Элементы теории кооперативных игр

МАРАКУЛИН В. М.[*,†]
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

6 апреля 2021 г.

Введение

Теория игр это математическая дисциплина, которая изучает результаты и правила поведения в конфликтных ситуациях, обеспечивающие достижение долговременных и лучших (в заранее определённом формальном смысле) исходов разрешения конфликта. Кооперативная теория игр изучает столкновение интересов в той части человеческой деятельности, где результат достигается путём объединения усилий нескольких (многих) индивидов (игроков). Основное внимание кооперативной теории концентрируется на описании и изучении вариантов возможных стабильных и справедливых «дележей» (распределения) общественного продукта. Эта теория имеет обширные приложения к математико-экономическим моделям разного рода, в первую очередь модели Эрроу — Дебре — МакКензи.

В рамках модели экономики возможно одновременное рассмотрение и сравнение различных теоретико-игровых понятий, здесь стратегические игры встречаются с кооперативными. Более того, я придерживаюсь точки зрения о том, что кооперативный взгляд по своему продуктивнее стратегического. В нашем случае кооперация означает договорной подход. Однако классический взгляд состоит в построение по модели экономики надлежащей кооперативной игры и изучении её свойств. Одним из основных понятий в кооперативной теории является ядро, существование которого для игр с нетрансферабельной полезностью было установлено в знаменитой теореме Скарфа (*Scarf*, 1967). Результат этой теоремы — непустота ядра сбалансированной игры — затем с удивительной эффективностью применяется при моделировании условий совершенной конкуренции через реплики экономики, а затем уже (в частности) и для доказательства существования равновесия. В то же время изложенное ниже доказательство, по-видимому, наиболее эффективное из всех известных в литературе и представляет модификацию доказательства, предложенного в *Данилов* (2002).

В этом эссе представлены ТП и НТП-игры (игры с трансферабельной и нетрансферабельной полезностью). Изучаются ядро, вектор Шепли и решение Неймана —

[*]Контактная информация: Маракулин В. М., Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга 4, 630090 Новосибирск;

[†]Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия; **e-mail**: marakulv@gmail.com

Моргенштерна. Этот материал я читал во втором семестре учебного года студентам 3-5 курса ММФ НГУ с 1991 по н.в.

1 Кооперативные ТП-игры (с побочными платежами). Ядро

Чтобы лучше прояснить постановку проблемы мы начнём с рассмотрения содержательного примера.

Пример 1.1 (Игра «Джаз-оркестр» (Young 1979)) Пусть имеется 3 музыканта: солист (S), пианист (P) и ударник (D). У музыкантов есть идея совместных выступлений, возможно они образуют оркестр. Чтобы ответить на этот вопрос — поступить им так или нет, необходимо рассмотреть всю совокупность имеющихся у них возможностей совместного заработка, как у коллектива в целом, так и у возможных подколлективов (коалиций). Итак, предположим, что возможности заработка (за вечер) таковы:

$\{S, P, D\}$ — 1000\$ в ночном клубе;
$\{S, P\}$ — 800\$ - - - // - - - ;
$\{P, D\}$ — 650\$ - - - // - - - ;
$\{P\}$ — 300\$ - - - // - - - ;
$\{S, D\}$ — 500\$ на одной удобно расположенной станции метро;
$\{S\}$ — 200\$ в открытом кафе;
$\{D\}$ — 0\$ — один ударник ничего не способен заработать.

Вопрос стоит таким образом: нужно ли музыкантам объединяться в оркестр и соглашаться на предложение хозяина ночного клуба, а если нужно, то как будем денежки делить? На самом деле это один общий вопрос — ибо контракт о найме на работу должен включать в себя ясный для всех участников конечный дележ. Рассуждать можно путём отбрасывания безусловно неудачных вариантов: таких, которые блокируются (доминируются) другими игроками. Итак, пусть (x_S, x_P, x_D) — вектор неизвестных, представляющих «заработки» музыкантов. Ясно, что в случае совместной деятельности должно быть

$$x_S + x_P + x_D = 1000, \tag{1.1}$$

но при этом, если окажется, например, $x_S + x_P < 800$, то солист и пианист откажутся от такого дележа, ибо работая совместно они способны найти вариант заработка строго лучший для каждого из музыкантов (напр. $y_S = x_S + \varepsilon$ и $y_P = x_P + \varepsilon$, где $2\varepsilon = 800 - x_S - x_P > 0$). Таким образом, в дополнение к (1.1) делёж должен удовлетворять системе линейных неравенств:

$$x_S + x_P \geq 800,\ x_P + x_D \geq 650,\ x_S + x_D \geq 500,\ x_S \geq 200,\ x_P \geq 300,\ x_D \geq 0.$$

В общем случае может получится несовместная система требований (линейных неравенств), однако в данный момент она совместна и легко проверить, что дележи

$$(350, 450, 200),\ (350, 500, 150),\ (300, 500, 200)$$

образуют крайние точки множества решений системы (это всегда многогранник). Как это видно, множество допустимых дележей довольно узкое и здесь доход игрока изменяется в пределах 50$. ■

Рассмотрим формально-математическую модель описанной в примере проблемы. Эта модель является кооперативной игрой n лиц с побочными платежами (с трансферабельными полезностями — ТП-игра), которая описывается как отображение

$$v : S \to v(S) \in \mathbb{R}, \quad S \subseteq \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}, \quad S \neq \emptyset,$$

сопоставляющее всевозможным коалициям игроков $S \subseteq \mathcal{I}$ (непустые подмножества) их выигрыш, представленный в стоимостном виде (доход?), т. е. как число — именно в этом состоит специфика трансферабельных (переносимых, от анг. “transfer”) полезностей. Эти полезности (деньги) можно перераспределять любым мысленным образом среди агентов-членов коалиции.

Игра называется супераддитивной, если определяющее отображение удовлетворяет условию

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \ \forall S, T \subset \mathcal{I}, \quad S \neq \emptyset, T \neq \emptyset, \ S \cap T = \emptyset.$$

Иногда это условие вносят непосредственно в определение игры — по содержательным соображениям, ибо оно означает, что объединённые возможности по зарабатыванию дохода у непересекающихся коалиций не меньше суммы их доходов при раздельном функционировании. В жизненной ситуации это конечно всегда так, поскольку раздельный режим является одним из возможных вариантов функционирования объединённой коалиции.

Основной концепцией решения (итогового распределения («дележа») дохода) является ядро или, как иногда выражаются в русскоязычной литературе, С-ядро («цеядро») — чтобы не спутать с другими ядрами, напр. N-ядром (иначе — «нуклеоус»). Ниже приводится формальное определение.

Определение 1.1 ***Дележом*** *игры* $v : S \to v(S)$, $S \subseteq \mathcal{I}$ *называется вектор* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, *удовлетворяющий условиям:*

$$\sum_{\mathcal{I}} x_i = v(\mathcal{I}), \quad x_i \geq v(\{i\}), \ i \in \mathcal{I}.$$

$E(v)$ *это множество всех дележей.*

В понятии дележа учитываются возможности одноэлементных коалиций, полноценный учёт коалиционных возможностей содержится в концепции ядра.

Определение 1.2 ***Ядром*** *игры* $v : S \to v(S)$, $S \subseteq \mathcal{I}$ *называется множество* $\mathcal{C}(v)$ *дележей* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, *удовлетворяющих условиям:*

(1) $\sum_{\mathcal{I}} x_i = v(\mathcal{I})$,

(2) $\sum_S x_i \geq v(S)$, $\forall S \subset \mathcal{I}$, $S \neq \emptyset$.

В общем случае игра, даже будучи супераддитивной, может иметь пустое ядро. Поэтому в первую очередь необходимо разобраться с условиями, которые обеспечивают непустоту (существование) ядра. Необходимые и достаточные условия для этого даёт теорема, доказанная петербургским учёным Ольгой Николаевной Бондаревой в 1962 году. Условия этой теоремы включают в себя довольно громозкие понятия сбалансированной игры и её сбалансированного покрытия. Ниже даются подробные определения.

Определим $e_S \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ — вектор, удовлетворяющий $e_S^i = (e_S)_i = 1$ для $i \in S$ и $e_S^i = 0$ при $i \notin S$, т. е. это характеристическая (индикаторная) функция множества S.

Определение 1.3 *Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств (коалиций) в $\mathcal{I}$ называется **сбалансированным**, если для $S \in \mathcal{B}$ существуют такие действительные $\lambda_S \geq 0$, что выполнено*

$$\sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S e_S = e_{\mathcal{I}}.$$

Данное определение можно интерпретировать следующим образом: Сбалансированное семейство это совокупность коалиций, которые допускают режим совместного (одновременного) функционирования, причём $\lambda_S \geq 0$ — здесь это величина, задающая интенсивность функционирования (время работы) коалиции S. Для того, чтобы коалиция была работоспособна нужно наличие всех её членов, которые однако могут «работать» неполный рабочий день — λ_S и задают доли общего рабочего времени, которое проводят члены S в рамках коалиционной деятельности. За неполное «время работы» λ_S коалиция способна заработать неполный доход в объёме $\lambda_S v(S)$.

Определение 1.4 *Игра $v(\cdot)$ называется **сбалансированной**, если*

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(\mathcal{I})$$

для каждого сбалансированного семейства коалиций $\mathcal{B}$.

Сбалансированная игра это такая игра, в которой игроки неспособны заработать больший чем $v(\mathcal{I})$ совокупный доход даже работая в режиме заданном каким-либо сбалансированным семейством коалиций. Значит, общая совместная деятельность в рамках коалиции $\mathcal{I}$ приносит наивысший совокупный доход и далее игрокам нужно найти приемлемое его распределение, т. е. нужно взять делёж из ядра.

Теорема 1.1 (Бондарева, 1962) *Ядро кооперативной ТП-игры непусто тогда и только тогда, когда игра сбалансирована.*

Доказательство теоремы 1.1. По определению ядро игры это выпуклый многогранник, заданный системой линейных неравенств из определения 1.2. Необходимо исследовать условия, при которой эта система совместна. Сделать это можно применяя теорему двойственности из теории линейного программирования (или лемму Фаркаша). С этой целью рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$\langle x, e_{\mathcal{I}} \rangle \to \min$
$\langle x, e_S \rangle \geq v(S), \quad S \subseteq \mathcal{I},\, S \neq \emptyset.$

Здесь в функционале и ограничениях задачи вместо суммирования мы использовали скалярное произведение вектора неизвестных на векторы e_S, соответствующие индикаторной функции множества $S \subseteq \mathcal{I}$. Данная задача и, применённая к ней теорема двойственности, содержит всю необходимую информацию. Действительно:

(1) Множество допустимых решений непусто (нужно взять в качестве неизвестных достаточно большие числа) и целевой функционал ограничен снизу величиной[1] $\sum_{\mathcal{I}} v(\{i\})$; следовательно, в силу теоремы двойственности оптимальное решение x^{opt} задачи существует.

(2) Ядро непусто тогда и только тогда, когда оптимальное значение функционала *не превосходит* $v(\mathcal{I})$.

Далее воспользуемся второй частью теоремы двойственности, которая утверждает, что оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают. С этой целью аккуратно запишем двойственную задачу. Двойственные переменные в игровом контексте по традиции обозначают через λ_S, где $S \subseteq \mathcal{I}$ служит индексом ограничения. Так как все ограничения прямой задачи даны в виде правильного неравенства (соответствуют типу задачи), то двойственные переменные имеют ограничение на знак: $\lambda_S \geq 0$, $S \subseteq \mathcal{I}$. С другой стороны, нет ограничений на знак прямых переменных, что означает, что все ограничения двойственной задачи имеют форму равенства и т. д. В итоге получаем задачу:
$\sum_{S \subseteq \mathcal{I}} \lambda_S v(S) \to \max$
$\sum_{S \subseteq \mathcal{I}} \lambda_S e_S = e_{\mathcal{I}}, \quad \lambda_S \geq 0,\, \forall S \subseteq \mathcal{I},\, S \neq \emptyset.$

Далее, так как для непустоты ядра необходимо, чтобы оптимальное решение прямой задачи не превосходило $v(\mathcal{I})$, то это будет то же самое, чтобы потребовать, что на каждом допустимом решении двойственной задачи выполнено $\sum_{S \subseteq \mathcal{I}} \lambda_S v(S) \leq v(\mathcal{I})$. Однако допустимые решения в точности соответствуют сбалансированным семействам коалиций (покрытиям), — при необходимости неполный набор λ_S всегда можно дополнить нулями. Теорема доказана. ■

Формулировка критерия о непустоте ядра в терминах сбалансированного семейства коалиций оказалась весьма удачной и затем воспроизводилась в различных контекстах в ряде работ других авторов и, в первую очередь, Скарфом, как достаточное условие применительно к играм с нетрансферабельной полезностью. Однако как узнать является та или иная игра сбалансированной? Как проверить свойство не вычисляя бесконечного числа величин с последующим их сравнением? Здесь помогает простое соображение, состоящее в том, что для проверки достаточно ограничиться крайними точками многогранника решений, задающего сбалансированные покрытия:

$$\sum_{S \subseteq \mathcal{I}} \lambda_S e_S = e_{\mathcal{I}}, \quad \lambda_S \geq 0,\ \forall S \subseteq \mathcal{I},\ S \neq \emptyset.$$

Конечно, поиск крайних точек в общем случае задача достаточно сложная, однако для игр 3-х лиц описание легко формулируется и состоит в следующем (проверьте):

(1) Любое разбиение множества игроков на попарно непересекающиеся коалиции.

[1] В случае когда $\langle x, e_{\mathcal{I}} \rangle \geq v(\mathcal{I})$ включено в ограничения задачи, что можно и не делать, величина $v(\mathcal{I})$ автоматически ограничивает функционал.

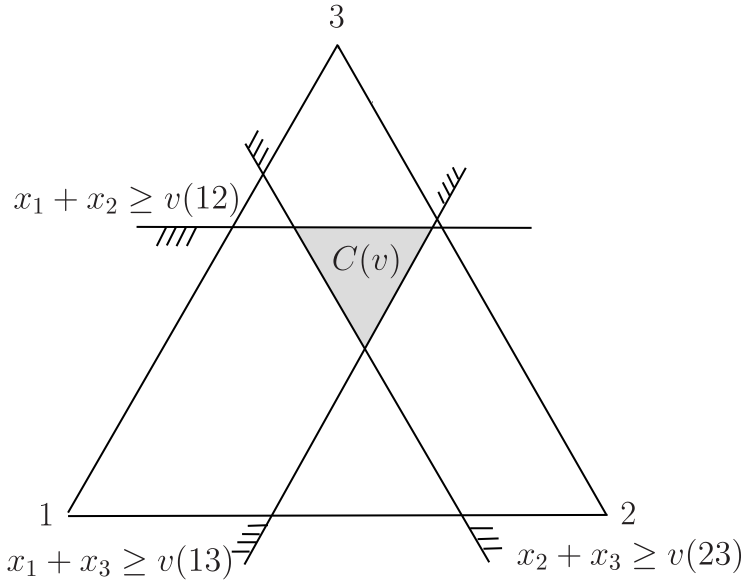


Рис. 1.1. Ядро в игре 3-х лиц.

Здесь все величины $\lambda_S = 1$, $S \in \mathcal{B}$, что в целом является эквивалентным условию супераддитивности.

(2) Единственное нетривиальное (отличное от разбиения) сбалансированное покрытие это $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, где все коэффициенты равны $\frac{1}{2}$.

Итак, кооперативная игра 3-х лиц с побочными платежами (ТП-игра) имеет непустое ядро $\iff$ игра супераддитивная и выполняется условие[2]

$$v(12) + v(13) + v(23) \leq 2v(123).$$

В частности, для рассмотренной выше игры «джаз-оркестр», чтобы убедиться в непустоте ядра, достаточно проверить (супераддитивность очевидна), что

$$v(SP) + v(SD) + v(PD) = 800 + 500 + 650 = 1950 \leq 2000 = 2v(SPD).$$

Рассмотрим далее типичное представление кооперативной игры 3-х лиц с побочными платежами. Нас будет интересовать множество дележей и геометрическое представление ядра, а также других определённых далее объектов. По определению 1.1 дележи составляют множество векторов $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(123), \quad x_1 \geq v(1),\ x_2 \geq v(2),\ x_3 \geq v(3).$$

Это симплекс в системе координат с началом в точке $(v(1), v(2), v(3))$. Если перейти к эквивалентной (нормализованной) игре, в которой $v(i) = 0$ и $v(123) = 1$, то в качестве множества всех дележей мы получим стандартный симплекс в $\mathbb{R}^3$. Далее мы его «разворачиваем и кладём на плоскость», получая равносторонний треугольник. Здесь можно добавить ограничения вида $x_i + x_j \geq v(ij)$, которые выделяют полуплоскость, ограниченную прямой параллельной стороне треугольника с вершинами i, j. В итоге мы приходим к типической картине, представленной на рисунке 1.1.

[2]Здесь мы следуем многим другим авторам и используем упрощённые обозначения: например, $v(13)$ вместо канонического $v(\{1,3\})$ и т. д.

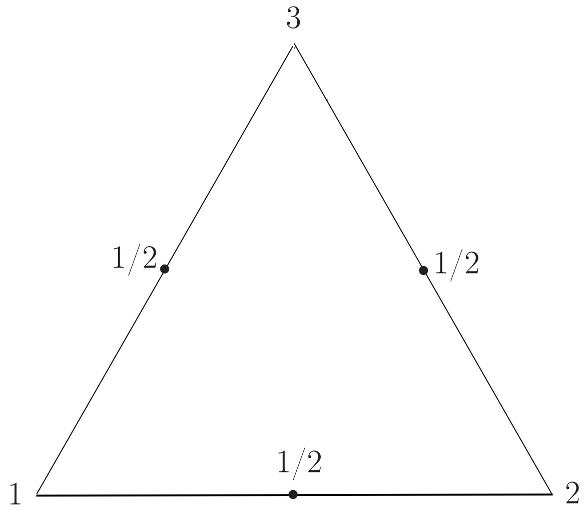


Рис. 2.2. НМ-решение в игре 3-х лиц.

2 НМ-решение

Пример 2.1 Рассмотрим типичную игру по типу «голосование по правилу большинства». Имеем: $v(123) = 1$, $v(ij) = 1$, $v(i) = 0$, $\forall i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Из построений предыдущего раздела ясно, что у этой игры пустое ядро (ибо $v(12)+v(13)+v(23) = 3 > 2 = 2v(123)$). Однако можно ли найти что-то в замен этого понятия так, чтобы оно уже существовало для игр указанного типа? Рассмотрим следующее трёхэлементное множество дележей как возможное «решение».

$$\alpha_{12} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \alpha_{13} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad \alpha_{23} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{2.2}$$

В каком же смысле они составляют решение? Легко видеть, что ни один из этих трёх дележей не доминирует никакого другого из них. (Именно доминирование и заставило нас отвергнуть три слегка видоизменённых дележа в последующем варианте игры.) Конечно, это ещё не все; любое множество, состоящее из единственного дележа, этим свойством обладает. Наше же множество дележей имеет, помимо этого, и следующее свойство: любой делёж, кроме трёх дележей α_{ij}, доминируется одним из дележей α_{ij}.

Чтобы это проверить, рассмотрим какой-нибудь делёж $x = (x_1, x_2, x_3)$. Так как мы рассматриваем игру в нормализованной форме, то $x_i \geq 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Следовательно, не более двух компонент вектора x могут быть не меньше $\frac{1}{2}$. Если их действительно две, то каждая из-них равна $\frac{1}{2}$, в то время как третья равна 0. Но это означает, что x совпадает с одним из α_{ij}. Если же x — какой-либо иной дележ, то у него не более одной компоненты, не меньшей чем $\frac{1}{2}$. Значит, по крайней мере две компоненты, скажем x_i и x_j, где $i < j$, меньше $\frac{1}{2}$. Но в таком случае ясно, что $\alpha_{ij} \succ_{\{i,j\}} x$. Мы, таким образом, приходим к следующему определению для нашей «концепции решения». ■

Рассмотрим далее формально-математическую конструкцию понятия, рассмотренного в описанном примере.

Определение 2.1 *Пусть x и y — два дележа и S — некоторая коалиция. Говорят, что x доминирует y по коалиции S (обозначается $x \succ_S y$), если*

(i) $x_i > y_i$ для всех $i \in S$,

(ii) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Делёж x доминирует y (обозначается $x \succ y$), если существует такая произвольная коалиция S, что $x \succ_S y$.

Таким образом, условие (i) означает, что все члены S предпочитают x; условие (ii) говорит о том, что они в состоянии получить то, что им положено по дележу x. Как легко видеть, отношение $\succ_S$ (для любого заданного S) является отношением частичной упорядоченности. С другой стороны, хотя отношение и иррефлексивно, оно не является ни транзитивным, ни антисимметричным (так как коалиция S в различных случаях может быть различной). Это — серьезная трудность, и впоследствии она сильно усложнит дело.

Определение 2.2 *Множество дележей $V \subset E(v)$ называется НМ-решением игры v, если*

(i) из $x, y \in V$ следует, что $x \succ y$ не может иметь места;

(ii) если $x \notin V$, то найдется такой $y \in V$, что $y \succ x$.

Таким образом, НМ-решение удовлетворяет как условию внутренней устойчивости (ни один делёж из V не доминирует другого), так и условию внешней устойчивости (любой дележ, не входящий в V, доминируется каким-нибудь дележом из V).

Впервые НМ-решения были введены фон Нейманом и Моргенштерном; изначально их часто называли просто «решениями» игры. Однако в современной терминологии этот термин не используется, поскольку позднее были выработаны многие другие понятия решения. Одна из основных трудностей, связанных с НМ-решениями, состоит в том. что из определения не следует ни их существования, ни их единственности. Более того, как показал Лукас (*Lucas*, 1967; *Партхасаратхи, Рагхаван*, 1974) имеются игры 10 лиц, не имеющие НМ-решений; в действительности большинство игр имеет огромное количество НМ-решений (хотя существуют и такие игры, у которых НМ-решение единственно). О. Н. Бондарева с коллегами показала, что любая игра 4-х лиц имеет НМ-решение, см. *Бондарева и др.* (1979).

Пример 2.2 Рассмотрим снова игру трёх лиц с постоянной суммой[3] в нормализованной форме. Как уже указывалось выше, множество (2.2) является НМ-решением. Но это не единственное НМ-решение. Пусть c — любое число из интервала $[0, \frac{1}{2})$; легко проверить, что множество

$$V_{3,c} = \{(x_1, 1-c-x_1, c) \mid 0 \leq x_1 \leq 1-c\}$$

тоже является НМ-решением. В это множество входят дележи, при которых игрок 3 получает постоянную c, а игроки 1 и 2 делят остаток во всевозможных пропорциях. Внутренняя устойчивость следует из того, что для любых двух дележей x и y из этого

[3]Кооперативная игра с постоянной суммой удовлетворяет $v(S) + v(\mathcal{I} \setminus S) = v(\mathcal{I})\ \forall S \subseteq \mathcal{I}$.

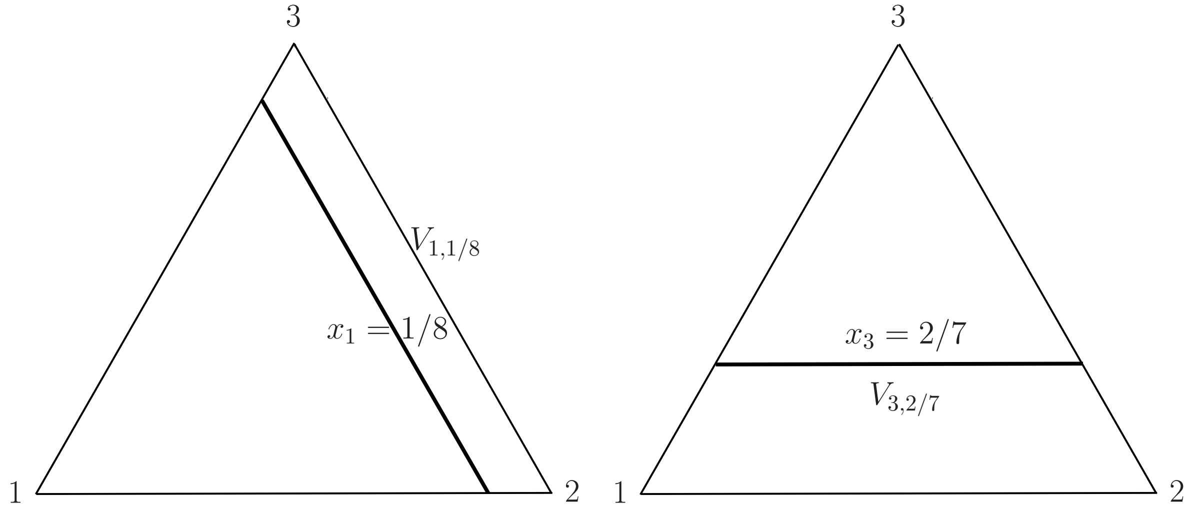


Рис. 2.3. Дискриминирующие НМ-решения в игре 3-х лиц.

множества, если $x_1 > y_1$, то $x_2 < y_2$. Но доминирование по коалиции, состоящей из единственного участника, невозможно. Чтобы доказать внешнюю устойчивость $V_{3,c}$, возьмём какой-либо дележ y вне $V_{3,c}$. Это означает, что либо $y_3 > c$, либо $y_3 < c$. Пусть $y_3 > c$, скажем, $y_3 = c + \varepsilon$. Определим дележ x следующим образом:

$$x_1 = y_1 + \varepsilon/2, \quad x_2 = y_2 + \varepsilon/2, \quad x_3 = c.$$

Легко видеть, что $x \in V_{3,c}$ и что $x \succ y$ по коалиции $\{1, 2\}$. Пусть теперь $y_3 < c$. Ясно, что либо $y_1 \leq \frac{1}{2}$, либо $y_2 \leq \frac{1}{2}$ (ибо в противном случае их сумма была бы больше 1). Пусть $y_1 \leq \frac{1}{2}$. Положим $x = (1 - c, 0, c)$. Так как $1 - c > \frac{1}{2} \geq y_1$, то $x \succ y$ по коалиции $\{1, 3\}$. Очевидно, что $x \in V_{3,c}$. Если же $y_2 \leq \frac{1}{2}$, мы покажем аналогично, что $z \succ y$, где $z = (0, 1 - c, c)$.

Итак, мы видели, что кроме симметричного НМ-решения наша игра имеет ещё целое семейство решений, при которых игрок 3 получает фиксированный выигрыш c из интервала $[0, \frac{1}{2})$. Эти НМ-решения называются *дискриминирующими*, говорят, что игрок 3 при этом *дискриминирован.* В случае множества $V_{3,0}$ говорят, что игрок 3 *полностью дискриминирован* или *исключен.*

По соображениям симметрии очевидно, что существуют также два семейства НМ-решений $V_{1,c}$ и $V_{2,c}$, в которых дискриминируются игроки 1 и 2 соответственно. Предшествующий пример показывает, что у игры может быть чрезвычайно много НМ-решений. Совершенно неясно, какое из этих решений следует выбрать. Когда же НМ-решение выбрано, остаётся непонятным, какой из него выбрать дележ. Фон Нейман и Моргенштерн утверждают, что НМ-решения отражают нормы поведения, свойственные данной социальной структуре. Когда же общество выбрало норму поведения (НМ-решение), дележ определяется деловыми способностями игроков. ■

Как уже отмечалось выше, в общем случае НМ-решения могут не существовать, однако для некоторых конкретных классов игр получены некоторые частные результаты о существования решений определённого типа. Рассмотрим одну из таких теорем.

Теорема 2.1 *Пусть v — простая игра в нормализованной форме (т. е. $v(S) \in \{0, 1\}$, $S \subseteq \mathcal{I}$), и пусть S — минимальная выигрывающая коалиция (т. е. такая коалиция, что $v(S) = 1$, но $v(T) = 0$ для любой коалиции $T \subset S$, $T \neq S$). Обозначим через*

V_S множество всех таких дележей x, что $x_i = 0$ для всех $i \notin S$. Тогда V_S есть НМ-решение.

Доказательство. Доказывается так же как и тот факт (пример 2.2), что множества $V_{3,c}$ являются НМ-решениями. ■

Эта теорема устанавливает, что любая простая игра имеет дискриминирующие НМ-решения, в которых минимальная выигрывающая коалиция исключает остальных игроков. В некоторых случаях дискриминированные участники могут получать небольшие суммы (см. пример 2.2 выше). Иногда оказывается довольно трудно установить точные размеры этих сумм, но здесь мы не будем заниматься этим вопросом.

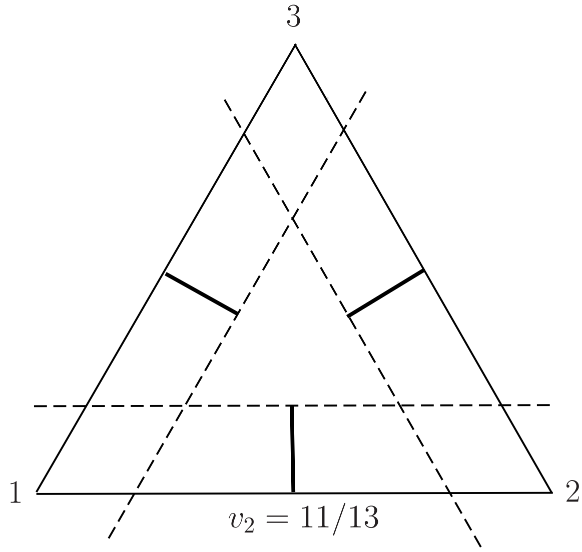
Пример 2.3 (симметричные решения игр трёх лиц) В примере 2.2 мы перечислили все НМ-решения для игр трёх лиц с постоянной суммой. Мы покажем, как обобщить симметричные трехточечные НМ-решения для случая общих игр трёх лиц. В играх трёх лиц в нормализованной форме значения характеристической функции для коалиций с одним и тремя участниками определены заранее и, следовательно, остаётся определить эти значения только для коалиций с двумя игроками. В симметричных играх они одинаковы для всех таких коалиции, и поэтому такие игры определяются единственным параметром v_2. Этот параметр может изменяться в интервале $[0,1]$; при $v_2 = 1$ получается игра с постоянной суммой (которую мы уже проанализировали), тогда как при $v_2 = 0$ получается чистая «игра-сделка», в которой любой дележ входит в ядро, и поэтому ядро является единственным НМ-решением.

Если v_2 велико (т.е. близко к 1), естественно ожидать, что игроки будут вести себя почти так же, как и в игре с постоянной суммой. Поэтому они в первую очередь будут стремиться попасть в коалицию из двух игроков. При этом ни один из них не может потребовать слишком много от предполагаемого партнера, и, следовательно, естественным результатом должно явиться соглашение между членами образовавшейся коалиции двоих о разделении дохода поровну. После того как коалиция двух игроков сформировалась, её члены должны прийти к соглашению с третьим участником игры о дележе оставшихся $1 - v_2$ единиц полезности. Здесь уже нет никаких альтернатив, интересы коалиции и третьего игрока прямо противоположны, и поэтому получаемая коалицией сумма зависит только от способностей игроков к торгу. Таким образом, мы можем надеяться найти НМ-решение, состоящее из трёх прямолинейных отрезков:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x, x, 1-2x) \\ (x, 1-2x, x) \\ (1-2x, x, x) \end{array} \right\}, \quad \frac{v_2}{2} \le x \le \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Устойчивость этого множества требует проверки. Мы обнаружим, что оно действительно устойчиво при $v_2 \ge 2/3$, см. рис. 2.4, левая.

Внутренняя устойчивость доказывается следующим образом. Так как $x \ge v_2/2$, мы имеем $2x \ge v_2$, и, следовательно, делёж вида $(x, x, 1-2x)$ может доминироваться только по коалициям $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$. Но ни один из дележей из (2.3) не может доминировать $(x, x, 1-2x)$ по коалиции $\{1,3\}$. Действительно, если в дележе $(y, y, 1-2y)$ будет $y > x$, то $1-2x > 1-2y$; если же $y > x$ в дележе $(y, 1-2y, y)$, то $2y > 2x \ge v_2$ и коалиция $\{1,3\}$ неэффективна. Наконец, если $1-2y > x$ в дележе $(1-2y, y, y)$,



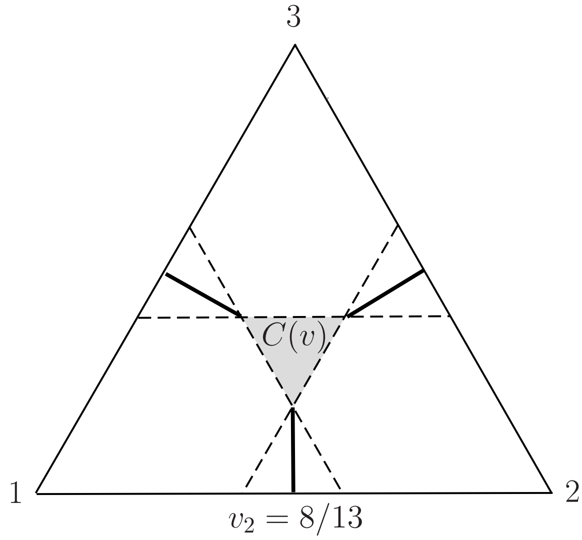


Рис. 2.4. Варианты НМ-решения в симметричной игре 3-х лиц.

то $y + (1 - 2y) > x + y \geq v_2$ и вновь коалиция $\{1, 3\}$ неэффективна. Соображения симметрии и аналогичные рассуждения завершают доказательство внутренней устойчивости.

Несложно доказать и внешнюю устойчивость. Поскольку $v_2 \geq 2/3$, любой дележ может иметь не более двух компонент, не меньших $v_2/2$, за единственным исключением в случае $v_2 = 2/3$ и при дележе $(1/3, 1/3, 1/3)$, который в этой ситуации удовлетворяет (2.3). Таким образом, любой дележ, не удовлетворяющий (2.3), имеет не более двух компонент компонент, не меньших $v_2/2$. Предположим, что некоторый дележ z имеет две такие компоненты; симметричность игры позволяет считать, что это две первые компоненты, z_1 и z_2. Если $z_1 = z_2$, то z удовлетворяет (2.3). Если же $z_1 \neq z_2$, то (снова используя соображения симметрии) можно считать, что $z_1 = z_2 + 3\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В этом случае z доминируется дележом $(z_2 + \varepsilon, z_2 + \varepsilon, z_3 + \varepsilon)$ по коалиции $\{2, 3\}$. Если, однако, дележ z имеет только одну компоненту не меньшую $v_2/2$, или вообще не имеет таких компонент, то можно считать, что z_1 и z_2 меньше чем $v_2/2$. В таком случае z доминируется дележом $(v_2/2, v_2/2, 1 - v_2)$ по коалиции $\{1, 2\}$.

При $v_2 < 2/3$ проведённое исследование теряет силу. Действительно, внутренняя устойчивость сохраняется, но внешней уже не будет. Эти игры имеют ядро, состоящее из всех таких дележей $y = (y_1, y_2, y_3)$, что $y_i \leq 1 - v_2$ при $i = 1, 2, 3$. Можно проверить, что в этим случае объединение ядра и трёх прямолинейных отрезков, задаваемых уравнениями (2.3), является НМ-решением (см. рис. 2.4, правая). При $v_2 < 1/2$ эти три отрезка будут подмножествами ядра, и, таким образом, ядро является единственным НМ-решением — рис. 2.5. ■

2.1 Историческая справка

Понятие характеристической функции и решения кооперативной игры по Нейману — Моргенштерну впервые появилось в фундаментальной монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», 1944 г. Там же были подробно проанализированы простые игры n лиц (соответствуют схемам голосования). Однако понятие НМ-решения оказалось чересчур сложным и нереалистичным. Это решение являлось множеством допустимых дележей (между игроками), причём далеко не всегда единственным,

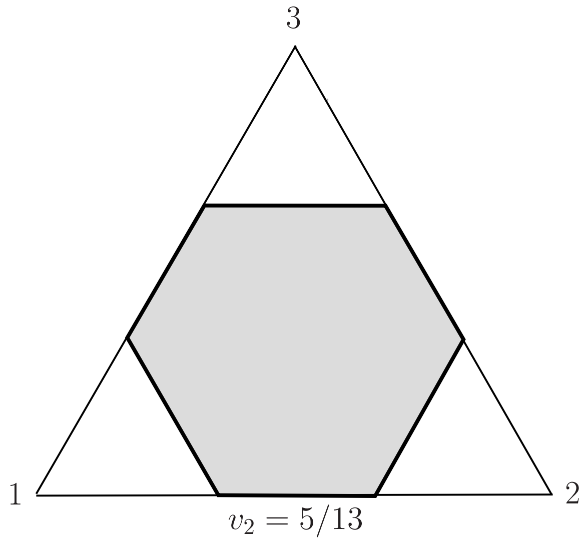


Рис. 2.5. Единственное НМ-решения в симметричной игре 3-х лиц.

т. е. фактически — множеством множеств, которое к тому же способно быть пустым, как показал впоследствии В. Лукас, в 1967 г. построивший пример игры 10 лиц без НМ-решения, см. *Lucas* (1967), *Партхасаратхи, Рагхаван* (1974), с. 248–251. Поэтому ряд авторов предложили другие концепции решения.

Плодотворным оказался 1953 г.: сначала появилось понятие ядра (core) как множества дележей, которые не могут быть улучшены силами никакой отдельно взятой коалиции — в независимых друг от друга работах Л. Шепли и Д. Джиллиса. Приоритет в открытии ядра кооперативной игры часто отдаётся последнему, поскольку в открытой печати и в доступном источнике его публикация появилась раньше. В спор о приоритете неожиданно вмешался и О. Моргенштерн, заявив в предисловии к русскому переводу своей совместной с Дж. фон Нейманом монографии, что «это понятие было введено фон Нейманом и Моргенштерном и развито Джиллисом». Документальных подтверждений тому не имеется, хотя считают, что ядро как несомненно напрашивающееся понятие, рассматривалось Дж. фон Нейманом и его соавтором, но не было включено в их исследование по той причине, что оказывалось пустым для целого класса игр. Следует здесь отметить, что понятие ядра экономики, близкое ядру кооперативной игры, было предвосхищено Ф. Эджуортом в его концепции «кривая контрактов» в монографии «Математическая психика», 1881 г. Не успокоившись на этом (поскольку ядро во многих случаях оказывалось либо пустым, либо слишком большим), Л. Шепли ввел концепцию решения, известного ныне под именем «значение или вектор Шепли». Это понятие аппелирует к «выигрышу по трудовому вкладу», однозначно характеризуется набором естественных аксиом и представляет собой априорное математическое ожидание выигрыша, который предполагает получить игрок, участвующий в игре при прочих равных шансах.

3 Вектор Шепли и выпуклые игры

Заветная цель кооперативной теории игр состоит в построении универсальной концепции решения, основанной на широко принятых аксиомах равенства и выбирающей для каждой кооперативной игры единственное распределение полезностей аналогично функции коллективного выбора. Такой объект называется значением или оператором значения. На протяжении многих лет этот подход применялся к ТП-играм. Он оказался в достаточной степени успешным. Конечно, не появилось единственной концепции решения, которая согласовывалась бы с представлением о равенстве во всех ТП-играх у каждого исследователя. Точно так же не существует единственной функции коллективного выбора как универсальной панацеи аксиоматических торгов. Тем не менее было открыто два известных значения, которые доказали свою применимость для широкого круга экономических моделей. Это — вектор Шепли и N-ядро.

В то время как N-ядро соответствует принципу эгалитаризма (равенства), вектор Шепли следует принципу утилитаризма и распределения выигрыша «по труду». Именно, вектор Шепли приписывает каждому агенту его средний маргинальный вклад во все коалиции, его содержащие. Если основываться на средней полезности, то этот подход является столь же утилитарным, как и классический утилитаризм. В этом разделе на простых примерах мы обсуждаем аксиоматические свойства и качественные черты вектора Шепли как оператора значения. Мы определяем вектор Шепли и находим его для некоторых простых примеров. Оказывается, что вектор Шепли может не принадлежать ядру игры (когда последнее непусто), и это его главный этический недостаток. Поэтому особенно интересно найти класс ТП-игр, называемых выпуклыми играми, в которых вектор Шепли располагается в центре (непустого) ядра. Выпуклые игры определены следующим свойством: маргинальный вклад каждого агента в коалицию увеличивается, если эта коалиция расширяется (см. определение 3.2). Другими словами, кооперация обладает свойством увеличения доходов на масштаб.

Ниже приводятся две аксиоматические характеризации вектора Шепли. Оригинальная характеризация самого Шепли (теорема 4.2) основана на аксиоме аддитивности, весьма похожей на аксиому, характеризующую утилитарные функции коллективного выбора. Более современная характеризация содержится в работах Янга и других авторов и является более тонкой. Она утверждает, что вектор Шепли является единственным оператором значения, в котором значение для каждого агента зависит только (быть может и нелинейно) от вектора его маргинальных вкладов (теорема 4.1). Попросту говоря, кооперативная продуктивность агента — это единственное, что определяет его долю прибыли.

3.1 Вектор Шепли

Значение ТП кооперативных игр каждой игре $v : S \to v(S)$ ставит в соответствие сбалансированное распределение $x \in \mathbb{R}^n$ величины $v(\mathcal{I})$, т. е. $\sum_{\mathcal{I}} x_i = v(\mathcal{I})$.

Пусть задана некоторая последовательность игроков $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Этой последовательности ставится в соответствие *вектор маргинальных вкладов* $x(\pi) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, заданный по формуле:

$$x_{i_1} = v(\{i_1\}), \quad x_{i_2} = v(\{i_1, i_2\}) - v(\{i_1\}), \ldots, x_{i_n} = v(N) - v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}).$$

Содержательно этот вектор $x(\pi)$ определяет выплаты (делёж) игрокам общего выигрыша $v(\mathcal{I})$ в соответствии с заданным упорядочиванием игроков. Вектор Шепли это средний вектор, вычисленный по всевозможным упорядоченным последовательностям игроков.

Первое достоинство вектора Шепли заключается именно в том, что он реализует идею распределения выигрыша, основанную на маргинальных вкладах и при этом малые коалиции могут играть существенную роль. Таким образом, доля прибыли (затрат) агента i вычисляется как средняя маргинальная прибыль (затраты), добавляемые агентом i к каждой коалиции остальных агентов. Для того чтобы получить соответствующую формулу, представим, что агенты из $\mathcal{I}$ случайно упорядочены $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, причём вероятность каждого упорядочения одинакова. Агенту i вектор Шепли приписывает среднее его маргинальной прибыли $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ взятое по всем коалициям $S \subset \mathcal{I} \setminus \{i\}$, включая пустое множество. Вес коалиции S соответствует вероятности того, что в случайной очереди $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ перед агентом i стоят в точности элементы из множества S . Непосредственное вычисление этой вероятности даёт величину $s!(n-s-1)!/n!$, где $s = |S|$ есть размер S. В самом деле, существует ровно $s!(n-s-1)!$ упорядочений $\mathcal{I}$ таких, что первые s элементов берутся из S, а последние $n-s-1$ элементов берутся из $\mathcal{I} \setminus (S \cup \{i\})$.

Определение 3.1 *Для данной ТП-игры $v : S \to v(S)$, $S \subseteq \mathcal{I}$ вектор Шепли φ распределяет выигрыш $v(\mathcal{I})$ максимальной коалиции следующим образом:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq \mathcal{I} \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)), \quad i \in \mathcal{I}, \tag{3.4}$$

где по соглашению $0! = 1$, $v(\emptyset) = 0$ и $s = |S|$.

Мы утверждаем, что вектор $(\varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ из определения 3.1 является распределением $V(\mathcal{I})$. В самом деле, для того чтобы проверить $\sum_{\mathcal{I}} \varphi_i = v(\mathcal{I})$ вспомним данную выше вероятностную интерпретацию вектора Шепли. Для любого данного порядка, скажем $(1, 2, \ldots, n)$, вектор маргинальных вкладов x равен $x_1 = v(1)$; $x_i = v(1, 2, \ldots, i) - v(1, 2, \ldots, i-1)$ при $i = 2, \ldots, n$. Таким образом, равенство $v(\mathcal{I})$ выполняется для каждого вектора маргинальных вкладов, от которых мы берем среднее, следовательно, $\sum_{\mathcal{I}} \varphi_i = v(\mathcal{I})$.

В качестве альтернативы мы можем проверить справедливость этого равенства непосредственно в формуле (3.4). Преобразуя $\sum_{\mathcal{I}} \varphi_i$, выберем любую собственную коалицию S из $\mathcal{I}$ и посчитаем её коэффициент

$$s\frac{(s-1)!(n-(s-1)-1)!}{n!} - (n-s)\frac{s!(n-s-1)!}{n!} = 0$$

где коэффициент при $v(\mathcal{I})$ равен $n\frac{(n-1)!0!}{n!} = 1$.

Отметим сначала, что если игра v супераддитивна, то вектор Шепли является индивидуально рациональным, т. е. агент i получает по крайней мере доступный ему выигрыш $v(i)$. Для доказательства этого утверждения заметим, что из супераддитивности следует

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(i) \quad \forall S \subset \mathcal{I} \setminus \{i\}.$$

В формуле (3.4) коэффициент при $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ есть вероятность того, что в случайной очереди перед агентом i стоят в точности элементы из S, следовательно, сумма этих коэффициентов при S, изменяющейся в $\mathcal{I} \setminus \{i\}$, равна единице, откуда $\varphi_i \geq v(i)$. Таким образом, при использовании вектора Шепли один агент не может отделиться и высказывать возражения. Тем не менее промежуточные коалиции могут иметь такую возможность, как показывает наш первый пример.

Пример 3.1 (Вектор Шепли в игре трёх лиц) В игре трёх лиц при $\mathcal{I} = \{1,2,3\}$ формула (3.4) принимает вид:

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{6}(v(12) - v(2) + v(13) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(\mathcal{I}) - v(23)) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ \varphi_1 = \frac{1}{3}v(\mathcal{I}) + \frac{1}{6}(v(12) + v(13) - 2v(23)) + \frac{1}{6}(2v(1) - v(2) - v(3)).$$

Так, в примере 1.1 «Джаз оркестр» мы получим следующее распределение дохода:

$$(\varphi_S, \varphi_P, \varphi_D) = (350, 475, 175).$$

Это распределение лежит на границе ядра, хотя и не очень далеко от его центра. ■

3.2 Выпуклые игры

Примеры показывают, что вектор Шепли не удовлетворяет принципу отделения: существуют игры с непустым ядром, в которых вектор Шепли лежит вне ядра.

Выпуклые игры представляют собой важный класс игр, в которых ядро непусто и содержит вектор Шепли. На самом деле вектор Шепли расположен в центре ядра выпуклой игры. Грубо говоря, игра является выпуклой, если имеет место возрастание доходов от кооперации. В рамках ТП-игр этот тезис читается следующим образом: чем больше коалиция, к которой присоединяется игрок i, тем больше его маргинальный вклад.

Определение 3.2 *Кооперативная ТП-игра v является выпуклой, если удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств:*

(i) для всех $i \in \mathcal{I}$, $S, T \subseteq \mathcal{I} \setminus \{i\}$:

$$S \subset T \quad \Rightarrow \quad v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T), \tag{3.5}$$

(ii) для всех $S, T \subseteq \mathcal{I}$:

$$v(S) + v(T) \le v(S \cup T) + v(S \cap T), \tag{3.6}$$

где по соглашению $v(\emptyset) = 0$.

Для того чтобы убедиться в указанной эквивалентности, заметим сначала, что (3.5) является частным случаем (3.6) для коалиций $S \cup \{i\}$ и T. Обратно, предположим, что выполнено (3.5), и рассмотрим две коалиции S, T для которых выполнено $S \subset T$. Обозначим $R = \mathcal{I} \setminus T$ и рассмотрим последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, покрывающую R. Последовательно применяя (3.5), получим

$$\begin{gathered} v(S \cup \{i_1\}) - v(S) \le v(T \cup \{i_1\}) - v(T), \\ v(S \cup \{i_1, i_2\}) - v(S \cup \{i_1\}) \le v(T \cup \{i_1, i_2\}) - v(T \cup \{i_1\}), \\ \vdots \\ v(S \cup \{i_1, ..., i_k\}) - v(S \cup \{i_1, ..., i_{k-1}\}) \le v(T \cup \{i_1, ..., i_k\}) - v(T \cup \{i_1, ..., i_{k-1}\}). \end{gathered}$$

Суммируя эти неравенства, мы находим, что для любой коалиции $R' \subset \mathcal{I} \setminus T = R$ выполнено

$$v(S \cup R') - v(S) \leq v(T \cup R') - v(T).$$

Зафиксируем теперь две произвольные коалиции S_0 и T_0 (необязательно, чтобы одна содержалась в другой) и применим последнюю формулу к $S = S_0 \cap T_0$ и $T = T_0$ и $R' = S_0 \setminus T_0$. Отсюда выводим желаемое свойство (3.6).

Замечательное свойство выпуклых игр состоит в том, для любого порядка на $\mathcal{I}$ соответствующий вектор маргинальных вкладов принадлежит ядру. Следовательно, выпуклая игра является сбалансированной. Более того, барицентр множества векторов маргинальных вкладов, т. е. вектор Шепли, принадлежит ядру (поскольку ядро является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n$).

Лемма 3.1 *Пусть $v(\cdot)$ — выпуклая ТП-игра, а множество $\mathcal{I}$ упорядочено следующим образом: $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Соответствующий вектор маргинальных вкладов*

$$x_{i_k} = v(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) - v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\})$$

принадлежит ядру данной игры. Следовательно, вектор Шепли также принадлежит ядру.

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что множество $\mathcal{I}$ упорядочено так: $\{1, 2, \ldots, n\}$. Соответствующий вектор маргинальных вкладов обозначим x. Выберем произвольную коалицию $S \subseteq \mathcal{I}$ и упорядочим её элементы следующим образом: $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. Для любого k, $1 \leq k \leq s$, применим (3.5) при условии, что $S' = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$, $T' = \{1, 2, \ldots, i_k - 1\}$ и $i = i_k$:

$$v(i_1, i_2, \ldots, i_k) - v(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) \leq v(1, 2, \ldots, i_k) - v(1, 2, \ldots, i_k - 1) = x_{i_k}.$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до s, получаем

$$v(i_1, i_2, \ldots, i_s) = v(S) \leq \sum_{k=1}^{k=s} x_{i_k} = \sum_S x_i$$

требуемое неравенство. Второе утверждение леммы следует из того, что ядро является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n$, а вектор Шепли определяется как равномерное среднее векторов маргинальных вкладов. ■

Верно и обратное утверждение: если все векторы маргинальных вкладов принадлежат ядру, то игра является выпуклой. В выпуклых играх вектор Шепли занимает центральное положение в ядре. Действительно, векторы маргинальных вкладов являются крайними точками (вершинами) (выпуклого) ядра, или, что то же самое, ядро является выпуклой оболочкой векторов маргинальных вкладов. Этот трудный результат был доказан Шепли в 1971 г. Из него следует, что вектор Шепли является барицентром вершин ядра при условии, что вершина считается дважды, если она соответствует двум векторам маргинальных вкладов при двух различных упорядочениях агентов. Проиллюстрируем этот результат на примере игр трёх лиц.

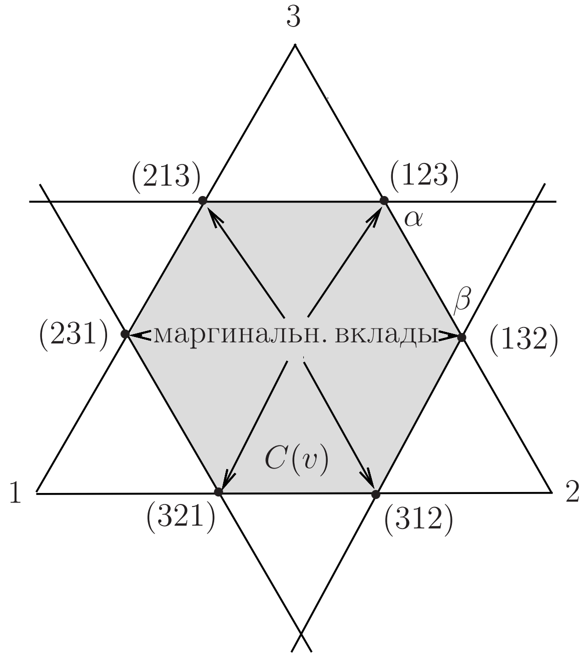


Рис. 3.6. Ядро и маргинальные вклады в выпуклой игре 3-х лиц.

Пример 3.2 (Выпуклые игры трёх лиц) Любая выпуклая игра является (полностью) супераддитивной, что следует из формулы (3.6) для непересекающихся коалиций S и T. Таким образом, нормализованная супераддитивная игра трёх лиц задаётся так:

$$v(i) = 0 \ \text{ при } \ i = 1, 2, 3; \quad v(\mathcal{I}) = 1;$$
$$0 \le v(ij) \le 1 \ \text{ для всех } \ i, j, \quad i \ne j.$$

Заметим, что в случае, когда S содержит T или наоборот, формула (3.6) становится тривиальной. Поэтому *выпуклость* игры трёх лиц сводится к трём неравенствам, соответствующим (3.6), где S и T — различные двухэлементные коалиции:

$$v(ij) + v(jk) \le v(\mathcal{I}) + v(j), \quad i \ne j \ne k.$$

С учётом того что игра является нормализованной, это означает:

$$v(ij) + v(jk) \le 1 \ \text{ для всех } \ \{ij\}, \{jk\}, \ \text{ где } i, j, k \text{ попарно различны.}$$

На рис. 3.6 изображено соответствующее ядро: оно является шестиугольником, если только некоторые из приведённых выше неравенств не обращаются в равенства. Следовательно, ядро является достаточно большим подмножеством симплекса. Однако в некоторых крайних случаях его поверхность очень мала, как, например, при $v(12) = 0.98$ и $v(13) = v(23) = 0.01$.

Векторы маргинальных вкладов расположены в точках пересечения прямых $x_i + x_j = v(ij)$ с границей симплекса. Таких точек 6, каждая прямая пересекается с двумя границами.

Рассмотрим два следующих порядка: $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ и соответствующие им векторы маргинальных вкладов $\alpha = (0, v(12), 1 - v(12))$, $\beta = (0, 1 - v(13), v(13))$. Из условия $v(12) + v(13) \le 1$ следует, что вектор α расположен между β и вершиной $(0, 0, 1)$, а вектор β — между α и вершиной $(0, 1, 0)$. Рис. 3.6 соответствует следующим числовым параметрам: $v(12) = v(23) = v(13) = 1/3$. ■

Игры, соответствующие экономике производства, часто являются выпуклыми, если технология обладает свойством увеличения доходов на масштаб (increasing returns to scale). Другим важным семейством выпуклых игр являются игры с дележом прибыли, которые связаны с производством общественного продукта.

4 Характеризации вектора Шепли

Главная особенность формулы (3.4) состоит в том, что компонента вектора Шепли φ_i, соответствующая агенту i, зависит только от вектора его маргинальных вкладов $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ во всевозможные коалиции $S \not\ni i$ из $\mathcal{I}$. Таким образом, φ_i зависит от 2^{n-1} независимых переменных в отличии от $2^n - 1$ переменных для произвольного оператора значения. Другим очевидным свойством вектора Шепли является анонимность: имена агентов не имеют значения. Эти два свойства вместе являются характеристическими.

Определение 4.1 *Для данного сообщества игроков $\mathcal{I}$ множество всех ТП-игр образует векторное пространство $E = \mathbb{R}^{2^n-1}$.* ***Оператор значения*** *это отображение φ из E в $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, ставящее в соответствие каждой игре $v \in E$ распределение $\varphi(v)$ величины $v(\mathcal{I})$:*

$$\sum_{\mathcal{I}} \varphi_i(v) = v(\mathcal{I}). \tag{4.7}$$

Определение 4.2 *Пусть даны сообщество $\mathcal{I}$ и оператор значения φ на $E = \mathbb{R}^{2^n-1}$. Говорят, что φ* ***анонимен****, если он коммутирует с перестановками агентов: для каждой биекции τ множества $\mathcal{I}$ на себя и каждого вектора $v \in E$ выполнено*

$$\tau(\varphi(v)) = \varphi(\tau(v)), \tag{4.8}$$

где $\tau(v)(S) = v(\tau(S))$ при $S \subset \mathcal{I}$ и $\tau(x)_i = x_{\tau(i)}$ при $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$.

Определение 4.3 *Оператор $\varphi : E \to \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$* ***маргинален****, если $\varphi_i(v)$ зависит только от вектора $(v(S \cup \{i\}) - v(S))_{S \subset \mathcal{I} \setminus \{i\}}$, что означает, что для любого фиксированного i из $\mathcal{I}$ выполняется: для всех $v, w \in E$*

$$[v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S) \quad \text{для всех} \quad S \subseteq \mathcal{I} \setminus \{i\}] \Rightarrow \varphi_i(v) = \varphi_i(w)$$

при соглашении $v(\emptyset) = w(\emptyset) = 0$.

Теорема 4.1 (Янг, 1985) *Существует только один анонимный и маргинальный оператор значения. Это — вектор Шепли.*

Доказательство. Мы приведем доказательство для случая трёх агентов. Общее доказательство Янга получается по индукции.

Проверим сначала, что оператор значения φ, соответствующий вектору Шепли по (3.4), маргинален и анонимен. Обратно, предположим, что некоторый оператор значения ϕ обладает этими двумя свойствами. Определим теперь отображение α из $\mathbb{R}^{2^n-1} = E$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$\alpha(v) = \varphi(v) - \phi(v), \quad \forall v \in E.$$

Это отображение является анонимным и маргинальным. Более того, $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(v)=0$ для всех $v\in E$.

Поскольку $\alpha_1(v)$ маргинально, то оно имеет вид

$$\alpha_1(v)=\alpha_1(v(\mathcal{I})-v(23),v(12)-v(2),v(13)-v(3),v(1)). \tag{4.9}$$

Рассмотрим следующее преобразование v в v':

$$v'(S)=\begin{cases} v(S)+\lambda, & \text{при} \quad 1\in S,\\ v(S), & \text{при} \quad 1\notin S,\end{cases}$$

где λ — произвольное заданное действительное число. Используя формулы, аналогичные (4.9) для агентов 2 и 3, получаем

$$\alpha_2(v')=\alpha_2(v) \quad \& \quad \alpha_3(v')=\alpha_3(v).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(v)=0$, то мы заключаем, что $\alpha_1(v')=\alpha_1(v)$ или равносильно

$$\alpha(x+\lambda,y+\lambda,z+\lambda,t+\lambda)=\alpha(x,y,z,t).$$

Значит, мы можем положить $\lambda=-v(1)$ и записать $\alpha_1(v)$ в виде

$$\alpha_1(v)=\beta_1(v(\mathcal{I})-v(23)-v(1),v(12)-v(2)-v(1),v(13)-v(3)-v(1))$$

и аналогично функции β_2,β_3 для α_2,α_3 соответственно. Далее покажем, что по анонимности $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta$ и β — симметричная функция своих последних двух аргументов. Действительно, для перестановки $\tau(1)=1$, $\tau(2)=3$ и $\tau(3)=2$ имеем

$$\beta_1(v(\mathcal{I})-v(23)-v(1),v(12)-v(2)-v(1),v(13)-v(3)-v(1))=\alpha_{\tau(1)}(v)=\alpha_1(\tau(v))=$$

$$\beta_1(v(\mathcal{I})-v(23)-v(1),v(13)-v(3)-v(1),v(12)-v(2)-v(1)),$$

т. е. функция β_1 симметричная относительно двух последних переменных; аналогично для β_2 и β_3. Далее рассмотрим перестановку $\tau(1)=2$, $\tau(2)=1$ и $\tau(3)=3$. Из анонимности имеем $\beta_{\tau(1)}(v)=\beta_2(v)=\beta_1(\tau(v))$, где

$$\beta_1(\tau(v))=\beta_1(v(\mathcal{I})-v(13)-v(2),v(12)-v(2)-v(1),v(23)-v(3)-v(2)).$$

Таким образом, функция $\beta_1(\cdot)$ совпадает с $\beta_2(\cdot)$ на векторе маргинальных вкладов игрока 2, т. е. это одинаковые функции, которые по тем же соображениям совпадают и с $\beta_3(\cdot)$.

Далее, положим $v(i)=0$ для всех i и $v(12)=x$, $v(23)=y$, $v(13)=z$ и $v(\mathcal{I})=t$. Теперь условие $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ переписывается в виде

$$\beta(t-y,x,z)+\beta(t-z,y,x)+\beta(t-x,z,y)=0 \tag{4.10}$$

для всех действительных чисел x,y,z,t. Для того чтобы решить функциональное уравнение (4.10), положим $x=z$ и определим $w=t-x$. Получаем

$$\beta(w-y+x,x,x)+\beta(w,y,x)+\beta(w,x,y)=0.$$

При $y=x$ получаем $3\beta(w,x,x)=0$ $\forall w$, откуда заключаем $\beta(w-y+x,x,x)=0$ при любых действительных w,y,x. Теперь вновь рассмотрим эту же формулу и из симметричности $\beta(w,y,x)$ по x,y заключаем $2\beta(w,y,x)=0 \Rightarrow \beta(w,y,x)=0$. Таким образом, функция $\beta(\cdot)\equiv 0$ и $\varphi=\phi$, что и требовалось доказать. ■

На самом деле Янг использует более слабое предположение симметрии, чем наша аксиома анонимности. Отметим, что маргинальный оператор значения не исключает нелинейную функциональную зависимость $\varphi_i(v)$ от маргинальных вкладов $v(S\cup\{i\})-v(S)$. Тем не менее теорема 4.1 говорит о том, что эта зависимость на самом деле линейна (при анонимности). Оригинальная характеризация, предложенная Шепли, следует противоположному курсу. Аддитивность оператора значения относительно игры v постулируется, а маргинальность получается как следствие аксиомы аддитивности и аксиомы болвана.

Аксиома аддитивности:

$$\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w) \quad \forall v,w\in E.$$

Аксиома болвана:

$$\forall i\in\mathcal{I},\ \forall v\in E \ \ [v(S\cup\{i\})=v(S) \text{ для всех } S\subseteq\mathcal{I}] \ \Rightarrow \ \varphi_i(v)=0.$$

Теорема 4.2 (Шепли, 1953) *Существует только один оператор значения, удовлетворяющий аксиомам анонимности, аддитивности и болвана. Это — вектор Шепли.*

Аксиома болвана является слабой формой маргинальности. Агент с нулевым маргинальным вкладом в любую коалицию остальных игроков является болваном. В аксиоме утверждается что он должен получить нуль. В предположении маргинальности и анонимности вектор Шепли нулевой игры ($v(S)=0$ для всех S) есть нулевой вектор. Следовательно, в игре болван должен получить нуль. Без выполнения аксиомы болвана многие операторы значения являются анонимными и аддитивными.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть φ — оператор значения, удовлетворяющий всем трём аксиомам. Для любой коалиции $S\subseteq\mathcal{I}$ обозначим через $\delta_S\in E$ следующую игру с S-единогласием: $S\neq\emptyset$

$$\delta_S(T)=\begin{cases} 1, & \text{при} \quad S\subseteq T,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

В игре $\lambda\delta_S$ все агенты из $\mathcal{I}\setminus S$ являются болванами и, значит, получают нуль. По анонимности все агенты из S получают одинаковую величину[4]. Следовательно, в силу эффективности (условие (4.7)) вектор $\varphi(\lambda\delta_S)$ полностью определен. Все агенты из S получают $\frac{\lambda}{|S|}$, а все агенты из $\mathcal{I}\setminus S$ получают нуль.

Покажем далее, что игры δ_S, $S\in 2^{\mathcal{I}}\setminus\{\emptyset\}$, образуют базис в пространстве $E=\mathbb{R}^{2^n-1}$. Для этого достаточно показать, что они линейно независимы. Предположим, что некоторая линейная комбинация этих игр даёт нуль:

$$\sum_{S\subseteq\mathcal{I},S\neq\emptyset}\lambda_S\delta_S=0. \tag{4.11}$$

[4]Если τ — перестановка $\mathcal{I}$, изменяющая только номера из S, то $\tau(\lambda\delta_S)=\lambda\delta_S$. Следовательно, $\tau(\varphi(\lambda\delta_S))=\varphi(\lambda\delta_S)\Rightarrow\varphi_i(\lambda\delta_S)=\varphi_j(\lambda\delta_S)\ \forall i,j\in S$.

Если не все коэффициенты λ_S равны нулю, то найдется коалиция S_0 такая, что $\lambda_{S_0} \neq 0$ и $\lambda_S = 0$ при $S \subset S_0$, $S \neq S_0$ (т. е. коалиция S_0 минимальная по включению с ненулевым коэффициентом). Следовательно, из (4.11) вытекает

$$\delta_{S_0} = - \sum_{S \not\subset S_0} \frac{\lambda}{\lambda_{S_0}} \delta_S,$$

где сумма берется по коалициям, которые не содержатся в S_0. Взяв значение вектора из правой части для коалиции S_0, получим $\delta_S(S_0) = 0 \ \forall S \not\subset S_0 \Rightarrow \delta_{S_0}(S_0) = 0$, что противоречит построению $\delta_{S_0}(\cdot)$.

Мы доказали, что игры δ_S, $S \in 2^{\mathcal{I}} \setminus \{\emptyset\}$, образуют базис в пространстве $E = \mathbb{R}^{2^n-1}$ и что $\varphi(v)$ определён для каждой игры $\lambda\delta_S$. По аддитивности существует не более одного оператора значения, удовлетворяющего нашим трём аксиомам. Обратно, очевидно, что оператор значения Шепли (3.4) удовлетворяет этим аксиомам. ■

Аддитивность вектора Шепли является весьма привлекательной с математической точки зрения. В дополнение к тому, что получается явная формула, аддитивность ещё делает весьма осмысленным анализ чувствительности: влияние изменения до хода коалиции, влияние присоединения или отделения некоторых агентов и т. д.

Имеется ещё несколько характеризаций вектора Шепли. Можно явным образом выразить произвольную игру через базис (δ_S, $S \in 2^n \setminus \{\emptyset\}$) и интерпретировать альтернативную формулу для вектора Шепли как процесс выравнивания долей от дивидендов при добавлении все большего и большего числа коалиций. Это приводит к аксиоматической характеризации Майерсона вектора Шепли в модели, где необязательно все коалиции являются допустимыми (Майерсон [1977]).

Другой взгляд связан с редуцированной игрой в модели с переменным количеством участников. Вектор Шепли многократно обобщался. По крайней мере три различных оператора значения могут быть построены для НТП-игр так, чтобы совпадать с вектором Шепли на подмножестве ТП-игр. Они были предложены Харшаньи [1963] (впоследствии аксиоматизированы Хартом [1985]), Шепли [1969] (впоследствии аксиоматизированы Ауманом [1985]) и Калаи и Самет [1985].

Другим успешным обобщением являются игры с континуумом агентов (игроков). Этой модели посвящена книга Аумана и Шепли [1974], в которой каждый агент считается бесконечно малой частицей общества. Имеются приложения к ценообразова нию для многопродуктовой монополии.

5 Теорема Скарфа и кооперативные НТП-игры

Кооперативная НТП-игра (игра с нетрансферабельной полезностью) $(\mathcal{I}, (V(S))_{S \subset \mathcal{I}})$ описывается множеством игроков (агентов) $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$, $(n \geq 2)$ и множествами допустимых векторов выигрышей $V(S) \subset \mathbb{R}^S$ для каждой (непустой) коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$, которые удовлетворяют следующим свойствам: $\forall S \subseteq \mathcal{I}$

- $V(S)$ непустое, замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^S$,
- $V(S)$ насыщенно (вниз), т. е., если $x \in V(S)$ и $y \leq x$, то $y \in V(S)$,

- каждая одноэлементная коалиция жизнеспособна, но её возможности ограничены сверху, т. е. $V(\{i\}) \neq \emptyset$ и $V(\{i\}) < +\infty$, $\forall i \in \mathcal{I}$,

- множество всех индивидуально-рациональных векторов выигрыша из $V(S)$, по определению это

$$Q(S) := \{\vartheta \in V(S) \mid \vartheta_i \geq V(\{i\})\ \forall i \in S\}, \tag{5.12}$$

  ограничено сверху в $\mathbb{R}^S$.[5]

Определение 5.1 ***Ядром*** $\mathcal{C}(V)$ *игры* $(\mathcal{I}, (V(S))_{S\subset\mathcal{I}})$ *называется множество всех дележей, неблокируемых никакой коалицией, т. е.* $x \in \mathcal{C}(V) \iff$

$$x \in V(\mathcal{I}) \ \ \& \ \ \nexists S \subseteq \mathcal{I},\ S \neq \emptyset :\ \exists y = (y_i)_S \in V(S) \text{ такой, что } y_i > x_i\ \forall i \in S.$$

Напомним, что семейство $\mathcal{B}$ подмножеств в $\mathcal{I}$ называется *сбалансированным*, если для каждого $S \in \mathcal{B}$ существуют действительные $\lambda_S \geq 0$ такие, что

$$\sum_{S\in\mathcal{B}:i\in S} \lambda_S = 1 \ \ \forall i \in \mathcal{I}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S e_S = e_{\mathcal{I}},$$

где, по определению, $e_S \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ — вектор, удовлетворяющий $e^i_S = 1$ для $i \in S$ и $e^i_S = 0$ при $i \notin S$, т. е. это характеристическая (индикаторная) функция множества S.

Игра $(\mathcal{I}, V)$ называется *сбалансированной*, если для каждого сбалансированного семейства коалиций $\mathcal{B}$ выполнено

$$\bigcap_{S\in\mathcal{B}} \mathrm{pr}^{-1}_{|S}(V(S)) \subseteq V(\mathcal{I}), \tag{5.13}$$

где $\mathrm{pr}_{|S}(\cdot)$ — проектирующее отображение пространства $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ на $\mathbb{R}^S$. Условие (5.13) можно переписать в следующем эквивалентном виде: $\forall\mathcal{B}$ — сбалансированное семейство,

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \ \ [x_S = (x_i)_{i\in S} \in V(S)\ \forall S \in \mathcal{B}] \ \Rightarrow\ x \in V(\mathcal{I}).$$

Таким образом, для того, чтобы некоторый вектор оказался дележом достаточно, чтобы нашлось сбалансированное семейство коалиций такое, что для каждой коалиции из семейства отвечающий ей подвектор был достижимым для этой коалиции.

Известная теорема Скарфа утверждает, что ядро сбалансированной НТП-игры $(\mathcal{I}, (V(S))_{S\subset\mathcal{I}})$ непусто.

Теорема 5.1 (Скарф, 1967) *Ядро сбалансированной НТП-игры непусто.*

Доказательство теоремы 5.1. Доказательство основано на применении теоремы Какутани о существовании неподвижной точки, которое применяется к надлежащим образом построенному точечно-множественному отображению. Конструкция этого

[5] Стандартно требуют также непустоты этих множеств, однако это требование избыточное.

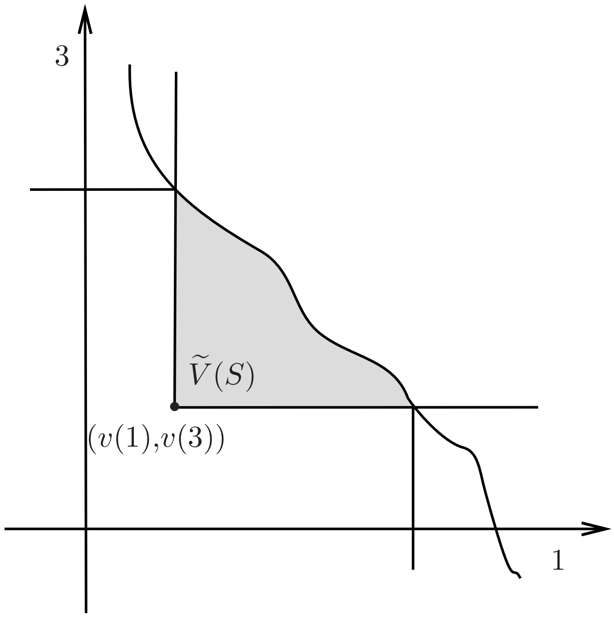


Рис. 5.7. Построение множества коалиционных возможностей $\widetilde{V}(S)$ при $S = \{1, 3\}$.

отображения и выпуклого компакта, который это отображение переводит в себя, описывается ниже.

Будем считать, без ограничения общности, что одноэлементные коалиции способны заработать ноль, но не более, т. е., что $V(\{i\}) = (-\infty, 0]\ \ \forall i \in \mathcal{I}$. Далее рассмотрим множества

$$\widetilde{V}(S) = V(S) \cap \mathbb{R}^S_+, \ \ S \subseteq \mathcal{I}, \ S \neq \emptyset$$

в случае непустого пересечения и определим $\widetilde{V}(S) = \{0\}$ для пустого, $S \subseteq \mathcal{I}$. По предположению (5.12) все они являются непустыми и компактными. Следовательно, найдётся такое действительное $c > 0$, что куб со стороной $2c$ с центром в нуле содержит в своей внутренности каждое из этих множеств, т. е. выполнено

$$\widetilde{V}(S) \subset (-c, c)^S, \ \ \forall S \subseteq \mathcal{I}, \ S \neq \emptyset.$$

Положим

$$G = \{z \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \mid -c(1, 1, \ldots, 1) \leq z \leq c(1, 1, \ldots, 1)\}.$$

На кубе G определим следующие точечно-множественные отображения[6]:

$$\chi_S(z) = \begin{cases} \{2\}, & \text{если} \quad z_S \in \operatorname{int}(\widetilde{V}(S) - \mathbb{R}^S_+), \\ \{0\}, & \text{если} \quad z_S \notin (\widetilde{V}(S) - \mathbb{R}^S_+), \\ [0{,}2], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Итак, по определению $\chi_S(z)$ принимает значение $\{2\}$ если $z_S = (z_i)_{i \in S}$ находится внутри «скорректированного» множества коалиционных возможностей $\widetilde{V}(S) - \mathbb{R}^S_+$, равна отрезку $[0, 2]$ на его границе и совпадает с $\{0\}$ за его пределами. Данное построение представлено на рис. 5.8.

Пусть K это множество всех коалиций — непустых подмножеств $\mathcal{I}$. На кубе $[0, 2]^K$ определим точечно-множественное отображение $\varphi(\cdot)$ со значениями в G по формуле:

$$\varphi(\Lambda) = \mathop{\mathbf{argmax}}_{z \in G} \langle z, \sum_{S \in K} \lambda_S e_S - e_{\mathcal{I}} \rangle, \ \ \Lambda = (\lambda_S)_{S \in K} \in [0, 2]^K. \tag{5.14}$$

[6]Получены путём замыкания графика характеристической функции множества с последующим овыкуплением значений.

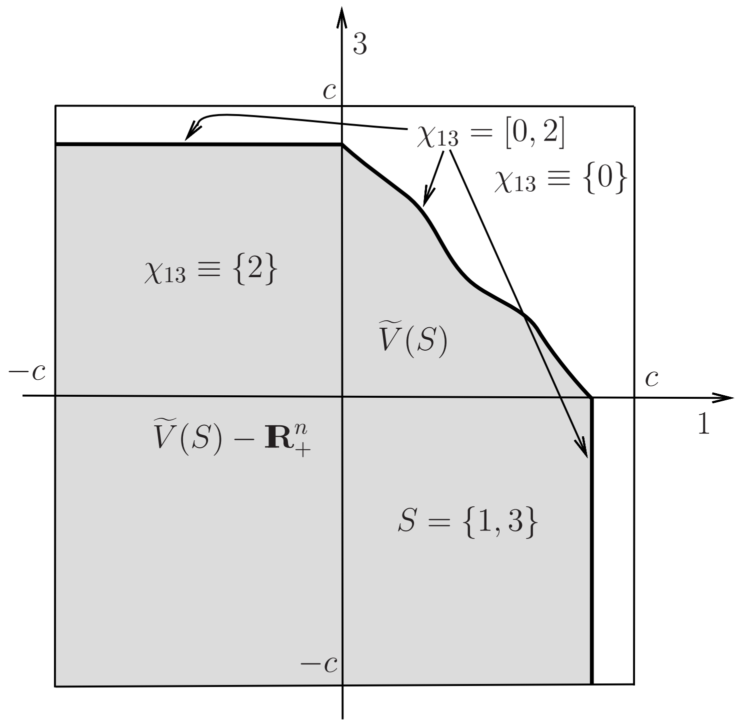


Рис. 5.8. Построение χ_S при $S = \{1,3\}$.

Наконец, определим искомое отображение компакта $G \times [0,2]^K$ в себя по формуле

$$\psi(z,\Lambda) = \varphi(\Lambda) \times \prod_{S \in K} \chi_S(z) \subset G \times [0,2]^K, \quad (z,\Lambda) \in G \times [0,2]^K.$$

По построению легко видеть, что отображение ψ имеет замкнутый график и, конечно, непустые выпуклые значения. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы Какутани о неподвижной точке и можем заключить существование такой пары $(\bar{z},\bar{\Lambda}) \in G \times [0,2]^K$, что

$$(\bar{z},\bar{\Lambda}) \in \psi(\bar{z},\bar{\Lambda}).$$

Покажем далее, что $\bar{z} \in \mathcal{C}(V)$. С этой целью покажем, что в неподвижной точке выполняется

$$\sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S e_S = e_{\mathcal{I}}, \quad \bar{\lambda}_S \in \chi_S(\bar{z}),\ S \in K, \tag{5.15}$$

т. е. семейство $\bar{\Lambda}$ сбалансировано. Предположим противное, тогда:

$$\sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S e_S - e_{\mathcal{I}} \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists i \in \mathcal{I} : \sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S (e_S)_i - 1 \neq 0.$$

Рассмотрим одну возможность: для данного i выполнено $\sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S (e_S)_i - 1 > 0$. Но тогда в силу (5.14) должно быть $\bar{z}_i \in \varphi_i(\bar{\Lambda}) = \{c\}$, откуда из определения c и построения $\chi_S(\bar{z}) = \{0\}$ $\forall S \in K : \ i \in S$ и, значит, $\sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S (e_S)_i = 0$. Получили $\varphi_i(\bar{\Lambda}) = \{-c\}$, что противоречит предыдущему.

Далее предположим, что выполнено $\sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S (e_S)_i - 1 < 0$. В силу (5.14) это даёт $\bar{z}_i \in \varphi_i(\bar{\Lambda}) = \{-c\} < 0$, откуда по построению $\bar{\lambda}_{\{i\}} = 2 \Rightarrow \sum_{S \in K} \bar{\lambda}_S (e_S)_i \geq 2$. Вновь имеем противоречие. Равенство (5.15) доказано, так как опровергнуты все другие возможности.

Условие (5.15) это условие сбалансированности набора $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}_S)_{S \in K}$. Так как по построению $\chi_S(z)$ при $\bar{\lambda}_S > 0$, $\bar{\lambda}_S \in \chi_S(\bar{z})$ должно быть $\bar{z}_S \in V(S)$, то в силу сбалансированности коалиционной игры, имеем $\bar{z} \in V(\mathcal{I})$. Наконец, если бы нашлась коалиция $S \in K$, доминирующая $\bar{z}$, то это означало бы, что для данного S выполнено $\bar{\lambda}_S = 2 \in \chi_S(\bar{z})$, что вновь противоречит (5.15). Итак, найден не доминируемый никакой коалицией делёж $\bar{z}$ из $V(\mathcal{I})$ и, следовательно, $\mathcal{C}(V) \neq \emptyset$. ■

Список литературы

Бондарева О. Н., Кулаковская Т. Е., Наумова Н. И. (1979). Решение произвольной кооперативной игры четырех лиц// *Вестник Ленинградского университета* (Математика), **2**(7), 104–105

Данилов В. И. (2002). Лекции по теории игр. *Москва: Российская экономическая школа*, 140 с.

Мулен Э. (1991). Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. *Пер. с англ., Москва: Мир*

Оуэн Г. (1971). Теория игр. *Пер. с англ., Москва: Мир*

Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. (1974). Некоторые вопросы теории игр двух лиц. *Пер. с англ., Москва: Мир*

Scarf, H. (1967). The core of an N person game// *Econometrica*, **35**, 50–69

Lucas, W., F. (1967). A game with no solution// RAND Memorandum M-5518-PR, *RAND Corporation*. October 1967