# Независимые множества и разрезы в графах

В. Н. Потапов

семинар "Теория графов", 12 марта 2024 г.

# разрез графа

Пусть $A$ и $B$ подмножества вершин в простом графе $G$. Определим величину $e(A, B) = |\{(a, b) \in E(G) : a \in A, b \in B\}|$ — число рёбер, соединяющих вершины из множества $A$ с вершинами из множества $B$, причём если $a, b \in A \cap B$, то ребро $\{a, b\}$ считается дважды. Заметим, что $e(A, B) = (\mathbf{1}_A, M\mathbf{1}_B)$, где $M$ — матрица смежности графа $G$.

## Определение

Разрезом графа $G$ называется пара множеств вершин $A \subset V(G)$ и $B = V(G) \setminus A$ или множество рёбер между ними, величиной разреза называется число $e(A, B)$.

## Определение

Множеств вершин $C \subset V(G)$ в графе $G$ называется независимым, если $e(C, C) = 0$.

## Теорема [граница Дельсарта—Хоффмана , Hoffman 1970]

Пусть $G$ — $r$-регулярный граф, $n = |V(G)|$ и $\lambda_{min}$ — минимальное собственное число его матрицы смежности $M$. Тогда мощность любого независимого множества в графе $G$ не превосходит $\frac{\lambda_{min} n}{\lambda_{min} - r}$. Независимое множество имеет мощность $\frac{\lambda_{min} n}{\lambda_{min} - r}$ тогда и только тогда, когда его характеристическая функция есть совершенная раскраска с матрицей параметров $S = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -\lambda_{min} & r + \lambda_{min} \end{pmatrix}$.

# Доказательство теоремы

Рассмотрим ортонормированный базис собственных функций $\phi_i$ матрицы $M$. Характеристическую функцию $f = \mathbf{1}_C$ произвольного независимого множества можно разложить по базису: $f = \sum_i \alpha_i \phi_i$, где собственной функцией, соответствующей собственному числу $r$, является $\phi_0 = \mathbf{1}/\sqrt{n}$. Тогда

$$0 = (Mf, f) = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i, \tag{1}$$

где $\lambda_i$ — собственные числа функций $\phi_i$. Из равенства $(f, f) = \sum_i \alpha_i^2$ следует, что $\sum\limits_{i \neq 0} \alpha_i^2 = (f, f) - \alpha_0^2 = |C| - |C|^2/n$.

Тогда из (1) и минимальности $\lambda_{min}$ получаем:

$0 \geq (|C| - |C|^2/n)\lambda_{min} + r|C|^2/n$.

Отсюда $\frac{|C|}{n} \leq \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{min} - r}$, поскольку $\lambda_{min} - r < 0$.

# Совершенная раскраска

Пусть $\{1, \ldots, k\}$ — множество из $k$ цветов. Раскраской вершин графа $G = (V, E)$ называется функция $f : V \to \{1, \ldots, k\}$.
Для каждой вершины $x \in V(G)$ определим окрестность вершины (единичную сферу с центром в вершине) следующим образом: $U_1(x) = \{y \in V \mid \{x, y\} \in E\}$. Множество $U_1(x)$ состоит из вершин смежных с вершиной $x$.
Пусть $f(x) = i$, обозначим $s_{ij}(x) = |U_1(x) \cap f^{-1}(j)|$.

**Определение**

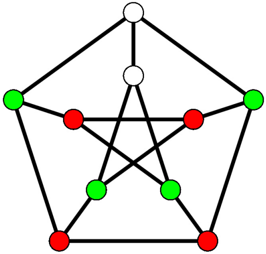
Раскраска называется совершенной, если величина $s_{ij}(x) = s_{ij}$ не зависит от выбора вершины $x$ цвета $i$.

# Совершенная раскраска

## Определение

Матрицей параметров совершенной раскраски называется матрица
$$S_{k\times k} = (s_{ij})$$

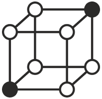
Совершенная раскраска графа Петерсена, порядок цветов: белый, зелёный, красный.



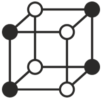
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Совершенная раскраска

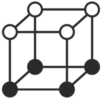
Совершенные раскраски булева куба в 2 цвета. Первому цвету соответствует черный цвет, второму — белый.



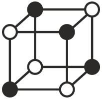
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

# матричное уравнение

Пусть $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ — раскраска графа. Рассмотрим матрицу $F$ размера $n \times k$, у которой столбец $F_i$ является характеристической функцией цвета $i$.

## Лемма

Пусть $M$ — матрица смежности графа $G$. Функция $f$ является совершенной раскраской графа $G$ с матрицей параметров $S$ тогда и только тогда, когда $MF = FS$.

## Следствие

Функция $f$ является совершенной 2-раскраской регулярного связного графа $G$ тогда и только тогда, когда при некоторых $\alpha$ и $c$ функция $\alpha f + c$ является собственной функцией графа $G$.

# Доказательство теоремы

Равенство $\frac{|C|}{n} = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{min} - r}$ имеет место только в случае когда $f = \phi + \alpha_0 \varphi_0$, где $\phi$ — собственная функция с собственным числом $\lambda_{min}$. Из следствия получаем, что $f$ — совершенная раскраска. Коэффициент $s_{21}$ матрицы $S$ можно найти из соотношения $\frac{\lambda_{min} nr}{\lambda_{min} - r} = s_{21} n (1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{min} - r})$ на число рёбер с разноцветными концами.

## Теорема [Haemers 1979]

Пусть $G$ — $r$-регулярный связный граф и $\lambda_k < \lambda_{k-1} < \cdots < \lambda_1 < \lambda_0 = r$ — собственные числа его матрицы смежности $M$. Пусть $C \subset V(G)$, $C \neq V(G)$ и $e(C, C)$ — удвоенное число пар смежных вершин в множестве $C$. Тогда справедливы неравенства

$$\lambda_k|C| + \frac{(r-\lambda_k)|C|^2}{|V(G)|} \leq e(C, C) \leq \lambda_1|C| + \frac{(r-\lambda_1)|C|^2}{|V(G)|}.$$

Причём, если для некоторого множества $C$ в одном из неравенств достигается равенство, то его характеристическая функция есть совершенная раскраска.

**Теорема [ N. Alon, V. Milman 1986, Tanner 1984, Golubev 2020]**

Пусть $G$ — $r$-регулярный связный граф и $\lambda_k < \lambda_{k-1} < \cdots < \lambda_1 < \lambda_0 = r$ — собственные числа его матрицы смежности $M$. Пусть $A \subset V(G)$, $B = V(G) \setminus A$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{(r-\lambda_1)|A||B|}{|V(G)|} \leq e(A,B) \leq \frac{(r-\lambda_k)|A||B|}{|V(G)|}.$$

Причём, если для некоторого множества $A$ в одном из неравенств достигается равенство, то его характеристическая функция есть совершенная раскраска.

# expander mixing lemma

**Теорема [expander mixing lemma N. Alon, F. R. K. Chung 1988, K. Devriendt, P. Van Mieghem 2019]**

Пусть $G$ — $r$-регулярный связный граф и $\lambda$ — максимальное по модулю, за исключением $r$, собственное число его матрицы смежности $M$. Тогда для любых подмножеств вершин $A$ и $B$ справедливо неравенство

$$\left| e(A,B) - \frac{r|A||B|}{|V(G)|} \right| \leq |\lambda| \sqrt{|A||B|(1 - |A|/|V(G)|)(1 - |B|/|V(G)|)}.$$

Причём, если в неравенстве достигается равенство, то $\mathbf{1}_A$ — совершенная раскраска с собственным числом $\lambda$ и $B = A$ или $B = V(G) \setminus A$.

## Определение

Обозначим среднюю внутреннюю степень множества вершин, через $\sigma(C) = e(C, C)/|C| = (M(G)\mathbf{1}_C, \mathbf{1}_C)/|C|$.

## Определение

Граф $G$ называется amply regular, если его матрица смежности $M_2(G)$ по расстоянию 2 является полиномом от его матрицы смежности $M$

$$M_2(G) = p(M) = p_2 M^2 + p_1 M + p_0 I. \qquad (2)$$

$$M_2(G) = p(M) = p_2 M^2 + p_1 M + p_0 I. \qquad (3)$$

Любой amply regular граф является $r$-регулярным, где $r = r_p = -p_0/p_2$.

$$M^2 = \frac{1}{p_2} M_2 - \frac{p_1}{p_2} M - \frac{p_0}{p_2} I.$$

### Определение

Обозначим через $\sigma_2(C)$ среднее число соседей вершины на расстоянии 2 в множестве вершин $C \subset V(G)$, $\sigma_2(C) = (M_2(G)\mathbf{1}_C, \mathbf{1}_C)/|C|$.

### Теорема [Кротов 2012]

Пусть $G$ amply $r$-регулярный граф с полиномом $p$ и $C \subset V(G)$. Если $\sigma(C) = a$ и $\sigma(V(G)\backslash C) = d$, то $\sigma_2(C) \leq (p(S))_{11}$ и $\sigma_2(V(G)\backslash C) \leq (p(S))_{22}$, где $S = \begin{pmatrix} a & r-a \\ r-d & d \end{pmatrix}$. Кроме того, одновременно в двух неравенствах достигаются равенства тогда и только тогда, когда раскраска $\mathbf{1}_C$ является совершенной с матрицей параметров $S$.

### Следствие

Пусть $G$ amply $r$-регулярный граф с полиномом $p$ и $C \subset V(G)$ — независимое множество. Тогда $\sigma_2(C) \leq -p_2 r(\lambda_{\min} + 1)$, где $\lambda_{\min}$ — минимальное собственное число графа $G$. Кроме того, $\sigma_2(C) = -p_2 r(\lambda_{\min} + 1)$ тогда и только тогда, когда раскраска $\mathbf{1}_C$ является совершенной с собственным числом $\lambda_{\min}$.

### Теорема

Пусть $G$ amply $r$-регулярный граф с полиномом $p$ и $C \subset V(G)$. Если $\sigma(C) = a$ и $\beta = \sigma_2(C)$, то $|C| \leq \frac{(\beta - p(a))|V(G)|}{p_2(r-a)^2 + \beta - p(a)}$. Кроме того, если $|C| = \frac{(\beta - p(a))|V(G)|}{p_2(r-a)^2 + \beta - p(a)}$, то раскраска $\mathbf{1}_C$ является совершенной с собственным числом $\theta = a - \frac{\beta - p(a)}{p_2(r-a)}$.

На совершенных 2-раскрасках с минимальным собственным числом достигаются и граница из этой теоремы и граница Хоффмана. В этом случае $\sigma_2(C) = \beta = -p_2 r(\lambda_{\min} + 1)$. По следствию из теоремы Кротова $\beta \leq -p_2 r(\lambda_{\min} + 1)$ для любого независимого множества $C$. Рассмотрим случай $\beta < -p_2 r(\lambda_{\min} + 1)$.

## Следствие

Пусть $G$ amply $r$-регулярный граф с полиномом $p$ и $C \subset V(G)$. Если $\beta = \sigma_2(C) < -p_2 r(\lambda_{\min} + 1)$, то граница $\frac{|C|}{|V(G)|} \leq 1/(1 + \frac{p_2 r^2}{\beta + p_2 r})$ лучше границы Хоффмана.

$$1/(1 + \frac{p_2 r^2}{\beta + p_2 r}) < 1/(1 + \frac{p_2 r^2}{-p_2 r \lambda_{\min}}) = \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}}.$$

# Границы

- Хэмминга
- Синглтона
- Дельсарта – Хоффмана
- Хемерса
- Бирбрауэра – Фридмана
- Фон-дер-Флаасса

# Литература

Potapov V.N. On extremal properties of perfect 2-colorings arXiv:2204.03308 [math.CO]

Потапов В.Н. Совершенные структуры в кодировании и криптографии http://old.math.nsc.ru/∼potapov/

# Граф Хэмминга

$Q_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$
$(x_1, \ldots, x_n) \in Q_q^n$

## Определение

Весом набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется $\mathrm{wt}(x)$ — число ненулевых координат в $x$. Расстоянием Хэмминга $d_H(x, y)$ называется число различных координат в $x$ и $y$,
$d_H(x, y) = \mathrm{wt}(x - y)$.

## Определение

Вершинами графа Хэмминга $H(n, q)$ является множество $Q_q^n$, вершины на расстоянии 1 соединены ребром.

# Граф Хэмминга

$\xi = e^{2\pi i/q}$, $\xi^q = 1$
$\phi_z(x) = \xi^{(x,z)}$
$(x, z) = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n \mod q$
$\mathcal{F}(H(n, q))$ — пространство функций на графе Хэмминга.
$\mathcal{F}(H(n, q)) = \{f : Q_q^n \to \mathbb{C}\}$

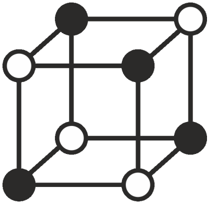
## Лемма

1. $\{\phi_z(x) : z \in Q_q^n\}$ — ортогональный базис в $\mathcal{F}(H(n, q))$.
2. $\phi_z(x)$ — собственная функция графа $H(n, q)$ с собственным числом $\lambda_z = (q - 1)n - q\mathrm{wt}(z)$.

$|\phi_z|^2 = q^n$
$f(x) = \frac{1}{q^{n/2}} \sum_z a_f(z)\phi_z(x)$
$\sum_x |f(x)|^2 = \sum_z |a(z)|^2$ равенство Парсеваля

## Определение

Пусть $f : Q_q^n \to \{-1, 1\}$. Обозначим через $I[f] = e(f^{-1}(-1), f^{-1}(1))$ число рёбер, в концах которых значения функции $f$ отличаются. Для константы эта величина равна нулю, а для булева счётчика чётности — $n2^{n-1}$.



## Лемма [Nisan, Szegedy 1994]

$I[f] = \frac{q}{4} \sum_{z \in Q_q^n} \mathrm{wt}(z) |a_f(z)|^2.$

Доказательство. Пусть $M$ — матрица смежности $H(n, q)$. Нетрудно непосредственно проверить, что

$$2I[f] - (n(q-1)q^n - 2I[f]) = -(Mf, f), \qquad (4)$$

поскольку в правой сумме каждое ребро учитывается два раза.

$M\phi_z = \lambda_z \phi_z$, где $\lambda_z = (q-1)n - q\mathrm{wt}(z)$

Представим функцию $f$ в виде линейной комбинации $f = \frac{1}{q^{n/2}} \sum_{z \in Q_q^n} a_z \phi_z$. Подставляя это выражение в (4) и используя ортогональность характеров, а также равенство Парсеваля $\sum_{z \in Q_q^n} |a_f(z)|^2 = q^n$, получаем равенства

$$4I[f] = n(q-1)q^n - \sum_{z \in Q_q^n} \lambda_z |a_f(z)|^2 = \sum_{z \in Q_q^n} q\mathrm{wt}(z) |a_f(z)|^2.$$

Пусть $Im(f)$ — множество значений, которое принимает функция $f$.

## Определение

Функция $f$ называется корреляционно-иммунной порядка $k$, если для любого $b \in Im(f)$ она принимает значение $b$ одинаковое число раз во всех гранях размерности $n - k$.

## Лемма [Таранников 2002]

Для функции $f : Q_q^n \to \{-1, 1\}$ равенство $\mathrm{cor}(f) = k$ верно тогда и только тогда, когда $a_f(z) = 0$ для всех $z \in Q_q^n$ веса $0 < \mathrm{wt}(z) \leq k$ и $a_f(v) \neq 0$ для некоторого $v \in Q_q^n$ веса $\mathrm{wt}(v) = k + 1$.

### Теорема

$I[f] \geq q^n(\mathrm{cor}(f)+1)(\rho(f)-\rho^2(f))$, где $\rho(f) = |f^{-1}(-1)|/q^n$.

Доказательство. Из леммы Таранникова следует, что $a_f(z) = 0$ при $0 < \mathrm{wt}(z) \leq \mathrm{cor}(f)$. Следовательно, имеем равенство

$$4I[f] \geq \sum_{z \in Q_q^n \setminus \bar{0}} q(\mathrm{cor}(f)+1)|a_f(z)|^2.$$

$\sum\limits_{z \in Q_2^n} |a_f(z)|^2 = q^n$ и $a_f(\bar{0}) = q^{n/2}(1-\rho(f)-\rho(f))$. Тогда

$$\sum_{z \in Q_2^n \setminus \bar{0}} |a_f(z)|^2 = q^n - q^n(1-2\rho(f))^2 = 4q^n\rho(f)(1-\rho(f)).$$

Если $I[f] = q^n(\mathrm{cor}(f)+1)(\rho(f)-\rho^2(f))$, то $f$ — совершенная 2-раскраска.

# Неравенство Бирбрауэра – Фридмана

Для фиксированной плотности $\rho(f)$ величина $I[f]$ достигает своего наибольшего значения, если все вершины, на которых функция $f$ равна $-1$, несмежны. Поэтому

$$I[f] \leq q^n(q-1)\rho(f)n$$

$$(\mathrm{cor}(f)+1)(\rho(f)-\rho^2(f)) \leq (q-1)\rho(f)n$$

**Теорема [неравенство Бирбрауэра—Фридмана 1992, 1998]**

Пусть $f : Q_q^n \to \{0,1\}$, $f \neq \mathbf{0}$, тогда $\rho(f) \geq 1 - \frac{n(q-1)}{q(\mathrm{cor}(f)+1)}$.