусть, конкурируют 11 кандидатов уже выдвинувших программы, и в каждом целом делении кроме крайних: в точках 1, 2,...,11 - находится по программе одного из 11-ти кандидатов, предлагающего именно такой объем нагрузки (для точек 4, 8 подразумеваем средние значения плотности: $5(G+E)/2=17.5$, $(E+F)/2=30$, избиратель выбирает ближайшую альтернативу). При голосовании относительным большинством, при двух-туровом голосовании:

Кто из кандидатов имеет 2.а) какой процент мандатов при пропорциональном представительстве в едином округе трех факультетов, 2.б) какой шанс завоевать все мандаты при мажоритарном голосовании относительным большинством в едином округе (= стать президентом), 2.в)то же: какой шанс стать президентом - но при двухтуровом голосовании, по Российскому законодательству, 2.г) какой шанс завоевать один из трех мандатов при мажоритарном голосовании относительным большинством в трех округах по отдельности, 2.д)какой шанс стать президентом) - по американскому законодательству: все голоса каждого из трех округов считаются за лидера этого округа. [Пояснение: считаем, что при равенстве голосов победитель определяется случайным отклонением одного из голосов. Тогда ответ состоит в том, чтобы указать шансы каждого из возможных победителей.]

3)Результат конкуренции партий выдвигающих свои программы, при голосовании относительным большинством, при разных известных вам режимах голосования: 3.а):NE 2-х партий при одно-туровом голосовании, 3.б):NE 3-х партий при одном туре, 3.в):NE 3-х партий при двух турах, 3.г):SPE_1 3-х партий (первая выдвигает программу, зная, что затем выдвинет программу вторая, знающая, что затем выдвинет третья) при одно-туровом голосовании. Совпадет ли результат (часы учебы) с медианным решением (обязательно/ необязательно/ невозможно)?

4)Вопрос типа (3.а - две партии), но по американскому законодательству: голоса всего избирательного округа (здесь- факультета) засчитываются за того кандидата, кто набрал в нем большинство.

> 5) Тот же вопрос, что в пункте (3.а - две партии), но явка избирателей предполагается неполной, причем избиратель охотнее идет на выборы, если видит на них идеальную для себя программу (а голосует, если пришел – уже за ближайшего). По мере отдаления ближайшей выдвинутой программы от моей любимой альтернативы вероятность моего прихода на выборы падает. Пусть, число голосующих падает линейно, пропорционально этому расстоянию (0.5 человека на 1 деление-час программ). Что произойдет?

Возвращаясь к общим рассуждениям, по поводу мотивов участия/ неучастия в выборах, заметим, что участие не может быть объяснено мотивами выгоды в рамках индивидуальной рациональности. Действительно, идя на выборы, я знаю: шанс, что я окажусь "ключевым участником", то есть именно мой голос окажется решающим – пренебрежимо мал! Как бы я ни хотел победы какого-либо кандидата, этот малый шанс не оправдывает того получаса, что я потрачу, налицо "проблема безбилетника".[46] Итак, то, что я хожу на выборы, может объясняться только в более широкой модели поведения, включающей какие-то патриотические чувства, коллективистские представления, и т.д., преодолевающие "проблему безбилетника". Достаточная явка на выборы показывает, что эти чувства и представления более-менее распространены, и изученной узкой моделью не надо ограничиваться.

С этим связан один из вопросов конституционного выбора: полезно ли для общества, что избиратель что-то (например, полчаса) тратит на участие в выборах? По описанным соображениям, эти затраты отсекают от участия в выборах последовательных индивидуалистов и равнодушных к общественным делам. Участвует же часть общества с более коллективистскими моральными представлениями и более заинтересованная. Если считать это благоприятным, то, может быть, стоило бы еще более затруднить выборы, удаляя участки от места жительства, или брать плату за возможность проголосовать? Постройте модель, где можно было бы вычислить необходимый размер такой платы.

Опять введем в модель дополнительные факторы.

5.3 Нелинейность и кооперация: "парадокс власти", "лог-роллинг"

Затронув в общем виде вопрос о сравнительных преимуществах мажоритарного и пропорционального представительства, рассмотрим теперь голосование в парламенте. Как уже говорилось, идея пропорциональности в том, что общественный вопрос решается не непосредственно избирателями в выборах (например, выбором президента, обещающего определенный уровень налогов), а на следующем этапе, представителями избирателей - депутатами. Если депутаты пропорционально представляют население, то, казалось бы, какая разница между этими двумя способами? Но разница есть, и к уже отмеченным отклонениям, мы добавим дополнительные соображения.

[46] Так в экономической теории называют все ситуации, где вкладывая личные усилия или средства я могу принести общую пользу.

Рассмотрим один из интересных примеров отклонения результата решения некоторого вопроса через парламент от результата прямого голосования избирателей, в *не-однопиковом* пространстве политического выбора (в отличие от предыдущей темы). Он известен как "парадокс власти". Пусть, три парламентских фракции или партии P1, P2, P3 имеют численность 35, 33, 32 соответственно, и предпочтения на множестве трех общественных альтернатив заданные Таблицей 22 демонстрируют цикл "парадокса Кондорсе".

партии:	Большая: 35%	Средняя 33%	Малая 32%
лучший вариант	Б	С	М
второй вариант	С	М	Б
худший вариант	М	Б	С

Таблица 22: Пример "Парадокс власти": здесь слабейшая из партий в наиболее выгодном положении.

Очевидно, если все три партии при голосовании относительным большинством искренне поддержат свои наиболее желательные альтернативы, то победит более многочисленная первая. Именно это и произошло бы при "простодушном" поведении прямого голосования избирателей по этому общественному вопросу. Но депутаты в парламенте не только имеют возможность изучить мнение каждой из соперничающих фракций, но и точно знать их численность. Поэтому реалистично предположить, что средняя партия P2 вместо искреннего голосования за любимую ей альтернативу С, понимая расклад сил, поддержит альтернативу М, вторую по желательности (иначе есть угроза Б!). Тогда сильнейшая из партий получит наихудший из всех выигрыш, а слабейшая - наилучший! (Проверьте, что голосование (P1,P2,P3)=(Б,М,М) есть равновесие Нэша).

Особые интересы, торг голосами: "лог-роллинг"

Это понятие – log-rolling ("катать бревна") – в англоязычном политическом словаре идет от какой-то поговорки вроде: "сначала ты мне поможешь подкатить мое бревно, потом я тебе твое". Подразумевается, что кроме общегосударственных вопросов, у каждого депутата есть свои особые интересы, связанные с округом, который его выдвинул, с интересами бизнеса, который его финансирует и др. Часто один депутат помогает другому "пробить" его личный вопрос, а тот ему отвечает такой же услугой. Те же услуги и между депутатскими группами. Заметим, что обсуждая это, мы уже отходим от гипотезы одномерного пространства политического выбора, которым мы занимались в предыдущем разделе, модель политического мира усложняется.

В принципе, обиходное в политике понятие лог-роллинг с теоретико-игровой точки зрения можно бы воспринимать как некий (в деталях скрываемый депутатами от посторонних) механизм достижения варианта из *ядра*. И это можно было бы приветствовать, особенно если депутатский корпус пропорционально представляет всевозможные интересы общества.

Упражнение. Предположим, 3 политических партии адекватно и пропорционально представляют в парламенте однопиковые предпочтения 3-х групп избирателей в однопараметрическом пространстве выбора. Предстоит их голосование за этот параметр по простому большинству (метод Кондорсе, можно переголосовывать уровень параметра нужное число раз). Но партии к тому же имеют возможность договариваться до голосования и есть механизм заставить выполнять договоренности. Произойдет ли искажение политического выбора общества, если особых (побочных) интересов у партий нет?[47] Решить тот же вопрос – когда у каждой партии есть свой особый интерес, волнующий ее и только ее (а не другие партии и избирателей) соизмеримо, с некоторым весом, с ее предпочтениями в общем политическом пространстве.

Этот пример, и закономерность, на которую он намекает, напоминает эффект "силы малых групп", обсуждаемый ниже. В целом, кооперативное поведение депутатов на политическом рынке может быть скорее вредно, чем полезно избирателю, так же как кооперирование продавцов на других рынках.

5.4 Неинформированность, "проблема неуправляемости" и репутации

Продолжая рассуждать об искажении общественного выбора благодаря "особым интересам", здесь нужно еще пополнить нашу картину политического мира, внося дополнительную гипотезу об асимметричной информации.

5.4.1 Природа неинформированности и примеры

Правдоподобно, что продавцы политических услуг – политики – знают особенности предлагаемого ими товара, то есть детали разных вариантов общественных решений. А покупатель – рядовой избиратель – представляет их очень плохо. Это похоже на рынки так называемых "товаров доверия".[48] Вылеченный или не вылеченный больной никогда не узнает, мог ли выбранный им врач в его случае поступить лучше. То же, с некоторым огрублением, можно сказать и об избирателе, наблюдающем действия выбранных им политиков.

Это обычная проблема ("agency problem", "проблема неуправляемости") рынков с асимметричной информацией, часто приводящая к неэффективному взаимодействию сторон. В области политических институтов это, видимо, главный источник "искажения", более значительный, чем влияние мажоритарности, или многопартийности.

В частности, политические шаги, без оснований представляющиеся рядовому избирателю выгодными, в политике называют "популизм". Типичные подобные эффекты неинформированности - "налоговая иллюзия", "бюджетная иллюзия", "кредитная и монетарная иллюзии".

[47] По сути, ответ означает характеризацию ядра в этой игре – состоит ли оно из одной точки?

[48] Часто товары делят на 1)обычные, где качество видно сразу, 2)товары эксперимента, где качество покупатель узнает только в использовании, и то не сразу, и 3)товары доверия, где он не узнает качество никогда. К последним можно отнести услуги врачей, адвокатов, и др.

Скажем, многие рядовые избирателя готовы поддержать увеличение налогообложения бизнеса в пользу финансирования социальных благ. Они полагают, что при этом безнаказанно забираются в чужой карман, и не представляют, приведет ли это к сокращению рабочих мест, и невыгодам в области трудоустройства ("налоговая иллюзия").

Аналогично, когда парламентарии или правительство объявляет увеличение государственных расходов на социальные нужды, не оговаривая источников дополнительных поступлений в бюджет, рядовой избиратель склонен поддерживать это, упуская из внимания вопрос источников и связанные с этим неприятности: "у государства денег много"("бюджетная иллюзия").

Аналогичные иллюзии, связанные с "безнаказанным" ростом государственного долга и печатанием денег, приводили к тяжелым последствиям почти во всех странах. От части иллюзий избирателям "зрелых"демократий удалось освободиться, но в целом проблема далека от положения разрешенной.

Что поделаешь, трудно ожидать, что все избиратели будут ломать голову над экономическими закономерностями, их дилетантизм объясним. Кажется неразумным тратить *личное* время с малым шансом принести *общественную* пользу. Мое глубокое изучение общества, внимательное чтение газет и политические размышления, позволят изредка проголосовать, имея практически нулевые шансы изменить общественный выбор (ведь принести пользу можно только оказавшись ключевым участником голосования!). Это нежелание называют "рациональной неинформированностью". Это тот же эффект "безбилетника", что и при рациональном неучастии в выборах, только усиленный, поскольку на изучение экономики и политики нужны нетривиальные затраты.

5.4.2 Смещение выбора в сторону наблюдаемых факторов

Рассмотрим один из эффектов неинформированности, когда пространство общественного выбора многомерно. Представим себе, что несколько кандидатов в президенты различимы для избирателя по трем признакам: позиция по уровню налогов (левее или правее), позиция по внешней политике (за мировую интеграцию или за изоляцию), и внешняя представительность - "имидж" кандидата. Предположим, что значимость этих факторов для избирателя убывает: экономическая позиция важнее всего, внешняя политика на втором месте. А наблюдаемость факторов возрастает: личный имидж – самый наблюдаемый фактор, разобраться во внешнеполитическом курсе кандидата несколько сложнее, а в экономическом еще сложнее. Предположим несколько случайным образом возникших кандидатов (позиций – программ в трехмерном пространстве обсуждаемых факторов). Тогда мы легко поймем, что эффект неполной информированности окажется "искажающим выбор". А конкретнее, он будет смещать общественный выбор, даже если избиратели имеют совершенно одинаковые вкусы, в сторону более импозантных и выигрышных в международном плане кандидатов, в ущерб экономическим интересам избирателей.

Легко понять и на других примерах, что асимметрия информации и иллюзии могут искажать политический выбор, выраженный в терминах истинных выгод. Это очевидно.

Интереснее вопрос о характере *информирования избирателей политиками*. Сформулируем суть проблемы в чистом и заостренном виде как задачу.

Задача: “выберет ли дилетант профессионала?”. Предположим, несколько политических партий выдвигают программы и соревнуются за электорат в одно-параметрическом пространстве политического выбора. А избиратели совсем не имеют понятия о собственных предпочтениях (выгодах от того или иного уровня параметра). Партии могут информировать избирателей об их, избирателей, интересах, но у тех нет оснований верить. Можно ли предсказать результат соревнования партий за власть (общественный выбор), или он неопределен?

5.5 Неинформированность и политические циклы

Здесь мы остановимся на циклических проявлениях неинформированности в политике, по которым можно *измерить* степень этой неинформированности. Интересно, что некоторые эмпирические исследования (см. Е.Журавская и др. www.eerc.ru 2002) отмечают снижение этих эффектов по мере "взросления"демократии, в том числе – в России.

5.5.1 "Партийный" цикл

Рассмотрим другую простую модель, тоже с неинформированным или не вполне рациональным избирателем. Предположим долговременные экономические проблемы в стране с Вестминстерской моделью демократии (победившая партия несет полную ответственность за ход дел). Пусть, они вызваны мало зависящими от правительства, объективными условиями (как было в послевоенной Англии). Допустим, что достаточная доля избирателей оценивает партии не по их заявляемым политическим программам, а по результатам управления страной за ближайший отчетный период (как обсуждалось выше). Это довольно правдоподобно, поскольку рядовому избирателю трудно проанализировать детали и выяснить, какая доля ответственности за неудачи на правительстве. Тогда возникает возможность политического цикла: каждая из двух соперничающих партий окажется обязательно смещенной "за неудачи" на очередных выборах, и неизбежно чередование то одной, то другой у власти. В результате, экономический курс приходящих к власти партий оказывается достаточно произволен, мало связан с запросами избирателя, на весь период неблагоприятных условий. Все равно оппозиционная партия должна победить, а правящая проиграть. Аналогично, в периоды объективно благоприятные для страны, правящая партия может десятилетия оставаться у власти с нелучшей (объективно) программой. В обоих случаях неполная информированность "искажает" общественный выбор.[49]

Эти искажения носят объективный характер: трудно придумать механизм принятия решений, который помогал бы людям, не вполне знающим, чего они хотят. А знать детали мешает проблема безбилетника. Это противоречие несколько смягчается, если репутация правящей партии (или королевской династии) образуется у населения не по краткосрочным, а по длительным периодам наблюдений. Нестабильность партий мешает такому накоплению информации, стабильность же (как в Англии) способствует.

[49]Повторим, ситуация с "наймом" политиков избирателями весьма похожа на найм врачей или адвокатов: во всех этих случаях нанимающий плохо представляет, что для него нужно делать, а нанимаемый - хорошо, но не всегда мотивирован. Задача создания адекватной мотивации (Парето-оптимального контракта) в общем виде неразрешима. Но повторяемость ситуаций и возникновение репутаций смягчают проблему.

Задача. Пусть в описанной ситуации пики предпочтений избирателей распределены равномерно на отрезке (0,1). Память избирателя - одноопериодная, страна в длительной депрессии, так что возможен цикл. Пусть, каждый избиратель готов пожертвовать 0.2 единицы предпочтений на то, чтобы наказать неудачную партию (то есть, отклониться на столько в пользу оппозиции от своих истинных предпочтений). Пусть, обе партии имеют собственные идеологические предпочтения значительно правее медианы избирателей. Насколько две заявляемые (и выполняемые) программы могут отклониться от медианы и совпадут ли они? Рассмотреть однократную и повторяемую игры.

5.5.2 "Оппортунистический" цикл

Другой случай возникновения циклов касается не смены партий у власти, а цикличности выбора экономических макро-переменных, его называют "оппортунистический".

Понимание его теоретики вывели из наблюдения, что во многих странах в предвыборный период, особенно в последние месяцы, партия или группировка находящаяся у власти заметно расширяет социальные программы, за счет наращивания государственного долга или печатания денег (инфляционный налог).

Основу этого эффекта составляет иллюзия "заботы об обществе", которую удается создать такими мерами у рядового избирателя (если бы не удавалось, политики бы этим не занимались). Иллюзионизму благоприятствует то, что эффекты социальных программ, например, повышения пенсий, очевидны и немедленны, а расплата за несбалансированный бюджет отложена и непонятна избирателям. В дополнение к этому, память и рациональность избирателей таковы, что партию, пять лет не повышавшую пенсий и вдруг перед выборами повысившую – могут считать "исправившейся".

Мы не будем подробно разбирать модели партийного и оппортунистического циклов, отсылая читателя к книге Пирссона и Табеллини **??**.

Вообще, есть ли механизм, способный закономерно заставлять политические партии конкурировать на политическом рынке по существу, а не в пространстве иллюзий? В следующем разделе проявляется робкий оптимизм, возможно, неоправданный. Более смелый оптимизм отложен до раздела о "голосовании ногами".

5.6 Преодоление неинформированности

Можно ли обойти этот подводный камень демократических процедур – плохую информированность? Заметим, что мы здесь не обсуждаем случай "идейных" политиков, честно отстаивающих интересы избирателя независимо от выгод или невыгод для своей политической карьеры. Нас интересует, может ли механизм политического рынка давать удовлетворительный результат *независимо* от этой идейной составляющей, подобно рынкам обычных товаров (а всегда ли выгодны избирателю идейные политики – мы обсуждаем в другом месте).

Ответ, как и для рынков других "товаров доверия", зависит от спроса на информацию о товаре, и появления в ответ на него каналов информирования.

Сначала обсудим существующие, и слегка исправляющие дело, прямые пути преодоления неинформированности избирателя, а потом - косвенный, через репутации.

5.6.1 Диффузия политической информации

В этом разделе, в отличие от других, будем предполагать, что избиратель знает свои цели, но неясно представляет себе истинные программы партий: как те собираются решать интересующий его вопрос. Эта неясность достаточно реалистична. Мало кто читает заявленные партиями программы, и еще меньше людей умеет рассчитать поправку – насколько партия отклонится от заявленного, когда получит власть (опять "рациональная неинформированность").

А что же в таких ситуациях отражает процесс выявления общего мнения в голосовании? Не бессмысленны ли выборы?

Покажем (следуя вначале Ordeshook **??**) на примере, что при некоторых гипотезах даже незначительной доли информированных избирателей достаточно, чтобы остальные по ней сориентировались, и голосовали адекватно своим интересам.

Предположим, есть два кандидата, Левый и Правый, и если бы все избиратели были хорошо информированы об их позициях (предполагаемой политике), то за Левого бы проголосовало 20%, а за Правого – 80%. Пусть, только 10% левых избирателей и 10% правых знают истинные позиции кандидатов, а остальные голосуют случайно (50%/ 50%). Что покажет опрос общественного мнения? 2 из 20-ти левых проголосуют сознательно за Левого, 8 из 80 правых – за Правого, остальные 90 голосов случайным образом распределятся, и опрос покажет 2+45=47% за Левого, 8+45=53% за Правого. Теперь, если неинформированный избиратель знает, что информированных именно 10%, и умееет считать, он обратным расчетом установит, что истинной распределение голосов должно было быть 20/ 80. Это показывает ему, где лежит линия раздела между сторонниками Левого и Правого на политической оси (распределение предпочтений на которой надо предварительно преобразовать в равномерное масштабированием оси). И он может адекватно соотнести ее с собственным предпочтением: левее я нахожусь линии раздела, или правее. А большего мне и не надо для выбора, конкретные позиции Левого и Правого меня не интересуют. Тогда уже по первому опросу все избиратели сумеют оценить позиции партий относительно себя, и уже второй опрос даст истину: 20/ 80. Столь же просто сработает механизм “ориентации по популярности” и при неодинаковой доли информированных среди левых и правых.

Сложнее, когда неинформированные менее рациональны. Пусть, неинформированный знает только общую медиану (0.5), свое положение, и думает, что все кроме него информированы. Можно показать, что и в этом случае последовательность опросов будет сходиться к полному выявлению предпочтений, но уже не за один шаг: “диффузия информации” идет медленнее. Все же, при адекватных опросах результат выборов адекватен.

Манипулируемые опросы. Теперь посмотрим, если организатор опроса хочет подыграть Левому или Правому, то в какую сторону ему выгодно исказить результаты? Очевидно, добавляя своему фавориту голосов на бумаге (в отчете), он создает иллюзию, что его противник – маргинал, близкий к краю, и добавляет фавориту голосов реально. При мажоритарных выборах, это влияние опроса еще более усиливается, ведь нет смысла голосовать за "непроходных" кандидатов.

Знатоки. Рассмотрим иную модель диффузии информации о кандидатах, возможно она более реалистична в России. Предположим, каждый избиратель причисляет себя к какой-то "референтной группе". Для одного это круг родственников, для другого - социальный слой или единомышленники, сплоченные некоторыми ценностями; те, к кому избиратель себя относит. Если в референтной группе есть человек, считающийся знатоком политики и вызывающий доверие, то достаточно ему разобраться в особенностях программ и кандидатов, чтобы доверяющие ему люди присоединились к его мнению, не тратя времени на чтение газет. Бывает, что у него, в свою очередь, есть социальный стимул изучать газеты для поддержания своего статуса знатока. В такой ситуации ловушка "рациональной неинформируемости" преодолима, и "искажения" общественного выбора не происходит.

5.6.2 Репутации

Есть еще путь преодоления неинформированности косвенный, через репутации.

На многих рынках товаров доверия путь преодоления неблагоприятной асимметрии информации – накопление продавцами *репутаций*. Скажем, врач или юрист, в среднем добивающийся успеха чаще других, имеет лучший шанс быть нанятым со стороны дилетанта, если хотя бы эта частота есть наблюдаемый дилетантом параметр (см. проект Франклина "Назначение судей" в первой части лекций).

Эти идеи возвращают нас к обсужденной выше теме о преимуществах Вестминстерской модели и "зрелых" демократий. Как уже упоминалось выше, в контексте сопоставления с пропорциональным представительством, наилучшей по *выявляемой ответственности* представляется Британская мажоритарная система. Там от выборов до выборов *одна* партия имеет полную власть, следовательно, несет полную ответственность за происходящее и в законодательстве и в управлении (создается сильное устойчивое правительство). Это дает избирателю возможность адекватной оценивать партии *по результатам*, а не по программам. При этом конкурирующие партии столетиями стараются создавать себе репутации хороших правителей. Возможно, этот эффект – репутации – есть главный механизм, способный преодолеть асимметрию информации на политическом рынке, наряду с эффектом "голосования ногами", рассматриваемым в разделе о режимах власти.

Итак, рассмотрев набор различных моделей "чистого общественного выбора", предостережем от слишком прямого их использования. Скорее, к ним надо относиться как к некоторому конструктору, собирая из этих и других идей иные модели, более подходящие к реальным ситуациям. Главные поправки, которые придется сделать – влияние денег, к разбору которого мы сейчас приступаем, и влияние политических эмоций –иррациональности (которого мы почти не коснемся).

6 Соизмеримость выигрышей: деньги в политическом выборе

Все признают, что влияние денежных интересов и денежных рычагов на решение государственных вопросов очень велико. Но совсем не очевидно, хорошо это или плохо с точки зрения "пользы общества", и как эту пользу понимать. Прежде чем обсуждать усложненное переплетение денежных и неденежных факторов политического выбора, рассмотрим, что происходит в простейших чисто - денежных ситуациях.

6.0.3 Общественная эффективность подкупа?

Новизна момента в том, что когда относительные выгоды для избирателей того или иного решения общественного вопроса *соизмеримы, например, в деньгах*, тогда понятие "эффективного решения" в корне меняется!

Пример. Представим себе, что инженер прокладывает государственную железную дорогу, и может провести ее западнее, через городок А, или восточнее, через городок Б, с равными издержками. Естественно, жители (особенно купцы) каждого городка заинтересованы в железной дороге и лоббируют в свою пользу. Судя по всему, в этой ситуации голосование большинством голосов избирателей двух городков может приводить к общественно-неоптимальному исходу! Возможно, будет потеряна часть суммарной потенциальной выгоды (решать большинством всей страны – еще глупее). Важнее не число – а где от дороги больше прибыли. Это ключевая мысль.

Теперь, отличие этой ситуации, от изучавшихся ранее - измеримость полезности в деньгах и возможность ими делиться (трансферабельность полезности). Это – классическая экономическая ситуация "общего блага" при "квазилинейных целевых функциях". Это, как мы упомянули, меняет понятие эффективности. Если раньше эффективность означала всего лишь медианный выбор или еще более слабое понятие, то теперь это максимизация суммы выигрышей, или иная подобная функция благосостояния. Требования к эффективности повысились!

Но трансферабельность упрощает проблему выявления общественного спроса и общественный выбор не до тривиальности. Задача разрешима идеально, если обе стороны способны довести до конца переговоры об “отступном”, которое заплатит выигравшая дорогу сторона проигравшей стороне. Это решение типа ядра. Оно, естественно, слабо Парето-оптимально. Но практически оно может реализоваться, только когда участников переговоров не слишком много, или когда информация об их потребностях (выгоде от блага, в данном случае - от дороги) очевидна всем.

В реальности же взаимовыгодные соглашения даже двух-трех участников нередко не реализуются из-за неудачной схемы переговоров и завышенных гипотез своей возможной доли. Скажем, купцы города А могут иметь суммарную прибыль 100 тыс. рублей, а купцы города Б - менее (скажем, 50), и готовы уступить, но предполагают ожидаемую прибыль противника в 110 т.р. Тогда они могут запросить 105 отступного, и переговоры зайдут в тупик. Инженер мог бы выступить среди этих двух сторон как аукционер, поднимая цену взятки за благоприятное решение, пока одна из сторон не отступит. Выигравшие заплатят 50, и сообщество двух городов потеряет эту сумму, она уйдет на сторону, но это - трудно избегаемые издержки выявления информации. Казалось бы, это - решение.

Однако в более сложной форме та же проблема адекватного дележа возникнет и внутри каждого города (если смотреть шире - в обществе в целом, среди сторонников варианта А и сторонников Б). Кто конкретно сколько заплатит (получит) из отступного? Если (реалистично) считать, что только сам участник знает, во что он ценит вариант А или Б, эта трудная задача формулируется как “проблема корректного выявления спроса на общественное благо”. В общем виде она неразрешима: не существует механизма переговоров (способа обмена предложениями и сообщениями) гарантированно приводящего к варианту из ядра. Как показали Гровс и Кларк, единственным механизмом гарантирующим (при естественных условиях на целевые функции) искренность сообщений участников о своих потребностях является механизм Гровса-Кларка (см. Задачник: решите задачу Гровса-Кларка). Но и он может приводить к потере части выгоды (не более 50 т.р.) сообществом участников выбора, когда стимулирующие налоги Кларка ненулевые. Ведь для стимулирования искренности, сумму этих налогов должен получить кто-то посторонний. Например, инженер-строитель дороги.

Из этих рассуждений ясно, что участие денег в той или иной форме решения общих вопросов (от финансирования избирательных компаний до взяток чиновникам) не всегда вредно для эффективности выбора: больше затратить нередко готова та сторона, где выгода больше. понятие “эффективного решения” в корне меняется. Вместо смещения выбора относительно медианы нужно диагностировать максимум некоторой функции общественного благосостояния, например, суммы денежных выигрышей избирателей. Пример - общественное благо: выбор уровня налогов и потребления. Простое голосование большинством - дает медианное равновесие, но оно окажется эффективно примерно с нулевой вероятностью, в зависимости от совпадения медианы и среднего. Более благоприятным мог бы оказаться механизм выявления предпочтений Гровса - Кларка: решение эффективно, с точностью до размера выплаты организатору решения. Подкуп политиков - аналог механизма Гровса - Кларка. Поэтому чисто денежное решение экономических общественных вопросов (голосуют доллары а не избиратели) могло бы быть Парето-эффективным, если бы не трансакционные издержки и "эффект малых групп".

6.0.4 Эффект “силы малых групп”

Манкур Олсон **??**, ссылаясь на исторические примеры, заметил, что одна и та же денежная сила (потенциальная выгода), лоббирующая некоторый общественный вопрос, действует успешнее, если персонифицирована в немногих представителях. Так, несколько автомобильных концернов страны способны добиться высоких ввозных пошлин на зарубежные автомобили. Противоположная же сторона (потребители), получающая от этой меры суммарный убыток, превышающий, по оценкам, выгоду авто-производителей вчетверо, проигрывает лоббирование.[50]

Суть в том, что малочисленные группы интересов имеют непропорционально большую мощность в лоббировании за счет низких издержек по достижению договоренности внутри группы. Поэтому три-четыре олигарха успешнее отстаивают свои интересы, стоящие 1 млн., чем 1000 бизнесменов отстаивают их интересы, стоящие 100 млн. За счет этой "организационной власти"происходит искажение общественного выбора.

Разберем эффект относительно большей силы малых групп на примере “железная дорога”. Может быть неочевидно, как согласовать совместные действия и/или дележ затрат/выгод. Вполне возможно, что один купец города Б, готовый дать взятку до 50 т.р. перевесит 110 купцов города А, ожидающих примерно по 1 т.р. выгоды каждый, но не знающих этого друг о друге наверняка. Шансы этих 110-ти договориться гораздо лучше, если они твердо знают, что одинаковы, и принимают единообразное решение, обязательное для всех. И вообще, улучшение информированности обычно увеличивает шансы Парето-эффективных договоренностей и снижает силу малых групп.

[50]Эта ситуация протекционизма была типична для всех стран в отдельные периоды, и остается для многих товаров. Там, где идея свободы торговли победила – протекционизм победили, пожалуй, не разрозненные потребители, а экспортеры всех стран, способные организоваться не хуже импорто-заместителей, и фирмы-импортеры своей страны.

Эффект малых групп заметнее (но не приносит вреда), если рассматриваемый общественный вопрос - типа “игры с нулевой или постоянной суммой”, то есть дележ пирога (сторона А и сторона Б ожидают равную выгоду).

Теперь на примерах посмотрим, как две разные силы - денежная и численная - могут перевешивать друг друга в решении общего вопроса.

Предположим, есть три варианта решения общественного вопроса (например, ввозных пошлин на автомобили): High, Moderate, Low (Таблица 23).

Alt-s\gr.:	‘U’=2100 v.	‘E’=1000 v.	‘I’=20 v.	‘P’=2 v.	Total, result
‘High’	0*2100	0*1000	0*20	0*2	$\Rightarrow$ 0
‘Moder.’	(1.5)*2100	1.5*1000	30*20	-50*2	$\Rightarrow$ 5150 (2000?)**
‘Low’	(1.6)*2100	1.6*1000	10*20	-100*2	$\Rightarrow$ 4960 (1600?)
no pay:	$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$2100	(0,0,1000)	(0,20,0)	(2,0,0)	$\Rightarrow$ L wins (no pay)*
Willingness to pay under cooperation cost c =\$0:					
M $\succ$ L?	-	$\geq$ -100	$\leq$ 400	$\leq$ 100	$\Rightarrow$ M wins (‘I’ pay \$1)*
M $\succ$ H?	-	$\leq$ 1500	$\leq$ 600	$\geq$ -100	$\Rightarrow$ M $\succ$ H (no pay)
L $\succ$ H?	-	$\leq$ 1600	$\leq$ 200	$\geq$ -200	$\Rightarrow$ L $\succ$ H (no pay)
Willingness to pay under cooperation cost c =\$28:					
M $\succ$ L?	-	-	$\leq$ 400-560	$\leq$100-56	$\Rightarrow$ M $\succ$ H (P pay)
M $\succ$ H?	-	-	$\leq$ 600-560	$\geq$ -44	$\Rightarrow$ H wins (P pay \$1)*
L $\succ$ H?	-	-	$\leq$ 200-560	$\geq$ -144	$\Rightarrow$ H $\succ$ L (P pay)

Таблица 23: Затраты на агитацию и “сила малых групп”.

Цифры таблицы означают, что каждый из двух бизнесменов - производителей автомобилей в стране (‘Producers’) - оценивает вариант пошлин ‘High’ на 100 денежных единиц (например, долларов, или тысяч долларов) выше, чем ‘Low’, а вариант ‘Moderate’ - не 50 д.е. выше, чем Low. Каждый из 20 бизнесменов - импортеров (‘Imorters’) - оценивает вариант Moderate на 20 д.е. выше, чем High, а Low - на 10 выше, чем High (почему-то Moderate предпочтительнее всего). Каждый из 3100 рядовых потребителей оценивает вариант High в 0 прибыли, Moderate - в 1.5 д.е, Low - в 1.6 д.е. Но потребители делятся на две группы: 1000 хорошо информированы о своей выгоде (‘Educated’), а остальные 2100 могут быть привлечены пропагандой к любому решению в голосовании, и не являются активными игроками (‘Uneducated’, они в положении “болвана”). Пропаганда стоит денег. Кто больше платит, тот и завоюет целиком группу неинформированных (Uneducated) на свою сторону, а при отсутствии плтаы или перевеса она делится на равные части между альтернативами благодаря случайному выбору.

Первый вариант гипотез: пропаганда невозможна, затраты не могут привлечь голоса. Тогда группа Uneducated проголосует случайным образом, например, поровну за каждый из трех вариантов, а победит альтернатива Low, поскольку 1000 голосов группы Educated перевесят голоса групп Importers, Producers. Это не Парето-эффективно с точки зрения суммарной прибыли, так что, выборы без денег здесь не очень удачны. Численно-сильная сторона передавливает богатое меньшинство не имея способа уступить и получить отступное.

Второй вариант: пропаганда эффективна, издержки кооперации, то есть организации в группу давления (лоббирования) нулевые. Тогда группа Educated способна вложить в лоббирование, для привлечения 2100 пассивных голосов Uneducated на свою сторону, сумму до 1500 д.е., в случае основной борьбы между High/Moderate, или до 1600 д.е., в случае основной борьбы между High/Low. Аналогично, другие группы определят для себя предельные вклады допустимые для достижения перевеса в той или иной паре альтернатив (см. Таблицу).

Пусть, все активные группы понимают величину предельных вкладов партнеров, и вклады (как часто бывает) осуществляются не единовременно, а последовательными порциями в ходе кампании. Тогда, группа 'Importers' может вложить средства, чтобы победила альтернатива Moderate. Если все понимают, что Importers - сильная сторона (готовы больше всех платить), то отступят, если 'Importers' вложат хотя бы 1 д.е. для привлечения 2100 пассивных Uneducated на свою сторону (решение по концепции SPE). Ведь проигрывающие группы понимают, что если вложить что-то в пользу другой альтернативы, то сильная сторона (Importers) ответит добавочными перевешивающими вложениями (до 600 против High, до 400 против Low). Эта угроза срабатывает; слабо-заинтересованные отступают. В результате в примере реализуется общественный Парето-оптимум 'Moderate' (он помечен знаком **, а некооперативные решения знаком *), при небольших потерях на агитацию (1 д.е.).

Из примера понятно, что этот счастливый исход обеспечен участием денег, и достаточно большой долей пассивных участников Uneducated, иначе задаром перевесили бы Educated, и готовность Importers проявить свою заинтересованность не сработала бы. Она может сработать в других предположениях: при возможности заплатить непосредственно группе Educated за сотрудничество в форсировании варианта Moderate. В реальности подобные идеи принимают форму благотворительных акций (вплоть до раздачи избирателям еды на улицах в Бразилии) со стороны агитирующих организаций. Это называют 'подкуп избирателя', но это благоприятное для эффективности результата поведение, если избиратель рационален. В частности, эта идея легче реализуется, если 'подкуп' идет не между самими избирателями, а между группами, представляющими их в парламенте. Это называют 'торговлей голосами' или 'log rolling' (англ.: катать бревна сообща): одна фракция поможет второй принять один закон (или субсидирование), а вторая – другой закон, нужный для первой. В случае пропорционального адекватного представительства групп избирателей это аналогично торговле между самими группами, но снижает издержки кооперирования. Тем самым, выше вероятность решения из ядра, следовательно вероятность общественной эффективности.

Кроме невозможности агитации, причина, которая может исказить оптимизирующие возможности агитации или подкупа избирателя - это отклонение интересов неинформированных от интересов совокупности информированных. В нашем примере достаточно увеличить численность недумающей массы всего на 200, и исход равновесия Нэша в игре агитации уже перестанет быть Парето-оптимумом. Впрочем, следует ли включать интересы недумающей массы в понятие Парето-оптимума? Это вопрос мнения, выбора между аристократическим и вполне демократическим взглядом.

Интересно, что сходная игра игра произойдет, если вместо группы Uneducated окажется просто чиновник, безразличный к самому общественному вопросу (High, Moderate или Low), но готовый за взятку решить его в ту или иную сторону. В этом случае вместо выборов рассматривается процесс лоббирования в исполнительных органах власти. Аналогично, победить должна наиболее заинтересованная сторона, а размер общественных потерь (взятки или средств потраченных на агитацию) тем меньше, чем лучше каждая сторона представляет готовность платить своих соперников. Это подобно предотвращению военных действий, когда стороны заранее знают, кто сильнее.

Противоположный, третий вариант гипотез нашего примера: пусть каждая группа не знает точно готовность других групп лоббировать, и допускает вероятность 2/3 своей победы, если вложить почти 2/3 своей максимальной возможной прибыли в лоббирование своего любимого варианта (это концепция решения с "фиксированными неадекватными ожиданиями"). Если еще и ожидания "главного конкурента" у всех разные и неблагоприятные, то может случиться, что группа Educated вложит до 2*1599/3 д.е. в лоббирование варианта Low, Importers вложат 2*599/3 д.е. в лоббирование варианта Moderate, Producers вложат 2*199/3 д.е. в лоббирование варианта High. Всего в ходе выборной кампании окажется непроизводительно растрачено почти 1600 д.е., то есть почти столько, сколько "стоит" решаемый вопрос для сильнейшей из активных групп! Неправдоподобно-высокая вероятность 2/3 предположена, чтобы подчеркнуть опасность неэффективной растраты средств при завышенных ожиданиях собственной победы всеми участниками (что часто наблюдается). Как и в войне, при адекватной оценке сил слабый отступал бы до столкновения.

Четвертый вариант гипотез: суммарные издержки организации в группу давления пропорциональны числу участников, и ненулевые. Например, пусть они составляют 1 у.е с человека. Это стоимость усилий (например, времени) каждого по кооперированию с единомышленниками. Тогда группа Educated объединившись способна вложить не более 500 д.е. для лоббирования альтернативы Moderate против High, и 600 - для лоббирования Low против High. А Importers могут вложить 580 против High, и 380 против Low. Как и при отсутствии издержек, Importers - сильная сторона, и результат 'Moderate' почти (за вычетом этой 1 д.е.) Парето-эффективен. Аналогично, при издержках $c = 2$, 3,4,5,... - побеждают Importers с результатом 'Moderate'. Только при издержках более $c = 28$ с человека начинают побеждать Producers, готовые заплатить до 44 д.е. за альтернативу High против Moderate, это оказывается больше, чем противовес 2*20=40 выставляемый группой Importers. Исход не Парето-эффективен.

Итак, пример поясняет, что 1) участие денег в завоевании неинформированного или безразличного избирателя может быть Парето-улучшением, по сравнению с обычными выборами, где побеждает просто численность; 2) это может быть и неверным, особенно если издержки образования коалиций велики и приводят к “преимуществу малых групп”; 3) влияние денег и потери их на избирательную кампанию связаны с неинформированностью, как части избирателей, так и лоббирующих групп.

6.0.5 Дележ пирога: “игра с нулевой суммой”

В предыдущем разделе наше внимание было сосредоточено на вопросе выбора варианта приносящего наибольшую суммарную полезность обществу, среди альтернатив выгодным одним группам или другим. Теперь же обратимся к случаю конфликта интересов в чистом виде — “игре с нулевой (или постоянной) суммой”, не допускающей компромиссов.

Эту типичную в быту и политике ситуацию часто называют “дележ пирога”. Что достанется одному, то не достанется другим. Например, депутаты, утверждающие статьи расходования государственного бюджета находятся именно в этой позиции. Если чей-то округ просит дополнительной помощи, значит у кого-то придется отнять. Сходная ситуация с вопросом распределения налогового бремени между разными группами избирателей: богатыми и бедными, наемными работниками и собственниками капитала.

Главная мысль, которую нам предстоит вынести из анализа возможных политических механизмов в этом вопросе — их неэффективность и даже опасность, при отсутствии извне (по отношению к делящим) навязанных правил, или социальных и моральных норм, ограничивающих варианты поведения.

Утверждение. *Голосованием по Кондорсе с возможностью переголосовывать пирог разделить нельзя: ядра нет.*

Проверить это достаточно легко: например, среди трех делящих двое всегда могут объединиться против третьего, поделив пирог пополам и оставив третьего с нулем. Но этот аутсайдер может предложить любому из образовавшейся коалиции вступить в коалицию с ним, предложив ему более половины, например, 2/3. Поэтому вариант (0.5,0.5,0) блокируется. Аналогично блокируется и любой другой дележ.

Напротив, если большинство объединено в коалицию какими-то дополнительными причинами, например, чувствами национальной или социальной общности, противостоящими разрушению коалиции, то ядро может существовать! Большинство тогда, по сути, ограбит меньшинства (марксистская идея "социальной революции", которой мы еще коснемся).

Эту опасность в применении демократических процедур к вопросам перераспределения в большинстве стран ограничивают законами о защите собственности. Все же, в некоторых отношениях меньшинствам приходится плохо. Мы уже назвали два важных примера в перераспределении национального дохода политическим процессом. Это перераспределение от богатых бедным, от бизнеса – наемным работникам. В обоих случаях, небогатые избиратели, будучи более многочисленными, вынуждают богатых поделиться. Этому противостоит обсуждавшийся выше эффект малых групп и большая возможность богатых и бизнеса лоббировать свои интересы. Судя по довольно прогрессивной шкале налогообложения и немалым корпоративным налогам, это противостояние недостаточно сильно.

Менее очевидный сюжет из этой области — перераспределение от будущих поколений. А именно, голосуя за увеличение государственного долга, за "жизнь взаймы"теперешние избиратели перекладывают часть своих расходов на будущих. А будущие в этом голосовании не участвуют, поскольку еще не родились. В результате во многих демократических странах образовался немалый национальный долг.

Итак, участие капитала в выборах - это противовес перераспределительным мотивам бедных, а перераспределение от будущих поколений сдерживает скорее, забота о детях.

7 Режимы власти и их изменение

Выше мы определили “режим” как сочетание учреждений власти и способа их функционирования (как правила игры и ее равновесие). Всем известны термины классификации режимов: тоталитарный, авторитарный, демократический, либеральный, и т.д., отражающие степень концентрации власти в обществе. Мы не имеем возможности придать этим словам точный смысл и разобрать подробно встречающиеся в мире варианты. Вместо этого покажем несколько отдельных характерных случаев режимов.

7.1 Игра с нулевой суммой: модель социальной революции Рёмера

Рассмотрим еще одну ситуацию перераспределения в политике: модель Джона Рёмера для социальной революции (J.Roemer, 1984, статья с выразительным названием: “Lenin and tzar: rationalizing revolutionary ideology”). Она описывает известную связь чрезмерного неравенства богатых и бедных в государстве и неустойчивости режима.

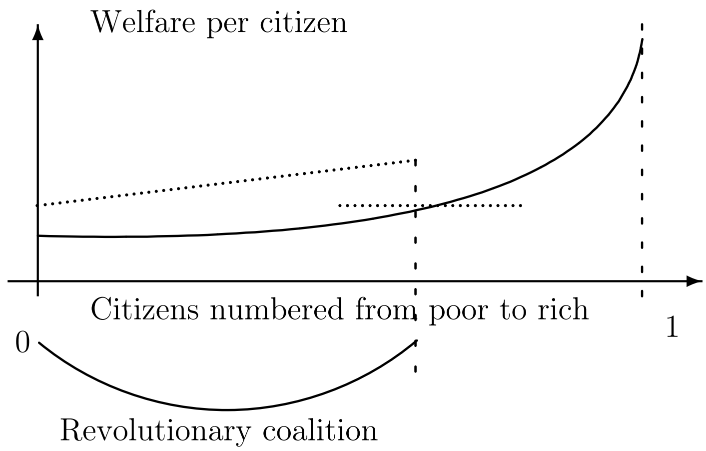


Рис. 18: Модель “Ленин и Царь”

Предполагаются два активных игрока: политический лидер у власти (условно: Царь), и лидер в оппозиции (условно: Ленин). Распределение богатства населения страны описано непрерывной кривой Лоренца распределения доходов, или, вернее, ее представлением не в относительных, а в абсолютных терминах, как на Рис. 18??

Предположим, в условиях сильно скошенного распределения доходов оппозиционный лидер предлагает беднейшей части населения ограбить богатую, и разделить это богатство поровну. Агитируя, он выбирает границу, отмеченную точечной линией – начиная с какого уровня богатства человек причисляется к врагам революции. Тем самым намечается (вертикальной линией) раздел между намеченными к раскулачиванию и революционной коалицией. Кривая со стрелками показывает, насколько возрастет богатство беднейших, если перераспределить им весь интеграл собственности богатых. Благодаря скошенности кривой распределения богатства, оппозиционер имеет возможность набрать революционную коалицию больше половины населения.

Предполагается, что индивид соглашается вступать в коалицию, если ожидаемый прирост богатства от революции (произведение обещаемого оппозиционером прироста на априорную вероятность революции P_0) превышает ожидаемое от царя наказание за бунт, в случае его поражения (вероятность $1 - P_0$). Царь выбирает уровень наказания, но тривиально, наилучший его ответ – максимальное наказание, равное всему имеющемуся богатству индивида, то есть тюрьма или смерть.

Оказывается, при нулевой вероятности революции, по предположениям населения, режим царя устойчив независимо от неравенства – никто не вступает в революционеры. Но чем выше неравенство, тем меньшей априорной вероятности революции достаточно, чтобы начался процесс образования революционной коалиции. Если же считать вероятность не константой, а величиной, зависимой от размера уже имеющейся революционной коалиции, то революционный процесс катастрофичен, то есть начавшись – уже не остановится.

Второй вывод – если и после революции политическая ситуация неустойчива, то перераспределение может идти дальше, уничтожая самых богатых из оставшихся граждан, участвовавших в первом этапе революции. В пределе должно быть достигнуто полное равенство.

Эта модель, конечно, очень упрощает описание переворота, но связь неравенства и неустойчивости отражает адекватно.

7.2 Модель рационального диктатора ("оседлого бандита") и монархия

Чтобы ввести популярную модель "оседлого бандита" ("stationary robber", A.Schleifer, 1989??), объясняющую пользу даже от плохого режима власти по сравнению с анархией, вспомним пример "рэкет", разобранный в разделе теории игр. Там рэкетир выбирал, какую долю выручки фирмы забрать себе, максимизируя свою выгоду, но и учитывая возможности, то есть функцию отклика фирмы. Если предположить, рэкетир "доит" не одну фирму, а много – ничего в решении не изменится.

Но теперь дополним эту модель гипотезой вложения рэкетиром части собранных средств в "общественное благо", повышающее эффективность работы всех фирм. Интерпретируя эту гипотезу, можно привести в пример князя, покорившего некоторую местность, населенную крестьянами, и создающего общественное благо – защиту крестьян от прочих князей и случайных разбойников.

Легко придумать условия, то есть параметры производственных и целевых функций, при которых крестьяне рады быть покоренными (по сравнению с полным отсутствием защиты). Но нас интересует более тонкий вопрос: оптимальный ли, в некотором смысле, уровень общественного блага будет выбран диктатором, и как на это влияют параметры задачи.

В статье (A.Schleifer, 1989??), которую у нас нет возможности разобрать в деталях, рассмотрена динамическая модель такого государя ("оседлого бандита"), предполагающего царствовать N лет и максимизирующего только собственное потребление. Показано следующее.

Первое, элементарное, но самое важное: чем дольше горизонт планирования диктатора, тем выше благосостояние подданных. Тем самым долго (в идеале - вечно) живущая королевская династия как субъект власти наиболее предпочтительна.

Второе. Если диктатор, имеющий большой горизонт планирования, финансируется не только налогами, а в достаточно значительной мере и дивидендами с акций (имеет долю в частных фирмах, в статье найдено, какой доли достаточно), тогда уровень налогообложения и расходов на общественное благо приблизительно оптимален.

Эти соображения показывают, что демократический способ правления теоретически нельзя однозначно считать более выгодным для рядового гражданина, чем монархию, по крайней мере, если рассматривать только уровень налогов и общественных благ. Правда, практический успех многих (далеко не всех) демократий по сравнению со многими (не всеми) монархиями в создании *стабильной* и предсказуемой власти убеждает в некоторых преимуществах демократий.

Следующий же раздел убеждает нас, что при гипотезе достаточной мобильности населения разницы между режимами для рядового человека нет!

7.3 Эффект Тьебу: "голосование ногами"

До сих пор мы обсуждали одну страну и режим власти в ней. Теперь, вслед за знаменитой статьей Тьебу об идее федерализма, предположим, что стран или провинций ("земель"как в Германии, российских областей, или штатов, как в США, или стран в мире) достаточно много. Пусть избиратели вполне свободны переезжать с места на место, не связаны ни законами, ни привязанностью к определенному месту, ни языковыми барьерами.

Тогда штаты конкурируют за граждан – налогоплательщиков.

Предполагается, что региональные вполне "эгоистичные" органы власти – например, диктаторы, максимизируют свой личный доход ("Leviathan governments"). Альтернативная гипотеза, приводящая к тем же результатам – они просто из соображений своего престижа заинтересованы в привлечении мобильных налогоплательщиков. Штаты (регионы) конкурируют между собой, выбирая уровень налогов (типа подушного) и финансируя на них производство общих благ, полезных для налогоплательщиков. Тогда, при "большом" числе регионов, их соревнование[51] за налогоплательщиков должно порождать два эффекта:

1) в каждом регионе, при естественных предположениях, возникают Парето-оптимальные налоги и общие блага, так как налоги становятся аналогами цен для рынка общих благ ("benefit taxes"), и они не могут быть перераспределены для других целей;

2) Появляется "дивергенция развития" регионов или "сортировка по Тьебу" , это означает неодинаковость регионов по всем параметрам; каждый регион становится сообществом ("клубом единомышленников") налогоплательщиков с одинаковым интересом в общих благах.

[51] Конкретнее, могут применяться различные понятия соревнования: конкурентное равновесие или ядро (эти два - часто эквивалентны), либо равновесие Нэша, или "free-mobility equilibrium", см. Scotchmer [2002].

Эти идеи и результаты защищают федерализм как инструмент исправления информационной и поведенческой неполноценности правительств, и выявления неоднородного спроса на локальные общие блага. Суть благоприятного эффекта в том, что свободный в передвижении гражданин выбирает между регионами с различным соотношением налоги/общественные блага точно так же, как он выбирает между различными прилавками на базаре, с разными соотношениями цена/качество.

Тем самым, правители в этой ситуации достаточной конкуренции не могут противостоять этому "голосованию ногами"и *независимо* от устройства власти в каждом регионе и своих целей вынуждены *пространственным* политическим рынком к оптимальному для граждан поведению!

Тогда, возможно, голосование ногами важнее голосования бюллетенями, и свобода передвижения — важнейшая из политических свобод.

8 Заключение

Итак, мы рассмотрели основные понятия теории игр и их приложение к политическим процессам.

- - - - - - - -

9 Приложение: Наиболее употребительные определения

Максимин (ММ) - исход игры (профиль стратегий) при осторожном поведении всех, то есть при максимизации гарантированных выигрышей, не учитывая в своих расчетах целей и текущих решений партнеров.

Решение в (слабо-) доминирующих стратегиях (WDE) - исход игры в случае наличия у каждого "абсолютно-оптимальной"стратегии, то есть стратегии, (слабо) доминирующей над всеми другими его стратегиями независимо от ходов партнеров, их целей и текущих решений. [Аналогично определение строгого SDE]

Решение в итерационно- (слабо-)недоминируемых стратегиях (IND_W) - исход игры в случае одновременного итерационного отбрасывания (слабо-) доминируемых стратегий каждым игроком и соответствующего редуцирования игры: исключения отброшенных стратегий из рассмотрения ВСЕМИ игроками. Требует знания или целей партнеров или факта отбрасывания стратегий.

Равновесие Нэша (NE) - исход игры (профиль стратегий), при котором ни у одного игрока нет стимула отступить от своей текущей стратегии, при знании текущих стратегий партнеров и гипотезе, что партнеры не отступят. [Эквивалентный вариант: Равновесие Нэша - исход, когда все сходили одновременно вслепую, имея лишь некоторые ожидания о запланированном ходе партнеров, а когда карты открылись, то все ожидания оправдались.]

Совершенное в Подыграх Равновесие (Нэша) (SPE = SPNE) - это равновесие Нэша в развернутой форме игры, являющееся также равновесием Нэша во всех ее подыграх. (Внимание: оно может не являться NE этой же игры в нормальной форме, поэтому не всегда $SPE \subseteq NE$!)

Слабый оптимум Парето (**R**) - возможный исход, который нельзя улучшить для всех игроков сразу, даже согласовав их ходы. Сильный оптимум Парето - исход, который нельзя улучшить для кого-то, не ухудшив для других.

Элемент (слабого) Ядра игры (**C**) - возможный исход, который не блокируется ни одной коалицией в переговорах. Коалиция блокирует в переговорах (отвергает) вариант, если имеет другой, более желательный для всех своих членов, среди СВОИХ возможностей (среди вариантов, достижимых независимо от действий внекоалиционных игроков). Т.е. Ядро - множество вариантов, вне которого соглашений быть не может.

Сокращения: MM – MaxiMin, DE – Dominant Equilibrium, SDE – Strong Dominant Equilibrium, IND_W – Iterative (Weakly) Non-Dominant Equilibrium, SE – Sophisticated Equilibrium, NE - Nash Equilibrium, NE_m – Nash Equilibrium in Mixed stratagies, $SP(N)E$ – Subgame Perfect (Nash) Equilibrium, StE – Stackelberg Equilibrium, **R** - Pareto, C – Core.

Список литературы

[1] David M. Kreps. 1990. A Course in Microeconomic Theory.- Princeton University Press, Princeton.

[2] Peter C. Ordeshook. 1992. A Political Theory Primer.- Routledge, N.-Y., London.

[3] R.B.Myerson. 1991. Game Theory (Analysis of Conflict).- Harvard U.P., Camridge, London.

[4] Fudenberg, Drew & Jean Tirole. 1991. Game Theory.- MIT Press.

[5] Eric Rasmusen. 1989. Games and Information (An Introduction to Game Theory).- Blackwell. Cambridge MA, Oxford UK.

[6] Jean Tirole. 1988. The Theory of Industrial Organization.- MIT Press. Cambridge, Massachusets.

[7] Andrew Heywood. 1997. Politics.- London, Macmillan.

[8] . J.-E.Lane & S.Ersson. 1994. Comparative politics.- Cambridge, Blackwell.

[9] Э.Мулен. 1985. Теория игр (с примерами из математической экономики).- М., Мир.

[10] Э.Мулен. 1995?. Кооперативное принятие решений: аксиомы и проблемы.- М., Мир.

[11] H.Varian “Microec.Analysis”

[12] В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков. 1999. “Микроэкономический анализ несовершенных рынков”.- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

[13] В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков. 1996. “Методы микроэкономического анализа: фиаско рынка”.- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

Расширенная Библиография

1) Рекомендуемая студентам литература:

1. J. Tirole. 1988. Industrial organization.- MIT Press. Cambridge, Massachusets. (Ж.Тироль. Теория отраслевых рынков.- М.Экономика, 1999.) (Глава 11).

2. В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков. 1999. “Микроэкономический анализ несовершенных рынков".- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск. (Глава 1).

3. В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков. 1996. “Методы микроэкономического анализа” - TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск. (Глава 1).

4. D.M. Kreps. 1990. A Course in Microeconomic Theory.- Princeton University Press, Princeton. (Part III, Chapters 11-15)

5. Peter C. Ordeshook. 1992. A Political Theory Primer.- Routledge, N.-Y., London.

6. Andrew Heywood. 1997. Politics .- London, Macmillan.

7. R.B.Myerson. 1991. Game Theory (Analysis of Conflict).- Harvard U.P., Camridge, London.

8. Fudenberg, Drew and Jean Tirole. 1991. Game theory.- MIT Press. Cambridge, Massachusets.

9. J.-E.Lane and S.Ersson. 1994. Comparative politics.- Cambridge, Blackwell.

2) Дополнительная литература используемая в курсе:

9. Э.Мулен. 1985. Теория игр, с примерами из мат. экономики.- пер. с англ. Москва, Мир.

10. Э.Мулен. 1991. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели.- пер. с англ. Москва, Мир.

11. Э.Экланд. 1985. Математическая экономика.- пер. с англ. Москва, Мир.

12. В.Маракулин. 2001. Равновесный анализ математических моделей экономики с не-стандартными ценами (Теория игр - часть 3).- Новосибирск НГУ.

13. Р.Льюс, Э.Райфа. 1971.// Игры и решения.- пер. с англ. Москва, Мир. //

14. Р. Оуен. 1971// Теория игр.- пер. с англ. Москва, Наука. //

15. Дж.фон Нейман, О.Моргенштерн. 1970. Теория игр и экономическое поведение.- пер. с англ. Москва, Наука.

3) Источники задач и упражнений, используемые в курсе:

Книги: J.Tirole 1988, D.M. Kreps 1990, Э.Мулен. 1985, 1991, P.C.Ordeshook 1992. Под-борки задач университетов (из Интернета и личных контактов): Harward, Central Euro-pean University (Budapest), New Economic School (Moscow).