

Комбинаторные дизайны и конфигурации как совершенные раскраски графов и мультиграфов

С.В. Августинovich, В.Н. Потапов

Общеинститутский семинар ИМ СО РАН, 12 марта 2021 г.

Совершенная раскраска

Пусть $\{1, \dots, k\}$ — множество из k цветов. Раскраской вершин графа $G = (V, E)$ называется функция $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Для каждой вершины $x \in V(G)$ определим окрестность вершины (единичную сферу с центром в вершине) следующим образом: $U_1(x) = \{y \in V \mid \{x, y\} \in E\}$. Множество $U_1(x)$ состоит из вершин смежных с вершиной x .

Пусть $f(x) = i$, обозначим $s_{ij}(x) = |U_1(x) \cap f^{-1}(j)|$.

Определение

Раскраска называется **совершенной**, если величина $s_{ij}(x) = s_{ij}$ не зависит от выбора вершины x цвета i .

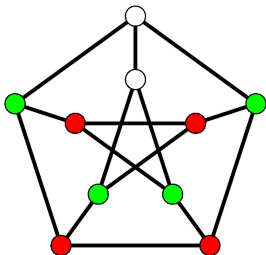
Совершенная раскраска

Определение

Матрицей параметров совершенной раскраски называется матрица

$$S_{k \times k} = (s_{ij})$$

Совершенная раскраска графа Петерсена, порядок цветов: белый, зелёный, красный.



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Совершенная раскраска

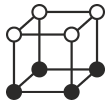
Совершенные раскраски булева куба в 2 цвета. Первому цвету соответствует черный цвет, второму — белый.



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

partition design (P. Camion, B. Courteau and P. Delsarte, 1987)

equitable partition (C.D. Godsil, 1993)

дистрибутивная раскраска (В.Г. Визинг, 1995)

(c_0, c_1) -регулярная функция (Ю.В. Таранников, 2002)

совершенная раскраска (С.В. Августинович, < 2004)

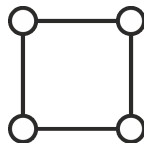
intriguing set (S. Kelly, 2007)

- дистанционно регулярные графы
- накрытия графов
- трансверсали и 1-факторы гиперграфов
- комбинаторные дизайны
- латинские квадраты и ортогональные системы
- ассоциативные схемы
- разностные множества
- факторизации групп и замощения
- полностью регулярные коды, совершенные коды, МДР-коды
- бент-функции, платовидные и корреляционно-иммунные функции

матрица смежности графа

Матрица смежности графа $G = (V, E)$ определена равенством

$$M_{n \times n}(G) = (m_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E(G); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Цикл на четырех вершинах имеет следующую матрицу смежности

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ — раскраска графа. Рассмотрим матрицу F размера $n \times k$, у которой столбец F_i является характеристической функцией цвета i .

Лемма

Пусть M — матрица смежности графа G . Функция f является совершенной раскраской графа G с матрицей параметров S тогда и только тогда, когда $MF = FS$.

Для доказательства равенства рассмотрим (vj) -ые элементы матриц в левой и правой части равенства $MF = FS$, $j = 1, \dots, k$, $v \in V(G)$. $(MF)_{vj}$ — число соседей цвета j , которых видит вершина v . Теперь рассмотрим правую сторону равенства. В строке F_v единица стоит в позиции $f(v)$, соответствующей цвету вершины v . Отсюда получаем, что $(FS)_{vj}$ — количество вершин цвета j , соседних с вершиной цвета $f(v)$.

Хэмминга

Синглтона

Дельсарта – Хоффмана

Хемерса

Бирбрауэра – Фридмана

Фон-дер-Флаасса

Теорема

Пусть r -регулярный мультиграф G и θ — минимальное собственное число его матрицы смежности M . Тогда если любая вершина из множества A смежна с не более $t < r$ вершинами из множества A , то $|A| \leq \frac{(t-\theta)|V(G)|}{r-\theta}$. И если множество A имеет мощность $\frac{(t-\theta)|V(G)|}{r-\theta}$, то его характеристическая функция есть совершенная раскраска мультиграфа графа G с матрицей параметров

$$S = \begin{pmatrix} t & r-t \\ t-\theta & r-t+\theta \end{pmatrix}.$$

При $t = 0$ множество $A \subset V(G)$ является независимым, а неравенство $|A| \leq \frac{(-\theta)|V(G)|}{r-\theta}$ называется границей Дельсарта – Хоффмана.

Трансверсаль гиперграфа

Определение

Гиперграфом называется обобщение понятия графа, когда в качестве гиперрёбер рассматриваются неупорядоченные наборы из более чем двух вершин. Гиперграф называется **k -униформным**, если любое его гиперребро состоит из k вершин.

Определение

Трансверсалью гиперграфа называется набор вершин, однократно протыкающих все гиперрёбра, т. е. мощность пересечения трансверсали и любого ребра равна 1. **ℓ -Кратной трансверсалью** гиперграфа называется набор вершин, ℓ -кратно протыкающих все рёбра.

Трансверсаль гиперграфа

Для гиперграфа G определим мультиграф $\Gamma(G)$, вершинами которого являются вершины гиперграфа G и вершины v_i и v_j соединены m_{ij} рёбрами, если в гиперграфе G имеется m_{ij} различных гиперрёбер, содержащих вершины v_i и v_j одновременно.

Теорема

Функция $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ является характеристической функцией ℓ -кратной трансверсали в k -униформном r -регулярном гиперграфе G тогда и только тогда, когда она является совершенной раскраской мультиграфа $\Gamma(G)$ с матрицей параметров

$$S = \begin{pmatrix} (\ell - 1)r & (k - \ell)r \\ \ell r & (k - 1 - \ell)r \end{pmatrix}.$$

Комбинаторные дизайны

Рассмотрим множество из n элементов. Блоками, точнее k -блоками будем называть любое его k -элементное подмножество.

Определение

Комбинаторным дизайном (точнее t -дизайном) с параметрами t -(n, k, λ) называется такой набор блоков, что любое t -элементное подмножество содержится ровно в λ k -блоках.

Примером 2 -($7, 3, 1$) дизайна является плоскость Фано.

$\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}$

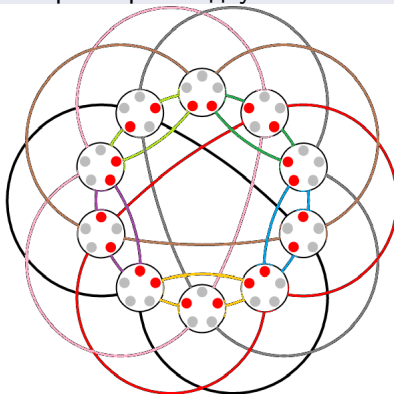
Комбинаторный дизайн с параметрами t -(n, k, λ) можно рассматривать как λ -кратную трансверсаль в гиперграфе G , вершинами которого являются всевозможные k -элементные блоки, а гиперрёбра — это наборы блоков, содержащих фиксированное t -элементное множество.

Граф $\Gamma(G)$ смежности вершин в гиперграфе G при $t = k - 1$ совпадает с графом $J(n, k)$.

Определение

Графом Джонсона $J(n, k)$ называется граф, вершинами которого являются все двоичные наборы длины n и веса k . Две вершины графа соединены ребром, если расстояние Хэмминга (число несовпадающих элементов) между соответствующими им двоичными наборами равно двум.

$J(5, 2)$



Утверждение

Характеристическая функция дизайна D с параметрами $(k-1)-(n, k, \lambda)$ является совершенной раскраской графа $J(n, k)$ с матрицей параметров $S = \begin{pmatrix} k(\lambda-1) & k(n-k-\lambda+1) \\ k\lambda & k(n-k-\lambda) \end{pmatrix}$.

При $\lambda = 1$ $S = \begin{pmatrix} 0 & k(n-k) \\ k & k(n-k-1) \end{pmatrix}$.

Пример

Характеристическая функция плоскости Фано с параметрами $2-(7, 3, 1)$ является совершенной раскраской графа $J(7, 3)$ с матрицей параметров $S = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

q -Аналогом комбинаторного дизайна или грассмановым дизайном с параметрами t -(n, k, λ) $_q$ называется такой набор k -мерных линейных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$, что любое t -мерное подпространство содержится ровно в λ k -мерных подпространствах из этого набора. Грассманов дизайн с параметрами $(k-1)$ -(n, k, λ) $_q$ можно рассматривать как λ -кратную трансверсаль в гиперграфе G , вершинами которого являются всевозможные k -мерные линейные подпространства в $\mathbb{F}_q^n$, а гиперрёбра — это наборы k -мерных подпространств, содержащих фиксированное t -мерное подпространство. При $t = k - 1$ граф $\Gamma(G)$ совпадает с графом $J_q(n, k)$.

Утверждение

Множество D является q -дизайном с параметрами $(k-1)-(n, k, \lambda)_q$ тогда и только тогда, когда его характеристическая функция является совершенной раскраской графа $J_q(n, k)$ с матрицей параметров

$$\begin{pmatrix} \frac{q^k-1}{q-1}(\lambda-1) & \frac{q^k-1}{q-1}\left(\frac{q^{n-k}-1}{q-1}-\lambda+1\right) \\ \frac{q^k-1}{q-1}\lambda & \frac{q^k-1}{q-1}\left(\frac{q^{n-k}-1}{q-1}-\lambda\right) \end{pmatrix}.$$

Бент-функции

Свёртка двух функций $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$f * g(y) = \sum_{x \in K} f(x)g(y - x).$$

Определение

Булевой бент-функцией называется такая функция $b : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, что $(-1)^b * (-1)^b$ принимает значение 2^n в нуле и нуль в остальных точках.

Бент-функции существуют только при чётных n , число единиц бент-функции может принимать два значения $2^{n-1} + 2^{n/2-1}$ или $2^{n-1} - 2^{n/2-1}$.

Пример

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \oplus x_3x_4$$

Теорема

Функция $b : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $b(\bar{0}) = 1$, является бент-функцией веса $2^{n-1} + 2^{n/2-1}$ тогда и только тогда, когда она является совершенной раскраской графа $J_2(n, 2)$ с матрицей параметров

$$\begin{pmatrix} 3(2^{n-3} - 2^{\frac{n-4}{2}} - 1) & 3 \cdot 2^{n-2} & 3(2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}}) & 0 \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} & 5 \cdot 2^{n-3} - 2^{\frac{n-4}{2}} - 3 & 2^{n-1} + 2^{\frac{n-2}{2}} & 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}} \\ 2^{n-3} - 2^{\frac{n-4}{2}} & 2^{n-1} - 2^{\frac{n-2}{2}} & 5 \cdot 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}} - 3 & 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & 3(2^{n-3} - 2^{\frac{n-4}{2}}) & 3 \cdot 2^{n-2} & 3(2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}} - 1) \end{pmatrix}$$

Объединив попарно чётные и нечётные цвета в построенной выше совершенной раскраске графа $J_2(n, 2)$, мы получим совершенную раскраску с матрицей параметров

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n-2} - 3 & 3 \cdot 2^{n-2} \\ 3 \cdot 2^{n-2} & 3 \cdot 2^{n-2} - 3 \end{pmatrix}.$$

Потапов В.Н., Августинович С.В. Комбинаторные дизайны, разностные множества и бент-функции как совершенные раскраски графов и мультиграфов // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1087–1100.

Совершенные структуры в кодировании и криптографии
http://math.nsc.ru/~potapov/Perfect_Struct_v5.pdf