О бесконечномерных квазигруппах конечных порядков

В. Н. Потапов

Институт математики им. С.Л.Соболева,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Международная конференция "Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики", посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Алексея Андреевича Ляпунова

11 - 14 октября 2011 г., Академгородок, Новосибирск, Россия

Пусть $\Sigma = \{0, \ldots, k-1\}$, $\mathbb{A}$ — некоторое конечное или бесконечное множество, элементами которого нумеруются переменные.

Определение

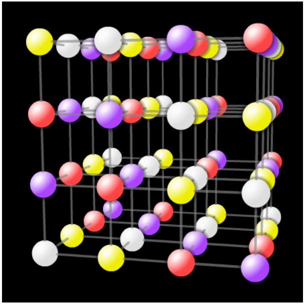
Определим функцию $d : \Sigma^{\mathbb{A}} \times \Sigma^{\mathbb{A}} \to [0, \infty]$ так, что $d(\overline{y}, \overline{z})$ — число различающихся компонент в $\overline{y}, \overline{z} \in \Sigma^{\mathbb{A}}$.

Определение

Функция $f : \Sigma^{\mathbb{A}} \to \Sigma$ называется квазигруппой порядка k, если $f(\overline{y}) \neq f(\overline{z})$ при $d(\overline{y}, \overline{z}) = 1$.

Определение

Таблица значений n-арной квазигруппы называется латинским гиперкубом (n-мерное обобщение латинского квадрата).



0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	1	0
3	2	0	1

Пусть множество $\mathbb{A}$ бесконечно. Определим $\operatorname{supp} \overline{y} = \{i \in \mathbb{A} \mid y_i \neq 0\}$. Обозначим через $\mathcal{I}$ совокупность конечных подмножеств множества $\mathbb{A}$.

Рассмотрим $\mathcal{F} = \{\overline{y} \in \Sigma^{\mathbb{A}} \mid \operatorname{supp} \overline{y} \in \mathcal{I}\}$. Ясно, что множество $\Sigma^{\mathbb{A}}$ представимо в виде дизъюнктного объединения подмножеств вида $\mathcal{F}_{\overline{a}} = \overline{a} + \mathcal{F}$. Причём если $\mathcal{F}_{\overline{a}} \neq \mathcal{F}_{\overline{b}}$, то $d(\overline{y}, \overline{z}) = \infty$ для любых $\overline{y} \in \mathcal{F}_{\overline{a}}$ и $\overline{z} \in \mathcal{F}_{\overline{b}}$.

Поэтому квазигруппа f может быть независимо определена на каждом $\mathcal{F}_{\overline{a}}$. Ниже будем подразумевать, что $f : \mathcal{F} \to \Sigma$.

Квазигруппы на $\mathcal{F}$ допускают конструктивное определение, в то время как для определения квазигрупп на $\Sigma^{\mathbb{A}}$ необходимо выбирать по представителю из каждого класса $\mathcal{F}_{\overline{a}}$.

Пример

Определим $g : \mathcal{F} \to \{0, \ldots, k-1\}$ равенством

$$g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} x_\alpha \mod k.$$

Утверждение

Пусть $p : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ — квазигруппа порядка 2. Тогда $p(x) = \sigma + \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} x_\alpha \mod 2$, где $\sigma \in \{0, 1\}$.

Символом x всюду будем обозначать переменную в квазигруппе, через x_J будем обозначать выборку переменных с индексами из множества J, $J \subset \mathbb{A}$.

Определение

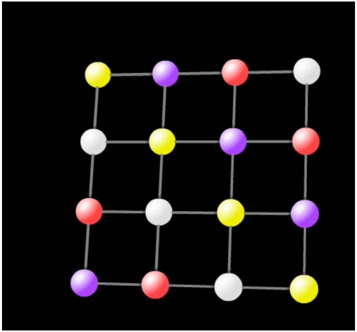
Ретрактом квазигруппы f называется подфункция, полученная из f подстановкой констант в некоторые переменные, причём только конечное число констант может быть отлично от нуля.

Через $f_J(x_J)$ будем обозначать ретракт квазигруппы $f : \mathcal{F} \to \Sigma$, в котором фиксированы нулём все переменные, кроме имеющих индексы из множества J. Если множество J конечно, то ретракт f_J можно рассматривать как $|J|$-арную квазигруппу.

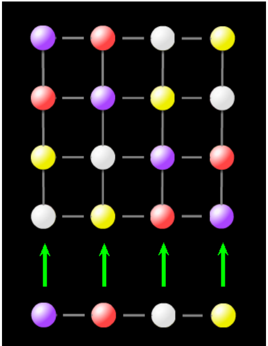
Определение

Квазигруппа f называется **разделимой**, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется **неразделимой**.

Внутренняя квазигруппа:



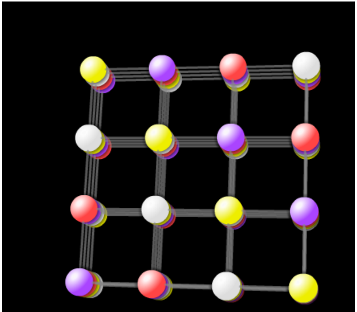
Внешняя квазигруппа:



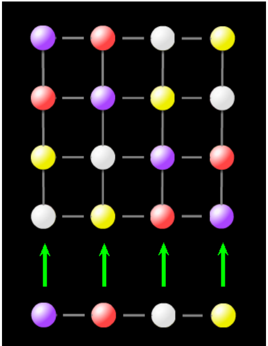
Определение

Квазигруппа f называется **разделимой**, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется **неразделимой**.

Внутренняя квазигруппа $\to$ Композиция:



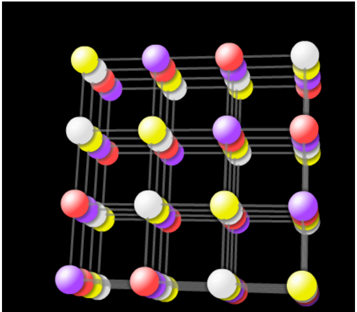
Внешняя квазигруппа:



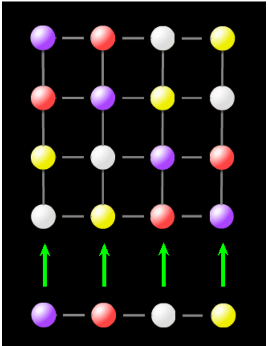
Определение

Квазигруппа f называется разделимой, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется неразделимой.

Внутренняя квазигруппа $\to$ Композиция:



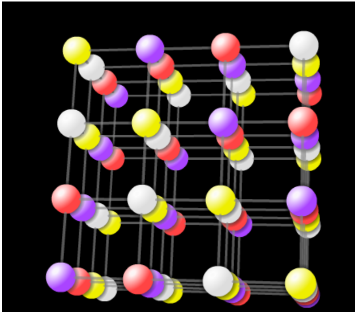
Внешняя квазигруппа:



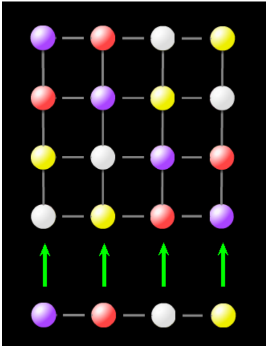
Определение

Квазигруппа f называется **разделимой**, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется **неразделимой**.

Внутренняя квазигруппа $\rightarrow$ Композиция:



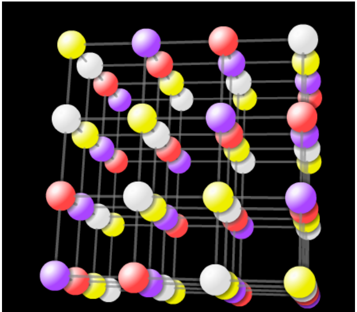
Внешняя квазигруппа:



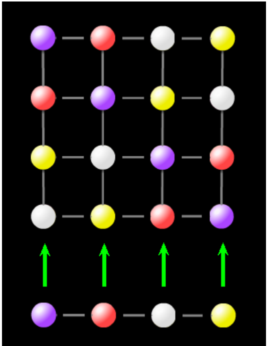
Определение

Квазигруппа f называется **разделимой**, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется **неразделимой**.

Внутренняя квазигруппа $\to$ Композиция:



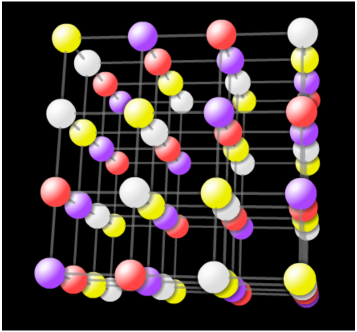
Внешняя квазигруппа:



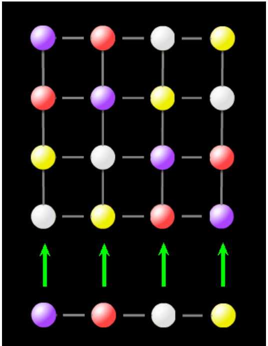
Определение

Квазигруппа f называется **разделимой**, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется **неразделимой**.

Композиция:



Внешняя квазигруппа:



Определение

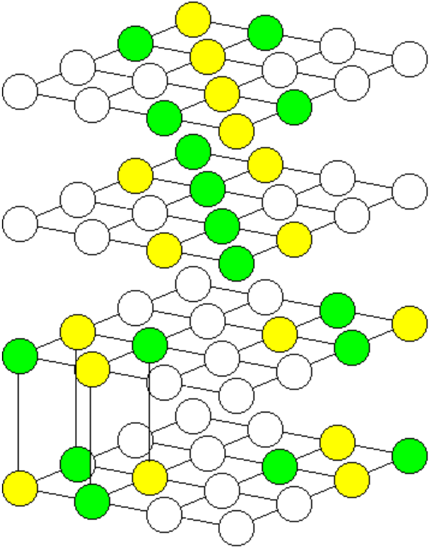
Квазигруппа $f : \mathcal{F} \to \Sigma$ порядка 4 называется полулинейной, если она удовлетворяет равенству $f(\{0,1\}^{\mathbb{A}} \cap \mathcal{F}) = \{0,1\}$ или f изотопна квазигруппе, удовлетворяющей этому равенству.

В частности, квазигруппа $f(x_{\mathbb{A}}) = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} x_\alpha$ является полулинейной. Здесь подразумевается сложение изоморфное групповой операции в $Z_2 \times Z_2$.

Определение

Обозначим через S_0 группу перестановок на Σ, сохраняюших нуль. Изотопией (сохраняющей нуль) называется элемент множества $S_0 \times S_0^{\mathbb{A}}$. Две квазигруппы f и g называются изотопными, если

$$g(x_{\mathbb{A}}) = \theta_0(f(\theta_{\mathbb{A}} x_{\mathbb{A}})), \qquad \theta_0 \in S_0,\ \theta_{\mathbb{A}} \in S_0^{\mathbb{A}}.$$



Теорема 1

Пусть $f : \mathcal{F} \to \Sigma$ — квазигруппа порядка 4. Квазигруппа f является разделимой или полулинейной.

Krotov D. S., Potapov V. N. n-Ary quasigroups of order 4. *SIAM J. Discrete Math.*, 2009.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $|\Sigma| = k$. Элементы множества $\Sigma^{\mathbb{N}}$ можно рассматривать как k-ичные представления вещественных чисел $\delta \in [0, 1]$.

Теорема 2

Для любой квазигруппы $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma$ конечного порядка и $a \in \Sigma$ множество $\{\delta \in [0, 1] \mid f(\delta) = a\}$ неизмеримо по Лебегу.

Доказательство теоремы опирается на инвариантность меры Лебега относительно сдвигов и

Утверждение

Для произвольного измеримого множества B

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu((\upsilon - \varepsilon, \upsilon + \varepsilon) \cap B)}{\mu((\upsilon - \varepsilon, \upsilon + \varepsilon))} = 1$$

почти всех точек $\upsilon \in B$.