КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ ПЯТОГО ПОСТУЛАТА ЕВКЛИДА

В. А. Шарафутдинов

Когда-то курс истории математики читался на математических факультетах большинства российских университетов. В наши дни далеко не всякий молодой математик знает, например, о том, что математическая логика в значительной степени возникла благодаря геометрии.

Сегодня я расскажу об истории так называемого *пятого постулата Евклида.* Это история растянулась во времени на более чем две тысячи лет и насчитывает несколько сотен имен математиков разных столетий. По необходимости мой рассказ будет очень кратким и будет сконцентрирован вокруг пяти имен:

Евклид — Гаусс, Лобачевский, Больяи — Гильберт.

Геометрические знания появились у людей очень рано. Например, теорема Пифагора была известна во всей ее общности в древнем Вавилоне и Египте не позднее X века до новой эры. Но геометрия в ее современном понимании, т. е. как дисциплина, включающая *доказательства*, появилась лишь в древней Греции.

Древнегреческая геометрия возникла как часть философии. Известно много имен древнегреческих философов, которым приписываются чисто геометрические результаты. Самыми известными из таких "философов – геометров" являются Пифагор и Платон. Напомню, что Платон считается родоначальником "идеализма" в философии. В то же время Платону приписывается открытие правильных многогранников, известных также под названием *пять платоновых тел.* Постепенно древнегреческая геометрия обособляется от философии. Несомненно, что Евклид (около 300-го года до новой эры) и Архимед (287–212 до н.э.) были уже профессиональными математиками. (Архимед заслуживает отдельного и обстоятельного рассказа. Он уже в значительной степени порвал с традициями древнегреческой науки, начав интересоваться прикладными задачами. Архимед фактически заложил основы интегрального исчисления, правда, в геометрической форме. Архимеда по праву считают основоположником "науки эпохи возрождения", хотя жил он до новой эры.)

Знаменитая книга "Начала" Евклида по количеству изданий занимает второе место после Библии. Даже те, кто не открывал эту книгу, имеют о ней некоторое представление, поскольку бóльшая часть школьных учебников геометрии является пересказом, адаптированным к детскому восприятию, первых шести книг "Начал" (всего "Начала" содержат 13 книг, впрочем каждая из этих "книг" небольшого объема).

Не вполне ясны причины, побудившие Евклида написать эту книгу. Некоторые математики считают, что Евклид решил подвести итог развитию математики к его времени. Это не вполне верно. Так, Евклид не включил в "Начала" теорию конических сечений (кривых второго порядка), достаточно подробно развитую к тому времени. Первые 4 книги "Начал" посвящены планиметрии; в пятой книге излагается в чисто геометрической форме евдоксова теория несоизмеримых величин (сейчас

Date: 15.04.20.

это называется иррациональными числами); в 6-й книге эта теория применяется к подобным треугольникам; книги 7 — 10 посвящены вопросам, которые сейчас принято относить к арифметике и теории чисел; последние 3 книги посвящены стереометрии.

Изложение Евклида построено в виде строго логических выводов теорем из системы определений, постулатов и аксиом. Не вполне понятен принцип, по которому Евклид делит утверждения, принимаемые без доказательства, на "аксиомы" и "постулаты". Поэтому сейчас это разделение не используется и все принимаемые без доказательства утверждения называются аксиомами.

Всего у Евклида 14 аксиом (точнее, 9 аксиом и 5 постулатов). Есть также некоторое количество "определений". Но евклидовские определения не следует понимать в современном значении этого термина. Например, одно из них гласит: "Линия есть длина без ширины". Чтобы использовать это определение привычным нам образом, надо предварительно дать определения "длины" и "ширины"; эти понятия гораздо сложнее, чем "линия". Евклид фактически не пользуется своими определениями. Они приведены в начале книги скорее всего для того, чтобы у читателя сложились зрительные образы линий, точек, прямых и т. д.

Сразу хочу предупредить вас против распространенного заблуждения: далекие от математики люди на вопрос "что такое аксиома?" обычно отвечают: "аксиома — это истина, не требующая доказательства". Не хочу тратить время на критику всех недостатков этой фразы. Отмечу лишь, что математики относятся к термину "истина" с большой осторожностью: утверждение, являющееся истинным в одной теории, может оказаться ложным в другой, и наоборот. С другой стороны, можно привести пример: Утверждение 5 из первой книги "Начал" гласит: "Углы при основании равнобедренного треугольника равны". Евклид приводит подробное доказательство этого утверждения, хотя оно не менее очевидно, чем многие из аксиом. Так что правильный ответ на на вопрос "что такое аксиома?" звучит гораздо прозаичней: "аксиома — это утверждение, принимаемое без доказательства в данной аксиоматической теории". Отсюда, в частности, следует, что каждая отдельно взятая аксиома большого смысла не имеет; важна совокупность всех аксиом данной теории. Главное требование, предъявляемое к этой совокупности: непротиворечивость.

Довольно быстро выяснилось, что аксиоматика Евклида далека от полноты, т. е. он, сам того не замечая, использует утверждения, не вытекающие из перечисленных аксиом. Архимед одним из первых указал на неполноту аксиоматики Евклида. В частности, он дополнил евклидову аксиоматику следующей *аксиомой Архимеда*: "Для любых двух a и b, $0 < a < b$, существует такое целое n, что $na > b$". Мы обычно трактуем a и b как действительные числа, хотя Архимед трактовал их как отрезки. Ясно, что аксиома Архимеда важна для евклидовой геометрии; отказавшись от этой аксиомы, мы попадаем в хорошо сейчас известную *неархимедову геометрию.*

Еще один существенный пробел в аксиоматике Евклида также был замечен его современниками. Говоря о трех точках A, B, C, лежащих на одной прямой, Евклид часто использует выражение: *точка B лежит между точками A и C* и широко пользуется свойствами порядка точек на прямой, которые вполне наглядны, но никак не вытекают из аксиом. Полный анализ этого вопроса был проделан лишь в XIX веке Пашем, который включил термин *точка B лежит между точками A и C* в число основных (неопределяемых) понятий евклидовой геометрии и дополнил евклидову аксиоматику несколькими *аксиомами порядка.* Приведу лишь одну из них, которая называется *аксиомой Паша*: "Если прямая не проходит ни через одну из вершин треугольника, но пересекает одну из его сторон, то эта прямая пересекает еще одну из двух оставшихся сторон этого треугольника" (см. рисунок).

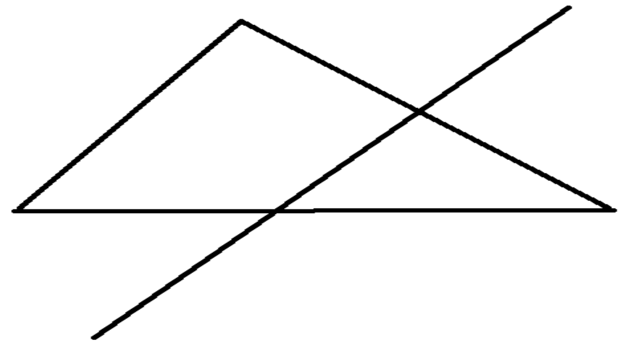

Рис. 1. Аксиома Паша

Многие другие дополнения аксиоматики Евклида были сделаны в эпоху возрождения, начиная с XVII века и позже, когда у европейцев пробудился интерес ко всему античному наследству, и в частности к древнегреческой геометрии. Нелишне отметить, что значительная часть античного наследства досталась нам через арабов. В частности, "Начала" были переведены на современные европейские языки с арабского. В отличие от Европы, пережившей "эпоху мрачного средневековья", наука и культура арабского востока развивались более равномерно.

После этого предисловия перейдем к обсуждению V постулата Евклида. Чтобы не делать многочисленных оговорок, условимся, что в дальнейшем мы говорим лишь о планиметрии, т. е. геометрии на плоскости. Пятый постулат гласит:

"И всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых."

Приводимый ниже рисунок иллюстрирует пятый постулат.

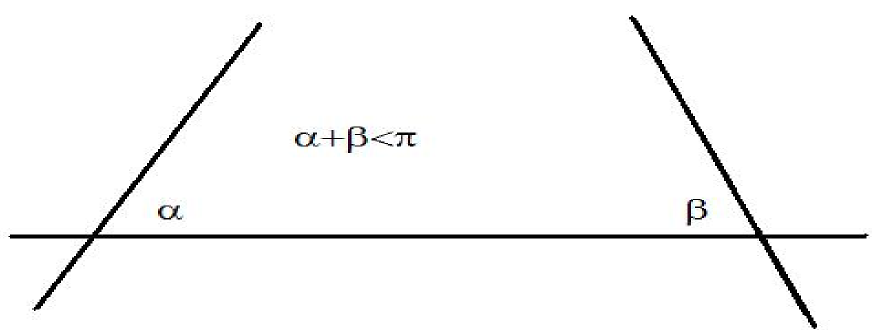

Рис. 2. Иллюстрация к пятому постулату Евклида

В современных школьных учебниках вместо пятого постулата обычно приводится эквивалентная ему *аксиома параллельности*:

"Если точка p не принадлежит прямой L, то существует не более одной прямой, проходящей через p и не пересекающей L."

Подчеркну, что в этой аксиоме речь не идет о существовании прямой, проходящей через данную точку и паралельной данной прямой. Существование такой прямой легко доказывается без использования аксиомы параллельности. Эта аксиома утверждает лишь ЕДИНСТВЕННОСТЬ такой прямой.

Разумеется, Евклид прекрасно понимал, что пятый постулат является наименее очевидной из его аксиом. Об этом говорит тот факт, что пятый постулат приводится в "Началах" последним, причем после того, как уже доказано значительное количество теорем.

Нельзя ли исключить пятый постулат из списка аксиом, т. е. доказать его, исходя из остальных аксиом Евклида? Этот вопрос задавали себе некоторые современники Евклида, а начиная с конца XVII века вплоть до 1829 года (год опубликования статьи "О началах геометрии" Лобачевского) он оставался главным вопросом геометрии. Многие профессинальные математики (не считая бессчетного числа любителей) искренне считали, что сумели доказать пятый постулат. Как обычно в трудных случаях, математики доказывали от противного: предположим, что через некоторую точку проходят две различные прямые, не пересекающие данную прямую; и попытаемся получить противоречие. Проведя некоторые рассуждения, порой довольно длинные, многие приходили к очень необычайным выводам, которые могут показаться противоречием. Дело в том, что, кроме упомянутой выше аксиомы параллельности, пятый постулат эквивалентен многим другим утверждениям. Вот самый краткий список утверждений, эквивалентных пятому постулату:

Сумма внутренних углов любого треугольника равна двум прямым ($=\pi$).

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

Существует треугольник сколь угодно большой площади.

Существуют два подобных, но не равных треугольника.

Примерно к 1820 году в умах трех математиков постепенно (с разным количеством сомнений) сформировалась мысль: приняв в качестве аксиомы противоположное пятому постулату утверждение (существует точка, через которую проходят две различные прямые, не пересекающие данную прямую) и оставив неизменными остальные аксиомы Евклида, мы придем к некоторой новой непротиворечивой аксиоматической теории. Вот имена этих математиков: Карл Фридрих Гаусс в Германии, Николай Иванович Лобачевский в России и Янош Больяи в Венгрии (используются и другие написания его фамилии: Бойяи или Бояи). Придя к этой мысли, дальнейшая работа не представляет большого труда: надо пересмотреть все предшествующие попытки доказательства пятого постулата не как поиски противоречия, а как теоремы новой теории. Некоторые такие попытки были опубликованы (Саккери, Ламберт, Лежандр), другие были известны в качестве математического фольклора. После этой систематизационной работы, привыкнув к необычности новой геометрии, следовало продолжать ее систематическое развитие.

Первый публичный доклад о новой теории Лобачевский сделал в 1826 году, а 1829 году была опубликована его статья "О началах геометрии". Работа Яноша Больяи была опублкована в 1832 году в качестве приложения к учебнику по геометрии, написанному его отцом Фаркашем Больяи. Лобачевский эту теорию называл *воображаемой геометрией.* Гаусс использовал термин *неевклидова геометрия.* Сейчас в России принято название *геометрия Лобачевского*, а на Западе — *гиперболическая геометрия.*

Даже по российским меркам Николай Иванович Лобачевский был провинциальным математиком. Бóльшую часть своей жизни он прожил в Казани, закончил Казанский университет, долгое время был ректором этого университета, сделав многое для его развития. Следует сказать, что открытие Лобачевского не встретило понимания современников. Ведущие российские математики обошли его первые публикации молчанием, а позже даже стали позволять себе насмешки над новой геометрией. Положение Лобачевского было непростым, однако он продолжал развитие *воображаемой геометрии* и опубликовал несколько новых статей и более развернутых изложений новой теории в "Вестнике Казанского университета". Ситуация несколько улучшилась в 1840 году, когда по рекомендации Гаусса Лобачевский был избран почетным членом Геттингенгского королевского общества. Причем в рекомендации Гаусса было недвусмысленно сказано: за создание неевклидовой геометрии. С Гауссом не поспоришь, он уже при жизни носил поуофициальный титул "короля математиков".

Янош Больяи был математиком-любителем, по профессии он был военным инженером. Но математику он знал очень хорошо благодаря своему отцу, учителю математики в провинциальном венгерском городе. Его отец Фаркаш Больяи учился в Геттингенском университете в те же годы, что и Гаусс. Он и Гаусс изредка обменивались письмами. Не дождавшись никаких официальных отзывов на первую публикацию Яноша по новой теории параллельных, отец и сын послали рукопись Гауссу. В ответном письме Фаркашу Гаусс написал: "Ваш сын — великий математик. Он получил часть моих результатов." Отец счел этот отзыв комплиментом, а сын — оскорблением. После этого Янош опубликовал лишь одну небольшую статью на эту тему, а затем прекратил заниматься математикой.

В этой истории самой загадочной выглядит позиция Гаусса, который при жизни не опубликовал ни одной работы по неевклидовой геометрии, а также избегал публичных высказываний о работах Лобачевского и Больяи. Лишь после смерти Гаусса в его архиве были найдены рукописи, из которых ясно, что он овладел неевклидовой геометрией не позднее 1816 года (на 10 лет раньше Лобачевского) и продолжал ее систематически развивать вплоть до своей смерти в 1855 году. Во многих направлениях этой новой геометрии Гаусс продвинулся гораздо дальше Лобачевского.

Почему же Гаусс не публиковал своих результатов по неевклидовой геометрии? Его странная сдержанность обычно объясняется опасениями встретить непонимание современников. Но есть и другая точка зрения. Гаусс, как и большинство образованных европейцев того времени, разделял философское мировоззрение Канта, согласно которому понятие о пространстве и времени являются врожденными качествами человека. Следовательно, не может быть двух разных геометрий. Поэтому, с одной стороны, Гаусс долгое время сомневался в своих математических результатах, неоднократно возвращаясь к проверке безупречности доказательств. А с другой стороны, Гаусс стал понемногу менять свое философское мировоззрение, что для немолодого человека всегда является внутренней драмой. Известно также, что Гаусс участвовал в геодезических экспедициях, измеряя углы больших треугольников. Он также ставил перед астрономами задачу измерения углов треугольнков, вершины которых образованы тремя космическими телами (трудности таких измерений не преодолены и сейчас).

Гаусс обладал изумительной способностью совмещать прикладную направленность многих из рассматримаемых им задач с глубокими математическими идеями, возникающими при решении этих задач. В 1827 году Гаусс опубликовал свои знаменитые "Общие исследования относительно кривых поверхностей" (Сейчас это называется дифференциальной геометрией поверхностей и составляет основное содержание нашего курса). По словам Гаусса, это исследование возникло из его размышлений о практических задачах геодезии, которые он хорошо знал. Но несомненно, была и другая причина, о которой Гаусс умалчивает, побудившая его начать эти исследования (это — не только мое мнение, большинство геометров его разделяют). Этой причиной был интерес Гаусса к неевклидовой геометрии. Остановимся на этом подробнее.

Конечно, Гаусс прекрасно знал *сферическую геометрию.* (Эта дисциплина изучает соотношения между длинами сторон и углами треугольников, образованных на сфере дугами геодезических. Выражаясь современным языком, сферическая геометрия есть внутренняя геометрия сферы. Любое утверждение сферической геометрии эквивалентно некоторому утверждению евклидовой стереометрии о плоских и двугранных углах многогранных углов.) Хорошо известно, что сумма внутренних углов сферического треугольника всегда больше π. Точнее, если α, β, γ -внутренние углы сферического треугольника, то

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\frac{S}{R^2}, \tag{1}$$

где S — площадь треугольника и R — радиус сферы. Выражение в левой части этого равенства называется *дефектом* треугольника. С другой стороны, развивая созданную им неевклидову геометрию, Гаусс обнаружил, что в этой геометрии выполняется противоположное равенство

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=-\frac{S}{R^2}, \tag{2}$$

где R — некоторая универсальная положительная постоянная. Это — важное наблюдение Гаусса, которого не заметил Лобачевский (хотя он прекрасно знал что в его воображаемой геометрии сумма внутренних углов треугольника всегда меньше π). Обратим внимание, что эти две формулы переходят друг в друга при формальной замене $R \to iR$. Эта аналогия между сферической геометрией и геометрией Лобачевского прослеживается и в других тригонометрических формулах. Поэтому геометрию Лобачевского часто называют геометрией на сфере мнимого радиуса. Отметим также, что формула (2) влечет неравенство $S<\pi R^2$, т. е. площади всех треугольников на плоскости Лобачевского ограничены сверху некоторой универсальной постоянной; об этом уже упоминалось выше.

Напомню, что в каждой точке поверхности, лежащей в трехмерном евклидовом пространстве, определены *главные кривизны* k_1 и k_2. Их произведение $K=k_1k_2$ Гаусс называет *полной кривизной* (сейчас чаще используется название *гауссова кривизна* для K). Главным результатом "Исследований" Гаусса является утверждение: "Полная кривизна поверхности является объектом внутренней геометрии, т. е. выражается через коэффициенты первой квадратичной формы". Этот результат произвел сильное впечатление на современников Гаусса (да и сейчас не оставляет равнодушным). Сам Гаусс назвал это утверждение *замечательной теоремой* (Theorema Egrigium по латыни; в то время Гаусс еще писал свои основные работы на латинском, хотя многие его современники уже перешли на национальные языки).

Думается, Гаусс немного лукавил при этом. Что-то подобное он имел ввиду, еще не начиная своих "Исследований". Действительно, формулу (1) можно переписать в виде

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=KS, \tag{3}$$

где $K=1/R^2$ — гауссова кривизна сферы. С другой стороны, если обозначить $K=-1/R^2$, то формула (2) тоже совпадет с (3). Это приводит к мысли: неевклидова геометрия имеет много общего с внутренней геометрией поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны. По мнению большинства геометров, именно это соображение было основной причиной, побудившей Гаусса начать “Общие исследования относительно кривых поверхностей”.

Таким образом, Гаусс вплотную подошел к тому, что мы сейчас называем *моделью плоскости Лобачевского, построенной в рамках евклидовой геометрии.* Такой моделью, по крайней мере локальной, должна служить поверхность постоянной отрицательной кривизны. Как мы знаем, простейшей из таких поверхностей является *псевдосфера*, полученная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (см. рисунок ниже). Сейчас известно много примеров поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

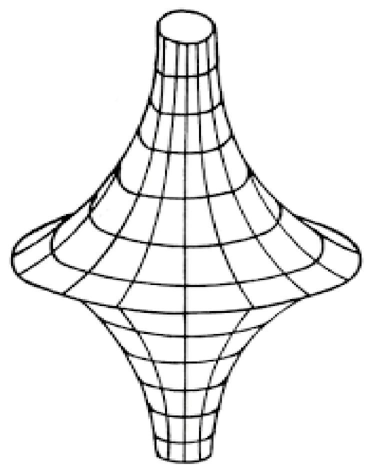

Рис. 3. Псевдосфера

Неизвестно, пытался ли Гаусс найти поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны; в его архивах не найдено следов таких попыток. Возможно, Гаусс не обратил внимания на маленькую заметку Миндинга, опубликованную в 1840 году, в которой был приведен первый пример такой поверхности. Справедливости ради надо сказать, что интересы Гаусса к тому времени сильно изменились. Начиная приблизительно с 1835 года, Гаусс преимущественно занимался вопросами математической физики (вспомним формулу Гаусса – Остроградского) и прикладными задачами.

Программа Гаусса была в определенной степени завершена Бельтрами, опубликовавшем в 1868 году большую статью “Опыт интерпретации неевклидовой геометрии”, в которой он явно формулирует и доказывает, что достаточно малый кусок любой поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны изометричен некоторой области плоскости Лобачевского (я позволил себе сформулировать это утверждение в современных терминах, Бельтрами пользуется другой терминологией). Но история пятого постулата на этом не заканчивается.

Подчеркнем, что псевдосфера дает лишь локальную модель геометрии Лобачевского. Глобальные свойства псевдосферы и плоскости Лобачевского сильно различаются. Например, на псевдосфере есть замкнутые кривые, которые нельзя стянуть в точку, не выходя за пределы псевдосферы (выражаясь современным языком: псевдосфера не односвязна), на плоскости Лобачевского таких замкнутых кривых нет. В этом смысле псевдосфера так же относится к плоскости Лобачевского, как круговой цилиндр относится к евклидовой плоскости в одной из наших домашних задач. Но это еще пол-беды. Обратите внимание, что у псевдосферы имеется ребро, состоящее из особых точек (самая широкая параллель). Подобными особенностями обладают и другие известные поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Видимо, Гильберт первый задался вопросом: существует ли поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны, дающая глобальную модель геометрии Лобачевского, и в 1903 году опубликовал статью "О поверхностях постоянной гауссовой кривизны", в которой доказал, что таких поверхностей не существует. Эта сравнительно небольшая, но пионерская работа Гильберта, дает в частности, первое геометрическое применение так называемому *Sine-Gordon* уравнению $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = \sin\varphi$, которое сейчас очень популярно в квантовой механике. Отметим также, что московский математик Н.В. Ефимов в 1963 году значительно обобщил теорему Гильберта, доказав несуществование полной поверхности, гауссова кривизна которой удовлетворяет $K \le K_0$ с любой отрицательной постоянной K_0.

Итак, геометрию Лобачевского нельзя реализовать глобально на поверхности, лежащей в трехмерном евклидовом пространстве. Тем не менее, существуют несложные глобальные модели плоскости Лобачевского. Первую такую модель нашел Ф. Клейн (1870), используя аппарат проективной геометрии. На наших занятиях мы познакомились с моделью Пуанкаре (1882), которая во многих отношениях является самой простой. Сейчас известно и много других моделей плоскости Лобачевского (а также пространства Лобачевского произвольной размерности).

Лобачевский верил в непротиворечивость созданной им *воображаемой геометрии.* Его вера основывалась на многочисленных результатах, не противоречащих друг другу и в совокупности дающих цельную картину. Но доказал ли Лобачевский непротиворечивость этой теории? Строго говоря, нет. Действительно, допустим, что доказав 1000 теорем этой аксиоматической теории и не встретив противоречий, мы решили остановиться (когда-то надо остановиться). А где гарантия, что противоречие не появится на 1001-м шаге? Математик должен считаться с любой, даже чисто гипотетической возможностью.

Гаусс гораздо более критически относился к *неевклидовой геометрии*, по крайней мере в первые годы работы над ней. Как я постарался показать, Гаусс на протяжении значительной части своей жизни упорно продвигался к доказательству непротиворечивости новой теории, но так и не достиг этой цели. Что ему помешало? Скорее всего, математика в целом еще не созрела до таких метаматематических понятий, как моделирование одной аксиоматической теории средствами другой. Эти понятия появились позже, в значительной степени благодаря работам Гаусса.

Так что, строго говоря, непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана Клейном в 1870 г., построившим первую глобальную модель плоскости Лобачевского. Но и здесь есть одна оговорка, которую я сделаю чуть позже.

Принято считать, что история пятого постулата Евклида завершается книгой Давида Гильберта "Основания геометрии" (1898), хотя в ней обсуждается также немало вопросов, далеких от пятого постулата. При жизни Гильберта книга выдержала 7 изданий, причем в каждое новое издание Гильберт вносил изменения и поправки. Поэтому нелишне сказать, что приводимые далее комментарии относятся к 7-му изданию 1930 года.

Во-первых, в книге Гильберта наконец-то приведена полная система аксиом евклидовой геометрии (такие попытки предпринимались и ранее (Паш, Пеано, Пиери), но их нельзя признать удачными). Все аксиомы у Гильберта разбиты на пять групп:

Группа I содержит восемь *аксиом соединения (принадлежности)*,

группа II содержит четыре *аксиомы порядка*,

группа III содержит пять *аксиом конгруэнтности*,

группа IV состоит из одной *аксиомы параллельности*, группа V состоит из двух *аксиом непрерывности.*

Итого в списке Гильберта имеется 20 аксиом (против девяти аксиом и пяти постулатов у Евклида). Это деление на пять групп представляется очень естественным и делает логическую структуру геометрии совершенно прозрачной. В отличие от Евклида, Гильберт не приводит определений основных понятий. Более того, на первой же странице Гильберт подчеркивает, что "точка", "прямая" и "плоскость" являются неопределяемыми объектами также, как и соотношения "принадлежать", "лежать между", "конгруэнтный" между этими объектами. При этом Гильберт добавляет: "Точное и для математических целей полное описание этих понятий достигается аксиомами".

Не вижу большого смысла комментировать аксиомы принадлежности и конгруэнтности. Каждая из этих аксиом, взятая сама по себе, является утверждением, хорошо нам знакомым по школьному курсу (через любые две различные точки проходит единственная прямая; если два отрезка конгруэнты третьему, то они конгруэнтны друг другу; и т. д.). Аксиомы порядка заимствованы у Паша, но при этом сделаны значительные упрощения. Впрочем, аксиома Пвша, о которой говорилось выше, оставлена без изменений.

Совокупность аксиом первых трех групп уже является некоторой аксиоматической теорией, логический анализ которой оказался непростым даже для Гильберта. Так, в первом издании книги была одна лишняя аксиома порядка и одна лишняя аксиома конгруэнтности, на что Гильберту указали Мур и Розенталь соответственно. Эти аксиомы превратились в теоремы в последующих изданиях. Еще две аксиомы были заменены более слабыми утверждениями.

Аксиома параллельности приведена у Гильберта в той же форме, как мы процитировали выше. Как мы знаем, она эквивалентна пятому постулату Евклида.

Наконец, последняя группа *аксиом непрерывности* состоит из аксиомы Архимеда, приведенной выше, и *аксиомы полноты*, которую Гильберт формулирует в следующей форме:

"Точки любой прямой образуют систему, не допускающую расширения, т. е. к этой системе нельзя добавить новые точки так, чтобы расширенная система снова удовлетворяла всем приведенным ранее аксиомам, включая аксиому Архимеда."

В более современных терминах эту аксиому можно сформулировать так: существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок, между иножеством точек любой прямой и множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел. Впрочем, Гильберт сознательно избегает использования термина "множество", т. е. прямая не обязательно является множеством принадлежащих ей точек.

Роль аксиомы полноты можно проиллюстрировать на следующем факте. Пусть окружность Ω и прямая l таковы, что на l имеются точки, являющиеся внутренними для Ω (определение внутренних точек окружности легко формулируется, даже не прибегая к понятию расстояния). Исходя из наглядных представлений, мы обычно заключаем (и Евклид вместе с нами), что окружность Ω и прямая l имеют две общие точки (см. рисунок ниже). Однако, это заключение становится неверным, если отбросить аксиому полноты.

Любопытно отметить, что аксиома полноты отсутствовала в первом издании книги, на что Гильберту указал Пуанкаре.

Во второй главе Гильберт приступает к исследованию непротиворечивости и взаимной независимости аксиом своей системы. При этом он (в отличие от Гаусса) свободно владеет таким важным метаматематическим понятием как *модель одной аксиоматической теории, построенной в рамках другой теории*, хотя сам термин “модель” в книге Гильберта не используется. Фактически это понятие относится к математической логике. Для доказательства непротиворечивости той или иной системы аксиом Гильберт строит ее модель в рамках арифметики (т. е. теории действительных чисел). Для доказательства независимости той или иной аксиомы от остальных Гильберт строит модель, в которой справедливы все аксиомы системы за исключением выделенной, а последняя не верна. Подчеркнем, что при этом все аксиомы моделируемой системы становятся теоремами, т. е. их надо доказывать.

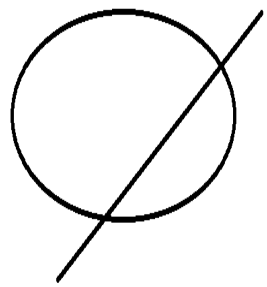

Рис. 4. Такие окружность и прямая могут не иметь общих точек при отсутствии аксиомы полноты.

Простейшая модель всей системы аксиом Гильберта сейчас общеизвестна. Это — арифметическое простанство $\mathbb{R}^3$, снабженное скалярным произведением. Точки — это элементы этого пространства, прямые и плоскости определяются линейными уравнениями. Все аксиомы Гильберта легко доказываются в этой модели посредством рассуждений, привычных нам из аналитической геометрии. Интересно, что об этой модели Гильберт упоминает очень кратко в конце первого параграфа второй главы. В книге принята сквозная нумерация параграфов, так что первый параграф второй главы есть §9. Будем и мы придерживаться этой нумерации.

Основная часть 9-го параграфа посвящена построению модели, в которой справедливы все аксиомы, кроме аксиомы полноты. Тем самым доказывется независимость аксиомы полноты от остальных аксиом. Эта модель строится путем использования вместо $\mathbb{R}$ минимального подполя $F \subset \mathbb{R}$, содержащего поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и замкнутого относительно операции $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ (такие поля сейчас называются квадратичными расширениями поля $\mathbb{Q}$). Доказательство многих аксиом при этом значительно усложняется, но Гильберт с этим справляется.

Независимость аксиомы параллельности от других аксиом, т. е. непротиворечивость геометрии Лобачевского, Гильберт обсуждает очень кратко в начале §10, ссылаясь на проективную модель Клейна. Видимо, Гильберт считает, что этот факт уже общеизвестен. Отметим, что вместо привычного нам термина “проективное преобразование” Гильберт использует “линейное преобразование”, что может вызвать недоумение современного читателя. Основная часть §10 посвящена обсуждению теорем, которые можно доказать без применения аксиомы параллельности; т. е. теорем, справедливых как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Сейчас этот раздел называется *абсолютной геометрией.*

§11 посвящен исследованию важного вопроса, обуждавшегося предшественниками Гильберта. Многие критики Евклида отмечали, что три известные признака равенства треугольников не могут быть выведены из аксиом Евклида, один из них должен быть включен в число аксиом. В списке Гильберта последняя аксиома конгруэнтности почти совпадает со вторым признаком равенства треугольников (по стороне и двум примыкающим к ней углам). Точнее, эта аксиома утверждает: Если треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$, угол BAC конгруэнтен углу $B'A'C'$ и угол ABC конгруэнтен углу $A'B'C'$, то угол ACB конгруэнтен углу $A'C'B'$. Как видите, это утверждение слабее второго признака равенства треугольников. Но второй признак равенства треугольников немедленно выводится из этой аксиомы (разумеется, с использованием и других аксиом). Гильберт доказывает независимость последней из аксиом конгруэнтности от остальных аксиом, строя соответствующую модель. При этом он использует совершенно элементарный, но остроумный прием, основанный на искажении стандартной евклидовой метрики посредством подходяще подобранного аффинного преобразования пространства $\mathbb{R}^3$. Не знаю, был ли этот трюк известен до Гильберта.

Последний параграф второй главы посвящен роли аксиомы Архимеда как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. В обоих случаях аксиома Архимеда не зависит от остальных аксиом. Отказавшись от нее, мы попадаем в *неархимедову геометрию Евклида* или в *неархимедову геометрию Лобачевского*. Напомню, что в евклидовой геометрии сумма внутренних углов любого треугольника равна π, а в геометрии Лобачевского эта сумма всегда меньше π. В неархимедовой геометрии вполне может случиться, что сумма внутренних углов любого треугольника больше π. В этом состоит специфика и основной интерес неархимедовой геометрии.

Не буду подробно комментировать содержание последних пяти глав книги Гильберта. Отмечу лишь, что они по большей части посвящены геометрии, основанной на всех аксиомах списка Гильберта за исключением аксиомы полноты. В математике нет специального названия для этой геометрии. По-моему, ее вполне можно назвать *геометрией Гильберта* (второе возможное название “неполная евклидова геометрия” звучит несколько двусмысленно). В определенной степени геометрия Гильберта более элементарна и конструктивна, чем евклидова геометрия. Хочу также обратить ваше внимание на последнюю главу книги, в которой обсуждаются задачи на построение. Ввиду отмеченной на Рис. 4 особенности геометрии Гильберта, циркуль здесь бесполезен. Поэтому Гильберт обсуждает *построения с помощью линейки и эталона длины.*

В заключение обсудим важный вопрос, который Гильберт неоднократно поднимал в нескольких своих статьях и выступлениях. Для этого вернемся к утверждению, приведенному на стр. 8: “Геометрия Лобачевского непротиворечива в силу модели Клейна (или модели Пуанкаре)”. Как отмечает Гильберт, на самом деле справедливо лишь более скромное утверждение: “Геометрия Лобачевского непротиворечива, если евклидова геометрия непротиворечива”, поскольку все известные модели геометрии Лобачевского строятся в рамках евклидовой геометрии. А почему мы уверены в непротиворечивости евклидовой геометрии? На этот вопрос есть точный ответ: “Евклидова геометрия непротиворечива, если арифметика (теория действительных чисел) непротиворечива” в силу модели евклидовой геометрии, даваемой арифметическим пространством $\mathbb{R}^3$. В свою очередь, арифметика строится средствами теории множеств, поэтому “Арифметика непротиворечива, если теория множеств непротиворечива” Подчеркнув относительный характер всех этих утверждений, Гильберт затем восклицает: “Но мы ведь знаем, что теория множеств полна противоречиями!” Напомню, что на рубеже XIX и XX веков, после первых успехов теории множеств были открыты известные парадоксы этой теории (такие, как парадокс Рассела), смутившие многих математиков.

В связи с этим Гильберт выдвигает две большие программы. Первая состоит в создании непротиворечивой теории множеств. Эта задача в настоящее время может считаться решенной: аксиоматическая теория множеств Цермело – Френкеля свободна от классических парадоксов. Но и здесь ситуация оказалась сложнее, чем представлялась Гильберту. Оказалось, что известная *гипотеза континуума* независима от остальных аксиом этой теории. Так что существуют по крайней мере две различные теории множеств.

Вторая большая программа, выдвинутая Гильбертом, состоит в следующем. Гильберт говорит: "Нельзя до бесконечности сводить вопрос о непротиворечивости одной аксиоматической теории к тому же вопросу о другой теории, строя модель первой теории в рамках второй. Тем самым мы лишь подменяем одну проблему другой, быть может более сложной." Поэтому Гильберт ставит вопрос о *внутреннем доказательстве непротиворечивости аксиоматических теорий* и намечает возможный подход. Насколько мне известно, эта программа Гильберта не реализована и поныне. Впрочем, здесь мы уже выходим за рамки моих скромных знаний математической логики.

В этом небольшом очерке я не касался важного вопроса о связи геометрии с физикой. Лобачевский и Гаусс задумывались над этим вопросом, а Гильберт неоднократно и многосторонне его обсуждал. Гильберт хорошо знал современную ему квантовую механику. В одном из своих выступлений он говорит (ради краткости я здесь изменил форму высказывания; надеюсь, что при этом не исказил смысла): "Вряд ли наши непрерывные геометрии годятся для адекватного описания микромира. Известно, что физические тела могут обмениваться лишь дискретными квантами энергии". С другой стороны, Гильберт затрагивает вопрос о геометрии, в которой физика нуждается для исследования мира в астрономических масштабах. Открытие Эйнштейном *специальной теории относительности* показало, что пространство и время неразделимы и ввело в математический обиход четырехмерную *геометрию Минковского.* Второе гениальное открытие Эйнштейна, *общая теория относительности*, привело к необходимости включить *лоренцевы многообразия* в число необходимых для физики геометрий. Гильберт хорошо знал обе теории Эйнштейна. Буквально вчера, перечитывая одну из статей Гильберта, я обнаружил, что он также обсуждает гипотезу о *конечности Вселенной.* Сейчас большинство астрофизиков сходятся во мнении, что возраст Вселенной составляет приблизительно 14.5 миллиардов лет, она отнюдь не бесконечна и ее геометрия в окрестности черных дыр далека от геометрии Минковского.

Надеюсь, этот небольшой рассказ будет вам интересен и, возможно, вы захотите немного почитать "Начала" Евклида, хотя бы для того, чтобы убедиться, что в этой книге речь идет о предмете, знакомом вам по школьному курсу геометрии. Возможно, некоторые из вас заглянут также в "Основания геометрии" Гильберта. Обе эти книги есть в университетской библиотеке и доступны "задаром" в интернете.

19.04.2020
Ваш ВАШ