Министерство образования и науки
Российской федерации
Федеральное агентство по образованию

Новосибирский государственный университет

Механико-математический факультет
Кафедра дискретной математики и информатики

Дипломная работа

ДРОБЫШЕВИЧ Сергей Андреевич

Разрешимость логики N*

Научный руководитель:

д.ф.-м.н.
С.П. Одинцов

Новосибирск, 2010

Реферат

Разрешимость логики N^*, 27 страниц, 1 таблица, 7 источников литературы.

Ключевые слова: разрешимость, отрицание как модальность, семантика Раутли, табличное исчисление, гибридное исчисление, фильтрация.

Работа посвящена доказательству разрешимости логики N^*. Было построено гибридное исчисление, основанное на методе табличных исчислений, и доказаны полнота и корректность построенного исчисления. Также доказательство было проведено методом фильтраций.

Содержание

1 Введение

Целью данной работы является доказательство разрешимости логики N^*. Разрешимость является одним из важнейших свойств логик, которое можно сформулировать как существование алгоритма, позволяющего за конечное число шагов определить по формуле, принадлежит она логике или нет.

Логика N^* была введена в [1] в качестве базы для изучения фундированной семантики логических программ с отрицанием и представляет собой логику, в которой позитивные связки определены как в интуиционистской логике, а отрицание представляет собой частный случай модального оператора невозможности и семантически интерпретируется при помощи оператора Раутли.

Несмотря на видимую простоту, при работе с логикой N^* возникают сложности при попытках применения некоторых стандартных методов доказательств свойств логик. Первоначальные попытки доказательства разрешимости логики при помощи метода фильтрации были неуспешны, поэтому вместо метода фильтрации была использована адаптация метода табличных исчислений, суть которого заключается в построении алгоритма, пытающегося опровергнуть исходную формулу за конечное число шагов. Построенное исчисление является гибридным, поскольку в записи формул данного исчисления присутствуют элементы семантики логики: мы будем рассматривать помеченные формулы вида $+A(x)$ и $-A(x)$, условно означающие, что формула верифицируется или, соответственно, не верифицируется в мире x некоторой модели N^*.

Построенное исчисление основано на исчислении Дыкхова для интуиционистской логики. Как известно, стандартное табличное исчисление для интуиционистской логики включает в себя механизм обнаружения циклов. Идея Дыкхова заключалась в том, чтобы рассматривать отдельно частные случаи вхождения импликации в формулы, что позволяло избавиться от упомянутого механизма [2].

Построенное исчисление дало представление о том, как адаптировать для логики метод фильтрации, и позднее разрешимость была доказана и этим методом.

2 Логика N*

Напомним основные факты и определения, касающиеся логики N^*. Изложение будет следовать статье [7]. Логика N^* является расширением логики N, представленной Дошеном в [3] (см. также [4]). Целью Дошена было изучение логики слабее минимальной логики Йохансона. Формулы N строятся стандартным образом при помощи пропозициональных переменных из множества $Prop$ и логических связок (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и импликация).

Список аксиом включает в себя аксиомы позитивной логики

$$
\begin{array}{llll}
P1. & p \to (q \to p) & P2. & (p \wedge q) \to p \\
P3. & (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) & P4. & (p \wedge q) \to q \\
P5. & (p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r)) & P6. & p \to (p \vee q) \\
P7. & (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) & P8. & q \to (p \vee q)
\end{array}
$$

вместе с единственной аксиомой для отрицания

$$N1.\ \ \neg p \wedge \neg q \to \neg(p \vee q).$$

Правила вывода логики N modus ponens и правило контрапозиции для отрицания:

$$\frac{A, A \to B}{B} \qquad\qquad \frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}.$$

Под логикой будем подразумевать множество формул, замкнутое относительно правила подстановки и modus ponens. Будет говорить, что логика нормальна, если она дополнительно замкнута относительно правила контрапозиции. Можем считать N нормальной логикой, отождествляя её с множеством её теорем. Для логики Δ обозначим $NExt\Delta$ множество её нормальных расширений, то есть таких нормальных логик Δ', что $\Delta \subseteq \Delta'$.

Предложение 1. *Все логики $\Delta \in NExtN$ замкнуты относительно правила замены:*

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\gamma(A) \leftrightarrow \gamma(B)}.$$

Доказательство. Это утверждение доказывается стандартным образом, используя аксиомы позитивной логики и правило контрапозиции для отрицания. $\square$

Введём семантику логики N.

Определение 1. *$\mathcal{W} = \langle W, \leq, R\rangle$ — N-фрейм, если:*

1. *W — непустое множество возможных миров;*
2. *$\leq$ — частичный порядок на W;*
3. *$R \subseteq W^2$ — отношение достижимости между мирами такое, что $\leq R \subseteq R$.*

N-модель $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ есть N-фрейм $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R\rangle$ вместе с означиванием $v : Prop \to 2^W$, удволетворяющим условию монотонности:

$$x \in v(p) \text{ и } x \leq y \Rightarrow y \in v(p). \tag{1}$$

Определение 2. *Пусть $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ — N-модель и $x \in W$, тогда индуктивно определим отношение выполнимости формул на мирах модели μ:*

- $\mu, x \models p \iff x \in v(p)$
- $\mu, x \models A \wedge B \iff \mu, x \models A$ *и* $\mu, x \models B$
- $\mu, x \models A \vee B \iff \mu, x \models A$ *или* $\mu, x \models B$
- $\mu, x \models A \to B \iff \forall y \geq x\ (\mu, y \models A \Rightarrow \mu, y \models B)$
- $\mu, x \models \neg A \iff \forall y (xRy \Rightarrow \mu, y \not\models A)$

Введём некоторые обозначения. Там, где по контексту будет ясно, о какой модели идёт речь, будем писать $x \models A$ вместо $\mu, x \models A$. Будем говорить, что формула A выполняется на N-модели $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ и обозначать это $\mu \models A$, если для каждого $x \in W$ выполнено $\mu, x \models A$. Аналогично, будем говорить, что формула A выполняется на N-фрейме $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R\rangle$ и обозначать это $\mathcal{W} \models A$, если для любой N-модели $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$ выполнено $\mu \models A$.

Условие (1) распространяется на случай произвольной формулы:

$$\mu, x \vDash A \text{ и } x \leq y \Rightarrow \mu, y \vDash A. \tag{2}$$

Теорема 1. [3] *Логика N полна относительно класса N-фреймов .*

Логика N^* получается из логики N добавлением следующих аксиом:

$N2.\ \neg(p \to p) \to q$

$N3.\ \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$

$N4.\ \neg((p \to p) \to \neg(q \to q))$

Таким образом, из аксиом $N1$, $N3$ и того, что формулы $\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$ являются тавтологиями для N^* (в этом легко убедиться непосредственно), следует, что в логике N^* выполняются оба закона де Моргана. Приведём утверждение, позволяющее выделить класс N-фреймов, удовлетворяющих логике N^*.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R \rangle$ - N-фрейм. Тогда*

1. $\mathcal{W} \models \neg(p \to p) \to q \iff R$ *— сериально (т.е. $\forall x \in W\ \exists y \in W : xRy$);*

2. *Если R — сериально, то $\mathcal{W} \models \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q \iff$ для всякого $x \in W$ множество достижимых из него по отношению R миров направлено, то есть*

$$\forall x, y, z \in W((xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t \in W(xRt \wedge y \leq t \wedge z \leq t)); \tag{3}$$

3. *Если R — сериально, то $\mathcal{W} \models \neg((p \to p) \to \neg(q \to q))$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим модель $\mu =< \mathcal{W}, v >$ такую, что $v(q) = \emptyset$. Учитывая условие выполнимости импликации, условие $\mu \vDash \neg(p \to p) \to q$ эквивалентно условию $x \nvDash \neg(p \to p)$ для всех $x \in W$. То есть для каждого $x \in W$ найдётся $y \in W$ такой, что xRy и $y \vDash p \to p$. Поскольку $p \to p$ тавтология, то первоначальное условие эквивалентно существованию достижимого по отношению R мира для всякого $x \in W$, то есть сериальности отношения R.

2. Пусть выполнено условие (3). Рассмотрим модель $\mu =< \mathcal{W}, v >$ и предположим, что $x \vDash \neg(p \wedge q)$ для какого-то $x \in W$. Тогда $\forall y \in W(xRy \Rightarrow \mu, y \nvDash p \wedge q)$. Пусть

также $x \nvDash \neg p \wedge \neg q$, тогда существуют $y, z \in W$ такие, что xRy, xRz, $y \vDash p$ и $z \vDash q$. По условию (3) найдётся $t \in W$ такой, что xRt, $y \leq t$ и $z \leq t$. Тогда $t \vDash p \wedge q$, что противоречит изначальному предположению. Таким образом, $\mu \vDash \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$. Допустим теперь, что условие (3) не выполнено. Аналогично, найдутся x, y, z в W такие, что xRy и yRz, но не существует t такого, что $y \leq t$, $z \leq t$ и xRt. Рассмотрим модель $\mu =< \mathcal{W}, v >$, где $v(p) = \{w \in W \mid y \leq w\}$ и $v(q) = \{w \in W \mid z \leq w\}$. Заметим, что $v(p) \cap v(q) \cap \{w \in W \mid xRw\} = \emptyset$, значит для любого w условие xRw влечёт $w \nvDash p \wedge q$ и, соответсвенно, $x \vDash \neg(p \wedge q)$. С другой стороны, $x \nvDash \neg p$, так как xRy и $y \in v(p)$ и $x \nvDash \neg q$, так как xRz и $z \in v(q)$. Таким образом, $x \nvDash \neg p \vee \neg q$ и $\mathcal{W} \nvDash \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$.

3. Если R сериально, то формула $\neg(q \to q)$ не выполняется на всех мирах $x \in W$. Тогда $\mu, x \nvDash (p \to p) \to \neg(q \to q)$ и $\mu \vDash \neg((p \to p) \to \neg(q \to q))$.

$\square$

Следствие 1. *Пусть* $\mathcal{W} =< W, \leq, R >$ *— N-фрейм, тогда* $\mathcal{W} \vDash N^* \iff R$ *сериально и удовлетворяет условию (3).*

Таким образом, выделен класс N-фреймов, удовлетворяющих логике N^*. Оказывается, логика N^* полна относительно более узкого класса фреймов, в которых условие направленности заменено условием существование наибольшего среди R-достижимых миров:

$$\forall x \in W\ \exists x^* \in W(xRx^* \wedge \forall y \in W(xRy \Rightarrow y \leq x^*)). \tag{4}$$

Из (2) и (4) следует, что для того, чтобы установить истинность формулы $\neg\phi$ в некотором мире x, необходимо и достаточно показать, что ϕ не верно в наибольшем среди достижимых из x миров. Что, в свою очередь, позволяет определить новую семантику для логики N^*, использующую оператор Раутли $*$ для интерпретации отрицания [5]. Следует заметить также, что несмотря на то, что видимых условий, выделяемых аксиомой $N4$ нет, она является независимой от остальных аксиом логики.

Определение 3. $\mathcal{W} = \langle W, \leq, * \rangle$ - *фрейм Раутли для логики N*, если*

1. *W — непустое множество возможных миров;*

2. *$\leq$ — частичный порядок на W;*

3. *$* : W \to W$ такое, что $x \leq y$ влечёт $y^* \leq x^*$*

Модель Раутли $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ — есть фрейм Раутли $\mathcal{W}$ вместе с означиванием v : $Prop \to 2^W$, удовлетворяющим условию (1).

Отношение выполнимости формул на мирах модели Раутли определяется также как и для логики N, кроме случая отрицания:

$$\mu, x \models \neg A \iff \mu, x^* \not\models A.$$

Лемма 1. *Пусть $\mu =< W, \leq, *, v >$ — модель Раутли, тогда для всякой формулы A и $x, y \in W$ выполняется*

$$\mu, x \vDash A \text{ и } x \leq y \Rightarrow \mu, y \vDash A. \tag{5}$$

Доказательство. Доказательство ведётся индукцией по сложности формулы, достаточно проверить случай отрицания. Пусть $x \vDash \neg A$ и $x \leq y$, тогда $x^* \nvDash A$ и $y^* \leq x^*$. По предположению индукции $y^* \nvDash A$ и значит $y \vDash \neg A$. □

Полнота логики N^* и всех её нормальных расширений может быть получена стандартным методом канонических моделей. Пусть S — нормальное расширение N^*, то есть множество формул, содержащее N^*, и замкнутое относительно правил подстановки, контрапозиции и modus ponens. Мы называем множество формул Γ S-теорией, если оно содержит S и замкнуто относительно modus ponens и называем его простой S-теорией, если оно к тому же нетривиально (не совпадает с множеством всех формул) и удовлетворяет дизъюнктивному свойству:

$$A \vee B \in \Gamma \Rightarrow A \in \Gamma \text{ или } B \in \Gamma. \tag{6}$$

Пусть Σ и Δ — множества формул. Будем писать $\Sigma \vdash_S \Delta$, если для любого набора $A_0, ..., A_n \in \Delta$ дизъюнкция $A_0 \vee ... \vee A_n$ может быть получена из элементов S и Σ по правилу modus ponens.

Стандартным образом доказывается:

Лемма 2. *Для любого нормального расширения S логики N^* и множеств формул Σ и Δ, если $\Sigma \nvdash_S \Delta$, то найдётся простая S-теория $\Gamma \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \nvdash_S \Delta$.*

Определение 4 (Каноническая модель)**.** *Пусть S нормальное расширение N^*. Тогда назовём каноническим S-фреймом тройку $< \mathcal{W}^c, \leq^c, *^c >$, где*

1. *W^c — множество всех простых S-теорий;*

2. *$\Gamma \leq^c \Delta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \subseteq \Delta$;*

3. *$\Gamma^{*^c} := \{a \mid \neg a \notin \Gamma\}$.*

Каноническая S-модель — это канонический S-фрейм вместе с означиванием v^c таким, что

$$\Gamma \in v^c(p) \iff p \in \Gamma.$$

Предложение 3. *Пусть S — нормальное расширение N^*, тогда каноническая S-модель μ^c является моделью Раутли.*

Доказательство. Покажем только, что функция $*$ определена корректно, то есть для всякой простой S-теории Γ множество Γ^{*^c} также является простой S-теорией. Так как $\neg((p \to p) \to \neg(q \to q)) \in \Gamma$, то по определению $(p \to p) \to \neg(q \to q) \notin \Gamma^{*^c}$, таким образом Γ^{*^c} нетривиально.

Если $A \in S$, то $\neg A \notin \Gamma$, иначе Γ тривиально. Действительно, $\phi \leftrightarrow (p \to p) \in S$ и мы можем заменить $p \to p$ на A в аксиоме $N2$. Таким образом, получаем $B \in \Gamma$ для всякой формулы B. Значит $S \subseteq \Gamma^{*^c}$.

Пусть теперь A, $A \to B \in \Gamma^{*^c}$, то есть $\neg A, \neg(A \to B) \notin \Gamma$. По дизъюниктвному свойству для Γ имеем $\neg A \vee \neg(A \to B) \notin \Gamma$ и по закону Де Моргана $\neg(A \wedge (A \to B))$. Формулы $A \wedge (A \to B)$ и $A \wedge B$ эквиваленты в позитивной интуиционистской логике, а значит и в S. Применяя правило замены, получаем, что $\neg(A \wedge B) \notin \Gamma$. Так как $\neg B \to \neg(A \wedge B) \in N^*$, то $\neg B \notin \Gamma$, то есть $B \in \Gamma^{*^c}$. Таким образом, Γ^{*^c} замкнуто относительно modus ponens. Дизъюниктивное свойство для Γ^{*^c} следует из законов Де Моргана. Если $A \vee B \in \Gamma^{*^c}$, то $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$ и выполняется следующая цепочка эквивалентностей:

$$\neg(A \vee B) \notin \Gamma \iff \neg A \wedge \neg B \notin \Gamma \iff \neg A \notin \Gamma \text{ или } \neg B \notin \Gamma.$$

Таким образом, $A \in \Gamma^{*^c}$ или $B \in \Gamma^{*^c}$. □

Лемма 3 (Лемма о канонической модели)**.** *Пусть S — расширение N^*. Тогда в канонической S-модели μ^c для всяких $\Gamma \in W^c$ и формулы A,*

$$\mu^c, \Gamma \vDash A \iff A \in \Gamma.$$

Доказательство. Доказательство ведётся индукцией по сложности формулы A. Если A — пропозициональная переменная, то условие выполняется по определнию v^c. Случай позитивных связок рассматривается точно так же, как для позитивной интуиционистской логики. Рассмотрим случай отрицания. По определнию выполнимости отрицания на мирах $\mu^c, \Gamma \vDash \neg B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma^{*^c} \nvDash B$. По предположению индукции, второе условие эквивалентно тому, что $B \notin \Gamma^{*^c}$, то есть $\neg B \in \Gamma$ по определению Γ^{*^c}. □

Пусть теперь $\nvdash_{N^*} A$, тогда по лемме найдётся простая N^*-теория Γ такая, что $A \notin \Gamma$. Тогда по лемме о канонической модели A не выполняется на мире Γ канонической N^*-модели, а значит она не принадлежит N^*.

Теорема 2. *Для всякой формулы A, $\vdash_{N^*} A$ тогда и только тогда, когда A выполняется в каждой модели Раутли.*

Следствие 2. *Для всякой формулы A имеем:*

$$A \in N^* \iff A \textit{ выполняется на всякой } N^*\textit{-модели.}$$

Перейдём к построению исчисления.

3 Гибридное исчисление для N*

Мы будем показывать, что логика N^* обладает свойством конечных моделей, тогда из конечной аксиоматизируемости логики будет следовать её разрешимость. Напомним, что логика обладает свойством конечных моделей, если она полна относительно класса конечных фреймов. Для доказательства мы будем строить так называемый граф пополнений, каждый шаг построения которого будет являться попыткой опровергнуть данную формулу A. Если алгоритм завершился, но противоречий найдено не было, то по полученному графу пополнений можно построить контрмодель для формулы A. Если же все возможные построения приводят к противоречию, значит формула не может быть опровергнута и, следовательно, принадлежит логике N^*. Интуитивно, граф пополнений имитирует поведение того фрагмента любой контрмодели для формулы A, который непосредственно участвует в опровержении данной формулы.

При построении графа мы будем рассматривать помеченные формулы $+A$ и $-A$, условно означающие, что формула верифицируется, или, соответственно, не верифицируется.

Определение 5. *Введём понятие подформулы:*

- $Sub(p) = p$, *где* $p \in Prop$*;*
- $Sub(A \times B) = \{A \times B\} \cup Sub(A) \cup Sub(B)$, *где* $\times \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$*;*
- $Sub(\neg A) = \{\neg A\} \cup Sub(A)$*;*
- *для множества формул* Γ*:* $Sub(\Gamma) = \bigcup_{A \in \Gamma} Sub(A)$*;*
- *для множества помеченных формул* Γ*:* $Sub(\Gamma) = \{+A, -A \mid A \in Sub(\Gamma')\}$ *, где* Γ' *получается из* Γ *опусканием всех пометок.*

Введём общее понятие отмеченного графа.

Определение 6. *Отмеченным графом назовём граф* $G = \langle V, E \rangle$*, в котором каждая вершина* $x \in V$ *будет помечена множеством формул* $L(x)$*, а каждое ребро имеет метку* $\leq$ *или* $*$*.*

Среди таких графов нас будут интересовать отмеченные графы, построенные при помощи правил, приведённых в Таблице 1.

Правила исчисления будут расширять данный граф пополнений двумя способами: либо расширяя помеченное множество $L(x)$ при некоторой вершине x, либо создавая новые вершины.

Некоторые формулы в правилах расширения помечены знаком $\downarrow$, что означает, что формула пассивна — к таким формулам правила более не применяются. Не пассивные формулы будем называть активными. Будем писать $x \leq y$, если $x = y$ или ребро (x, y) помечено $\leq$. Аналогично, будем писать $x^* = y$, если ребро (x, y) помечено $*$. Если при применении некоторого правила создаётся новая вершина, то такая вершина помечается NB (например, x_{NB}). Введём ряд обозначений:

$G_{\leq}(x) = \{y \mid \exists n \exists z_1, z_2 \ldots z_n : z_1 = x, z_n = y \ \& \ \forall i = 1 \ldots (n-1)(z_i \leq z_{i+1}$ или $z_{i+1} \leq z_i)\}$ — все вершины, достижимые из вершины x по рёбрам помеченным $\leq$;

$(L(x))^+ = \{+C \mid +C \in L(x)\}$;

$(L(x))^\neg = \{\pm C \mid \pm\neg C \in L(x)\}$.

Определение 7. *Графом пополнений для формулы A назовём отмеченный граф , построенный из единственной вершины x_{c0}, помеченной множеством $L(x_{c0}) = \{-A\}$ и $i = 0$, при последовательном применении расширяющих правил со следующими приоритетами:*

(1) Применение правила $(*I)$;

(2) Применение правил $(*\uparrow)$ и $(*\downarrow)$;

(3) Применение правил $(\neg+)$ и $(\neg-)$;

(4) Применение правила (MR);

(5) (a) Применение правил $(\vee+)$, $(\vee-)$, $(\wedge+)$, $(\wedge-)$, $(\to N)$, $(\to \vee)$, $(\to \wedge)$, $(\to \neg a)$, $(\to \neg s)$;

(b) Применение правил $(\to\to a)$,$(\to\to s)$, $(\to -)$;

$$(*\downarrow)\ \frac{x\leq y,\ \exists x^*,\ \nexists y^*}{\exists z_{NB},\ z{=}y^*,\ z\leq x^*}$$

$$(*\uparrow)\ \frac{x\leq y,\ \exists y^*,\ \nexists x^*}{\exists z_{NB},\ z{=}x^*\ y^*\leq z}$$

$$(\neg+)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+\neg C\},\ \exists x^*,\ L(x^*){=}L''}{L(x){:=}L'\cup\{+\neg C\downarrow\},\ L(x^*){:=}L''\cup\{-C\}}$$

$$(\neg-)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{-\neg C\},\ \exists x^*,\ L(x^*){=}L''}{L(x){:=}L'\cup\{-\neg C\downarrow\},\ L(x^*){:=}L''\cup\{+C\}}$$

$$(MR)\ \frac{x\leq y,\ L(x){=}L'\cup\{+C\},\ +C\notin L(y){=}L''}{L(y){:=}L''\cup\{+C\}}$$

$$(\wedge+)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+(C\wedge D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{+C,+D,+(C\wedge D)\downarrow\}}$$

$$(\wedge-)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{-(C\wedge D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{-E,-(C\wedge D)\downarrow\},\ E\in\{C,D\}}$$

$$(\vee+)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+(C\vee D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{+E,+(C\vee D)\downarrow\},\ E\in\{C,D\}}$$

$$(\vee-)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{-(C\vee D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{-C,-D-(C\vee D)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow N)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+C,+(C\rightarrow D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{+C,+D,+(C\rightarrow D)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow\vee)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+((C\vee D)\rightarrow E)\}}{L(x{:}){=}L'\cup\{+(C\rightarrow E),+(D\rightarrow E),+((C\vee D)\rightarrow E)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow\wedge)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+((C\wedge D)\rightarrow E)\}}{L(x){:=}L'\cup\{+(C\rightarrow(D\rightarrow E)),+((C\wedge D)\rightarrow E)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow\neg a)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+(\neg C\rightarrow D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{-\neg C,+(\neg C\rightarrow D)\}}$$

$$(\rightarrow\neg s)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+(\neg C\rightarrow D)\}}{L(x){:=}L'\cup\{+D,+(\neg C\rightarrow D)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow\rightarrow s)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+((C\rightarrow D)\rightarrow E)\}}{L(x){:=}L'\cup\{+E,+((C\rightarrow D)\rightarrow E)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow\rightarrow a)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{+((C\rightarrow D)\rightarrow E)\},\ \nexists y(x\leq y,\ \{+(D\rightarrow E),+C,-D\}\subseteq L(y))}{\exists y\ x\leq y,\ L(y){:=}(L')^{+}\cup\{+(D\rightarrow E),+C,-D,+((C\rightarrow D)\rightarrow E)\downarrow\}}$$

$$(\rightarrow -)\ \frac{L(x){=}L'\cup\{-(C\rightarrow D)\}}{\exists y_{NB},\ x\leq y,\ L(x){:=}L'\cup\{-(C\rightarrow D)\downarrow\},\ L(y){:=}(L(x))^{+}\cup\{+C,-D\}}$$

$$(*I)\ \frac{i\neq 0,\ \exists x\in T_{\leq}(x_{c(i-1)}),\ (L(x))^{\neg}\neq\varnothing}{\exists x_{ci,NB},\ x^*_{c(i-1)}{=}x_{ci}}$$

Таблица 1: Расширяющие правила для построения графа пополнений

Шаг (5) повторяется до тех пор, пока не стало невозможным применение правил обеих категорий (5a) и (5b).

(6) *Полагаем $i = i + 1$ и переходим на шаг (1).*

Расшифровка правил приведена в Таблице 1.

Пояснения к построению:

На i-ой итерации происходит построение подграфа $G_{\leq}(x_{ci})$, то есть все активные формулы в ходе этой итерации содержатся в помеченных множествах вершин этого подграфа. На каждом шаге указанные правила применяются до тех пор, пока их дальнейшее применение не становится невозможным. На первой итерации ($i = 0$) шаги (1)–(4) не применяются. Шаг (5) отвечает за построение вверх интуиционистского подграфа, то есть за раскрытие позитивных связок. Разбиение правила шага (5) на две категории обусловлено тем, что на шаге (5a) применяются только те правила, которые не создают новых вершин. В результате применения шага (5) к подграфу не пассивными в нём остаются только формулы вида $A = \neg B$ и пропозициональные переменные. На шаге (1) строится инициирующая вершина, от которой на шаге (2) достраивается перевёрнутая копия подграфа, полученного на предыдущей итерации. Шаг (3) отвечает за перенос значений негативных формул. Следует отметить, что при этом на шаге (3) может нарушиться условие монотонности. Чтобы исправить это было введено правило монотонности (шаг (4)). На шаге (5) условие интуиционистского наследования сохранятся по построению. Далее процесс повторяется. Алгоритм завершается, если при применении какого-либо правила мы пришли к конфликту, либо если на некотором шаге дальнейшее применение правил стало невозможным.

Заметим, что граф пополнений для формулы A может не быть единственным ввиду наличия правил, применение которых неоднозначно, и различной очерёдности применения правил.

Определение 8. *Будем говорить, что граф пополнений для формулы A содержит конфликт, если существуют вершина x и формула C такие, что $\{+C, -C\} \in L(x)$.*

Предложение 4. *Для любой формулы A любое построение графа пополнений для этой формулы заканчивается за конечное число шагов.*

Доказательство. Для начала докажем, что конечны построения на шаге (5), то есть заканчивается за конечное число шагов применение правил, работающих с позитивными связками. Для этого определим функцию степени для активных формул следующим образом:

- $deg(p) = 1$, где $p \in Prop$;
- $deg(\neg A) = 1$;
- $deg(A \vee B) = deg(A) + deg(B) + 3$
- $deg(A \to B) = (deg(A) + 2)(deg(B) + 2)$;
- $deg(A \wedge B) = (deg(A) + 2)(deg(B) + 2) + 1$;
- $deg(\pm A) = deg(A)$;
- $deg(\Gamma) = \sum_{A \in \Gamma} deg(A)$.

Нетрудно заметить, что при применении всех правил категории (5a), кроме правила $(\to \neg a)$, степень множества активных формул на текущей вершине строго уменьшается. Заметим также, что на текущей вершине правило $(\to \neg a)$ может быть применено к формуле виде $+(\neg C \to D)$ лишь один раз и ни одно из правил категории (5a) не может быть применено к формуле вида $-\neg C$, которая появляется при применении этого правила. Из этих двух замечаний следует, что процесс расширения множества $L(x)$ текущей вершины x на шаге (5a) алгоритма заканчивается.

Рассмотрим правила $(\to\to a)$ и $(\to -)$. Заметим сначала, что оба эти правила работают с формулами вида $\epsilon(B \to C)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$. Причём, при применении этих правил к формулам из множества $L(x)$ некоторой вершины x, создаётся новая вершина $y \geq x$ такая, что число импликаций, входящих в активные формулы из $L(y)$ строго меньше, чем число импликаций, входящих в активные формулы из $L(x)$. Таким образом, максимальная длина пути из вершины x вверх (т.е. наибольшее n такое, что найдутся $y_1, ..., y_n$, для которых $y_1 = x$ и для любого $i = 1, ..., (n-1)$ ребро (y_i, y_{i+1}) помечено $\leq$ ограничено числом импликаций входящих в активные формулы из $L(x)$. Осталось заметить, что каждая вершина может иметь только конечное число непосредственных наследников по рёбрам помеченым $\leq$, поскольку на каждом шаге вершины помечены лишь конечными множествами формул. Таким образом, построения на шаге (5b) алгоритма также заканчиваются.

Конечность построений на шагах (2)–(4) непосредственно следует из их вида и конечности построений на шаге (5) предыдущей итерации (на нулевой итерации эти шаги не применяются).

Покажем теперь, что количество итераций ограничено. Заметим, что на каждой (кроме нулевой) итерации после применения шагов (1)–(4) алгоритма активными являются только те формулы, которые входили с отрицаниями в помеченные множества при вершинах поддерева, построенного на предыдущей итерации. Таким образом, число итераций ограничено максимальной степенью вложенности отрицания в исходной формуле (т.е. таким n, что найдутся подформулы $A_1, ..., A_n$ формулы A такие, что для каждого $i = 1, ..., (n-1)$ A_i — подформула A_{i+1} и все A_i имеют вид $\neg B_i$ для некоторых формул B_i). Мы показали, что число итераций ограничено и построения, проводимые на каждой итерации, конечны. Таким образом, любое построение графа пополнений для A заканчивается за конечное число шагов. □

Докажем полноту и корректность построенного исчисления.

Предложение 5 (корректность)**.** *Если расширяющие правила могут быть применены так, чтобы получался граф пополнений для формулы A, не содержащий конфликта, то найдётся модель Раутли для N^* $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ и $t \in W$ такие, что $\mu, t \not\models A$.*

Доказательство. Для начала обозначим $L'(x)$ — замыкание $L(x)$ по правилу

$$+(C \to D) \in L'(x) \text{ и } +D \notin L'(x) \Rightarrow -C \in L'(x). \tag{7}$$

Заметим, что правило $(\to N)$ гарантирует, что если $L(x)$ не содержало конфликта, то $L'(x)$ также не содержит конфликта.

Определим модель $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ следующим образом:

- $W = \{x \mid x \in V\} \cup \{y_0\}$,
- $x \leq y$ если $x = y$ или найдутся $y_1, ..., y_n \in W$ такие, что $y_1 = x$, $y_n = y$ и $\forall i = 1, ..., (n-1)$ ребро (y_i, y_{i+1}) помечено $\leq$ в G, т.е. порядок определён как рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\leq$ на вершинах графа G.
- Если x такой, что ребро (x, y) помечено $*$ в G, то полагаем $x^* = y$;
  Если x такой, что не существует $y \in V$ такого, что ребро (x, y) помечено $*$ в G, тогда $x^* = y_0$;
  Полагаем $y_0^* = y_0$.
- $v(p) = \{x| + p \in L'(x)\}$, где $p \in Prop \cap Sub(A)$

Покажем, что построенная модель является моделью Раутли для логики N^*.

1. $v(p)$ - конус по построению;
2. Образ данной вершины по отображению $*$ может быть построен только при применении одного из правил $(*I)$, $(*\uparrow)$ и $(*\downarrow)$. Нетрудно убедиться, что применения этих правил не могут создавать более одного образа для данной вершины. Кроме того, вид правил гарантирует антимонотонность функции $*$.

Далее, покажем, что для любой вершины x в G и $B \in Sub(A)$:

1. $+B \in L(x) \Rightarrow x \models B$
2. $-B \in L(x) \Rightarrow x \not\models B$

Доказательство будем вести индукцией по сложности формул, используя функцию степени deg, определённую в предложении 4.

База индукции:

1. Если $+p \in L(x)$, то $x \models p$ по определению оценки v;
2. Если $-p \in L(x)$, тогда $+p \notin L(x)$, так как $L(x)$ не содержит конфликта, и снова по определению оценки получаем: $x \not\models p$.

Шаг индукции:

- 1. Если $+(C \wedge D) \in L(x)$. Тогда по правилу $(\wedge+)$ $+C, +D \in L(x)$. По предположению индукции, $x \vDash C$ и $x \vDash D$, следовательно, по определению $x \vDash (C \wedge D)$.
  2. Если $-(C \wedge D) \in L(x)$. Тогда по правилу $(\wedge-)$ $-E \in L(x)$, где $E \in \{C, D\}$. По предположению индукции, $x \nvDash E$, значит $x \nvDash (C \wedge D)$.

- 1. Если $+(C \vee D) \in L(x)$, то по правилу $(\vee+)$ $+E \in L(x)$, где $E \in \{C, D\}$. По предположению индукции, $x \vDash E$, тогда $x \vDash (C \vee D)$.
  2. Если $-(C \vee D) \in L(x)$, то по правилу $(\vee-)$ $-C \in L(x)$, $-D \in L(x)$. По предположению индукции, $x \nvDash C$ и $x \nvDash D$, следовательно, $x \nvDash (C \vee D)$.

- 1. (a) Пусть $+(C \to D) \in L(x)$, где $C = \neg C'$. Тогда для любой вершины y такой, что $x \leq y$ выполнено $+(C \to D) \in L(y)$, а значит $+D \in L(y)$ или $-C \in L(y)$. Если $C \in Prop$ и $+C \in L(y)$, то $+D \in L(y)$ по правилу $(\to N)$, если же $+D \notin L(y)$, то по замыканию (7) $-C \in L'(y)$. В любом случае, по предположению индукции получаем, что $y \vDash D$ или $y \nvDash C$. Следовательно, по определению: $x \vDash (C \to D)$.
     (b) Если $+((C \wedge D) \to E) \in L(x)$, то по правилу $(\to \wedge)$ получаем, $+(C \to (D \to E)) \in L(x)$. Тогда, по предположению индукции (поскольку посылка данной формулы проще), $x \vDash C \to (D \to E)$ и, так как формула $((C \wedge D) \to E) \leftrightarrow (C \to (D \to E))$ общезначима в N^*, получаем, что $x \vDash (C \wedge D) \to E$.
     (c) Если $+((C \vee D) \to E) \in L(x)$, то по правилу $(\to \vee)$ $+(C \to E) \in L(x)$ и $+(D \to E) \in L(x)$. По предположению индукции, $x \vDash C \to E$ и $x \vDash D \to E$ и, так как формула $((C \to E) \wedge (D \to E)) \leftrightarrow ((C \vee D) \to E)$ общезначима в N^*, получаем, что $x \vDash (C \vee D) \to E$.
     (d) Пусть $+((C \to D) \to E) \in L(x)$. Для того, чтобы доказать, что $x \vDash ((C \to D) \to E)$, достаточно показать, что для всех $y \geq x$ выполнено, $y \vDash E$ или найдётся $z \geq y$ такой, что $z \vDash C$ и $z \nvDash D$. Так как $+((C \to D) \to E) \in L(x)$

то формула стала пассивной после применения одного из правил $(\to\to s)$ или $(\to\to a)$ на текущей вершине x или на вершине $x' \leq x$. Если было применено $(\to\to s)$ к $+((C \to D) \to E) \in L(x)$, то $+E \in L(x)$, значит по предположению индукции $x \vDash E$. Тогда, по свойству монотонности, $z \vDash E$ для всех $z \geq x$, следовательно $x \vDash ((C \to D) \to E)$. Если было применено правило $(\to\to a)$, то найдётся z непосредственно следующий за x такой, что $\{+(D \to E), +C, -D\} \subseteq L(z)$, тогда, по предположению индуции, $z \vDash D \to E$, $z \vDash C$, $z \nvDash D$. Если для какого-то $z' \geq z$ выполнено $z' \vDash D$, то по свойству монотонности $z' \vDash D \to E$ и значит $z' \vDash E$. Если было применено $(\to\to s)$ к $+((C \to D) \to E) \in L(y)$, где $y \leq x$, то $+E \in L(y)$ и, рассуждая как выше, получаем $y \vDash ((C \to D) \to E)$, значит, по свойству монотонности, $x \vDash ((C \to D) \to E)$. Если к $y \leq x$ было применено правило $(\to\to a)$, то найдётся y' непосредственно следующий за y такой, что $\{+(D \to E), +C, -D\} \subseteq L(y')$. Заметим, что поскольку $+((C \to D) \to E)$ пассивна в $L(x)$, а для всех y'' больших y и отличных от y' она должна быть активна, значит $y' \leq x$. Рассуждая как выше, получаем $y \vDash ((C \to D) \to E)$ и, по свойству монотонности, $x \vDash ((C \to D) \to E)$.

2. Если $-(C \to D) \in L(x)$, то по правилу $(\to -)$ найдётся y такой, что $x \leq y$ и $\{+C, -D\} \in L(y)$. Тогда, по предположению индукции, $y \vDash C$, $y \nvDash D$, значит $x \nvDash C \to D$.

- 1. Если $+\neg C \in L(x)$, то по правилу $(\neg +)$ $-C \in L(x^*)$. По предположению индукции $x^* \nvDash C \Rightarrow x \vDash C$.

  2. Если $-\neg C \in L(x)$, то по правилу $(\neg -)$ $-C \in L(x^*)$. По предположению индукции $x^* \vDash C \Rightarrow x \nvDash C$.

Таким образом, для исходной формулы выполняется: так как $-A \in L(x_{c0})$, то $x_{c0} \nvDash A$, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 6 (полнота)**.** *Пусть существует модель Раутли* $\mu = \langle W, \leq, *, v \rangle$ *для* *логики N^* и $t \in W$ такие, что $\mu, t \nvDash A$, тогда расширяющие правила могут быть применены к $\{-A\}$ так, чтобы получался граф пополнений, не содержащий конфликтов.*

Доказательство. Начнём строить граф пополнений $G = \langle V, E \rangle$ с вершины t помеченной $L(t) = \{-A\}$.

Будем определять отображение $\pi : \{x \mid x \in V\} \to W$, обладающее следующими свойствами:

(a) $\pi(t) = t$;

(b) Если (x, y) помечено $*$ в G, то $\pi(x)^* = \pi(y)$ в μ;

(c) Если (x, y) помечено $\leq$ в G, то $\pi(x) \leq \pi(y)$ в μ;

(d) Если $+B \in L(x)$ в G, то $\pi(x) \vDash B$, если $-B \in L(x)$ в G, то $\pi(x) \nvDash B$;

Нетрудно убедиться, что правила, не создающие новых вершин и не допускающих опций при применении сохраняют свойство (d).

Проверим правила, применение которых неоднозначно, и некоторые правила, создающие новые вершины:

- Пусть $-(C \wedge D) \in L(x)$, $\pi(x) = b$. Тогда, по условию (d): $b \nvDash C \wedge D$, значит по определению $b \nvDash E$, где $E \in \{C, D\}$. Тогда добавляем $-E$ к $L(x)$ по правилу $(\wedge-)$. Аналогично рассматриваем случай, когда $+(C \vee D) \in L(x)$.

- Пусть $+\neg C \to D \in L(x)$, $\pi(x) = b$. Тогда либо $b \nvDash \neg C$, либо $b \vDash D$. В первом случае применяем правило $(\to \neg a)$, во втором — $(\to \neg s)$.

- Пусть $+((C \to D) \to E) \in L(x)$, $\pi(x) = b$. Тогда $b \vDash (C \to D) \to E$, значит или $b \vDash E$, или найдётся $c \in W$ такой, что $b \leq c$ и $c \vDash D \to E$, $c \vDash C$ и $c \nvDash D$. В первом случае применяем правило $(\to\to s)$, во втором, применяем $(\to\to a)$ и создаём новую вершину y такую, что $\pi(y) = c$ и $x \leq y$.

- Пусть $-(C \to D) \in L(x)$, $\pi(x) = b$. Тогда $b \vDash C \to D$, значит найдётся $c \in W$ такой, что $b \leq c$, $c \vDash C$ и $c \nvDash D$. Применяем правило $(\to -)$ и создаём новую вершину y такую, что $\pi(y) = c$ и $x \leq y$. Остальные правила, создающие новые вершины, проверяются аналогично.

- Пусть $+\neg C \in L(x)$, $\pi(x) = b$. Тогда по условию (d): $b \vDash \neg C$, значит есть $c \in W$ такой, что $b^* = c$ и $c \nvDash C$. Применяя правило $(\neg+)$, добавляем $-C$ к $L(y)$, где y — вершина такая, что $\pi(y) = c$. Случай, когда $-\neg C \in L(x)$ рассматривается аналогично.

Так как $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ — модель Раутли для логики N^* и из условия (d) следует, что построенное дерево не содержит конфликтов (если существуют формула C и вершина x такие, что $\{+C, -C\} \in L(x)$, $\pi(x) = b$, то по условию (d): $b \vDash C$ и $b \nvDash C$, чего быть не может). По предложению 4, все построения заканчиваются, значит построенное дерево пополнений полно. $\square$

Из предложений 5 и 6 и факта полноты логики N^* относительно класса фреймов Раутли стандартным образом получаем:

Теорема 3. *Логика N^* обладает свойством конечных моделей.*

Следствие 3. *Логика N^* разрешима.*

4 Фильтрация N*

Метод фильтрации заключается к сведению выполнимости данного множества на произвольной модели к его выполнимости на конечной модели. Из этого непосредственно следует, что логика обладает свойством конечных моделей и, как и в прошлом разделе, что она разрешима.

Определение 9 (степень вложенности отрицания). *Пусть Φ — конечное множество формул, замкнутое относительно взятия подформул, и $A \in \Phi$. Степень вложенности отрицания (с учётом различных вхождений) формулы A относительно Φ определим следующим образом:*

- *$0 \in ndeg_\Phi(A)$, если не существует $\neg B \in \Phi$ такой, что A — подформула B;*
- *$i \in ndeg_\Phi(A)$ для $i > 0$, если найдётся $\neg B \in \Phi$ такая, что $(i-1) \in ndeg_\Phi(\neg B)$ и A — подформула B;*

Обозначим $ndeg_\Phi(\Phi) = \bigcup_{A \in \Phi} ndeg_\Phi(A)$ и $N_\Phi = max\{i \mid i \in ndeg_\Phi(\Phi)\}$.

Заметим, что все $ndeg_\Phi(A)$ конечны и, поскольку множество Φ также конечно, N_Φ определено корректно.

Зафиксируем $\mu =< W, \leq, *, v >$ — модель Раутли и Φ конечное множество формул, замкнутое относительно взятия подформул.

Представим множество Φ в виде $\Phi = \Phi_0 \cup ... \cup \Phi_{N_\Phi}$, где $\Phi_i = \{A \in \Phi \mid i \in ndeg_\Phi(A)\}$. Заметим, что это не разбиение, то есть одна формула может входить одновременно в несколько множеств Φ_i.

Определение 10. *Введём следующие отношения на мирах модели μ относительно множеств Φ_i. Пусть $x, y \in W$, тогда*

- *$x \equiv_{N_\Phi} y$, если $\forall A \in \Phi_{N_\Phi}$ $(\mu, x \models A \Leftrightarrow \mu, y \models A)$;*
- *$x \equiv_i y$ для $i = 0, .., (N_\Phi - 1)$, если $\forall A \in \Phi_i$ $(\mu, x \models A \Leftrightarrow \mu, y \models A)$ и $x^* \equiv_{(i+1)} y^*$;*

Нетрудно убедиться, что эти отношения — отношения эквивалентности, то есть они рефлексивны, симметричны и транзитивны. Стандартным образом, каждое из этих отношений разбивает множество W на классы эквивалентности $[x]_i = \{y \in W \mid x \equiv_i y\}$, причём всего таких классов конечное число в силу конечности Φ.

Определение 11. *Фильтрацией модели $\mu =< W, \leq, *, v >$ по множеству формул Φ, замкнутому относительно взятия подформул, назовём кортеж $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq_\Phi, s, v_\Phi \rangle$, где*

1. $W_\Phi = \{[x]_0, .., [x]_{N_\Phi} \mid x \in W\} \cup \{\delta\}$;

2. *Отображение $s : W_\Phi \to W_\Phi$ определено следующим образом:*

   - $(\delta)^s = \delta$;
   - $([x]_{N_\Phi})^s = \delta$;
   - $([x]_i)^s = [x^*]_{(i+1)}$;

3. *Отношение $\leq_\Phi \subseteq W_\Phi^2$:*

   - $[x]_{N_\Phi} \leq_\Phi [y]_{N_\Phi}$, *если* $\forall A \in \Phi_{N_\Phi}$ $(\mu, x \vDash A \Rightarrow \mu, y \vDash A)$;
   - $[x]_i \leq_\Phi [y]_i$ $(i = 1, .., N_\Phi - 1)$, *если* $\forall A \in \Phi_i$ $(\mu, x \vDash A \Rightarrow \mu, y \vDash A)$ *и* $([y]_i)^s \leq_\Phi ([x]_i)^s$;

4. $v_\Phi : Prop \to 2^{W_\Phi}$ *такое, что для* $p \in \Phi_i$: $[x]_i \in v_\Phi(p)$ *тогда и только тогда, когда* $x \in v(p)$.

Замечание 1. *Пусть $x, y \in W$, тогда условие $x \leq y$ влечёт $[x]_i \leq_\Phi [y]_i$ для всех $i \in \{0, .., N_\Phi\}$.*

Доказательство. Для $i = N_\Phi$ это очевидно. Зафиксируем произвольный $j \in \{0, .., N_\Phi\}$ и допустим, что для всех индексов больших j это утверждение доказано. Нам нужно показать, что $\forall A \in \Phi_j$ $(\mu, x \vDash A \Rightarrow \mu, y \vDash A)$ и $([y]_j)^s \leq_\Phi ([x]_j)^s$. Первое условие очевидно выполняется, проверим второе. Из антимонотонности $*$, если $x \leq y$, то $y^* \leq x^*$. Тогда по уже доказанному $[y^*]_{(j+1)} \leq_\Phi [x^*]_{(j+1)}$ и по определению s $[y]_j^s \leq_\Phi [x]_j^s$. □

Предложение 7. $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq_\Phi, s, v_\Phi \rangle$ *— модель Раутли для логики N^*.*

Доказательство. То, что $\leq_\Phi$ задаёт отношение частичного порядка, следует непосредственно из определения.

Корректность задания s для δ и миров вида $[x]_{N_\Phi}$ очевидна. Если $x_1, x_2 \in [x]_i$, то по определению i-го отношения эквивалентности $x_1^* \equiv_{(i+1)} x_2^*$, откуда получается корректность задания s для миров вида $[x]_i$ для $i = 0, ..., N_\Phi - 1$. Условие согласования $\leq_\Phi$ и s следует сразу из определения отношения $\leq_\Phi$. Из замечения 1 следует, что v_Φ — конус. □

Лемма 4 (о фильтрации)**.** $\mu = \langle W, \leq, *, v \rangle$ *— модель Раутли для логики N^*, Φ — множество формул, замкнутое относительно подформул. Тогда для каждых $x \in W$ и $A \in \Phi_i$ выполнено $\mu, x \vDash A \Leftrightarrow \mu_\phi, [x]_i \vDash A$ $(i = 0, .., N_\Phi)$.*

Доказательство. Докажем индукцией по сложности формулы $A \in \Phi_i$.

- Если $A = p$ — пропозициональная переменная, то по определению v_Φ $[[x]_i \in v_\Phi(p) \Leftrightarrow x \in v(p)]$;

- Пусть $A = A_1 \wedge A_2$. Если $\mu, x \vDash A_1 \wedge A_2$, то $\mu, x \vDash A_1$ и $\mu, x \vDash A_2$. Очевидно, что если $A \in \Phi_i$, то $A_1, A_2 \in \Phi_i$, значит по предположению индукции $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A_1$ и $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A_2$, следовательно $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A$. Заметим, что все переходы верны и для обратных рассуждений.

- Пусть $A = A_1 \vee A_2$ и $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A_1 \vee \phi_2$, тогда $\mu, x \vDash A_1$ или $\mu, x \vDash A_2$. Опять $A_1, A_2 \in \Phi_i$, значит по предположению индукции $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A_1$ или $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A_2$. Таким образом $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A$. В обратную сторону рассуждения аналогичны.

- $A = A_1 \to A_2$. Пусть $\mu_\Phi, [x]_i \vDash A_1 \to A_2$. Нужно показать, что для всякого $y \geq x$, если $y \vDash A_1$, то $y \vDash A_2$. Зафиксируем $y \geq x$ и предположим, что $\mu, y \vDash A_1$. Поскольку $x \leq y$, то по замечанию $[x]_i \leq_\Phi [y]_i$. Значит, по предположению индукции, $\mu_\Phi, [y]_i \vDash A_1$. Тогда $\mu_\Phi, [y]_i \vDash A_2$ и снова по предположению индуции $\mu, y \vDash A_2$. Следовательно $\mu, x \vDash A_1 \to A_2$.

Пусть теперь $\mu_\Phi, [x]_i \nvDash A_1 \to A_2$. Тогда по определению найдётся $[y]_i \succeq [x]_i$ такой, что $\mu_\Phi, [y]_i \vDash A_1$ и $\mu_\Phi, [y]_i \nvDash A_2$. Так как $A_1, A_2 \in \Phi_i$, то по предположению индукции $\mu, y \vDash A_1$ и $\mu, y \nvDash A_2$, значит $\mu, y \nvDash A_1 \to A_2$. Предположим, $\mu, x \vDash A_1 \to A_2$, тогда по определению отношения $\leq_\Phi$, поскольку $x \leq_\Phi y$, то $\mu, y \vDash A_1 \to A_2$, чего быть не может. Таким образом, $\mu, x \nvDash A_1 \to A_2$.

- Пусть $A = \neg B$, тогда $\mu, x \vDash \neg B \Leftrightarrow \mu, x^* \nvDash A$. Так как $B \in \Phi_{(i-1)}$, то $\mu_\Phi, [x^*]_{i+1} \nvDash B$. Поскольку $[x^*]_{i-1} = [x]_i^s$, получаем $\mu_\Phi, [x]_i^s \nvDash B$, значит $\mu_\Phi, [x]_i \vDash \neg B$. Все переходы верны в обе стороны.

$\square$

Из леммы о фильтрации мы снова получаем, что логика N^* обладает свойством конечных моделей (теорема 3) и, следовательно, она разрешима (следствие 3).

5 Заключение

Таким образом, в данной работе была доказана полнота логики N^* относительно класса конечных шкал (то есть, что логика обладает свойством конечных моделей) и разрешимость. Доказательство было получено двумя методами: основанном на методе табличных исчислений и основанном на методе фильтраций. Интерес для дальнейшего изучения представляют собой конструктивные свойства логики N^*. Для логики N^-, полученой добавлением к логике N в качестве аксиом формул $N2$ и $N3$ было доказано [7], что она обладает дизъюнктивным свойством (6) и конструктивным свойством отрицания (то есть, если $\neg(A \wedge B) \in N^-$, то $\neg A \in N^-$ или $\neg B \in N^-$), но в то же время в этой логике не выводима ни одна формула вида $\neg A$. Те же свойства для логики N^* пока получены не были. Также интерес представляет построение негибридного исчисления, которое позволило бы получить более эффективный разрешающий алгоритм для логики.

Список литературы

[1] P.Cabalar, S.P.Odintsov, D.Pearce, Logical Foundations of Well-Founded Semantics, in: P.Doherty et al. (eds.) Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 10th International Conference (KR2006), AAAI Press, Menlo Park, California, 2006, 25–36.

[2] W.Runtenberg, Klassische und nichtklassische Aussagenlogik, Braunschweig, Vieweg, 1979.

[3] K.Dosen, Negation as a modal operator, Reports on Mathematical Logic 20, 1986, 15–28.

[4] K.Dosen, Negation in the light of modal logic. In: D. Gabbay et al (eds.), What is negation? Appl. Log. Ser. 13. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 77–86.

[5] R.Routley, V. Routley, The semantics of first degree entailment. Nous 6 (1972), 335–359.

[6] S.P.Odintsov, H. Wansing, Inconsistency-tolerant description logic. Part II: A tableau algorithm for $\mathcal{CALC}^{\mathsf{C}}$, Journal of Applied Logic 6, 2008, 343–360.

[7] S.P.Odintsov, Combining intuitionistic connectives and Routley negation, Siberian Electronic Mathematical Reports 7, 2010, 21–41.