Министерство образования и науки РФ

Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет

Механико-математический факультет

С. П. Одинцов,
С. О. Сперанский, С. А. Дробышевич

Введение в неклассические логики

Учебное пособие

Новосибирск
2014

УДК 510.6
ББК В12я73-1
О 425

Издание подготовлено в рамках реализации
Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»
на 2009–2018 годы

Одинцов, С. П.
О 425 Введение в неклассические логики : учеб. пособие / С. П. Одинцов, С. О. Сперанский, С. А. Дробышевич ; Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск : РИЦ НГУ, 2014. 133 с.

Учебное пособие представляет собой краткое и доступное введение в область неклассических логик. Традиционно неклассическими называют все логические системы, отличные от систем классической логики. На настоящий момент существует огромное количество неклассических логик, имеющих отношение к таким различным областям знания, как философия, вопросы оснований математики, теоретическая информатика, лингвистика и т. д., в результате чего представляется маловероятным охватить весь спектр неклассических логик. Поэтому вместо того, чтобы пытаться дать как можно более широкий обзор неклассических логик, мы сосредоточим внимание на некоторых фундаментальных вопросах и методах, связанных с работой с ними. Отличительной чертой большинства неклассических логик является то, что для них естественным образом формулируется так называемая реляционная семантика (реляционную семантику также часто называют семантикой Крипке в честь Сола Крипке, который ввёл подобное описание для систем модальных логик) — семантика, в основе которой лежат множества с дополнительными отношениями, используемыми для интерпретации логических связок. Часто именно реляционная семантика лучше всего отражает интуицию, стоящую за той или иной неклассической логикой, поэтому в данном курсе мы будем делать акцент на работу с реляционной семантикой, на теоремы полноты и её применение для доказательства различных свойств логик. Подробно рассматриваются конструктивные и модальные логики; гильбертовские, генценовские и табличные исчисления для этих логик. Особое внимание уделяется методам доказательства разрешимости логических систем.

УДК 510.6
ББК В12я73-1

Оглавление

Введение

Учебное пособие призвано познакомить читателя с *неклассическими логиками* — одним из важнейших разделов математической логики. “Неклассическими” традиционно называют все логические системы, отличные от систем классической логики. На настоящий момент существует огромное количество неклассических логик, тесно связанных с такими различными научными дисциплинами, как математика и её основания, философия, информатика, лингвистика и т. д. Благодаря подобному многообразию представляется затруднительным охватить весь спектр неклассических логик, поэтому, вместо того чтобы пытаться дать как можно более широкий обзор по тематике, мы сосредоточим внимание на ряде фундаментальных вопросов и методов, относящихся к рассматриваемой области, а именно: в основе данного пособия лежат вопросы и техники, касающиеся *реляционной семантики* (именуемой также *семантикой Крипке*) изучаемых логик, центральным объектом которой являются *шкалы Крипке*, представляющие собой множества с дополнительными отношениями, используемыми для интерпретации логических символов. Подобный выбор мотивирован тем, что, с одной стороны, большинство известных неклассических логик обладают естественной реляционной семантикой, а с другой стороны, нередко именно реляционная семантика лучше всего отражает интуицию, стоящую за той или иной логикой. Кроме того, чтобы избежать ряда технических затруднений, связанных с изучением первопорядковых логик и логик более высоких порядков, мы ограничимся рассмотрением пропозициональных неклассических логик. Пособие рассчитано на студентов и аспирантов, знакомых с вводным курсом математической логики: с базовыми понятиями и результатами, касающимися классической логики (пропозициональной и первопорядковой), и с основами теории множеств.

Первая глава пособия содержит необходимые предварительные сведения, часть которых может повторять материал, уже известный из курса математической логики. В разделе 1.1 дано определение *пропозиционального языка*, различные частные случаи которого будут встречаться нам на протяжении всего текста, а также общее понятие *дедуктивной системы*, проиллюстрированное на примере системы гильбертовского типа для пропозициональной классической логики Cl. В этом же разделе мы докажем *теорему дедукции*, позволяющую сводить отношения следования широкого класса дедуктивных систем к совокупностям их тавтологий. В разделе 1.2 мы получим полноту Cl относительно заданной здесь же истинностной семантики логики. Представленное доказательство будет служить своего рода отправным пунктом для получения теорем полноты, встречающихся далее в тексте. В разделе 1.3 мы познакомимся с двумя другими дедуктивными системами, а именно с дедуктивной системой классической позитивной логики Cl^+ и паранепротиворечивой системой $CLuN$. Формальное понятие (*пропозициональной*) *логики* приведено в разделе 1.4, где также задана связь между логиками и дедуктивными системами и введён ряд понятий, отражающих важные взаимосвязи между различными логиками.

Во второй главе речь пойдёт о логиках, тесно связанных с такими подходами к основаниям математики, как *интуиционизм* и *конструктивизм* (краткая историческая справка по которым содержится в разделе 2.4), в связи с чем логики из данной главы мы будем называть *конструктивными*. Особенностью этих логик, в отличие от систем, приведённых в первой главе, является то, что они обладают нетривиальной реляционной семантикой. Первым примером конструктивной логики, с которым мы познакомимся, будет сформулированная в разделе 2.1 позитивная логика Pos. При доказательстве её полноты относительно соответствующего класса шкал Крипке мы продемонстрируем, как действует *метод канонических моделей*, лежащий в основе большинства теорем полноты, представленных в пособии. Также на примере Pos мы познакомимся с несколькими методами доказательства *дизъюнктивного свойства*, являющегося одной из важнейших черт конструктивных логик. Два других известных примера конструктивных логик приведены в разделе 2.2, где вместе с соответствующими семантиками сформулированы интуиционистская логика Int и минимальная логика J. В конце раздела мы рассмотрим некоторые естественные расширения J и Int. Раздел 2.3 посвящён теореме Гливенко, устанавливающей тесную связь между логиками Cl и Int. В последних трёх разделах главы речь пойдёт о логиках Нельсона с сильным отрицанием, одной из отличительных черт которых является то, что они не замкнуты относительно правила замены. Раздел 2.4 содержит краткий исторический очерк, позволяющий понять мотивацию для введения логик Нельсона, которые мы затем зададим в разделе 2.5. Кроме того, в разделе 2.5 мы покажем полноту логик Нельсона относительно соответствующих классов шкал Крипке и установим некоторые их конструктивные свойства. Связям между логиками Нельсона, с одной стороны, и Pos и Int — с другой, посвящён раздел 2.6.

Третья глава посвящена изучению некоторых фундаментальных свойств логик, причём большую её часть занимают вопросы, связанные с свойством *разрешимости*. Доказательство разрешимости для логик, обладающих реляционной семантикой, часто сводится к установлению *финитной аппроксимируемости* (*свойства конечных моделей*), т. е. полноты логики относительно некоторого класса конечных шкал Крипке. Строго эту связь постулирует теорема Харропа, сформулированная в разделе 3.1. Здесь же на примере логик Pos, Int и J мы изложим метод фильтрации, используемый для доказательства свойства конечных моделей, а также убедимся, что часто переход к классу конечных шкал связан с потерей свойства сильной полноты относительно этого класса. Другим способом доказательства свойства конечных моделей является метод табличных исчислений, речь о котором пойдёт в следующих трёх разделах главы. Интуитивно этот метод можно воспринимать как описание эффективной процедуры поиска контрмодели для данной формулы. В разделе 3.2 мы сформулируем табличное исчисление для Cl, а также установим его связь с исчислением генценовского типа для классической логики. Естественная адаптация метода табличных исчислений на случай Int в разделе 3.3 наталкивается на некоторые затруднения, а именно: в выводах данного исчисления могут возникать циклы, для отслеживания и устранения которых требуется хранить большой объём информации. Исчисление Воробьёва – Дыкхова из раздела 3.4 является вариантом табличного исчисления для Int, в котором эта проблема устранена. В разделах 3.5 и 3.6 описывается ряд других свойств логик, таких как интерполяционное свойства Крейга, проективное свойство Бета (о взаимосвязи явной и неявной определимости), полнота по Посту, 0-сводимость и структурная полнота.

В четвертой главе речь пойдёт о *модальных логиках* — логиках, в языке которых помимо стандартных логических связок присутствуют символы *модальных операторов*. Хотя от логики к логике у модальных операторов могут быть весьма различные интерпретации, чаще всего мы будем иметь дело с операторами, интуитивно соответствующими конструкциям “необходимо, что” и “возможно, что”. В разделе 4.1 мы введём *модальные* *шкалы Крипке*, в которых для интерпретации модальных операторов используется так называемое *отношение достижимости*, и зададим понятие *нормальной модальной логики*. Раздел 4.2 посвящён краткому введению в *теорию соответствий*, а именно тому, как при помощи модальных формул можно выделять те или иные условия на отношение достижимости. Все логики, изучаемые в главе, являются расширениями наименьшей модальной логики **K**, сформулированной в разделе 4.3. Представленное здесь же доказательство полноты **K** относительно класса всех модальных шкал Крипке обобщено в разделе 4.4 на так называемые *канонические логики*, здесь же установлена *каноничность* ряда расширений логики **K**, введённых в разделе 4.2. Для доказательства свойства конечных моделей модальных логик в разделе 4.5 адаптирован метод фильтрации. Следующие три раздела посвящены логике Гёделя – Лёба **GL**, тесно связанной с формальной арифметикой и теоремами Гёделя о неполноте: модальность в **GL** интерпретируется как "доказуемо в арифметике Пеано". Логика **GL** сформулирована в разделе 4.6, а в разделе 4.7 показано, что она не является канонической, и, таким образом, доказательство её полноты относительно соответствующего класса шкал Крипке не может быть проведено по схеме из раздела 4.4. В связи с этим в разделе 4.8 вводятся *системы Хинтикки*, которыми мы затем воспользуемся в разделе 4.9 для того, чтобы доказать слабую полноту **GL** относительно класса всех нётеровых строгих порядков (задействованную при этом технику называют *методом выборочной фильтрации*). Кроме того, мы покажем, что не существует класса модальных шкал Крипке, относительно которого логика **GL** была бы сильно полна. В разделе 4.10 приведена *аксиома МакКинси*, дающая пример формулы, класс шкал которой не аксиоматизируем в логике первого порядка. Раздел 4.11 отведён под описание некоторых погружений модального языка в языки первого и второго порядков, которые, в определённом смысле, сохраняют истинность формул. Интуиции, стоящие за этими погружениями, позволяют сформулировать понятие *охраняемого фрагмента*, являющегося примером нетривиального разрешимого фрагмента логики первого порядка. В заключительном разделе 4.12 мы зададим погружение логики Int в нормальную модальную логику **S4**, которое, в частности, позволяет свести доказательство интерполяционного свойства Крейга для Int к аналогичному доказательству для **S4**, также приведённому в разделе.

Глава 1

Начальные сведения

1.1. Дедуктивные системы, теорема дедукции

Пропозициональный язык — это конечное множество символов вместе с указанием их местности:

$$\mathcal{L} \;=\; \{f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}\}\,, \quad n_i \in \omega\,.$$

Если $n_i = 0$, то символ f_i называется *логической константой.*

Если $n_i > 0$, то символ f_i называется *n_i-местной логической связкой.*

Пусть заданы пропозициональный язык $\mathcal{L}$ и множество символов X. *Множество термов $Term_{\mathcal{L}}(X)$ языка $\mathcal{L}$ над X* определяется как наименьшее множество слов в алфавите, включающем символы $X \cup \{f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}\}$, а также вспомогательные символы "(" , ")" и "," , удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $n_i = 0$, то $f_i \in Term_{\mathcal{L}}(X)$;

2) $X \subseteq Term_{\mathcal{L}}(X)$;

3) если $t_1, \dots, t_{n_i} \in Term_{\mathcal{L}}(X)$, то $f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in Term_{\mathcal{L}}(X)$.

Каждому символу f_i пропозиционального языка $\mathcal{L}$ соответствует n_i-местная термообразующая операция на множестве $Term_{\mathcal{L}}(X)$, которая сопоставляет набору слов $t_1, \dots, t_{n_i}$ новое слово $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$. Поэтому можно говорить об алгебре термов

$$\langle Term_{\mathcal{L}}(X); f_1, \dots, f_k\rangle.$$

Зафиксируем специальное множество символов

$$Prop \;=\; \{Q_0, Q_1, \dots\},$$

элементы которого мы будем называть *пропозициональными переменными*, соответственно, $Prop$ — *множество пропозициональных переменных.* Буквы $p, q, r, \dots$ (возможно, с индексами) будут играть роль метапеременных над множеством $Prop$.

Множество $For_{\mathcal{L}} := Term_{\mathcal{L}}(Prop)$ назовём *множеством формул языка $\mathcal{L}$* (или, проще, *$\mathcal{L}$-формул*). Ясно, что всякая формула есть слово; *подформулы $\mathcal{L}$-формулы φ* суть все подслова в φ, являющиеся $\mathcal{L}$-формулами. Полученную алгебру термов

$$\mathcal{FOR}_{\mathcal{L}} \;:=\; \langle For_{\mathcal{L}}; f_1, \dots, f_k\rangle$$

мы будем называть *алгеброй формул языка $\mathcal{L}$.*

Подстановкой называется произвольный гомоморфизм $s : \mathcal{FOR}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{FOR}_{\mathcal{L}}$ алгебры формул в себя. Таким образом, всякая подстановка однозначно задаётся своим действием на элементах из $Prop$.

Для формулы $\varphi \in For_{\mathcal{L}}$ запись $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ подразумевает, что все пропозициональные переменные, входящие в формулу φ, попадают в список $p_1, \ldots, p_n$.

Пусть даны формула $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ и подстановка s, причём $sp_i = \psi_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда нетрудно заметить, что $s\varphi = \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, где $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ есть результат одновременной замены в формуле φ пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$ на формулы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ соответственно.

Формула ψ называется (*подстановочным*) *частным случаем* формулы φ, если $\psi = s\varphi$ для некоторой подстановки s.

Прежде чем дать общее определение дедуктивной системы, напомним определение исчисления Гильбертовского типа CL для классической пропозициональной логики. Исчисление CL задается в языке $\mathcal{L}^{CL} = \{\vee^2, \wedge^2, \to^2, \neg^1\}$ аксиомами:

1) $p \to (q \to p)$;
2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;
3) $(p \wedge q) \to p$;
4) $(p \wedge q) \to q$;
5) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$;
6) $p \to (p \vee q)$;
7) $q \to (p \vee q)$;
8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$;
9) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$;
10) $\neg p \to (p \to q)$;
11) $p \vee \neg p$;

и правилом вывода *modus ponens*

$$\frac{p\,, \quad p \to q}{q} \quad (MP).$$

Аксиомы и правило вывода позволяют определить отношение следования (или отношение выводимости) $\vdash_{CL} \subseteq 2^{For_{\mathcal{L}^{CL}}} \times For_{\mathcal{L}^{CL}}$ между множествами формул и формулами. Отношение $\Gamma \vdash_{CL} \varphi$ равносильно наличию конечной последовательности формул $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ языка $\mathcal{L}^{CL}$ со свойством: каждая из формул φ_i является либо частным случаем одной из аксиом 1–11, либо $\varphi_i \in \Gamma$, либо φ_i получается из предыдущих формул по правилу *modus ponens*, т. е. найдутся $j, k < i$ такие, что $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$. Наряду с только что определенным отношением, рассматривается и отношение выводимости между множествами формул: $\Gamma \vdash_{CL} \Delta$, если и только если найдутся формулы $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Delta$ такие, что $\Gamma \vdash_{CL} \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$.

Теперь мы готовы дать общее определение дедуктивной системы.

Определение 1.1.1. *Дедуктивная система* S — это тройка $S = \langle \mathcal{L}^S, Ax^S, Rule^S \rangle$, где $\mathcal{L}^S$ — пропозициональный язык, $Ax^S \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$, $Rule^S$ — множество записей вида

$$\frac{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n}{\psi},$$

где $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi\} \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$.

Язык $\mathcal{L}^S$ называется *языком дедуктивной системы* S, элементы множества Ax^S называются *аксиомами дедуктивной системы* S, а элементы множества $Rule^S$ — *правилами дедуктивной системы* S. При этом если $\frac{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n}{\psi} \in Rule^S$, то формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ называются посылками данного правила, а формула ψ — его заключением.

Пусть дано некоторое правило вывода

$$\frac{\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n}{\psi}\quad (R).$$

Говорим, что формула χ *получается из формул* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *по правилу* (R), если найдется подстановка s такая, что

$$s\varphi_1 = \xi_1,\ \ldots,\ s\varphi_n = \xi_n,\ s\psi = \chi.$$

С произвольной дедуктивной системой $S = \langle \mathcal{L}^S, Ax^S, Rule^S \rangle$ свяжем *отношение следования* $\vdash_S$ между множествами формул и формулами по следующей схеме. Пусть $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$. Отношение $\Gamma \vdash_S \varphi$ имеет место, если и только если существует конечная последовательность $\mathcal{L}^S$-формул $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ со свойством: каждая из формул φ_i либо лежит в Γ, либо является частным случаем некоторой аксиомы $\psi \in Ax^S$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил дедуктивной системы S, т. е. найдутся $j_1, \ldots, j_k < i$ и правило $R \in Rule^S$ такие, что φ_i получается из $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}$ по правилу R. При выполнении всех вышеуказанных условий последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ называется *выводом* φ *из* Γ.

В большинстве случаев, которые будут рассматриваться в курсе, в языке будет присутствовать связка дизъюнкции $\vee$, свойства которой близки к хорошо известной читателям классической дизъюнкции. При этом можно рассматривать также отношение следования между множествами формул, определяемое таким образом. Отношение $\Gamma \vdash_S \Delta$ имеет место в том и только в том случае, если найдутся $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Delta$ такие, что $\Gamma \vdash_S \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$.

Как бы мы ни определили дедуктивную систему S, ее отношение следования $\vdash_S$ удовлетворяет ряду важных свойств.

Предложение 1.1.2. *Пусть* $S = \langle \mathcal{L}^S, Ax^S, Rule^S \rangle$ *— дедуктивная система. Тогда отношение следования* $\vdash_S \subseteq 2^{For_{\mathcal{L}^S}} \times For_{\mathcal{L}^S}$ *удовлетворяет следующим свойствам.*

1. *Компактность: если* $\Gamma \vdash_S \varphi$*, то найдется конечное подмножество* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *такое, что* $\Gamma_0 \vdash_S \varphi$*.*

2. *Монотонность: если* $\Gamma \vdash_S \varphi$ *и* $\Gamma \subseteq \Gamma'$*, то* $\Gamma' \vdash_S \varphi$*.*

3. *Транзитивность: если для любой* $\psi \in \Delta$ *верно* $\Gamma \vdash_S \psi$ *и* $\Delta \vdash_S \varphi$*, то* $\Gamma \vdash_S \varphi$*.*

4. *Подстановочность: если* $\Gamma \vdash_S \varphi$*, то для любой подстановки* $s : For_{\mathcal{L}^S} \to For_{\mathcal{L}^S}$ *верно* $s\Gamma \vdash_S s\varphi$*, где* $s\Gamma = \{s\psi \mid \psi \in \Gamma\}$*.*

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости данных свойств, основываясь на приведённых выше определениях.

Далее условимся писать $\vdash_S \varphi$ вместо $\varnothing \vdash_S \varphi$ и $\Gamma, \varphi \vdash_S \psi$ вместо $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_S \psi$. Множество $Taut_S := \{\varphi \mid \vdash_S \varphi\}$ мы будем называть *множеством теорем* (или *тавтологий*) дедуктивной системы S.

Определение 1.1.3. Пусть S — дедуктивная система, $\Gamma \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$. Множество формул Γ *дедуктивно замкнуто в* S (является S*-теорией*), если для любой формулы φ из $\Gamma \vdash_S \varphi$ следует $\varphi \in \Gamma$.

Следующее предложение (доказательство которого оставляется в качестве упражнения) даёт несложную переформулировку понятия дедуктивно замкнутого множества формул.

Предложение 1.1.4. *Пусть S — дедуктивная система, $\Gamma \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$. Множество формул Γ является S-теорией, если и только если выполнены следующие условия: 1) $Taut_S \subseteq \Gamma$; 2) для любых формул $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$, если формула φ получена из $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по правилу $R \in Rule^S$, то $\varphi \in \Gamma$.*

В заключение раздела мы сформулируем и докажем теорему дедукции для достаточно широкого класса дедуктивных систем.

Теорема 1.1.5. *Пусть $S = \langle \mathcal{L}^S, Ax^S, Rule^S \rangle$ — дедуктивная система такая, что выполнено: $\to^2 \in \mathcal{L}^S$; $p \to (q \to p)$, $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \in Ax^S$; $Rule^S = \{MP\} = \{\frac{p,\ p \to q}{q}\}$. Тогда для любого множества формул Γ и любых формул φ и ψ верна эквивалентность:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_S \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_S \varphi \to \psi\,.$$

Доказательство. $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi \to \psi$ — вывод формулы $\varphi \to \psi$ из множества гипотез Γ в S. Тогда последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi \to \psi, \varphi, \psi$ будет выводом формулы ψ из множества гипотез $\Gamma \cup \{\varphi\}$, т. е. $\Gamma, \varphi \vdash_S \psi$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \psi$ — вывод формулы φ из множества гипотез $\Gamma \cup \{\varphi\}$ в S. Индукцией по $i = 0, \ldots, n$ покажем, что $\Gamma \vdash_S \varphi \to \varphi_i$.

Если φ_i — частный случай аксиомы, то φ_i, $\varphi_i \to (\varphi \to \varphi_i)$, $\varphi \to \varphi_i$ — вывод формулы $\varphi \to \varphi_i$ из пустого множества гипотез в S, тем более $\Gamma \vdash_S \varphi \to \varphi_i$.

Если $\varphi_i \in \Gamma$, то опять же φ_i, $\varphi_i \to (\varphi \to \varphi_i)$, $\varphi \to \varphi_i$ — вывод формулы $\varphi \to \varphi_i$ из множества гипотез Γ в S.

Если $\varphi_i = \varphi$, то последовательность формул

$$\varphi \to (\varphi \to \varphi),\ \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi),\ (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)),$$
$$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi),\ \varphi \to \varphi$$

показывает, что $\varphi \to \varphi \in Taut_S$, тем более $\Gamma \vdash_S \varphi \to \varphi$.

Осталось расмотреть последний случай. Предположим, формула φ_i получена из формул φ_j и φ_k, $j, k < i$, по правилу *modus ponens*. Ясно, что при этом $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ или $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$. Для определенности пусть выполнено первое соотношение. По индукционному предположению

$$\Gamma \vdash_S \varphi \to \varphi_j \quad \text{и} \quad \Gamma \vdash_S \varphi \to (\varphi_j \to \varphi_i).$$

Пусть $\psi_0, \ldots, \psi_m = \varphi \to \varphi_j$ и $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_{m+s} = \varphi \to (\varphi_j \to \varphi_i)$ — соответствующие выводы. Тогда последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_{m+s}$, $(\varphi \to (\varphi_j \to \varphi_i)) \to ((\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \varphi_i))$, $(\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \varphi_i)$, $\varphi \to \varphi_i$ доказывает, что $\Gamma \vdash_S \varphi \to \varphi_i$. □

Доказанная теорема во многих случаях упрощает задачу поиска вывода той или иной формулы, кроме того, теорема дедукции позволяет сводить отношение следования дедуктивной системы к её множеству тавтологий.

Пусть S — дедуктивная система и $\to^2 \in \mathcal{L}^S$. Говорим, что S *удовлетворяет теореме дедукции (относительно* $\to$*)*, если для любых множества формул Γ и формул φ, ψ верна эквивалентность

$$\Gamma, \varphi \vdash_S \psi \iff \Gamma \vdash_S \varphi \to \psi\,.$$

Следствие 1.1.6. *Пусть дедуктивная система S удовлетворяет теореме дедукции относительно $\to$. Тогда для любых множества формул Γ и формулы φ верна эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_S \varphi \iff \vdash_S \psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi)\ldots)$$

для некоторых $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$.

Доказательство. Ввиду компактности $\vdash_S$ (см. предложение 1.1.2, п. 1) отношение $\Gamma \vdash_S \varphi$ равносильно $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash_S \varphi$ для некоторых $\psi_1, \ldots, \psi_n$ из Γ. Остается n раз применить теорему дедукции. □

Говорим, что дедуктивные системы S_1 и S_2 *слабо эквивалентны*, если $Taut_{S_1} = Taut_{S_2}$. Дедуктивные системы S_1 и S_2 *сильно эквивалентны*, если $\vdash_{S_1} = \vdash_{S_2}$.

Следствие 1.1.7. *Пусть дедуктивные системы S_1 и S_2 в одном и том же языке (т. е. $\mathcal{L}^{S_1} = \mathcal{L}^{S_2}$) удовлетворяют теореме дедукции относительно $\to$. Тогда из слабой эквивалентности систем S_1 и S_2 следует их сильная эквивалентность.*

1.2. Теорема полноты для дедуктивной системы CL

Цель данного раздела — доказать теорему полноты для классической пропозициональной логики таким способом, который мы легко сможем адаптировать для работы с неклассическими исчислениями. Сначала напомним определения основных семантических понятий для пропозициональной классической логики. С целью сокращения будем писать For^{CL} вместо $For_{\mathcal{L}^{CL}}$.

Определение 1.2.1. Отображение $v : For^{CL} \to \{0, 1\}$ называется CL-*оценкой*, если для любых формул φ и ψ из For^{CL} выполнены следующие условия:

1) $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 1$ и $v(\psi) = 1$;

2) $v(\varphi \vee \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 1$ или $v(\psi) = 1$;

3) $v(\varphi \to \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 0$ или $v(\psi) = 1$;

4) $v(\neg\varphi) = 1 \iff v(\varphi) = 0$.

Как обычно, называем формулу φ *истинной* на CL-оценке v, если $v(\varphi) = 1$, и *ложной*, если $v(\varphi) = 0$. Ясно, что всякая CL-оценка однозначно задаётся своим ограничением на множество пропозициональных переменных: если для двух CL-оценок v_1 и v_2 выполнено $v_1 \restriction_{Prop} = v_2 \restriction_{Prop}$, то $v_1 = v_2$.

Множество классически общезначимых формул и семантические отношения следования между множествами формул и формулами, а также между множествами формул вводятся естественным образом.

Определение 1.2.2. Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq For^{CL}$ и $\varphi \in For^{CL}$.

1. $\Gamma \vDash_{CL} \varphi$, если и только если для любой CL-оценки v из того, что $v(\psi) = 1$ для всех $\psi \in \Gamma$, следует $v(\varphi) = 1$.

2. $\Gamma \vDash_{CL} \Delta$, если и только если для любой CL-оценки v из того, что $v(\psi) = 1$ для всех $\psi \in \Gamma$, следует $v(\chi) = 1$ для некоторой $\chi \in \Delta$.

3. Говорим, что φ *классически общезначима* (или *CL-общезначима*), когда она истинна на каждой CL-оценке.

Ясно, что формула φ классически общезначима в том и только том случае, когда $\varnothing \vDash_{CL} \varphi$. В дальнейшем условимся писать $\vDash_{CL} \varphi$ ($\vDash_{CL} \Delta$) вместо $\varnothing \vDash_{CL} \varphi$ ($\varnothing \vDash_{CL} \Delta$) и $\Gamma, \psi \vDash_{CL} \varphi$ ($\Gamma, \psi \vDash_{CL} \Delta$) вместо $\Gamma \cup \{\psi\} \vDash_{CL} \varphi$ ($\Gamma \cup \{\psi\} \vDash_{CL} \Delta$) соответственно.

В качестве синтаксического аналога понятия CL-оценки выступает понятие полной CL-теории (напоминаем, определение CL как дедуктивной системы гильбертовского типа было дано нами ранее).

Определение 1.2.3. Множество формул $\Gamma \subseteq For^{CL}$ называется *полной CL-теорией*, если выполнены следующие условия: 1) $\Gamma \neq For^{CL}$; 2) Γ является CL-теорией; 3) для каждой $\varphi \in For^{CL}$ верно $\varphi \in \Gamma$ либо $\neg\varphi \in \Gamma$.

Несложно проверить, множества формул, истинных на той или иной CL-оценке, оказываются полными CL-теориями.

Лемма 1.2.4. *Пусть v — произвольная CL-оценка и $\Gamma_v := \{\varphi \in For^{CL} \mid v(\varphi) = 1\}$. Тогда Γ_v будет полной CL-теорией.*

Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве теоремы о полноте и представляет собой вариант известной теоремы Линденбаума (стандартное изложение последней можно найти в [10]).

Лемма 1.2.5 (О расширении). *Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq For^{CL}$, причём $\Delta \neq \varnothing$. Если $\Gamma \nvdash_{CL} \Delta$, то найдётся полная CL-теория Γ' со свойством: $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash_{CL} \Delta$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ — список всех формул языка $\mathcal{L}^{CL}$. Индуктивно определим последовательность возрастающих по $\subseteq$ множеств формул Γ_n, $n \in \omega$. Пусть $\Gamma_0 := \Gamma$, а для $n > 0$ полагаем

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{если } \Gamma_n, \varphi_n \nvdash_{CL} \Delta, \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь возьмём $\Gamma' := \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$ и проверим, что Γ' — это требуемая полная CL-теория.

Сначала докажем по индукции, что для любого n выполнено $\Gamma_n \nvdash_{CL} \Delta$. База индукции есть одно из условий леммы. Допустим, $\Gamma_n \nvdash_{CL} \Delta$, но при этом $\Gamma_{n+1} \vdash_{CL} \Delta$. Согласно определению Γ_{n+1} имеем

$$\Gamma_n, \varphi_n \vdash_{CL} \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k \quad \text{и} \quad \Gamma_n, \neg\varphi_n \vdash_{CL} \psi_{k+1} \vee \ldots \vee \psi_{k+m}$$

для некоторых $\psi_1, \ldots, \psi_{k+m} \in \Delta$. Обозначим $\chi := \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_{k+m}$. Легко понять (в силу аксиом 6–7 дедуктивной системы CL), что $\Gamma_n, \varphi_n \vdash_{CL} \chi$ и $\Gamma_n, \neg\varphi_n \vdash_{CL} \chi$, откуда по теореме дедукции заключаем

$$\Gamma_n \vdash_{CL} \varphi_n \to \chi \quad \text{и} \quad \Gamma_n \vdash_{CL} \neg\varphi_n \to \chi\,.$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_s = \varphi_n \to \chi$ и $\beta_1, \dots, \beta_t = \neg\varphi_n \to \chi$ суть соответствующие выводы. Тогда последовательность формул

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s,\ \beta_1, \dots, \beta_t,\ (\varphi_n \to \chi) \to ((\neg\varphi_n \to \chi) \to ((\varphi_n \vee \neg\varphi_n) \to \chi)),$$

$$(\neg\varphi_n \to \chi) \to ((\varphi_n \vee \neg\varphi_n) \to \chi),\ (\varphi_n \vee \neg\varphi_n) \to \chi\,,\ \varphi_n \vee \neg\varphi_n,\ \chi$$

показывает наличие выводимости $\Gamma_n \vdash_{CL} \chi$, т. е. $\Gamma_n \vdash_{CL} \Delta$, противоречащей нашему исходному предположению.

Из свойства компактности вывода и того, что $\Gamma_n \nvdash_{CL} \Delta$ для любого n, немедленно получаем $\Gamma' \nvdash_{CL} \Delta$.

Остается проверить, что Γ' — полная CL-теория. Поскольку $\Gamma' \cap \Delta = \varnothing$ (ввиду $\Gamma' \nvdash_{CL} \Delta$), то неравенство $\Gamma' \neq For^{CL}$ уже установлено.

Если $\varphi_n \in Taut_{CL}$ и $\Gamma_n \nvdash_{CL} \Delta$, то $\Gamma_n, \varphi_n \nvdash_{CL} \Delta$. Поэтому $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ и, следовательно, $Taut_{CL} \subseteq \Gamma'$.

Проверим замкнутость множества Γ' относительно правила *modus ponens*. Пусть $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma'$, но $\psi \notin \Gamma'$. Значит, для некоторого n будем иметь $\psi = \varphi_n$, причём $\Gamma_n, \psi \vdash_{CL} \Delta$. Возьмём достаточно большое m такое, что $n \leq m$ и $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma_m$. Тогда $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ и $\Gamma_m \vdash_{CL} \psi$, а по транзитивности отношения выводимости получаем $\Gamma_m \vdash_{CL} \Delta$ — это противоречит доказанному ранее.

Мы проверили, таким образом, что Γ' является CL-теорией. Кроме того, по определению $\varphi_n \in \Gamma_n$ либо $\neg\varphi_n \in \Gamma_n$, откуда сразу следует полнота Γ'. □

Далее принципиальную роль играет то, что свойства полных CL-теорий демонстрируют их тесную взаимосвязь с ранее введёнными CL-оценками.

Лемма 1.2.6 (Свойства полных CL-теорий). *Пусть Γ — полная CL-теория. Для любых формул φ и ψ из For^{CL} справедливы эквивалентности:*

1) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$*;*

2) $\varphi \vee \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$*;*

3) $\varphi \to \psi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$*;*

4) $\neg\varphi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$.

Доказательство. 1) Если $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, то $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$ в силу аксиом 3–4 классической логики. Обратно: предположим, φ и ψ лежат в Γ. Тогда последовательность

$$\varphi\,,\ \psi\,,\ (\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))),\ \varphi \to \varphi\,,\ (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi)),$$

$$\psi \to (\varphi \to \psi),\ \varphi \to \psi\,,\ \varphi \to (\varphi \wedge \psi),\ \varphi \wedge \psi$$

влечёт $\Gamma \vdash_{CL} \varphi \wedge \psi$, что эквивалентно $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ввиду дедуктивной замкнутости Γ.

2) Если $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$, то $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ в силу аксиом 6–7. Допустим, что $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, но при этом $\varphi \notin \Gamma$ и $\psi \notin \Gamma$. Из полноты Γ следует $\neg\varphi \in \Gamma$ и $\neg\psi \in \Gamma$, откуда

$$\Gamma, \varphi \vdash_{CL} \varphi \wedge \neg\varphi \quad \text{и} \quad \Gamma, \psi \vdash_{CL} \psi \wedge \neg\psi\,.$$

Из аксиомы 10 (с учётом $\neg\psi \in \Gamma$) получаем $\Gamma, \psi \vdash_{CL} \varphi \wedge \neg\varphi$. По аксиоме 8 последнее вместе с уже имеющимся $\Gamma, \varphi \vdash_{CL} \varphi \wedge \neg\varphi$ даёт $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{CL} \varphi \wedge \neg\varphi$, т. е. $\Gamma \vdash_{CL} \varphi \wedge \neg\varphi$, что ввиду аксиомы 10 означает $\Gamma = For^{CL}$. Это противоречит определению полной CL-теории.

3) Пусть $\varphi \to \psi \in \Gamma$. Если $\varphi \notin \Gamma$ неверно, то $\varphi \in \Gamma$ и, применяя *modus ponens*, мы получаем $\psi \in \Gamma$.

Из $\psi \in \Gamma$ соотношение $\varphi \to \psi \in \Gamma$ следует по аксиоме 1. Если же $\varphi \notin \Gamma$, то $\neg\varphi \in \Gamma$, откуда $\varphi \to \psi \in \Gamma$ следует по аксиоме 10.

4) Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\neg\varphi \in \Gamma$ (из полноты Γ). Если же $\varphi \in \Gamma$, то $\neg\varphi$ не может лежать в Γ: в противном случае с помощью аксиомы 11 придём к $\Gamma = For^{CL}$. □

Лемма 1.2.7. *Пусть Γ — полная CL-теория. Зададим $v_\Gamma : For^{CL} \to \{0,1\}$ согласно правилу:*

$$v_\Gamma(\varphi) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma\,.$$

Тогда отображение v_Γ будет CL-оценкой.

Доказательство. Используя предыдущую лемму, требуемый факт легко проверить индукцией по сложности формул. □

Теперь мы готовы утановить результат о полноте системы CL.

Теорема 1.2.8 (Сильная полнота для CL). *Для любых множеств формул $\Gamma, \Delta \subseteq For^{CL}$, где $\Delta \neq \varnothing$, справедлива эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_{CL} \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{CL} \Delta\,.$$

Доказательство. Если $\Gamma \vdash_{CL} \Delta$, то соотношение $\Gamma \vDash_{CL} \Delta$ доказывается стандартным образом индукцией по длине вывода формулы $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Delta$, из множества гипотез Γ. Эту рутинную импликацию в утверждениях о полноте, которая часто называется теоремой о корректности, мы нередко будем опускать.

Предположим теперь, что $\Gamma \nvdash_{CL} \Delta$. Согласно лемме о расширении (лемма 1.2.5) найдется полная CL-теория Γ' со свойствами: $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash_{CL} \Delta$. В частности, $\Gamma' \cap \Delta = \varnothing$. Рассмотрим CL-оценку $v_{\Gamma'}$. Очевидно, $v_{\Gamma'}(\varphi) = 1$ для всех $\varphi \in \Gamma$, так как $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Вместе с тем $v_\Gamma(\psi) = 0$ для любой $\psi \in \Delta$ ввиду равенства $\Gamma' \cap \Delta = \varnothing$. Мы доказали, тем самым, что $\Gamma \nvDash_{CL} \Delta$. □

Из теоремы немедленно вытекают два следствия.

Следствие 1.2.9. *Для любых множества формул $\Gamma \subseteq For^{CL}$ и формулы $\varphi \in For^{CL}$ справедлива эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_{CL} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{CL} \varphi\,.$$

Следствие 1.2.10 (Слабая полнота для CL). *Для любой формулы $\varphi \in For^{CL}$ справедлива эквивалентность*

$$\varphi \in Taut_{CL} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \ \ \textit{классически общезначима}\,.$$

1.3. Дедуктивные системы CL^+ и $CLuN$

Теперь мы попробуем изменить дедуктивную систему и адаптировать для нее изложенную выше схему доказательства полноты. Сперва рассмотрим систему, которую даже нельзя назвать неклассической: это будет позитивный фрагмент (точный смысл термина “фрагмент” будет обсуждаться позже) классической логики.

Определение 1.3.1. Определим дедуктивную систему $CL^+ = \langle \mathcal{L}^{CL^+}, Ax^{CL^+}, \{MP\}\rangle$ *классической позитивной логики* следующим образом:

1) $\mathcal{L}^{CL^+} := \{\vee^2, \wedge^2, \to^2\}$;

2) множество Ax^{CL^+} включает в себя аксиомы 1–8 дедуктивной системы CL и дополнительно аксиому

$$E. \quad p \vee (p \to q) \text{ (обобщенный закон исключенного третьего).}$$

В дальнейшем пишем $\mathcal{L}^+$ вместо $\mathcal{L}^{CL^+}$ и For^+ вместо $For_{\mathcal{L}^+}$ соответственно. Семантика для CL^+ получается из семантики для CL за счёт исключения из рассмотрения связки отрицания $\neg$.

Определение 1.3.2. Отображение $v : For^+ \to \{0, 1\}$ называется CL^+-оценкой, если для любых φ и ψ из For^+ выполнены следующие условия:

1) $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 1$ и $v(\psi) = 1$;

2) $v(\varphi \vee \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 1$ или $v(\psi) = 1$;

3) $v(\varphi \to \psi) = 1 \iff v(\varphi) = 0$ или $v(\psi) = 1$.

Семантические отношения следования $\Gamma \models_{CL^+} \varphi$ и $\Gamma \models_{CL^+} \Delta$, а также множество *позитивных классически общезначимых* (или короче: CL^+*-общезначимых*) *формул* определяются аналогично соответствующим понятиям для CL.

Доказательство теоремы полноты следует той же самой схеме, но в языке без отрицания мы не можем определить полные теории, поэтому заменим их на “простые” теории, которые мы определим для произвольной дедуктивной системы, в языке которой присутствует связка дизъюнкции $\vee$.

Определение 1.3.3. Пусть $S = \langle \mathcal{L}^S, Ax^S, Rule^S\rangle$ — дедуктивная система и $\vee^2 \in \mathcal{L}^S$. Множество формул $\Gamma \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$ называется *простой* S*-теорией*, если выполнены следующие условия: 1) $\Gamma \neq For_{\mathcal{L}^S}$, т. е. Γ нетривиальна; 2) Γ — S-теория; 3) Γ удовлетворяет дизъюнктивному свойству (DP), т. е. из принадлежности $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ всегда следует, что $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Вообще, для некоторого множества формул $\Gamma \subseteq For_{\mathcal{L}^S}$ говорим, что оно удовлетворяет *дизъюнктивному свойству*, если для каждой пары формул $\{\varphi, \psi\} \subset For_{\mathcal{L}^S}$ отношение $\Gamma \vdash_S \varphi \vee \psi$ влечёт $\Gamma \vdash_S \varphi$ или $\Gamma \vdash_S \psi$.

Применительно к CL^+ справедлив аналог леммы 1.2.4.

Лемма 1.3.4. *Пусть v — произвольная CL^+-оценка и $\Gamma_v := \{\varphi \in For^+ \mid v(\varphi) = 1\}$. Тогда Γ_v будет простой CL^+-теорией.*

Затем в формулировке леммы о расширении полная теория заменяется простой, доказательство при этом скорее упрощается.

Лемма 1.3.5 (О расширении). *Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq For^+$, причём $\Delta \neq \varnothing$. Если $\Gamma \nvdash_{CL^+} \Delta$, то найдётся простая CL^+-теория Γ' со свойством: $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash_{CL^+} \Delta$.*

Доказательство. Рассмотрим список $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ всех формул языка $\mathcal{L}^+$ и вновь определим по индукции последовательность множеств формул Γ_n, возрастающую по включению. Пусть $\Gamma_0 := \Gamma$, а для $n > 0$ полагаем

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}\,, & \text{если } \ \Gamma_n, \varphi_n \nvdash_{CL^+} \Delta, \\ \Gamma_n\,, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Возьмём $\Gamma' := \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$ и убедимся, что Γ' окажется нужной простой CL^+-теорией.

Из определения сразу следует, что для любого n выполнено $\Gamma_n \nvdash_{CL} \Delta$. Из данного факта и свойства компактности вывода получаем $\Gamma' \nvdash_{CL} \Delta$. В частности, $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$, а потому $\Gamma' \neq For^+$.

В точности так же, как и в доказательстве леммы 1.2.5, проверяем, что Γ' — это CL^+-теория (здесь рассуждения переносятся почти дословно).

Осталось установить дизъюнктивное свойство для Γ'. Пусть $\varphi \vee \psi \in \Gamma'$, однако $\varphi \notin \Gamma'$ и $\psi \notin \Gamma'$. Следовательно, для подходящих n и m имеем

$$\Gamma_n, \varphi \vdash_{CL^+} \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_s \quad \text{и} \quad \Gamma_m, \psi \vdash \chi_{s+1} \vee \ldots \vee \chi_{s+t}\,,$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_{s+t} \in \Delta$. Пусть $k = \max\{n, m\}$ и $\theta = \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_{s+t}$. Поскольку CL^+ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.5, то

$$\Gamma_k \vdash_{CL^+} \varphi \to \theta \quad \text{и} \quad \Gamma_k \vdash_{CL^+} \psi \to \theta\,,$$

откуда с помощью аксиомы 8 выводим: $\Gamma_k, \varphi \vee \psi \vdash_{CL^+} \theta$. Учитывая, что $\varphi \vee \psi \in \Gamma'$ и θ есть дизъюнкция формул из Δ, получаем $\Gamma' \vdash_{CL^+} \Delta$. Последнее противоречит доказанному ранее. □

Свойства простых CL^+-теорий подобны свойствам полных CL-теорий.

Лемма 1.3.6 (Свойства простых CL^+-теорий). *Пусть Γ — простая CL-теория. Для любых φ и ψ из For^+ справедливы эквивалентности:*

1) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma$*;*

2) $\varphi \vee \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$*;*

3) $\varphi \to \psi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$.

Доказательство. 1) Этот пункт доказывается, как в лемме 1.2.6.

2) Прямая импликация верна ввиду дизъюнктивного свойства, а обратная выводится с помощью аксиом 6–7.

3) Пусть $\varphi \to \psi \in \Gamma$. Если $\varphi \notin \Gamma$ неверно, то это равносильно $\varphi \in \Gamma$, и по *modus ponens* мы приходим к $\psi \in \Gamma$. Обратно: из $\psi \in \Gamma$ соотношение $\varphi \to \psi \in \Gamma$ следует по аксиоме 1; когда $\varphi \notin \Gamma$, из $\varphi \vee (\varphi \to \psi) \in \Gamma$ (частный случай аксиомы E) и дизъюнктивного свойства для Γ с необходимостью заключаем $\varphi \to \psi \in \Gamma$. □

Отсюда сразу вытекает аналог леммы 1.2.7 для CL^+.

Лемма 1.3.7. *Пусть Γ — простая CL^+-теория. Зададим $v_\Gamma : For^+ \to \{0,1\}$ согласно правилу :*

$$v_\Gamma(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Gamma\,.$$

Тогда отображение v_Γ будет CL^+-оценкой.

Наконец, результат о полноте аналогичен случаю классической логики.

Теорема 1.3.8 (Сильная полнота для CL^+). *Для любых* $\Gamma, \Delta \subseteq For^+$, *где* $\Delta \neq \varnothing$, *справедлива эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_{CL^+} \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{CL^+} \Delta\,.$$

Доказательство. Рассмотрим только нетривиальную импликацию. Пусть $\Gamma \nvdash_{CL^+} \Delta$. По лемме о расширении (лемме 1.3.5) существует простая CL^+-теория Γ' такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash_{CL^+} \Delta$. В частности, $\Gamma' \cap \Delta = \varnothing$. Рассмотрим соответствующую CL^+-оценку $v_{\Gamma'}$: включение $\Gamma \subseteq \Gamma'$ даёт $v_{\Gamma'}(\varphi) = 1$ для каждой $\varphi \in \Gamma$; с другой стороны, $\Gamma' \cap \Delta = \varnothing$ означает $v_{\Gamma}(\psi) = 0$ для всех $\psi \in \Delta$. Итак, $\Gamma \nvDash_{CL^+} \Delta$. □

Следствие 1.3.9. *Для любых* $\Gamma \subseteq For^+$ *и* $\varphi \in For^+$ *справедлива эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_{CL^+} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{CL^+} \varphi\,.$$

Следствие 1.3.10 (Слабая полнота для CL^+). *Для любой* $\varphi \in For^+$ *справедлива эквивалентность*

$$\varphi \in Taut_{CL^+} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \;-\; CL^+\text{-}\textit{общезначима}\,.$$

В заключение рассмотрим логику, где свойства отрицания существенно отличаются от классических, хотя позитивые связки (а именно $\wedge$, $\vee$ и $\to$) по-прежнему интерпретируются классически.

Определение 1.3.11. Определим дедуктивную систему $CLuN = \langle \mathcal{L}^{CL}, Ax^{CLuN}, \{MP\} \rangle$ в языке классической логики с множеством аксиом Ax^{CLuN}, включающим в себя аксиомы Ax^{CL^+} дедуктивной системы CL^+ и дополнительно аксиому

$$X. \quad p \vee \neg p \ (\textit{закон исключенного третьего}).$$

Аксиома X есть аксиома 11 в списке для CL. Таким образом, из классических аксиом для отрицания в $CLuN$ отсутствует аксиома 10, означающая (интуитивно) тривиальность всякой теории, в которой выводимо φ и $\neg\varphi$ (для какого-нибудь φ). Если такие теории называть *противоречивыми*, то для $CLuN$ будут существовать нетривиальные противоречивые $CLuN$-теории. Неформально это свойство можно было бы назвать *паранепротиворечивостью* дедуктивной системы.

Определение 1.3.12. Отображение $v : For^{CL} \to \{0, 1\}$ называется $CLuN$-оценкой, если для любых φ и ψ из For^{CL} выполнены условия 1–3 определения CL^+-оценки и дополнительно условие

4^u) $v(\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v(\neg\varphi) = 1.$

Заметим, что $CLuN$-оценка уже не задаётся однозачно своим ограничением на множество пропозициональных переменных, так как в силу условия 4^u значение отрицания $\neg\varphi$ на оценке v не определяется однозначно по значению $v(\varphi)$. Далее стандартным образом вводятся семантические отношения следования $\Gamma \vDash_{CLuN} \varphi$ и $\Gamma \vDash_{CLuN} \Delta$, а также множество $CLuN$-*общезначимых формул.*

Кроме того, не имеет места вариант лемм 1.2.4 и 1.3.4: не всякая $CLuN$-оценка порождает простую $CLuN$-теорию. Действительно, $CLuN$-оценке v, тождественно равной единице (на всех элементах For^{CL}), соответствует $CLuN$-теория $\{\varphi \in For^{CL} \mid v(\varphi) = 1\} = For^{CL}$, но простые теории нетривиальны. Тем не менее $CLuN$ во многом остаётся подобной ранее рассмотренным системам. Например, лемма о расширении формулируется и доказывается полностью аналогично лемме 1.3.5.

Лемма 1.3.13 (О расширении). *Пусть* $\Gamma, \Delta \subseteq For^{CL}$, *причём* $\Delta \neq \varnothing$. *Если* $\Gamma \nvdash_{CLuN} \Delta$, *то найдётся простая* $CLuN$*-теория* Γ' *со свойством:* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *и* $\Gamma' \nvdash_{CLuN} \Delta$.

Оказывается, что простые $CLuN$-теории являются полными.

Лемма 1.3.14 (Свойства простых $CLuN$-теорий). *Пусть* Γ *— простая* $CLuN$*-теория. Для любых* φ *и* ψ *из* For^{CL} *справедливы пп. 1–3 из леммы 1.3.6, а также следующее условие полноты:*

4) $\varphi \in \Gamma$ *или* $\neg\varphi \in \Gamma$.

Доказательство. Пункты 1–3 доказываются дословно, как в лемме 1.3.6, а пункт 4 следует из дизъюнктивного свойства и закона исключённого третьего. □

Лемма 1.3.15. *Пусть* Γ *— простая* $CLuN$*-теория. Зададим* $v_\Gamma : For^{CL} \to \{0,1\}$ *согласно правилу:*

$$v_\Gamma(\varphi) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma\,.$$

Тогда отображение v_Γ *будет* $CLuN$*-оценкой.*

Доказательство. Проверим только условие 4^u из определения 1.3.12 (остальные три условия немедленно следуют из леммы 1.3.14, пп. 1–3). Допустим, $v_\Gamma(\varphi) = 0$. По определению это означает, что $\varphi \notin \Gamma$, а поскольку простая $CLuN$-теория полна, то с необходимостью имеем $\neg\varphi \in \Gamma$, т. е. $v_\Gamma(\neg\varphi) = 1$. □

Повторяя рассуждения из теоремы о полноте для CL^+ (разумеется, с заменой всюду CL^+-оценок на $CLuN$-оценки, и т. п.), получим

Теорема 1.3.16 (Сильная полнота для $CLuN$). *Для любых* $\Gamma, \Delta \subseteq For^{CL}$, *где* $\Delta \neq \varnothing$, *справедлива эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_{CLuN} \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{CLuN} \Delta\,.$$

Следствие 1.3.17. *Для любых* $\Gamma \subseteq For^{CL}$ *и* $\varphi \in For^{CL}$ *справедлива эквивалентность*

$$\Gamma \vdash_{CLuN} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash_{CLuN} \varphi\,.$$

Следствие 1.3.18 (Слабая полнота для CL^+). *Для любой* $\varphi \in For^{CL}$ *справедлива эквивалентность*

$$\varphi \in Taut_{CLuN} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \;-\; CLuN\text{-}\textit{общезначима}\,.$$

Замечание 1.3.19. Хотя в данном курсе мы не будем касаться предикатных версий рассматриваемых неклассических логик, скажем несколько слов о том, каким образом подобные обобщения осуществляются. Например, в отличие от пропозиционального случая (см. лемму 1.2.7), полные теории в классическом исчислении предикатов могут не задавать однозначной истинностной оценки, поэтому доказательство теоремы Линденбаума модифицируется для получения так называемых *полных теорий Хенкина* со "свидетелями-константами" для каждого экзистенциального предложения (подробнее см. [10], § 2.1). В действительности эта техника может быть легко адаптирована, например, для предикативных версий CL^+ и $CLuN$.

1.4. Логики и отношения между ними

Мы отметили ранее, что наличие теоремы дедукции позволяет свести отношение следования, заданное дедуктивной системой, к множеству тавтологий дедуктивной системы. Это обстоятельство мотивирует следующее определение.

Определение 1.4.1. Пусть $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык, содержащий связку импликации, $\to^2 \in \mathcal{L}$. *Логика в языке* $\mathcal{L}$ — это множество формул $L \subseteq For_{\mathcal{L}}$, замкнутое относительно правил *подстановки* и *modus ponens*, т. е. для любых $\{\varphi, \psi\} \subset For_{\mathcal{L}}$ выполнено:

1) если $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in L$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subset For_{\mathcal{L}}$, то $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in L$;

2) если φ и $\varphi \to \psi$ лежат в L, то и ψ лежит в L.

Обозначим через $\mathcal{LOG}(\mathcal{L})$ семейство всех логик в языке $\mathcal{L}$.[1]

В дальнейшем, если не оговорено обратное, предполагаем, что $\to \in \mathcal{L}$.

Замечание 1.4.2. Если дедуктивная система $S = \langle \mathcal{L}^S, Ax^S, Rule^S \rangle$ такова, что $MP \in Rule^S$, то множество $Taut_S$ является логикой в языке $\mathcal{L}$.

Замечание 1.4.3. Если $\{L_i \mid i \in I\}$ — семейство логик в языке $\mathcal{L}$ (здесь I суть произвольное множество индексов, конечное или бесконечное), то $\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$.

Пусть $L \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$ и $X \subseteq For_{\mathcal{L}}$. Обозначим через $L + X$ наименьшую логику в языке $\mathcal{L}$, содержащую L и X. Она всегда существует ввиду замечания 1.4.3, ибо $L + X$ есть пересечение всех логих $L' \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$ со свойством $L' \supseteq L \cup X$.

Кроме того, $L + X$ можно определить и более “конструктивно”: $L + X$ составляют все $\mathcal{L}$-формулы φ такие, что найдётся конечная последовательность $\psi_1, \ldots, \psi_n = \varphi$ формул языка $\mathcal{L}$, в которой каждая ψ_i (для $i \in \{1, \ldots, n\}$) либо является результатом применения подстановки к некой $\psi \in L \cup X$, либо получается из каких-нибудь предыдущих по правилу *modus ponens* (сравни с пп. 1–2 в определении 1.4.1).

Разумеется, для логик $L_1, L_2 \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$ запись $L_1 + L_2$ тоже имеет смысл, причём $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$. Более того, справедливо следующее

Замечание 1.4.4. Частичный порядок $\langle \mathcal{LOG}(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ образует решетку с решеточными операциями $\cap$ и $+$.

С каждой логикой $L \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$ мы можем связать дедуктивную систему $S_L = \langle \mathcal{L}, L, \{MP\} \rangle$. Определим отношение следования в логике L как отношение следования в дедуктивной системе S_L, т. е. для $\Gamma, \Delta \subseteq For_{\mathcal{L}}$ и $\varphi \in For_{\mathcal{L}}$ полагаем

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash_L \varphi, &\quad \text{если и только если} \quad \Gamma \vdash_{S_L} \varphi\,; \\ \Gamma \vdash_L \Delta, &\quad \text{если и только если} \quad \Gamma \vdash_{S_L} \Delta\,. \end{aligned}$$

Замечание 1.4.5. $L = Taut_{S_L}$.

Говорим, что логика L удовлетворяет теореме дедукции, если дедуктивная система S_L удовлетворяет теореме дедукции относительно $\to$.

[1] Отметим, позже мы будем рассматривать так называемые *нормальные модальные логики*, обладающие некоторыми дополнительными свойствами замкнутости.

Замечание 1.4.6. Если $p \to (q \to p)$, $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \in L$, то логика L удовлетворяет теореме дедукции (см. теорему 1.1.5).

Замечание 1.4.7. Если логика L удовлетворяет теореме дедукции, то $\Gamma \vdash_L \varphi$ эквивалентно $\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots (\psi_n \to \varphi) \ldots) \in L$ для некоторых $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ (см. следствие 1.1.6).

Отметим ещё один несложный, но важный факт (его доказательство оставляется читателю в качестве упражнения).

Предложение 1.4.8. *Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — пропозициональные языки такие, что $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$. Если L — логика в языке $\mathcal{L}_2$, то $L \cap For_{\mathcal{L}_1} \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_1)$.*

Определение 1.4.9. Пусть $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_1)$ и $L_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_2)$. Если $L_1 = L_2 \cap For_{\mathcal{L}_1}$, то логика L_1 называется *$\mathcal{L}_1$-фрагментом логики L_2*, а логика L_2 — *консервативным расширением логики L_1*.

Логики, задаваемые дедуктивными системами классической и позитивной классической логик, будем обозначать следующим образом:

$$Cl \ := \ Taut_{CL} \quad \text{и} \quad Cl^+ \ := \ Taut_{CL^+}\,.$$

Предложение 1.4.10. *Логика Cl является консервативным расширением логики Cl^+.*

Доказательство. Нам нужно проверить равенство $Cl^+ = Cl \cap For^+$. Очевидно, что выполнено $Cl^+ \subseteq Cl \cap For^+$. Проверим обратное включение. Пусть $\varphi \in For^+$ и $\varphi \notin CL^+$. Тогда найдется CL^+-оценка v такая, что $v(\varphi) = 0$. Рассмотрим CL-оценку v' такую, что $v' \restriction_{Prop} = v \restriction_{Prop}$. Очевидно, что $v'(\psi) = v(\psi)$ для любой $\psi \in For^+$. Таким образом, $v'(\varphi) = 0$ и $\varphi \notin Cl$. $\square$

Сейчас мы рассмотрим один важный класс консервативных расширений. Однако сначала несколько слов о том, как мы будем понимать выражение $\varphi \leftrightarrow \psi$, если связка эквивалентности $\leftrightarrow$ отсутствует в языке.

Выражение $\varphi \leftrightarrow \psi$ будем рассматривать как сокращенную запись пары формул $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$, при этом правило

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\chi}$$

является сокращённой записью для двухпосылочного правила

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \varphi}{\chi}\,,$$

а правило

$$\frac{\chi_1 \ \cdots \ \chi_n}{\varphi \leftrightarrow \psi}$$

рассматривается как сокращенная запись двух правил

$$\frac{\chi_1 \ \cdots \ \chi_n}{\varphi \to \psi} \quad \text{и} \quad \frac{\chi_1 \ \cdots \ \chi_n}{\psi \to \varphi}\,.$$

Если в языке присутствует конъюнкция, то запись $\varphi \leftrightarrow \psi$ можно понимать и стандартным образом как $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Определение 1.4.11. Пусть $\mathcal{L}_1$ — пропозициональный язык, $L \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_1)$, и выполнено какое-либо из двух условий

- $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{f^n\}$ и $L' = L + \{f(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \phi(p_1, \ldots, p_n)\}$, где $\phi \in For_{\mathcal{L}_1}$;
- $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{c^0\}$ и $L' = L + \{c \leftrightarrow \phi(p_1, \ldots, p_n)\}$, где $\phi \in For_{\mathcal{L}_1}$, причём для любых $\psi_1, \ldots, \psi_n \in For_{\mathcal{L}_1}$ имеем $\phi(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \phi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in L$.

В обоих случаях логику L_2 будем называть *простым дефинициальным расширением логики* L_1. Далее, логика L' называется *дефинициальным расширением логики* L, если найдется цепочка логик $L = L_1, \ldots, L_n = L'$ такая, что каждая из логик L_{k+1} является простым дефинициальным расширением логики L_k при $k < n$.

Предложение 1.4.12. *Пусть $L \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$ и $p \to p \in L$. Если логика L' — дефинициальное расширение логики L, то L' является консервативным расширением L.*

Доказательство. Поскольку отношение “быть консервативным расширением” очевидным образом транзитивно, достаточно рассмотреть случай простых дефинициальных расширений.

Пусть $L' = L + \{f(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \phi(p_1, \ldots, p_n)\}$, где $\phi \in For_{\mathcal{L}_1}$. Очевидно, что для любой $\varphi \in For_{\mathcal{L}}$ из $\varphi \in L$ следует $\varphi \in L'$.

Для доказательства обратной импликации определим трансляцию τ из языка $\mathcal{L} \cup \{f\}$ в язык $\mathcal{L}$, т. е. отображение $\tau : For_{\mathcal{L}\cup\{f\}} \to For_{\mathcal{L}}$, следующим образом:

$$\tau p := p,\ p \in Prop; \quad \tau c := c,\ c \in \mathcal{L}\,;$$

$$\tau g(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) := g(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_m),\ g \in \mathcal{L}\,;$$

$$\tau f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \phi(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_n).$$

Если $\varphi \in L' \cap For_{\mathcal{L}}$, то найдется последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_m = \varphi$ такая, что любая формула этой последовательности является либо частным случаем формулы из L, либо частным случаем одной из аксиом $f(p_1, \ldots, p_n) \to \phi(p_1, \ldots, p_n)$ или $\phi(p_1, \ldots, p_n) \to f(p_1, \ldots, p_n)$, либо получается из предыдущих формул последовательности по правилу *modus ponens*.

Рассмотрим последовательность формул $\tau\psi_1, \ldots, \tau\psi_m = \tau\varphi = \varphi$ и покажем индукцией по i, что для любого $i \leq m$ верно $\tau\psi_i \in L$.

1. Если ψ_i — частный случай формулы из L, т. е. $\psi_i = \chi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где $\chi \in L$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n \in For_{\mathcal{L}\cup\{f\}}$, то $\tau\psi_i = \chi(\tau\xi_1, \ldots, \tau\xi_n)$, так как трансляция τ коммутирует со всеми связками языка $\mathcal{L}$. Таким образом, $\tau\psi_i$ — частный случай формулы $\chi \in L$, следовательно, $\tau\psi_i \in L$. Заметим, что сама формула ψ_i не обязательно принадлежит L, так как она может содержать символ f, не входящий в язык логики L.

2. Если $\psi_i = f(\chi_1, \ldots, \chi_n) \to \phi(\chi_1, \ldots, \chi_n)$, то $\tau\psi_i = \phi(\tau\chi_1, \ldots, \tau\chi_n) \to \phi(\tau\chi_1, \ldots, \tau\chi_n)$. Эта формула лежит в L ввиду $p \to p \in L$.

Аналогично для обратной импликации $\phi(\chi_1, \ldots, \chi_n) \to f(\chi_1, \ldots, \chi_n)$.

3. Пусть ψ_i такова, что $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$ для некоторых $j, k < i$. По индукционному предположению $\tau\psi_j \in L$ и $\tau\psi_k = \tau(\psi_j \to \psi_i) = \tau\psi_j \to \tau\psi_i \in L$. Однократное применение *modus ponens* дает $\tau\psi_i \in L$.

Тем самым мы доказали $\tau\psi_m = \varphi \in L$.

Если $L' = L + \{c \leftrightarrow \phi(p_1, \ldots, p_n)\}$, рассуждаем аналогичным образом. Единственное отличие возникает при разборе случая $\tau(c \to \phi(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = \phi(p_1, \ldots, p_n) \to \phi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Именно здесь используется условие, что формула ϕ эквивалентна в L любому своему частному случаю. $\square$

Рассмотрим язык $\mathcal{L}^{\perp} := \langle \vee, \wedge, \to, \perp \rangle$.

Пусть $Cl^{\perp}$ — наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^{\perp}$, содержащая аксиомы $Ax^{CL^{+}}$ классической позитивной логики и аксиому

$$10^{\perp}. \quad \perp \to p\,.$$

Определим трансляции $\theta : For_{\mathcal{L}^{CL}} \to For_{\mathcal{L}^{\perp}}$ и $\rho : For_{\mathcal{L}^{\perp}} \to For_{\mathcal{L}^{CL}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta p \ &:= \ p\,, \quad p \in Prop\,; \\ \theta\,(\varphi * \psi) \ &:= \ \theta\varphi * \theta\psi\,, \quad * \in \{\vee, \wedge, \to\}\,; \\ \theta\neg\varphi \ &:= \ \theta\varphi \to \perp\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho p \ &:= \ p\,, \quad p \in Prop\,; \\ \rho\,(\varphi * \psi) \ &:= \ \rho\varphi * \rho\psi\,, \quad * \in \{\vee, \wedge, \to\}\,; \\ \rho\perp \ &:= \ \neg\,(p_0 \to p_0), \end{aligned}$$

где p_0 — фиксированая пропозициональная переменная.

Предложение 1.4.13. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой формулы φ языка $\mathcal{L}^{c}$ имеет место:*

$$\varphi \in Cl \quad \Longleftrightarrow \quad \theta\varphi \in Cl^{\perp}\,,$$
$$\varphi \leftrightarrow \rho\theta\varphi \ \in \ Cl\,.$$

2. *Для любой формулы φ языка $\mathcal{L}^{\perp}$ имеет место:*

$$\varphi \in Cl^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho\varphi \in Cl\,,$$
$$\varphi \leftrightarrow \theta\rho\varphi \ \in \ Cl^{\perp}\,.$$

Доказательство. Разбиение доказательства на этапы не соответствует пунктам предложения.

а) $\varphi \in Cl \ \Rightarrow \ \theta\varphi \in Cl^{\perp}$.

Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_n = \varphi$ — вывод формулы φ из частных случаев аксиом логики Cl с помощью *modus ponens*. Рассмотрим последовательность $\theta\phi_1, \ldots, \theta\phi_n = \theta\varphi$ и покажем индукцией по i, что для любого $i \leq n$ формула $\theta\phi_i$ лежит в $Cl^{\perp}$.

Очевидно, что частные случаи позитивных аксиом трансляция θ переводит снова в частные случаи позитивных аксиом (хотя и в другом языке). Рассмотрим трансляции аксиом для отрицания.

$$\theta((\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)) = (\theta\varphi \to (\theta\psi \to \perp)) \to ((\theta\varphi \to \theta\psi) \to (\theta\varphi \to \perp)).$$

Это частный случай формулы $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$, которая эквивалентна в классической позитивной логике аксиоме 2.

$$\theta(\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)) = (\theta\varphi \to \perp) \to (\theta\varphi \to \theta\psi).$$

Заметим, что $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q)) \in CL^{\perp}$. Логика $Cl^{\perp}$ удовлетворяет теореме дедукции, поэтому достаточно доказать $p \to q,\ r \to p,\ r \vdash_{Cl^{\perp}} q$. Теперь квазивывод для $(\theta\varphi \to \perp) \to (\theta\varphi \to \theta\psi)$ выглядит следующим образом:

$$\perp \to \theta\psi,\ (\perp \to \theta\psi) \to ((\theta\varphi \to \perp) \to (\theta\varphi \to \theta\psi)),\ (\theta\varphi \to \perp) \to (\theta\varphi \to \theta\psi).$$

Рассмотрим закон исключенного третьего $\theta(\varphi \vee \neg\varphi) = \theta\varphi \vee (\theta\varphi \to \perp)$. Получили частный случай обобщенного закона исключенного треьего.

Итак, мы показали, что все аксиомы переводятся трансляцией θ в доказуемые формулы. Если же формула ϕ_i получается из ϕ_j и ϕ_k по *modus ponens*, то $\theta\phi_i$ также получается из $\theta\phi_j$ и $\theta\phi_k$ по *modus ponens*, поскольку θ коммутирует с импликацией.

б) $\varphi \leftrightarrow \rho\theta\varphi \in Cl$.

Докажем это утверждение индукцией по сложности формулы φ. Базис индукции очевиден: $p \leftrightarrow \rho\theta p (= p) \in Cl$.

Пусть $* \in \{\vee, \wedge \to\}$ и уже доказано $\varphi_1 \leftrightarrow \rho\theta\varphi_1,\ \varphi_2 \leftrightarrow \rho\theta\varphi_2 \in Cl$. Известно, что

$$((\varphi_1 \leftrightarrow \psi_1) \wedge (\varphi_2 \leftrightarrow \psi_2)) \to ((\varphi_1 * \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 * \psi_2)) \in Cl\,. \tag{1.1}$$

Поэтому $(\varphi_1 * \varphi_2) \leftrightarrow (\rho\theta\varphi_1 * \rho\theta\varphi_2) \in Cl$. Остается заметить, $\rho\theta\varphi_1 * \rho\theta\varphi_2 = \rho\theta(\varphi_1 * \varphi_2)$.

Пусть $\varphi \leftrightarrow \rho\theta\varphi \in Cl$. Докажем $\neg\varphi \leftrightarrow \rho\theta\neg\varphi (= \rho\theta\varphi \to \neg(p_0 \to p_0)) \in Cl$. Согласно (1.1)

$$(\varphi \to \neg(p_0 \to p_0)) \leftrightarrow (\rho\theta\varphi \to \neg(p_0 \to p_0)) \in Cl\,,$$

поэтому остается доказать $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \neg(p_0 \to p_0)) \in Cl$. Импликация $\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(p_0 \to p_0))$ является частным случаем аксиомы 10. Докажем обратную импликацию:

$$p_0 \to p_0,\ (p_0 \to p_0) \to (\varphi \to (p_0 \to p_0))\ (ax\ 1),\ \varphi \to (p_0 \to p_0),$$

$$(\varphi \to (p_0 \to p_0)) \to ((\varphi \to \neg(p_0 \to p_0)) \to \neg\varphi)\ (ax\ 9),\ (\varphi \to \neg(p_0 \to p_0)) \to \neg\varphi\,.$$

в) $\varphi \in Cl^{\perp}\ \Rightarrow\ \rho\varphi \in Cl$.

Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_n = \varphi$ — вывод φ из аксиом логики $Cl^{\perp}$. Как и в пункте а), рассмотрим последовательность $\rho\phi_1, \ldots, \rho\phi_n = \rho\varphi$ и покажем, что любой ее элемент является доказуемой в $Cl^{\perp}$ формулой. Достаточно показать, что таковыми являются ρ-переводы частных случаев аксиомы $10^{\perp}$:

$$\rho(\perp \to \varphi) = \neg(p_0 \to p_0) \to \rho\varphi\,.$$

Легко проверить, что эта формула является классической тавтологией.

г) $\varphi \leftrightarrow \theta\rho\varphi \in Cl^{\perp}$. Опять доказываем индукцией по сложности формулы. Заметим, что формула из (1.1) принадлежит также и логике $Cl^{\perp}$, так как ее стандартное доказательство использует лишь позитивные аксиомы. Поэтому случай позитивных связок рассматривается, как в пункте б). Остается доказать, что $\perp \leftrightarrow \rho\theta\perp \in Cl^{\perp}$, т. е.

$$\perp \leftrightarrow ((p_0 \to p_0) \to \perp) \in Cl^{\perp}.$$

Импликация $\perp \to ((p_0 \to p_0) \to \perp)$ — частный случай аксиомы 1. Докажем

$$(p_0 \to p_0) \to \perp \vdash_{Cl^{\perp}} \perp\,.$$

Вот квазивывод: $(p_0 \to p_0)$, $(p_0 \to p_0) \to \perp$, $\perp$. По теореме дедукции получаем $((p_0 \to p_0) \to \perp) \to \perp \in Cl^{\perp}$.

д) $\theta\varphi \in Cl^{\perp} \ \Rightarrow \ \varphi \in Cl$.
Если $\theta\varphi \in Cl^{\perp}$, то $\rho\theta\varphi \in Cl$ по пункту в). Следовательно, $\varphi \in Cl$ по пункту б).

е) $\rho\varphi \in Cl \ \Rightarrow \ \varphi \in Cl^{\perp}$.
Если $\rho\varphi \in Cl$, то $\theta\rho\varphi \in Cl^{\perp}$ по пункту а). Следовательно, $\varphi \in Cl^{\perp}$ по пункту г). □

Данное предложение показывает, что Cl и $Cl^{\perp}$ — эквивалентные формулировки классической логики в разных языках.

Определение 1.4.14. Пусть $L_1 \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_1)$, $L_2 \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_2)$ и заданы две трансляции $\theta : For_{\mathcal{L}_1} \to For_{\mathcal{L}_2}$ и $\rho : For_{\mathcal{L}_2} \to For_{\mathcal{L}_1}$.

1. Логика L_1 *вкладывается в* L_2 *посредством* θ, если
$$\varphi \in L_1 \quad \Rightarrow \quad \theta\varphi \in L_2 \quad (\text{для любой } \varphi \in For_{\mathcal{L}_1}).$$

2. Логика L_1 *точно вкладывается в* L_2 *посредством* θ, если
$$\varphi \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta\varphi \in L_2 \quad (\text{для любой } \varphi \in For_{\mathcal{L}_1}).$$

3. Логики L_1 и L_2 *дефинициально эквивалентны посредством* θ *и* ρ, если логика L_1 точно вкладывается в L_2 посредством θ, логика L_2 точно вкладывается в L_1 посредством ρ, причём
$$\varphi \leftrightarrow \rho\theta\varphi \in L_1 \text{ для всякой } \varphi \in For_{\mathcal{L}_1},$$
$$\varphi \leftrightarrow \theta\rho\varphi \in L_2 \text{ для всякой } \varphi \in For_{\mathcal{L}_2}.$$

Замечание 1.4.15. Мы не накладываем каких-либо дополнительных ограничений на понятие трансляции, это просто функция из множества формул в множество формул. Вследствие этого возможны “вырожденные” трансляции.

Пусть $L_1 \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_1)$, $L_2 \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_2)$ и $L_2 \neq For_{\mathcal{L}_2}$. Возьмем формулы $\varphi_1 \in L_2$ и $\varphi_2 \notin L_2$ и определим трансляцию $\gamma : For_{\mathcal{L}_1} \to For_{\mathcal{L}_2}$ следующим образом:
$$\gamma\psi \ := \ \varphi_1, \quad \text{если } \psi \in L_1\,;$$
$$\gamma\psi \ := \ \varphi_2, \quad \text{если } \psi \in L_2\,.$$
Очевидно, что γ точно вкладывает L_1 в L_2, хотя этот факт и не дает существенной информации о связи логик L_1 и L_2.

Можно попытаться исправить ситуацию, заменив трансляции на *структурные трансляции* $\theta : For_{\mathcal{L}_1} \to For_{\mathcal{L}_2}$, удовлетворяющие условию
$$\theta\left(\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)\right) \ = \ \theta\varphi\left(\theta\psi_1, \ldots, \theta\psi_n\right).$$
Заметим, что трансляции из предложения 1.4.13 являются структурными. Однако есть ряд полезных отклонений от свойства структурности, которые трудно подогнать под одну схему. Кроме того, с помощью вырожденных трансляций подобных γ нельзя установить дефинициальную эквивалентность логик, поэтому мы оставляем определение 1.4.14 в прежнем виде.

Упражнение 1.4.16. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если логика* L_1 *точно вкладывается в* L_2 *посредством* θ_1, *а логика* L_2 *точно вкладывается в* L_3 *посредством* ρ, *то логика* L_1 *точно вкладывается в* L_3 *посредством* $\theta_2\theta_1$.

2. *Если логика* L_1 *дефинициально эквивалентна* L_2 *посредством* θ_1 *и* ρ_1, *а логика* L_2 *дефинициально эквивалентна* L_3 *посредством* θ_2 *и* ρ_2, *то логики* L_1 *и* L_3 *дефинициально эквивалентны посредством* $\theta_2\theta_1$ *и* $\rho_1\rho_2$.

Определение 1.4.17. Рассмотрим логику L и правило

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\psi} \quad (R).$$

Будем говорить, что:

1) (R) *допустимо в логике* L, если для любых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и χ таких, что χ получается из $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по правилу (R), $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset L$ влечёт $\chi \in L$;

2) (R) является *производным правилом логики* L, если $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash_L \psi$ (тогда, разумеется, это выполнено и для любых подстановочных частных случаев).

Очевидно, что всякое производное правило логики L будет допустимо в L.

Рассмотрим два специальных правила, а именно *правило замены*

$$\frac{p \leftrightarrow q}{\chi(p) \leftrightarrow \chi(q)}$$

и n-*кратное правило замены*

$$\frac{p_1 \leftrightarrow q_1, \ldots, p_n \leftrightarrow q_n}{\chi\left(p_1, \ldots, p_n\right) \leftrightarrow \chi\left(q_1, \ldots, q_n\right)}.$$

Говорим, что *кратное правило замены допустимо* (*является производным*) *в логике* L, если любое n-кратное правило замены допустимо (является производным) в L.

И говорим, что *эквивалентность транзитивна в логике* L, если правило

$$\frac{p \leftrightarrow q \quad q \leftrightarrow r}{p \leftrightarrow r}$$

является производным в L.

Упражнение 1.4.18. *Пусть эквивалентность транзитивна в* L.

1. *Если правило замены допустимо в логике* L, *то кратное правило замены допустимо в* L.

2. *Если правило замены является производным в логике* L, *то кратное правило замены является производным в* L.

Предложение 1.4.19. *Пусть эквивалентность транзитивна в* $L_1 \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}_1)$, *правило замены является производным в* L_1 *и* $p \to p \in L_1$. *Если* L_2 — *дефинициальное расширение* L_1, *то* L_1 *и* L_2 *дефинициально эквивалентны.*

Доказательство. Ввиду упражнения 1.4.16 достаточно рассмотреть случай простых дефинициальных расширений.

Пусть $L_2 = L_1 + \{f(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \phi(p_1, \ldots, p_n)\}$. Очевидно, что в логике L_2 эквивалентность также транзитивна и правило замены является производным, так как $\Gamma \vdash_{L_1} \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_{L_2} \varphi$ для любых Γ и φ.

Тождественная трансляция $i\varphi := \varphi$ точно вкладывает L_1 в L_2, так как L_2 — консервативное расширение логики L_1. Пусть трансляция $\tau : For_{\mathcal{L}_1 \cup \{f\}} \to For_{\mathcal{L}_1}$ определена, как в доказательстве предложения 1.4.12. Повторяя рассуждения из этого доказательства, устанавливаем, что τ вкладывает L_2 в L_1; $\varphi \in L_2$ влечет $\tau\varphi \in L_1$ для любой $\varphi \in For_{\mathcal{L}_1 \cup \{f\}}$.

Для любой $\varphi \in For_{\mathcal{L}_1}$ верно $\varphi \leftrightarrow \tau i \varphi \in L_1$, так как $\tau i \varphi = \tau\varphi = \varphi$ и $p \to p \in L_1$.

Индукцией по сложности формулы докажем, что $\varphi \leftrightarrow i\tau\varphi \in L_2$ для любой $\varphi \in For_{\mathcal{L}_1 \cup \{f\}}$. Базис индукции следует из того, что $p \leftrightarrow p \in L_2$.

Пусть $g^m \in \mathcal{L}_1$ и по индукционному предположению имеем $\varphi_1 \leftrightarrow \tau\varphi_1, \ldots, \varphi_m \leftrightarrow \tau\varphi_m \in L_2$. По кратному правилу замены (см. упражнение 1.4.18) получаем

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \leftrightarrow g(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_m) \in L_2\,.$$

Остается заметить, что $\tau g(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = g(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_m)$.

Рассмотрим формулу $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, причем по индукционному предположению имеем $\varphi_1 \leftrightarrow \tau\varphi_1, \ldots, \varphi_n \leftrightarrow \tau\varphi_n \in L_2$. По кратному правилу замены получаем $\phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \leftrightarrow \phi(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_m) \in L_2$. Из аксиомы $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \leftrightarrow \phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и транзитивности эквивалентности выводим

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \leftrightarrow \phi(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_n) \in L_2\,.$$

Наконец, заметим, что $\tau(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \phi(\tau\varphi_1, \ldots, \tau\varphi_n)$.

Для завершения доказательства нужно показать, что $\tau\varphi \in L_1$ влечет $\varphi \in L_2$. Если $\tau\varphi \in L_1$, то $\tau\varphi \in L_2$. Но мы только что доказали, что $\varphi \leftrightarrow \tau\varphi \in L_2$, поэтому $\varphi \in L_2$.

Итак, мы доказали, что логики L_1 и L_2 дефинициально эквивалентны посредством i и τ. □

Глава 2

Конструктивные логики

2.1. Позитивная логика Pos, шкалы Крипке, метод канонических моделей

Все логики, которые мы рассматривали ранее, имели один и тот же позитивный фрагмент ($\mathcal{L}^+$-фрагмент), а именно Cl^+. Между тем даже в позитивном фрагменте классической логики есть ряд достаточно парадоксальных выводов.

Примеры.

1. $(p \to q) \wedge (r \to s) \vdash_{Cl^+} (p \to s) \vee (r \to q)$.

Заменим пропозициональные переменные на следующие предложения:

p := "Джон в Париже"; q := "Джон во Франции";
r := "Джон в Лондоне"; s := "Джон в Англии".

При такой интерпретации переменных посылка выводимости заведомо истинна, а заключение заведомо ложно.

2. $(p \wedge q) \to r \vdash_{Cl^+} (p \to r) \vee (q \to r)$.

Представим себе замкнутый контур, в котором последовательно соединены выключатели I и II, источник тока и лампочка. Проинтерпретируем переменные так:

p := "Выключатель I замкнут"; q := "Выключатель II замкнут";
r := "Лампочка горит".

Опять из истинной посылки получаем интуитивно ложный вывод.

Рассмотрим логику, в которой упомянутые выше выводимости не имеют места.

Определение 2.1.1. *Позитивной логикой Pos* мы будем называть наименьшую логику в языке $\mathcal{L}^+$, содержащую следующие аксиомы:

1) $p \to (q \to p)$;

2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;

3) $(p \wedge q) \to p$;

4) $(p \wedge q) \to q$;

5) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$;

6) $p \to (p \vee q)$;

7) $q \to (p \vee q)$;

8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$.

Таким образом, Pos задается теми аксиомами из стандартной аксиоматики классической логики, которые не содержат отрицания.

Замечание 2.1.2. Логика Pos удовлетворяет теореме дедукции, т. е. для любых $\Gamma \subseteq For^+$ и $\varphi, \psi \in For^+$ верна эквивалентность:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{Pos} \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{Pos} \varphi \to \psi\,.$$

Это следует из наличия аксиом 1 и 2 и определения логики как множества формул, замкнутого относительно подстановки и *modus ponens* (по теореме 1.1.5).

Замечание 2.1.3. Правило замены является производным правилом логики Pos, поскольку

$$(\varphi_1 \leftrightarrow \psi_1) \to ((\varphi_2 \leftrightarrow \psi_2) \to ((\varphi_1 * \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 * \psi_2))) \in Pos\,,$$

где $* \in \{\vee, \wedge, \to\}$, причём стандартные доказательства этих формул в классической логике используют лишь аксиомы 1–8.

Перейдём к определению семантики позитивной логики.

Определение 2.1.4. *Шкалой* будем называть пару $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$, где W — множество, а $\leq$ — предпорядок на W, т. е. рефлексивное и транзитивное отношение.

Элементы шкалы мы будем называть *точками* или *возможными мирами*, а отношение $\leq$ часто называют *отношением достижимости*.

Определение 2.1.5. Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — шкала и $K \subseteq W$. Множество K называется *конусом шкалы* $\mathcal{W}$, если для любых $x \in K$ и $y \in W$ из $x \leq y$ следует $y \in K$.

Через $\langle W, \leq \rangle^+$ обозначаем множество всех конусов предпорядка $\langle W, \leq \rangle$.

Определение 2.1.6. Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — шкала. *Оценкой в* $\mathcal{W}$ ($\mathcal{W}$*-оценкой*) будем называть отображение $v : Prop \to \langle W, \leq \rangle^+$.

Модель — это пара $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$, где $\mathcal{W}$ — шкала, а v — $\mathcal{W}$-оценка. Говорим в этом случае, что μ — *модель над* $\mathcal{W}$.

Интуитивно, оценка $v : Prop \to \langle W, \leq \rangle^+$ сопоставляет каждой переменной p множество тех возможных миров $v(p)$, в которых эта переменная истинна, причём истинность наследуется вверх по $\leq$. Иногда вместо оценки v рассматривают отображение $V : Prop \times W \to \{0, 1\}$, связанное с v соотношением

$$V(p, w) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad w \in v(p)$$

при всевозможных $p \in Prop$ и $w \in W$.

Определение 2.1.7. Пусть $\mu = \langle W, \leq, v \rangle$ — модель $w \in W$, $\varphi \in For^+$). Определим отношение $\mu, w \models \varphi$ (формула φ истинна / выполнима в мире w модели μ) индукцией по сложности формулы:

$$
\begin{array}{lcl}
\mu, w \models p & \iff & w \in v(p)\,; \\
\mu, w \models \varphi \vee \psi & \iff & \mu, w \models \varphi \ \text{ или } \ \mu, w \models \psi\,; \\
\mu, w \models \varphi \wedge \psi & \iff & \mu, w \models \varphi \ \text{ и } \ \mu, w \models \psi\,; \\
\mu, w \models \varphi \to \psi & \iff & \forall u \in W \ (w \le u \ \Rightarrow \ (\mu, u \models \varphi \ \Rightarrow \ \mu, u \models \psi))\,.
\end{array}
$$

Полагаем

$$\mu(\varphi) \ := \ \{w \in W \mid \mu, w \models \varphi\}.$$

Говорим, что формула φ *истинна в модели* μ (пишем $\mu \models \varphi$), если $\mu(\varphi) = W$. Формула φ *истинна на шкале* $\mathcal{W}$ (пишем $\mathcal{W} \models \varphi$), если φ истинна в любой модели над шкалой $\mathcal{W}$. Наконец, φ *истинна в классе шкал* $\mathcal{K}$ (пишем $\mathcal{K} \models \varphi$), если φ истинна на любой шкале $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.1.8 (О монотонности). *Пусть* $\mu = \langle W, \le, v\rangle$ *— модель,* $\varphi \in For^+$. *Тогда* $\mu(\varphi) \in \langle W, \le\rangle^+$, *т. е. для любых* $u, w \in W$,

$$\text{если} \quad u \le w \quad \text{и} \quad \mu, u \models \varphi, \quad \text{то} \quad \mu, w \models \varphi.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по сложности формулы. База индукции, $\mu(p) \in \langle W, \le\rangle^+$, следует из равенства $\mu(p) = v(p)$ и определения $\mathcal{W}$-оценки.

Из определения 2.1.7 следует

$$\mu(\varphi \vee \psi) \ = \ \mu(\varphi) \cup \mu(\psi) \quad \text{и} \quad \mu(\varphi \wedge \psi) \ = \ \mu(\varphi) \cap \mu(\psi).$$

Очевидно, что пересечение и объединение конусов являются конусами.

Пусть $\mu, u \models \varphi \to \psi$ и $u \le w$. Проверим, что $\mu, w \models \varphi \to \psi$. Если $w \le w'$, то $u \le w'$ и импликация $\mu, w' \models \varphi \Rightarrow \mu, w' \models \psi$ следует из предположения $\mu, u \models \varphi \to \psi$. □

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \le\rangle$ — шкала и $K \in \mathcal{W}^+$. Определим *порождёную (конусом K) подшкалу* $\mathcal{W}^K$ следующим образом:

$$\mathcal{W}^K \ := \ \langle K, \le \cap K^2\rangle.$$

Если $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$ — модель над $\mathcal{W}$, то определяем *порождёную подмодель* как

$$\mu^K \ := \ \langle \mathcal{W}^K, v^K\rangle\,, \quad \text{где } \ v^K(p) \ := \ v(p) \cap K \ \text{ для всех } \ p \in Prop\,.$$

Для каждого $w \in W$ полагаем $\mathcal{W}^w := \mathcal{W}^{\breve{w}}$ и $\mu^w := \mu^{\breve{w}}$, где $\breve{w} := \{u \in W \mid w \le u\}$ — конус, порождёный миром w.

Следующее утверждение доказывается несложной индукцией по сложности формулы с учетом того, что истинность формулы в мире w определяется через истинность ее компонент либо в том же самом мире (для $\vee$ и $\wedge$), либо в мирах, которые лежат над w (для $\to$).

Лемма 2.1.9 (О порождённой подмодели). *Пусть* $\mu = \langle W, \le, v\rangle$ *— модель,* $K \in \langle W, \le\rangle^+$, $\varphi \in For^+$ *и* $w \in K$. *Верна эквивалентность*

$$\mu, w \models \varphi \quad \iff \quad \mu^K, w \models \varphi\,.$$

В частности,

$$\mu \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mu^K \models \varphi\,.$$

Для шкалы $\mathcal{W}$ и класса шкал $\mathcal{K}$ определим множества формул

$$L\mathcal{W} \;:=\; \{\varphi \in For^+ \mid \mathcal{W} \models \varphi\} \quad \text{и} \quad L\mathcal{K} \;:=\; \{\varphi \in For^+ \mid \mathcal{K} \models \varphi\}.$$

Также введём обозначение

$$\mathcal{E}Pos \;:=\; \{L \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}^+) \mid Pos \subseteq L\}$$

и далее для любой $L \in \mathcal{E}Pos$ полагаем $\mathcal{E}L := \{L' \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L}^+) \mid L \subseteq L'\}$. Тем самым, $\mathcal{E}Pos$ и $\mathcal{E}L$ суть классы логик в языке $\mathcal{L}^+$, расширяющих Pos и L соответственно.

Следующее утверждение фактически является теоремой о корректности позитивной логики относительно предложенной семантики.

Предложение 2.1.10. *Для любой шкалы $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ и класса шкал $\mathcal{K}$ имеет место $\{L\mathcal{W}, L\mathcal{K}\} \subset \mathcal{E}Pos$.*

Доказательство. Ввиду очевидного соотношения $L\mathcal{K} = \bigcap_{\mathcal{W} \in \mathcal{K}} L\mathcal{W}$ достаточно проверить, что $L\mathcal{W} \in \mathcal{E}Pos$.

Докажем сначала, что множество формул $L\mathcal{W}$ является логикой, т. е. замкнуто относительно подстановки и *modus ponens*.

Пусть $\varphi = \varphi(p_1, \ldots p_n) \in L\mathcal{W}$. Покажем, что $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in L\mathcal{W}$.

Пусть $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{W}$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — произвольный набор формул. Рассмотрим модель $\mu' := \langle \mathcal{W}, v' \rangle$ такую, что

$$v'(p_1) \;:=\; \mu(\psi_1)\,, \quad \ldots\,, \quad v'(p_n) \;:=\; \mu(\psi_n).$$

Индукцией по сложности формулы нетрудно доказать, что для любой формулы $\chi = \chi(p_1, \ldots, p_n)$ верна эквивалентность

$$\mu, w \models \chi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu', w \models \chi(p_1, \ldots, p_n) \text{ для всех } w \in W.$$

Поскольку $\varphi(p_1, \ldots p_n) \in L\mathcal{W}$, то $\mu' \models \varphi(p_1, \ldots p_n)$, откуда $\mu \models \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ по доказанной эквивалентности.

Пусть $\varphi, \varphi \to \psi \in L\mathcal{W}$, $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{W}$ и $w \in W$. По предположению $\mu, w \models \varphi$ и $\mu, w \models \varphi \to \psi$. Согласно определению 2.1.7 верна импликация $\mu, w \models \varphi \Rightarrow \mu, w \models \psi$. Откуда $\mu, w \models \psi$.

Мы доказали, что множество формул $L\mathcal{W}$ является логикой. Осталось установить включение $Pos \subseteq L\mathcal{W}$. Для этого достаточно проверить, что каждая из аксиом Pos истинна на $\mathcal{W}$. Сделаем это для аксиомы 2. Покажем, что для любой модели μ над $\mathcal{W}$ и любого мира $x \in W$ верна импликация:

$$\mu, x \models p \to (q \to r) \quad \Rightarrow \quad \mu, x \models (p \to q) \to (p \to r).$$

Предположим, что верна ее посылка $\mu, x \models p \to (q \to r)$, т. е.

$$\forall y \geq x \; (\mu, y \models p \quad \Rightarrow \quad \mu, y \models q \to r). \tag{2.1}$$

Нам нужно доказать

$$\forall y \geq x \; (\mu, y \models p \to q \quad \Rightarrow \quad \mu, y \models p \to r). \tag{2.2}$$

Пусть $y \geq x$ и $\mu, y \models p \to q$. Возьмем $z \geq y$ и предположим $\mu, z \models p$. Тогда $\mu, z \models q$. Очевидно, что $z \geq x$. Поэтому по 2.1 $\mu, z \models q \to r$, отсюда и из $\mu, z \models q$ следует $\mu, z \models r$. Мы показали, что для всякого $z \geq y$ из $\mu, z \models p$ следует $\mu, z \models r$, т. е. $\mu, y \models q \to r$. Тем самым, 2.2 доказано.

Истинность остальных аксиом на $\mathcal{W}$ проверяется подобным же образом. $\square$

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — шкала, $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For^+$. Отношение $\Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ означает, что для любой модели μ над $\mathcal{W}$ и любого $w \in W$ верна импликация

$$\forall \psi \in \Gamma \ (\mu, w \models \psi) \quad \Longrightarrow \quad \mu, w \models \varphi \,.$$

Если $\mathcal{K}$ — класс шкал, то $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$ означает, что для любого $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$ верно $\Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$.

Определение 2.1.11. Пусть $L \in \mathcal{E}Pos$ и $\mathcal{K}$ — класс шкал. Говорим, что логика L *сильно полна относительно класса шкал* $\mathcal{K}$, если $\vdash_L = \models_{\mathcal{K}}$. Будем также говорить, что логика L *полна относительно класса шкал* $\mathcal{K}$, если $L = L\mathcal{K}$. Наконец, логика L *полна по Крипке*, если она полна относительно некоторого класса шкал.

Запись $\mathcal{W} \models L$ означает, что $\mathcal{W} \models \varphi$ для всех $\varphi \in L$. Для логики $L \in \mathcal{E}Pos$ полагаем

$$Mod(L) \ := \ \{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \models L\}.$$

Очевидно, что $L \subseteq LMod(L)$, однако обратное включение верно не всегда.

Лемма 2.1.12. *Пусть $\{L_1, L_2\} \subset \mathcal{E}Pos$, а $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ — классы шкал.*

1. *Если $L_1 \subseteq L_2$, то $Mod(L_2) \subseteq Mod(L_1)$.*
2. *Если $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, то $L\mathcal{K}_2 \subseteq L\mathcal{K}_1$.*

Доказательство. Легко следует из определений $Mod(L)$ и $L\mathcal{K}$. □

Предложение 2.1.13. *Логика $L \in \mathcal{E}Pos$ полна по Крипке, если и только если выполнено $L = LMod(L)$.*

Доказательство. Если $L = LMod(L)$, то очевидно, что L полна по Крипке.

Пусть L полна по Крипке, т.е. $L = L\mathcal{K}$ для некоторого класса шкал $\mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{K} \subseteq Mod(L)$, откуда по предыдущей лемме получаем $LMod(L) \subseteq L\mathcal{K} = L$. Поскольку включение $L \subseteq LMod(L)$ верно всегда, мы доказали $L = LMod(L)$. □

Будем называть шкалу *острой*, если она содержит наименьший элемент. Заметим, что шкала может содержать несколько наименьших элементов, так как отношение достижимости является предпорядком, а не частичным порядком. Например, любая шкала вида $\mathcal{W}^w$ — острая.

Для класса шкал $\mathcal{K}$ полагаем

$$\check{\mathcal{K}} \ := \ \{\mathcal{W}^w \mid \mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle \in \mathcal{K}, \ w \in W\}.$$

Следующее утверждение (оставленное в качестве упражнения) получается непосредственно, если воспользоваться леммой о порождённой подмодели.

Упражнение 2.1.14. *Если логика $L \in \mathcal{E}Pos$ (сильно) полна относительно класса шкал $\mathcal{K}$, то L (сильно) полна относительно $\check{\mathcal{K}}$.*

Следствие 2.1.15. *Любая полная по Крипке логика $L \in \mathcal{E}Pos$ полна относительно некоторого класса острых шкал.*

Приступим теперь к доказательству полноты логики Pos относительно введенной семантики. Мы будем использовать метод канонических моделей, вырожденная форма которого уже использовалась нами ранее. Его основные элементы: лемма о расширении, понятие канонической модели и лемма о канонической модели.

Лемма о расширении формулируется и доказывается стандартным образом.

Лемма 2.1.16 (О расширении). *Для любой логики $L \in \mathcal{E}Pos$, и любых множеств формул Σ и Δ, если $\Sigma \nvdash_L \Delta$, то найдется простая L-теория $\Gamma \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \nvdash_L \Delta$.*

Определение 2.1.17. Пусть $L \in \mathcal{E}Pos$. *Каноническая L-шкала* — это $\mathcal{W}^L := \langle W^L, \leq^L \rangle$, где:

1) W^L — множество всех простых L-теорий;

2) $\Gamma \leq^L \Delta \iff \Gamma \subseteq \Delta$.

Далее, *каноническая L-модель* μ^L представляет собой пару, состоящую из канонической L-шкалы $\mathcal{W}^L$ и оценки v^L, заданной посредством

$$v^L(p) := \left\{\Gamma \in \mathcal{W}^L \mid p \in \Gamma\right\} \quad \text{для каждого } p \in Prop\,.$$

Очевидно, что каноническая L-модель определена корректно.

Лемма 2.1.18 (О канонической модели). *Пусть $L \in \mathcal{E}Pos$. В канонической L-модели μ^L для любых $\Gamma \in W^L$ и $\varphi \in For^+$ верно*

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \quad \iff \quad \varphi \in \Gamma\,.$$

Доказательство. Индукцией по сложности φ. База индукции следует из определения оценки v^L:

$$\mu^L, \Gamma \models p \quad \iff \quad \Gamma \in v^L(p) \quad \iff \quad p \in \Gamma\,.$$

Предположим, что для любой $\Gamma \in W^L$ и формул φ и ψ уже доказаны эквивалентности:

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma \quad \text{и} \quad \mu^L, \Gamma \models \psi \iff \psi \in \Gamma\,.$$

Рассмотрим сложные формулы, построенные из φ и ψ.

1. $\varphi \wedge \psi$.

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \wedge \psi \quad \iff \quad \mu^L, \Gamma \models \varphi \text{ и } \mu^L, \Gamma \models \psi \quad \iff$$
$$\varphi \in \Gamma \text{ и } \psi \in \Gamma \quad \iff \quad \varphi \wedge \psi \in \Gamma\,.$$

Первая эквивалентность очевидна, вторая следует из индуктивного предположения. Докажем последнюю эквивалентность. Импликация ($\varphi \wedge \psi \in \Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$) вытекает из аксиом 3 и 4. Пусть $\varphi, \psi \in \Gamma$, тогда квазивывод формулы $\varphi \wedge \psi$ из Γ выглядит следующим образом:

$$\varphi \to \varphi,\ (\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))),\ (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi)),\ \psi,$$
$$\psi \to (\varphi \to \psi),\ \varphi \to \psi,\ \varphi \to (\varphi \wedge \psi),\ \varphi,\ \varphi \wedge \psi\,.$$

2. $\varphi \vee \psi$.

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \vee \psi \quad \iff \quad \mu^L, \Gamma \models \varphi \text{ или } \mu^L, \Gamma \models \psi \quad \iff$$
$$\varphi \in \Gamma \text{ или } \psi \in \Gamma \quad \iff \quad \varphi \vee \psi \in \Gamma\,.$$

Вновь нетривиальной является только последняя эквивалентность. Импликация ($\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \vee \psi \in \Gamma$) следует из аксиом 6 и 7. Обратная импликация следует из того, что простая теория Γ удовлетворяет дизъюнктивному свойству.

3. $\varphi \to \psi$.

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \to \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \Gamma' \supseteq \Gamma\, (\mu^L, \Gamma' \models \varphi \;\Rightarrow\; \mu^L, \Gamma' \models \psi) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \Gamma' \supseteq \Gamma\, (\varphi \in \Gamma' \;\Rightarrow\; \psi \in \Gamma') \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \to \psi \in \Gamma\,.$$

Докажем последнюю эквивалентность. Если $\varphi \to \psi \in \Gamma$, то очевидно, что для любой простой теории Γ', расширяющей Γ, из $\varphi \in \Gamma'$ следует $\psi \in \Gamma'$.

Предположим теперь $\varphi \to \psi \notin \Gamma$. По теореме дедукции $\Gamma \cup \{\varphi\} \nvdash_L \psi$. Согласно лемме о расширении найдется простая теория Γ' такая, что $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash_L \psi$. Поскольку Γ' замкнута относительно выводимости, $\Gamma' \nvdash_L \psi$ эквиалентно $\psi \notin \Gamma'$. □

Теорема 2.1.19. *Логика Pos сильно полна относительно следующих классов шкал:*

а) класса всех шкал;

б) класса всех острых шкал;

в) класса всех частичных порядков;

г) класса всех острых частичных порядков.

Доказательство. а) Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — произвольная шкала. Докажем импликацию $\Gamma \vdash_{Pos} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$. Пусть модель μ над $\mathcal{W}$ и мир $w \in W$ таковы, что

$$\mu, w \models \psi \quad \text{для всех } \psi \in \Gamma\,.$$

Соотношение $\Gamma \vdash_{Pos} \varphi$ означает, что есть последовательность формул $\chi_1, \ldots, \chi_n = \varphi$ такая, что ее элементы принадежат Pos или Γ либо получаются из предыдущих по *modus ponens*. Все элементы Γ истинны в мире w по предположению. Все формулы из Pos истинны в мире w по предложению 2.1.10. Если $\mu, w \models \chi \to \xi$ и $\mu, w \models \chi$, то $\mu, w \models \xi$ по определению 2.1.7. Тем самым, для любого $i \leq n$ верно $\mu, w \models \chi_i$, в частности $\mu, w \models \varphi$.

Мы доказали, что $\Gamma \vdash_{Pos} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ для любой $\mathcal{W}$.

Пусть $\Gamma \nvdash_{Pos} \varphi$. По лемме о расширении найдется простая Pos-теория Γ' такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\varphi \notin \Gamma'$. По лемме о канонической модели,

$$\forall \psi \in \Gamma \, \left(\mu^{Pos}, \Gamma' \models \psi\right) \quad \text{и} \quad \mu^{Pos}, \Gamma' \not\models \varphi\,.$$

б) Следует из а) и предложения 2.1.14.

в) Следует из того, что каноническая модель любой шкалы является частичным порядком.

г) Следует из в) и предложения 2.1.14. □

Теперь, доказав теорему полноты для позитивной логики, можно убедиться в том, что парадоксальные классические выводы, рассмотренные нами ранее в примерах, не имеют места в Pos. Заодно мы покажем, что и дополнительная аксиома $p \vee (p \to q)$ классической позитивной логики Cl^+ не лежит в Pos.

Предложение 2.1.20. *Следующие формулы не лежат в Pos:*

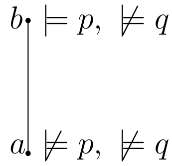
а) $p \vee (p \to q)$;

б) $((p \to q) \wedge (r \to s)) \to ((p \to s) \vee (r \to q))$;

в) $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r))$.

Доказательство. а) По теореме полноты достаточно найти модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ такую, что $\mu, x \not\models p \vee (p \to q)$ для некоторого $x \in W$.

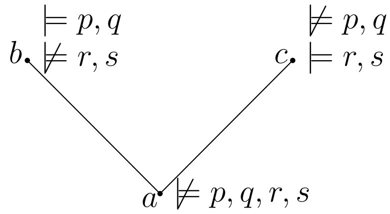
Пусть $W = \{a, b\}$, $a \neq b$, $a \leq b$, $v(p) = \{b\}$, $v(q) = \varnothing$.



По определению $\mu, a \not\models p$. В то же время $\mu, a \not\models p \to q$, так как в мире b, который лежит над a, ложна импликация $\mu, b \models p \Rightarrow \mu, b \models q$. Тем самым, $\mu, a \not\models p \vee (p \to q)$.

б) Построим модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ такую, что для некоторого $x \in W$ выполнено $\mu, x \models (p \to q) \wedge (r \to s)$ и $\mu, x \not\models (p \to s) \vee (r \to q)$.

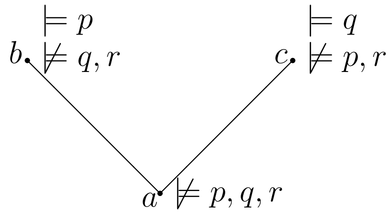
Полагаем $W = \{a, b, c\}$, миры a, b и c попарно различны, $a \leq b$, $a \leq c$, $v(p) = v(q) = \{b\}$, $v(r) = v(s) = \{c\}$.



Непосредственно проверяется, что a — требуемый мир.

в) Теперь найдем модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ такую, что для некоторого $x \in W$ выполнено $\mu, x \models (p \wedge q) \to r$ и $\mu, x \not\models (p \to r) \vee (q \to r)$.

Полагаем $W = \{a, b, c\}$, миры a, b и c попарно различны, $a \leq b$, $a \leq c$, $v(p) = \{b\}$, $v(q) = \{c\}$, $v(r) = \varnothing$.



Опять, непосредственно проверяется, что a — требуемый мир. $\square$

Напомним, что логика $L \in \mathcal{LOG}(\mathcal{L})$, $\vee \in \mathcal{L}$, обладает дизъюнктивным свойством (DP), если для любых $\varphi, \psi \in For_{\mathcal{L}}$ из $\varphi \vee \psi \in L$ следует $\varphi \in L$ или $\psi \in L$.

Предложение 2.1.21. *Справдливы следующие утверждения.*

1. *Классическая позитивная логика Cl^+ не обладает дизъюнктивным свойством.*

2. *Позитивная логика Pos обладает дизъюнктивным свойством.*

Доказательство. 1. По определению $p \vee (p \to q) \in Cl^+$, но очевидно, что $p \notin Cl^+$ и $p \to q \notin Cl^+$.

2. Пусть $\varphi \vee \psi \in Pos$, но $\varphi \notin Pos$ и $\psi \notin Pos$. По теореме полноты найдутся модели

$$\mu_1 = \langle W_1, \leq_1, v_1\rangle \quad \text{и} \quad \mu_2 = \langle W_2, \leq_2, v_2\rangle$$

и миры $x \in W_1$ и $y \in W_2$ такие, что $\mu_1, x \not\models \varphi$ и $\mu_2, y \not\models \psi$.

Без ограничения общности можно считать, что $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Рассмотрим модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$, где

$$W \ := \ W_1 \cup W_2 \cup \{z\}\,, \quad z \notin W_1 \cup W_2\,; \quad \leq \,:=\, \leq_1 \cup \leq_2 \cup \{(z,w) \mid w \in W\}\,;$$

а оценка v определена так: $v(p) := v_1(p) \cup v_2(p)$ для всех $p \in Prop$.

Иными словами, шкала $\langle W, \leq\rangle$ получается добавлением наименьшего мира z к объединению $W_1 \cup W_2$, при этом никакой мир из W_1 не сравним с миром из W_2.

Очевидно, что модель μ определена корректно. При этом модели μ_1 и μ_2 являются порождёуными подмоделями модели μ.

Ввиду $\varphi \vee \psi \in Pos$ имеем $\mu, z \models \varphi \vee \psi$. Следовательно, $\mu, z \models \varphi$ или $\mu, z \models \psi$. Если $\mu, z \models \varphi$, то по лемме о монотонности $\mu, x \models \varphi$ и по лемме о порождённой подмодели $\mu_1, x \models \varphi$, что противоречит предположению. Если же $\mu, z \models \psi$, аналогичным образом получаем $\mu_2, y \models \psi$, что опять противоречит предположению. □

Теперь приведем более конструктивное доказательство дизъюнктивного свойства для Pos.

Пусть $L \in \mathcal{E}Pos$. Определим на множестве формул предикат $|_L\varphi$ (“слэш Клини”) индукцией по сложности формул следующим образом:

$$\begin{array}{lcl}
|_L p & \iff & p \in L \cap Prop\,; \\
|_L \varphi \wedge \psi & \iff & |_L\varphi \ \text{ и } \ |_L\psi\,; \\
|_L \varphi \vee \psi & \iff & \Vdash_L \varphi \ \text{ или } \ \Vdash_L \psi\,; \\
|_L \varphi \to \psi & \iff & \Vdash_L \varphi \ \Rightarrow \ |_L\psi\,,
\end{array}$$

где $\Vdash_L \varphi$ есть сокращение для “$\vdash_L \varphi$ и $|_L\varphi$”.

Предложение 2.1.22. *Пусть $\varphi \in For^+$. Если $\varphi \in Pos$, то $|_{Pos}\varphi$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по длине вывода формулы из аксиом логики Pos. Базой индукции является выполнение условия $|_{Pos}\varphi$ для всех частных случаев аксиом логики Pos. Мы рассмотрим частные случаи аксиом 1 и 2. Нижний индекс $\cdot_{Pos}$ будем опускать.

Для первой аксиомы имеем:

$$|\,(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \quad \iff \quad (\Vdash \varphi \ \Rightarrow \ (\Vdash \psi \ \Rightarrow \ |\,\varphi)).$$

При этом утверждение справа от “$\iff$” очевидным образом истинно.

Рассмотрим вторую аксиому. Расписывая по определению, получим, что условие

$$|\,((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)))$$

равносильно тому, что из $\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$, $(\Vdash \varphi \ \Rightarrow \ (\Vdash \psi \ \Rightarrow \ |\,\chi))$, $\vdash \varphi \to \psi$, $(\Vdash \varphi \ \Rightarrow \ |\,\psi)$ и $\Vdash \varphi$ следует $|\,\chi$. Покажем, что последнее утверждение истинно. Из $\Vdash \varphi$ и $\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ выводим $\vdash \psi \to \chi$. Далее, из $\Vdash \varphi$ и $\vdash \varphi \to \psi$ получаем $\vdash \psi$, а из $\Vdash \varphi$ и $\Vdash \varphi \ \Rightarrow \ |\,\psi$ следует $|\,\psi$. Тем самым, $\Vdash \psi$. Значит, из $\Vdash \varphi$, $\Vdash \psi$ и $(\Vdash \varphi \ \Rightarrow \ (\Vdash \psi \ \Rightarrow \ |\,\chi))$ получаем $|\,\chi$.

Покажем, что применение *modus ponens* к доказуемым формулам сохраняет слэш Клини.

Пусть $\varphi, \varphi \to \psi \in Pos$ и уже доказано $|\,\varphi$ и $|\,\varphi \to \psi$. Тогда по определению из $\Vdash \varphi$ следует $|\,\psi$. По предположению верно $\Vdash \varphi$, следовательно $|\,\psi$. □

Следствие 2.1.23. *Логика Pos обладает DP.*

Доказательство. Если $\varphi \vee \psi \in Pos$, то по предложению 2.1.22 верно $|_{Pos}(\varphi \vee \psi)$, т. е. $\Vdash_{Pos} \varphi$ или $\Vdash_{Pos} \psi$. В частности, $\varphi \in Pos$ или $\psi \in Pos$. □

2.2. Интуиционистская логика Int и минимальная логика J

Теперь добавим к нашему языку отрицание и определим одну из самых известных неклассических логик — *интуиционистскую.*

Определение 2.2.1. Логика $Int^{\neg}$ — это наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^{CL}$, содержащая аксиомы позитивной логики Pos и аксиомы

9$^{\neg}$) $(p \to \neg q) \to ((p \to q) \to \neg p)$;

10$^{\neg}$) $\neg p \to (p \to q)$.

Логика $Int^{\perp}$ — это наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^{\perp}$, содержащая аксиомы позитивной логики Pos и аксиому

9$^{\perp}$) $\perp \to p$.

Предложение 2.2.2. *Логики $Int^{\neg}$ и $Int^{\perp}$ дефинициально эквивалентны.*

Доказательство. Логики $Int^{\neg}$ и $Int^{\perp}$ дефинициально эквивалентны посредством трансляций θ и ρ, приведённых непосредственно перед формулировкой предложения 1.4.13 (с целью установления дефинициальной эквивалентности логик Cl и $Cl^{\perp}$). Само доказательство также аналогично доказательству предложения 1.4.13. □

Итак, у нас есть два эквивалентных определения логики в разных языках. В дальнейшем основным языком считаем $\mathcal{L}^{\perp}$, а запись $\neg\varphi$ считаем сокращением для $\varphi \to \perp$. В обозначании $Int^{\perp}$ опускаем верхний индекс и называем логику Int *интуиционистской логикой*, или *логикой Гейтинга.*

Шкалы и модели определяются для интуиционистской логики в точности так же, как и для позитивной логики (см. определения 2.1.4–2.1.6).

Отношение истинности формул в мирах модели также аналогично определению для позитивной логики (определение 2.1.7). Нам нужно лишь определить это отношение для нового элемента языка, константы $\perp$:

$$\mu, w \not\models \perp \quad \text{для любых } \mu \text{ и } w\,.$$

Понятия множества $\mu(\varphi)$, истинности формулы в модели, истинности формулы на шкале и на классе шкал, а также множества $L\mathcal{W}$ и $L\mathcal{K}$, где $\mathcal{W}$ — шкала, а $\mathcal{K}$ — класс шкал, определяются в точности так же, как для позитивной логики. Понятие порождённой подмодели также не претерпевает изменений.

Стандартным образом доказываются следующие два утверждения.

Лемма 2.2.3 (О монотонности). *Пусть $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ — модель, $\varphi \in For_{\mathcal{L}^{\perp}}$. Тогда выполнено $\mu(\varphi) \in \langle W, \leq\rangle^{+}$, т. е. для любых $u, w \in W$,*

$$\textit{если} \quad u \leq w \quad \textit{и} \quad \mu, u \models \varphi\,, \quad \textit{то} \quad \mu, w \models \varphi\,.$$

Доказательство. В дополнение к доказательству леммы 2.1.8 нам нужно лишь проверить, что $\mu(\perp)$ — конус. Однако по определению $\mu(\perp) = \varnothing$. □

Лемма 2.2.4 (О порождённой подмодели). *Пусть $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ — модель, $\varphi \in For_{\mathcal{L}^\perp}$, $K \in \langle W, \leq\rangle^+$ и $w \in K$. Верна эквивалентность*

$$\mu, w \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^K, w \models \varphi\,.$$

В частности,

$$\mu \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mu^K \models \varphi\,.$$

Доказательство. См. доказательство леммы 2.1.9. □

Введём обозначение

$$\mathcal{E}Int \;:=\; \left\{L \in \mathcal{LOG}\left(\mathcal{L}^\perp\right) \mid Int \subseteq L\right\}$$

(мы будем называть логики из $\mathcal{E}Int$ *суперинтуиционистскими*). Далее, для любой логики $L \in \mathcal{E}Int$ полагаем $\mathcal{E}L := \left\{L' \in \mathcal{LOG}\left(\mathcal{L}^\perp\right) \mid L \subseteq L'\right\}$.

Докажем утверждение о корректности интуиционистской логики относительно предложенной семантики.

Предложение 2.2.5. *Для любой шкалы $\mathcal{W} = \langle W, \leq\rangle$ и класса шкал $\mathcal{K}$ имеет место $\{L\mathcal{W}, L\mathcal{K}\} \subset \mathcal{E}Int$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1.10. Дополнительно нужно проверить, что аксиома $9^\perp$ истинна во всех шкалах, но это легко следует из того, что $\perp$ ложна в любом мире любой модели. □

Отношения следования $\Gamma \models_\mathcal{W} \varphi$ и $\Gamma \models_\mathcal{K} \varphi$, где $\mathcal{W}$ — шкала, а $\mathcal{K}$ — класс шкал, определяются стандартным образом. Для логик из $\mathcal{E}Int$ понятия полноты и сильной полноты относительно класса шкал, а также полноты по Крипке определяются так же, как и для логик из $\mathcal{E}Pos$. Точно так же справедливы аналоги леммы 2.1.12, предложения 2.1.13, упражнения 2.1.14 и следствия 2.1.15.

Наконец, доказательство теоремы полноты для интуиционистской логики проводится по той же схеме, что и для логики Pos.

Лемма 2.2.6 (О расширении). *Для любой логики $L \in \mathcal{E}Int$, и любых множеств формул Σ и Δ, если $\Sigma \not\vdash_L \Delta$, то найдется простая L-теория $\Gamma \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \not\vdash_L \Delta$.*

Определение канонической модели по сути не претерпевает изменений.

Определение 2.2.7. Пусть $L \in \mathcal{E}Int$. *Каноническая L-шкала* — это пара $\mathcal{W}^L := \langle W^L, \leq^L\rangle$, где:

1) W^L — множество всех простых L-теорий;

2) $\Gamma \leq^L \Delta \iff \Gamma \subseteq \Delta$.

Затем *каноническая L-модель μ^L* — это каноническая L-шкала $\mathcal{W}^L$ вместе с оценкой v^L, заданной посредством эквивалентности

$$\Gamma \in v^L(p) \quad \Longleftrightarrow \quad p \in \Gamma\,.$$

Лемма 2.2.8 (О канонической модели). *Пусть $L \in \mathcal{E}Int$. В канонической L-модели μ^L для любых $\Gamma \in W^L$ и $\varphi \in For_{\mathcal{L}^\perp}$ верно*

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma\,.$$

Доказательство. В дополнение к доказательству леммы 2.1.18 нужно проверить эквивалентность

$$\mu^L, \Gamma \models \bot \quad \Longleftrightarrow \quad \bot \in \Gamma\,,$$

т. е. нам нужно показать, что $\bot \notin \Gamma$ для любой $\Gamma \in W^L$. Если $\bot \in \Gamma$, то ввиду аксиомы $9^\bot$ любая формула φ лежит в Γ. Однако $\Gamma \neq For_{\mathcal{L}^\bot}$ по определению простой теории. Противоречие. □

Теорема 2.2.9. *Логика Int сильно полна относительно следующих классов шкал:*

а) класса всех шкал;

б) класса всех острых шкал;

в) класса всех частичных порядков;

г) класса всех острых частичных порядков.

Доказательство. Дословно повторяем доказательство теоремы 2.1.19 (попутно заменяя Pos на Int). □

Как и для позитивной логики, можно доказать наличие DP у Int (семантически или с помощью слэша Клини, который доопределяется для $\bot$ так же, как для пропозициональных переменных).

Упражнение 2.2.10. *Интуиционистская логика обладает дизъюнктивным свойством.*

Теперь перейдём к рассмотрению более слабого варианта интуиционистского исчисления (в нём будут ослаблены требования к константе "абсурд").

Определение 2.2.11. *Логика Иоганссона* (или *минимальная логика*) J — это наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^\bot$, содержащая аксиомы позитивной логики.

Замечание 2.2.12. Эквивалентное определение минимальной логики в языке $\mathcal{L}^{CL}$ выглядит следующим образом.

Логика $J^\neg$ — это наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^{CL}$, содержащая аксиомы позитивной логики и аксиому

$9^\neg$. $(p \to \neg q) \to ((p \to q) \to \neg p)$

Дефинициальная эквивалентность логик $J^\neg$ и J доказывается, по существу, так же, как и дефинициальная эквивалентность логик Cl и $Cl^\bot$, или $Int^\neg$ и $Int^\bot$ (см. предложения 1.4.13 и 2.2.2).

Логика J получается из логики Int вычеркиванием одной аксиомы из ее аксиоматики. Естественно, что шкалы для логики J будут устроены сложнее, чем шкалы интуиционистской логики.

Определение 2.2.13. *j-Шкалой* будем называть тройку $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q\rangle$, где W — множество, $\leq$ — предпорядок на W, а Q — конус предпорядка $\langle W, \leq\rangle$ ($Q \in \langle W, \leq\rangle^+$).

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q\rangle$ — j-шкала. *Оценкой в $\mathcal{W}$* ($\mathcal{W}$-оценкой), как и ранее, называем отображение $v : Prop \to \langle W, \leq\rangle^+$.

j-Модель — это пара $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$, где $\mathcal{W}$ — j-шкала, а v — $\mathcal{W}$-оценка. Говорим в этом случае, что μ — модель над $\mathcal{W}$.

Определение отношения истинности формул в мирах модели отличается от соответствующего определения для интуиционистской логики лишь условием истинности для константы $\bot$:

$$\mu, w \models \bot \quad \Longleftrightarrow \quad w \in Q\,.$$

Понятия множества $\mu(\varphi)$, истинности формулы в j-модели, истинности формулы на j-шкале и на классе j-шкал, а также множества $L\mathcal{W}$ и $L\mathcal{K}$, где $\mathcal{W}$ — j-шкала, а $\mathcal{K}$ — класс j-шкал, определяются аналогично случаю интуиционистской логики.

Лемма 2.2.14 (О монотонности). *Пусть $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ — j-модель, $\varphi \in For(\mathcal{L}^{\bot})$. Тогда $\mu(\varphi) \in \langle W, \leq\rangle^{+}$, т. е. для любых $u, w \in W$,*

$$\textit{если} \quad u \leq w \quad \textit{и} \quad \mu, u \models \varphi, \quad \textit{то} \quad \mu, w \models \varphi\,.$$

Доказательство. В дополнение к доказательству леммы 2.1.8 нам нужно лишь проверить, что $\mu(\bot)$ — конус. В данном случае $\mu(\bot) = Q$. □

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q\rangle$ — j-шкала, и $K \in \langle W, \leq\rangle^{+}$. *Порожденная j-подшкала* определяется так:

$$\mathcal{W}^K \ := \ \langle K, \leq \cap K^2, Q \cap K\rangle.$$

Пусть $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$ — j-модель над $\mathcal{W}$. Тогда *порождёуной j-подмоделью* назовем $\mu^K := \langle \mathcal{W}^K, v^K\rangle$, где $v^K(p) := v(p) \cap K$.

Лемма о порождённой подмодели доказывается стандартным образом (и потому оставлена для самостоятельного разбора).

Лемма 2.2.15 (О порождённой подмодели). *Пусть $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ — j-модель, $K \in \langle W, \leq\rangle^{+}$, $\varphi \in For_{\mathcal{L}^{\bot}}$ и $w \in K$. Верна эквивалентность*

$$\mu, w \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^K, w \models \varphi\,.$$

В частности,

$$\mu \models \varphi \qquad \Rightarrow \quad \mu^K \models \varphi\,.$$

Обозначения $\mathcal{E}J$ и $\mathcal{E}L$, где $L \in \mathcal{E}J$, имеют естественный смысл.

Предложение 2.2.16. *Для любой j-шкалы $\mathcal{W} = \langle W, \leq\rangle$ и класса j-шкал $\mathcal{K}$ имеет место $\{L\mathcal{W}, L\mathcal{K}\} \subset \mathcal{E}J$.*

Доказательство. Полностью аналогично доказательству предложения 2.1.10. □

Отношения следования $\Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ и $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$, где $\mathcal{W}$ — j-шкала, а $\mathcal{K}$ — класс j-шкал, а также понятия полноты и сильной полноты относительно класса j-шкал и полноты по Крипке определяются для логик из $\mathcal{E}J$ стандартным образом. Остаются справедливы аналоги леммы 2.1.12, предложения 2.1.13, упражнения 2.1.14 и следствия 2.1.15.

Доказательство теоремы полноты для минимальной логики не претерпевает существенных изменений.

Лемма 2.2.17 (О расширении). *Для любой логики $L \in \mathcal{E}J$, и любых множеств формул Σ и Δ, если $\Sigma \not\vdash_L \Delta$, то найдется простая L-теория $\Gamma \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \not\vdash_L \Delta$.*

Определение 2.2.18. Пусть $L \in \mathcal{E}J$. *Канонической L-j-шкалой* назовём тройку вида $\mathcal{W}^L = \langle W^L, \leq^L, Q^L\rangle$, где

1) W^L — множество всех простых L-теорий;

2) $\Gamma \leq^L \Delta \iff \Gamma \subseteq \Delta$;

3) $Q^L := \{\Gamma \in W^L \mid \bot \in \Gamma\}$.

Каноническая L-j-модель μ^L — это каноническая L-j-шкала $\mathcal{W}^L$ вместе с оценкой v^L, заданной посредством эквивалентности

$$\Gamma \in v^L(p) \quad\iff\quad p \in \Gamma\,.$$

Очевидно, что Q^L — конус, поэтому каноническая L-j-модель определена корректно.

Лемма 2.2.19 (О канонической модели). *Пусть $L \in \mathcal{E}Int$. В канонической L-j-модели μ^L для любых $\Gamma \in W^L$ и $\varphi \in For_{\mathcal{L}^\bot}$ верно*

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \quad\iff\quad \varphi \in \Gamma\,.$$

Доказательство. Используем доказательство леммы 2.1.18 и цепочку эквивалентностей

$$\mu^L, \Gamma \models \bot \quad\iff\quad \Gamma \in Q^L \quad\iff\quad \bot \in \Gamma\,.$$

□

Теорема 2.2.20. *Логика J сильно полна относительно следующих классов j-шкал:*

а) класса всех j-шкал;

б) класса всех острых j-шкал;

в) класса всех j-шкал над частичными порядками;

г) класса всех j-шкал над острыми частичными порядками.

Доказательство. Дословно повторяем доказательство теоремы 2.1.19 (попутно заменяя всюду Pos на J). □

Как и для интуиционистской логики доказываем

Предложение 2.2.21. *Минимальная логика обладает дизъюнктивным свойством.*

Ранее мы определили канонические модели и доказали лемму о канонической модели для всех расширений минимальной и интуиционистской логик. Это позволит доказать теорему полноты не только для упомянутых логик, но и для некоторых их расширений.

Рассмотрим ряд формул:

L. $(p \to q) \vee (q \to p)$;

K. $\neg p \vee \neg\neg p$;

X. $p \vee \neg p$.

Условимся, что обозначение для логики, получающеейся присоединением одной из этих аксиом к логике, уже имеющей обозначение, образуется присоединением буквы, соответствующей аксиоме, к имеющемуся обозначению логики. Так, например, будем обозначать $JK := J + \{\neg p \vee \neg\neg p\}$. Ясно, что одна и та же логика может получить несколько обозначений. В частности, $Cl = IntE = IntX$.

Напомним, что предпорядок $\langle W, \leq \rangle$ называется *направленным*, если для любых элементов $x, y \in W$ найдется $z \in W$ такой, что $x \leq z$ и $y \leq z$. Предпорядок $\langle W, \leq \rangle$ называется *линейным*, если для любых $x, y \in W$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Наконец, предпорядок $\langle W, \leq \rangle$ называется *антицепью*, если из $x \leq y$ следует $x = y$ для любых $x, y \in W$.

Теорема 2.2.22. *Справдливы следующие утверждения о полноте логик.*

1. *Логика $IntK$ сильно полна относительно класса направленных шкал.*
2. *Логика JK сильно полна относительно класса j-шкал с направленным множеством нормальных миров.*
3. *Классическая логика Cl сильно полна относительно класса антицепей.*
4. *Логика JX сильно полна относительно класса j-шкал, в которых множество нормальных миров является антицепью.*
5. *Логика $IntL$ сильно полна относительно класса линейных шкал.*
6. *Логика JL сильно полна относительно класса j-шкал над линейными предпорядками.*

Доказательство. Мы докажем пункты 2 и 6, остальные оставляются в качестве упражнения.

2. Проверим, что из $\Gamma \vdash_{JK} \varphi$ следует $\Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ для любой шкалы $\mathcal{W}$ с направленным множеством нормальных миров. Для этого достаточно проверить, что в любой шкале с направленным множеством нормальных миров истинна формула K.

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q \rangle$ — j-шкала с направленным множеством $W \setminus Q$ и $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ — модель над этой шкалой. Заметим, что если $x \in Q$, то $\mu, x \models \neg\varphi$ для любой формулы φ. Действительно, $\neg\varphi$ — это сокращение для импликации $\varphi \to \bot$, заключение которой истинно как в x, так и в любом $y \geq x$. Тем самым, если $x \in Q$, то $\mu, x \models \neg p \vee \neg\neg p$.

Предположим, что $x \in W \setminus Q$ и $\mu, x \not\models \neg p \vee \neg\neg p$. Тогда найдутся $y, z \geq x$ такие, что $\mu, y \models p$ и $y \notin Q$; $\mu, z \models \neg p$ и $z \notin Q$. Поскольку миры y и z нормальны, то найдется нормальный мир t такой, что $y \leq t$ и $z \leq t$. Из $\mu, y \models p$ по лемме о монотонности следует $\mu, t \models p$. В то же время из условий $\mu, z \models \neg p$ и $t \notin Q$ следует $\mu, t \not\models p$. Противоречие.

Предположим теперь, что $\Gamma \nvdash_{JK} \varphi$, и покажем, что найдется модель над шкалой с направленным множеством нормальных миров, в некотором мире которой истинны все формулы из Γ, но ложна формула φ.

По лемме о расширении найдется простая JK-теория Γ' такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\varphi \notin \Gamma'$. Тогда по лемме о канонической модели верно

$$\mu^{JK}, \Gamma' \models \psi \ \text{ для всех } \ \psi \in \Gamma \quad \text{и} \quad \mu^{JK}\Gamma' \not\models \varphi\,.$$

Рассмотрим порождёуную подмодель $\mu := (\mu^{JK})^{\Gamma'}$. Напомним, что $(\mu^{JK})^{\Gamma'} = (\mu^{JK})^{\check{\Gamma}'}$, где $\check{\Gamma}' = \{\Delta \in W^{JK} \mid \Gamma' \subseteq \Delta\}$ — конус, порождёуный миром Γ'. По лемме о порождённой подмодели,

$$\mu, \Gamma' \models \psi \ \text{ для всех } \ \psi \in \Gamma \quad \text{и} \quad \mu, \Gamma' \not\models \varphi\,.$$

Проверим, что в шкале модели μ множество нормальных миров направлено. Если $\bot \in \Gamma'$, то множество нормальных миров пусто и направлено тривиальным образом.

Предположим, что $\bot \notin \Gamma'$. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W^{JK}$ такие, что $\Gamma' \subseteq \Gamma_1, \Gamma_2$, $\bot \notin \Gamma_1$ и $\bot \notin \Gamma_2$. Нам нужно найти простую теорию $\Gamma_3 \in W^{JK}$ такую, что $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma_3$ и $\bot \notin \Gamma_3$. Допустим, что такой теории Γ_3 не существует. Ввиду леммы о расширении это означает, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{JK} \bot$. Следовательно, найдется формула $\phi \in \Gamma_2$ такая, что $\Gamma_1 \cup \{\phi\} \vdash_{JK} \bot$. По теореме дедукции $\Gamma_1 \vdash_{JK} \neg\phi$. Поскольку Γ' — JK-теория, имеем $\neg\phi \vee \neg\neg\phi \in \Gamma'$. Из простоты теории Γ' следует, что $\neg\phi \in \Gamma'$ или $\neg\neg\phi \in \Gamma'$. Однако условие $\neg\phi \in \Gamma'$ противоречит условиям $\phi \in \Gamma_2$ и $\bot \notin \Gamma_2$, а условие $\neg\neg\phi \in \Gamma'$ противоречит условиям $\neg\phi \in \Gamma_1$ и $\bot \notin \Gamma_1$. Мы показали, тем самым, что множество нормальных миров модели μ направлено.

6. Проверим, что из $\Gamma \vdash_{JL} \varphi$ следует $\Gamma \models_{\mathcal{W}} \varphi$ для любой линейной j-шкалы $\mathcal{W}$. Для этого достаточно показать, что в любой линейной шкале истинна формула L.

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q \rangle$ — линейная j-шкала и $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ — модель над этой шкалой.

Предположим, что $\mu, x \not\models (p \to q) \vee (q \to p)$. Тогда найдутся $y, z \geq x$ такие, что $\mu, y \models p$ и $\mu, y \not\models q$; $\mu, z \models q$ и $\mu, z \not\models p$. Поскольку шкала линейна, миры y и z сравнимы. Предположим, что $y \leq z$. Тогда $\mu, z \models p$, что противоречит условию $\mu, z \not\models p$. Если $z \leq y$, приходим к противоречию аналогичным образом.

Предположим теперь, что $\Gamma \not\vdash_{JL} \varphi$, и покажем, что найдется модель над линейной j-шкалой, в некотором мире которой истинны все формулы из Γ, но ложна формула φ.

По лемме о расширении найдется простая JL-теория Γ' такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\varphi \notin \Gamma'$. Тогда по лемме о канонической модели верно

$$\mu^{JL}, \Gamma' \models \psi \text{ для всех } \psi \in \Gamma \quad \text{и} \quad \mu^{JL}, \Gamma' \not\models \varphi\,.$$

Рассмотрим порождёуную подмодель $\mu := (\mu^{JL})^{\Gamma'}$. По лемме о порождённой подмодели

$$\mu, \Gamma' \models \psi \text{ для всех } \psi \in \Gamma \quad \text{и} \quad \mu, \Gamma' \not\models \varphi\,.$$

Проверим, что шкала модели μ линейна. Допустим, что найдутся простые теории $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W^{JL}$ такие, что $\Gamma' \subseteq \Gamma_1, \Gamma_2$, $\Gamma_1 \not\subseteq \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \not\subseteq \Gamma_1$. Выберем формулы $\varphi \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ и $\psi \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$.

Поскольку Γ' — JL-теория, имеем $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) \in \Gamma'$. Из простоты Γ' следует $\varphi \to \psi \in \Gamma'$ или $\psi \to \varphi \in \Gamma'$. Если $\varphi \to \psi \in \Gamma'$, то $\psi \in \Gamma_1$, что противоречит выбору ψ. Если же $\psi \to \phi \in \Gamma'$, то $\varphi \in \Gamma_2$, что противоречит выбору φ. Таким образом, мы доказали, что множество возможных миров модели μ линейно. □

Рассмотрим ещё две формулы, частные случаи аксиом L и $p \vee (p \to q)$:

L$'$. $(p \to \bot) \vee (\bot \to p)$;

E$'$. $\bot \vee (\bot \to p)$.

Кроме того, введём два новых класса j-шкал. Говорим, что j-шкала $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q \rangle$ *разделенная*, если

$$\forall x, y \ ((x \notin Q \text{ и } y \in Q) \ \Rightarrow \ xRy)\,.$$

j-Шкала $\mathcal{W} = \langle W, \leq, Q \rangle$ называется *замкнутой*, если

$$\forall x, y \ ((x \notin Q \text{ и } y \in Q) \ \Rightarrow \ \neg xRy)\,.$$

Упражнение 2.2.23. *Логики JL' и JE' сильно полны относительно классов разделенных и замкнутых j-шкал соответственно.*

2.3. Связь логики Int с классической логикой Cl

Нашей ближайшей целью является получение ряда результатов о связи интуиционистской и классической логик, включая знаменитую теорему Гливенко. Но сначала установим ряд фактов технического характера.

Замечание 2.3.1. *Правило транзитивности имликации*

$$\frac{p \to q \quad q \to r}{p \to r}$$

и *правило перестановки посылок*

$$\frac{p \to (q \to r)}{q \to (p \to r)}$$

оба являются производными в логике J (и тем более в Int) — это легко доказать при помощи теоремы дедукции.

Кроме того, если некоторое правило

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$$

является производным в логике $L \in \mathcal{E}J$, то это же правило будет производным и в любой логике $L' \in \mathcal{E}L$. Действительно, очевидна следующая импликация:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_L \psi \quad \Longrightarrow \quad \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{L'} \psi\,.$$

Лемма 2.3.2. *Следующие формулы принадлежат логике J:*

а) $p \to \neg\neg p$;

б) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$;

в) $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$;

г) $\neg\neg\neg p \to \neg p$;

д) $\neg\neg(p \vee \neg p)$.

Доказательство. а) Приведем квазивывод формулы $p \to \neg\neg p$:

$$(\neg p \to \neg p) \to ((\neg p \to p) \to \neg\neg p)\,, \;\; \neg p \to \neg p\,,$$
$$(\neg p \to p) \to \neg\neg p\,, \;\; p \to (\neg p \to p)\,, \;\; p \to \neg\neg p$$

(на последнем шаге воспользовались правилом транзитивности импликации).

б) По теореме дедукции достаточно доказать $\{p \to q,\ \neg q\} \vdash_J \neg p$. Вот соответствующий вывод:

$$p \to q, \;\; \neg q\,, \;\; \neg q \to (p \to \neg q)\,, \;\; p \to \neg q,$$
$$(p \to \neg q) \to ((p \to q) \to \neg p)\,, \;\; (p \to q) \to \neg p\,, \;\; \neg p\,.$$

в) По теореме дедукции достаточно показать $\{p \to \neg q,\ q\} \vdash_J \neg p$, что доказывается аналогично предыдущему пункту.

г) $p \to \neg\neg p\,, \;\; (p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)\,, \;\; \neg\neg\neg p \to \neg p\,.$

д) Ввиду пункта б) правило контрапозиции

$$\frac{p \to q}{\neg q \to \neg p}$$

является производным в J. Его можно использовать для проведения следующего квази-вывода:

$$p \to (p \vee \neg p)\,,\ \ \neg(p \vee \neg p) \to \neg p\,,\ \ \neg p \to (p \vee \neg p),$$
$$\neg(p \vee \neg p) \to \neg\neg p\,,\ \ (\neg(p \vee \neg p) \to \neg\neg p) \to ((\neg(p \vee \neg p) \to \neg p) \to \neg\neg(p \vee \neg p)),$$
$$(\neg(p \vee \neg p) \to \neg p) \to \neg\neg(p \vee \neg p)\,,\ \ \neg\neg(p \vee \neg p).$$

□

Предложение 2.3.3. *Правило замены является производным в J и Int.*

Доказательство. Так же как и для классической логики, это утверждение доказывается индукцией по сложности формулы χ из заключения правила $(\frac{p \leftrightarrow q}{\chi(p) \leftrightarrow \chi(q)})$. База индукции тривиальна $\{p \leftrightarrow q\} \vdash_J p \leftrightarrow q$, а индукционный переход основан на следующих формулах:

$$(p_1 \leftrightarrow q_1) \to ((p_2 \leftrightarrow q_2) \to ((p_1 * p_2) \leftrightarrow (q_1 * q_2))) \ \in\ Pos \subseteq J\,, \quad * \in \{\vee, \wedge, \to\}\,,$$
$$(p \leftrightarrow q) \to (\neg p \leftrightarrow \neg q) \ \in\ J$$

(последняя формула лежит в J ввиду пункта б) из леммы 2.3.2). □

Также нам понадобится следующая

Лемма 2.3.4. *Правило*

$$\frac{\neg\neg p \ \ \neg\neg(p \to q)}{\neg\neg q}$$

является производным в J.

Доказательство. Докажем $\{p \to (q \to r)\} \vdash_J \neg\neg p \to (\neg\neg q \to \neg\neg r)$.

1. $p \to (q \to r)$ (гипотеза).
2. $(q \to r) \to (\neg r \to \neg q)$.
3. $(\neg r \to \neg q) \to (\neg\neg q \to \neg\neg r)$.
4. $p \to (\neg\neg q \to \neg\neg r)$ (дважды применяем правило транзитивности импликации).
5. $\neg\neg q \to (p \to \neg\neg r)$ (перестановка посылок).
6. $(p \to \neg\neg r) \to (\neg\neg\neg r \to \neg p)$.
7. $(\neg\neg\neg r \to \neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg r)$.
8. $\neg\neg q \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg r)$ (дважды применяем правило транзитивности импликации).
9. $\neg\neg\neg\neg r \leftrightarrow \neg\neg r$ (пункты а) и г) леммы 2.3.2).
10. $\neg\neg q \to (\neg\neg p \to \neg\neg r)$ (правило замены и *modus ponens*).
11. $\neg\neg p \to (\neg\neg q \to \neg\neg r)$ (перестановка посылок).

Ввиду подстановочности вывода мы доказали также

$$\{p \to ((p \to q) \to q)\} \vdash_J \neg\neg p \to (\neg\neg(p \to q) \to \neg\neg q)\,.$$

Очевидно, что $p \to ((p \to q) \to q) \in J$, поэтому $\neg\neg p \to (\neg\neg(p \to q) \to \neg\neg q) \in J$. По теореме дедукции получаем $\{\neg\neg p,\ \neg\neg(p \to q)\} \vdash_J \neg\neg q$. □

Наконец, установим одну из самых известных теорем о связи интуиционистской и классической логик.

Теорема 2.3.5 (Гливенко, 1929). *Для любой формулы* φ *языка* $\mathcal{L}^{CL}$ *верно*

$$\varphi \in Cl \quad\Longleftrightarrow\quad \neg\neg\varphi \in Int\,.$$

Доказательство. Если $\neg\neg\varphi \in Int$, то $\neg\neg\varphi \in Cl$ ввиду включения $Int \subseteq Cl$. Из $\neg\neg p \to p \in Cl$ получаем $\varphi \in Cl$.

Докажем прямую импликацию. Пусть $\varphi \in Cl$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ — вывод этой формулы из частных случаев аксиом классической логики. Покажем, что последовательность $\neg\neg\varphi_1, \dots, \neg\neg\varphi_n = \neg\neg\varphi$ является квазивыводом в интуиционистской логике.

Во-первых, заметим, что если φ_i — частный случай аксиомы Cl, то ее двойное отрицание $\neg\neg\varphi_i$ доказуемо в Int. Для аксиом 1–9 это следует из пункта а) леммы 2.3.2, а для последней аксиомы $p \vee \neg p$ — из пункта д) этой же леммы.

Если же формула φ_i не является аксиомой, а получается по правилу *modus ponens* из формул, скажем, φ_j и φ_k, то формула $\neg\neg\varphi_i$ получается из формул $\neg\neg\varphi_j$ и $\neg\neg\varphi_k$ по правилу $\frac{\neg\neg p \quad \neg\neg(p\to q)}{\neg\neg q}$. Тем самым, для завершения доказательства теоремы нам достаточно доказать допустимость этого правила, что следует из приводимой ниже леммы. □

Следствие 2.3.6. *Для любой формулы* φ *верна эквивалентность:*

$$\neg\varphi \in Cl \quad\Longleftrightarrow\quad \neg\varphi \in Int\,.$$

Доказательство. Пусть $\neg\varphi \in Cl$. Тогда $\neg\neg\neg\varphi \in Int$ по теореме Гливенко. Ввиду леммы 2.3.2 $\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p \in Int$, поэтому $\neg\varphi \in Int$.

Обратная импликация следует из включения $Int \subseteq Cl$. □

Замечание 2.3.7. Аналог теоремы Гливенко неверен для минимальной логики J ввиду того, что $\neg\neg(\bot \to p) \notin J$. Действительно, рассмотрим модель $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$, где $W = \{a, b\}$, $a \neq b$, $a \leq b$, $Q = \{b\}$ и $v(p) = \varnothing$.

$$\begin{array}{l} b\bullet\ \models \bot,\ \not\models p \\ \quad | \\ a\bullet\ \not\models \bot,\ \not\models \bot \to p,\ \models \neg(\bot \to p),\ \not\models \neg\neg(\bot \to p) \end{array}$$

Логику $\mathbf{G} := J + \{\neg\neg(\bot \to p)\}$ будем называть *логикой Гливенко.*

Предложение 2.3.8. *Логика Гливенко* $\mathbf{G}$ *— наименьшая логика в классе* $\mathcal{E}J$*, удовлетворяющая теореме Гливенко.*

Доказательство. Эквивалентность между $\varphi \in Cl$ и $\neg\neg\varphi \in \mathbf{G}$ доказывается почти дословно так же, как и в теореме Гливенко.

Пусть $L \in \mathcal{E}J$ и для любой формулы φ верна эквивалентность

$$\varphi \in Cl \quad\Longleftrightarrow\quad \neg\neg\varphi \in L\,.$$

Ввиду $\bot \to p \in Cl$ получаем $\neg\neg(\bot \to p) \in L$, т. е. $\mathbf{G} \subseteq L$. □

Упражнение 2.3.9 (*). *Опишите класс* j*-шкал, относительно которого логика Гливенко сильно полна.*

2.4. Историческая справка

Прежде чем вводить в рассмотрение новые логики, поговорим об истории возникновения позитивной, минимальной и интуиционистской логик. Их появление связано с таким направлением в основаниях математики, как *интуиционизм*. Общие сведения об интуиционизме можно найти, например, в главе 16 [15].

Первая система интуиционистской логики возникла в результате неформального анализа аксиоматики классической логики в работе А. Н. Колмогорова [13]. Целью автора было вложение классической математики в интуиционистскую, что ввиду интуитивной достоверности последней можно было бы рассматривать как обоснование допустимости классических методов рассуждения. Отправным пунктом его рассуждений было исчисление для классической логики, предложенное Д. Гильбертом двумя годами ранее (см. [24]). Теперь мы называем исчисления такого рода исчислениями Гильбертовского типа. Классическая логика задается в языке $\{\to, \neg\}$ с помощью схем аксиом:

H1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

H2. $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$;

H3. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$;

H4. $(\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi))$;

H5. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;

H6. $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$.

и единственного правила вывода — *modus ponens*.

Упражнение 2.4.1. *Докажите формулу $p \to p$ в данном исчислении.*

Аксиома H6 данного исчисления является представлением логического закона *Tertium non datur* (третьего не дано) в языке без дизъюнкции. Применение этого закона в трансфинитных рассуждениях, т. е. в рассуждениях об актуально бесконечных совокупностях, было подвергнуто критике ещё основателем интуиционизма Л. Э. Я. Брауэром, и эта критика представляет собой один из краеугольных камней интуиционизма. Безусловно, эта аксиома должна быть исключена из аксиоматики интуиционистской логики.

По мнению Колмогорова, аксиомы, описывающие импликацию, безусловно, приемлемы с интуиционисткой точки зрения, чего не скажешь об аксиоме H5. Вот цитата из упомянутой работы Колмогорова:

> «Первая из аксиом отрицания Гильберта: “из ложного следует все” — появилась лишь с возникновением символической логики, как впрочем и первая из аксиом следования. Но в то время, как первая аксиома следования с интуитивной очевидностью вытекает из правильного понимания идеи логического следования, рассматриваемая теперь аксиома не имеет и не может иметь интуитивных оснований, как утверждающая нечто о последствиях невозможного: мы обязаны признать ψ, если признали ложным истинное суждение φ.
>
> Таким образом, первая аксиома отрицания Гильберта не может быть аксиомой интуитивистской логики суждений, из какого бы понимания отрицания мы не исходили. Этим не исключается возможность, что она может быть доказуемой на основании других аксиом формулой».

После исключения из Гильбертовской аксиоматики и аксиомы H5 отрицание осталось неопределенным и Колмогоровым была предложена аксиома

$$\text{K5.} \quad (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)\,,$$

которая наилучшим образом отвечала Брауэровским представлениям о природе отрицательных суждений. Отрицание $\neg\varphi$ считается установленным, если предположение φ приводит к противоречию.

Система, включающая аксиомы H1–H4 и K5, и была принята Колмогоровым в качестве формализации интуиционистской логики. Несложно проверить, что это в точности $\{\to,\neg\}$-фрагмент минимальной логики. Поэтому мы будем обозначать эту систему $J^{\to,\neg}$. Колмогоровым была определена следующая трансляция:

$$\begin{array}{rcl} \tau(p) & := & \neg\neg p \quad \text{для } \ p \in Prop\,; \\ \tau(\varphi \to \psi) & := & \neg\neg(\tau\varphi \to \tau\psi); \\ \tau(\neg\varphi) & := & \neg\neg\neg\tau\varphi \end{array}$$

и доказано, что эта трансляция точно вкладывает импликативно-негативный фрагмент классической логики в $J^{\to,\neg}$. Здесь нет противоречия с тем, что, как было отмечено ранее, теорема Гливенко неверна для минимальной логики, так как $\neg\neg(\bot \to \neg\neg p) \in J$. На самом деле, имеет место и более простой результат. Полагаем

$$\begin{array}{rcl} \tau'(p) & := & \neg\neg p \quad \text{для } p \in Prop\,; \\ \tau'(\varphi \to \psi) & := & \tau'\varphi \to \tau'\psi; \\ \tau'(\neg\varphi) & := & \neg\tau'\varphi. \end{array}$$

Тогда

Упражнение 2.4.2. *Трансляция τ' точно вкладывает импликативно-негативный фрагмент классической логики в $J^{\to,\neg}$.*

Упражнение 2.4.3. *Определите структурную трансляцию, точно вкладывающую Cl в Int.*

Ту же логику, которую мы привыкли называть интуиционистской, предложил А. Гейтинг в [23]. В её список аксиом уже включена аксиома H5, которую Колмогоров критиковал как интуитивно необоснованную. Позже норвежский логик И. Иоганссон в [22] вновь предложил удалить эту аксиому из аксиоматики интуиционистской логики, как не имеющую интуитивного обоснования. За получающимся в результате формализмом (J) позже закрепилось название *минимальной логики*, или *логики Иоганссона.*

Наконец, следует упомянуть Георга Грисса, который предложил вовсе исключить отрицание из языка интуиционистской логики на том основании, что в позитивной арифметике Пеано $\mathbf{PA}^+$ можно определить интуиционистское отрицание. Точнее, пусть позитивное исчисление предикатов с равенством получается из классического исчисления предикатов с равенством удалением всех аксиом для отрицания. Позитивная арифметика $\mathbf{PA}^+$ — это теория над позитивным исчислением предикатов с равенством языка $\langle s^1, +^2, \cdot^2, 0^0\rangle$, заданная всеми аксиомами арифметики Пеано $\mathbf{PA}$, не содержащими отрицание. Для любой позитивной формулы φ можно доказать:

$$\mathbf{PA}^+ \vdash 0 = 1 \to \varphi\,.$$

Поэтому, полагая $\neg\varphi := \varphi \to 0 = 1$, мы определяем интуиционистское отрицание в позитивной арифметике.

Интуиционистская логика как исчисление задач

Первая неформальная семантика интуиционистской логики была описана А.Н. Колмогоровым в его статье [25]. По мнению Колмогорова, наряду с теоретической логикой, роль которой исполняет классическая логика, должна существовать также и прикладная логика, аксиоматизирующая схемы решения задач. Это как раз и есть интуиционистская логика, и пропозициональные переменные предсталяют в ней не суждения, а задачи. Понятие задачи не формализуется, однако приведены следующие примеры задач.

1. Найти такие четыре целые числа x, y, z, n, для которых выполняются соотношения
$$x^n + y^n = z^n,\ n > 2.$$

2. Доказать, что теорема Ферма неверна.

3. Через три заданные точки (x, y, z) провести окружность.[1]

4. Предположив, что один корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ дан, найти другой.

5. Предположив, что число π допускает рациональное выражение $\pi = m/n$, найти аналогичное выражение для числа e.

Отметим, что с точки зрения интуиционизма задачи 1 и 2 — это разные задачи. Затем более сложные формулы представляют следующие задачи:

- $\varphi \vee \psi$ — "решить задачу φ или решить задачу ψ";
- $\varphi \wedge \psi$ — "решить обе задачи φ и ψ";
- $\varphi \to \psi$ — "свести задачу ψ к задаче φ", т. е. "найти эффективную процедуру, которая строит решение задачи ψ по данному решению задачи φ";
- $\neg\varphi$ — "показать, что предположение 'φ имеет решение' приводит к противоречию"

При этом в языке с константой $\perp$ указанную константу можно интерпретировать как проблему, не имеющую решения.

Реализуемость по Клини

Формальная реализация колмогоровской семантики была предложена С. К. Клини. Для этого понятие задачи существенно сужается: рассматриваются только такие задачи, как конструктивная проверка истинности арифметических формул.

Пусть $\langle\ ,\ \rangle : N \times N \to N$ — некоторая примитивно рекурсивная биекция.

Рассмотрим язык арифметики $\langle s^1, +^2, \cdot^2, 0\rangle$ и отношение

$$e \circledR \varphi \quad (e \text{ реализует } \varphi),$$

где e — натуральное число, а φ — арифметическое предложение, определяемое индукцией по сложности формулы следующим образом:

- $e \circledR \perp$ ложно для любого e;
- $e \circledR s = t$, если и только если $e = 0$ и $s = t$ — истинная атомная формула;

[1] Предполагается, что допустимые методы построения точно оговорены.

- $e \circledR \varphi \vee \psi$, если и только если $e = \langle n, m \rangle$, причём либо $n = 0$ и $m \circledR \varphi$, либо $n > 0$ и $m \circledR \psi$;
- $e \circledR \varphi \wedge \psi$, если и только если $e = \langle n, m \rangle$, $n \circledR \varphi$ и $m \circledR \psi$;
- $e \circledR \varphi \to \psi$, если и только если для любого n, из $n \circledR \varphi$ следует, что ч. р. ф. $æ_e$ определена на n и $æ_e(n) \circledR \psi$;
- $e \circledR \forall x\, \varphi(x)$, если и только если для любого n имеем $æ_e(n) \circledR \varphi(\underline{n})$, где $\underline{n} := s^n(0)$;
- $e \circledR \exists x\, \varphi(x)$, если и только если $e = \langle n, m \rangle$ и $m \circledR \varphi(\underline{n})$.

Арифметическое предложение φ назовём *реализуемым*, если найдётся число e, которое реализует φ.

Под арифметикой Гейтинга **HA** понимаем теорию в той же сигнатуре и с теми же аксиомами, что и арифметика Пеано **PA**, но над интуиционистским исчислением предикатов, получающимся из классического удалением аксиомы $\varphi \vee \neg\varphi$.

Д. Нельсоном, учеником С. К. Клини, была доказана корректность арифметики Гейтинга относительно семантики реализуемости.

Теорема 2.4.4. (Д. Нельсон, 1947) *Если предложение φ выводимо в арифметике Гейтинга* **HA** *из реализуемых предложений, то φ реализуемо.*

Однако утверждение о полноте неверно: существуют реализуемые формулы, не доказуемые в арифметике Гейтинга. Примеры тому даёт

Принцип Маркова.

$$\forall x\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \wedge \neg\forall x\, \neg\varphi(x) \to \exists x\, \varphi(x)$$

(здесь φ может быть произвольной арифметической формулой).

Точнее, одни из наиболее известных реализуемых, но не доказуемых в **HA** формул являются частными случаями приведённой выше схемы Маркова.

Модифицированная реализуемость

В своей работе [27] на основе модификации семантики реализуемости Д. Нельсоном была предложена альтернативная формализация интуиционистской логики Int. Причина поиска альтернативной формализации состояла в следующем. Важнейшими конструктивными свойствами интуиционистской логики являются:

если $\vdash_{Int} \varphi \vee \psi$, то $\vdash_{Int} \varphi$ или $\vdash_{Int} \psi$

(*дизъюнктивное свойство*, DP);

и его первопорядковое обобщение:

если $\vdash_{Int} \exists x\, \varphi(x)$, то найдется терм t такой, что $\vdash_{Int} \varphi(t)$

(*извлечение термов из доказательств*).

У этих конструктивных свойств имеются естественные двойники, которые уже неверны в Int:

если $\vdash \sim(\varphi \wedge \psi)$, то $\vdash \sim\varphi$ или $\vdash \sim\psi$

(*свойство конструктивного отрицания*, CNP);

если $\vdash \sim \forall x\, \varphi\,(x)$, то найдется терм t такой, что $\vdash \sim \varphi\,(t)$

(*эффективное построение контрпримера*).

Формула $\neg(p \wedge \neg p) \in Int$ показывает, что свойство конструктивного отрицания неверно для Int. Действительно, ни одна из формул $\neg p$ и $\neg\neg p$ не лежит в Int.

Д. Нельсон ввел в язык дополнительный символ отрицания $\sim$ и определил два отношения между натуральными числами и арифметическими предложениями:

$$e \circledR_p \varphi \quad (e \text{ позитивно реализует } \varphi)\,;$$
$$e \circledR_n \varphi \quad (e \text{ негативно реализует } \varphi)\,.$$

p-Реализуемость определяется точно так же, как и реализуемость по Клини для прежнего набора связок, плюс

$e \circledR_p \sim \varphi$, если и только если $e \circledR_n \varphi$.

n-Реализуемость определяется следующим образом:

- $e \circledR_n \perp$, если и только если $e = 0$;
- $e \circledR_n t = s$, если и только если $e = 0$ и формула $t = s$ ложна;
- $e \circledR_n \varphi \vee \psi$, если и только если $e = \langle k, m\rangle$, $k \circledR_n \varphi$ и $m \circledR_n \psi$;
- $e \circledR_n \varphi \wedge \psi$, если и только если $e = \langle k, m\rangle$, причём либо $k = 0$ и $m \circledR_n \varphi$, либо $k > 0$ и $m \circledR_n \psi$;
- $e \circledR_n \varphi \to \psi$, если и только если $e = \langle k, m\rangle$, $k \circledR_p \varphi$ и $m \circledR_n \psi$;
- $e \circledR_n \forall x\, \varphi\,(x)$, если и только если $e = \langle k, m\rangle$ и $m \circledR_n \varphi\,(\underline{k})$;
- $e \circledR_n \exists x\, \varphi\,(x)$, если и только если для любого k имеем $\text{æ}_e\,(k) \circledR_n \varphi\,(\underline{k})$;
- $e \circledR_n \sim \varphi$, если и только если $e \circledR_p \varphi$.

В упомянутой статье Д. Нельсона предложена также система арифметики **NA**, удовлетворяющая следующей теореме.

Теорема 2.4.5. (D. Nelson, 1949) *Если предложение φ выводимо в* **NA** *из позитивно реализуемых предложений, то φ также позитивно реализуемо.*

Теория **NA** является консервативным расширением арифметики Гейтинга, т. е.

$$\mathbf{NA} \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{HA} \vdash \varphi \text{ для любой } \sim\text{-свободной формулы } \varphi\,.$$

Кроме того, **NA** удовлетворяет дизъюнктивному свойству и свойству извлечения термов из доказательств, а также содержит среди прочего следующие схемы аксиом:

A1. $\sim\sim \varphi \leftrightarrow \varphi$;

A2. $\sim (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\sim \varphi \wedge \sim \psi)$;

A3. $\sim (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\sim \varphi \vee \sim \psi)$;

A4. $\sim (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \sim \psi)$;

A5. $\sim \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x \sim \varphi(x)$;

A6. $\sim \exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x \sim \varphi(x)$.

Покажем теперь, как с помощью этих аксиом выводятся двойственные конструктивные свойства. Точнее, для свойства конструктивного отрицания имеем

$$\mathbf{NA} \vdash \sim (\varphi \wedge \psi) \quad \stackrel{\text{A3}}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{NA} \vdash \sim \varphi \vee \sim \psi \quad \stackrel{\text{DP}}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{NA} \vdash \sim \varphi \ \text{ или } \ \mathbf{NA} \vdash \sim \psi\,,$$

а для конструктивного построения контрпримера —

$$\mathbf{NA} \vdash \sim \forall x\,\varphi\,(x) \quad \stackrel{\text{A5}}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{NA} \vdash \exists x \sim \varphi\,(x) \quad \stackrel{\text{извлечение термов}}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{NA} \vdash \sim \varphi\,(t) \ \text{ для некоторого терма } \ t\,.$$

2.5. Сильное отрицание, логики Нельсона

Перейдем к изучению пропозициональных вариантов логики Нельсона. По-прежнему, логика — это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и *modus ponens*. Ниже мы рассмотрим два варианта паранепротиворечивой логики Нельсона.

Логика **N4** — это наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^{\sim} := \langle \vee, \wedge, \to, \sim \rangle$, содержащая

1) аксиомы позитивной логики;

2) *аксиомы сильного отрицания*:

   A1. $\sim\sim p \leftrightarrow p$;

   A2. $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$;

   A3. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;

   A4. $\sim (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

Далее, логика $\mathbf{N4}^{\perp}$ — это наименьшая логика в языке $\mathcal{L}^{\sim,\perp} := \langle \vee, \wedge, \to, \sim, \perp \rangle$ с дополнительным символом $\perp$ для константы “абсурд”, содержащая все аксиомы логики **N4** и ещё дополнительно

$$\text{A5. } \perp \to p \quad \text{и} \quad \text{A6. } p \to \sim \perp\,.$$

Отметим, что это даёт возможность трактовать $\neg\varphi := \varphi \to \perp$ как интуиционистское отрицание, а точнее, справедливо

Предложение 2.5.1. *Логика* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *является консервативным расширением* **N4** *и интуиционистской логики.*

Впоследствии его несложно будет установить с помощью теорем полноты для логик **N4** и $\mathbf{N4}^{\perp}$ (доказанных ниже).

Правила замены в N4 и $\mathbf{N4}^{\perp}$

Многие важные особенности логик **N4** и $\mathbf{N4}^{\perp}$ связаны с тем, что в них не допустимо правило замены, однако допустимы его слабые аналоги.

Предложение 2.5.2. *В логиках* $\mathbf{N4}$ *и* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *производным является позитивное правило замены*

$$\frac{p \leftrightarrow q}{\chi(p) \leftrightarrow \chi(q)}\,,$$

где χ *—* $\sim$*-свободна.*

Доказательство. Логики $\mathbf{N4}$ и $\mathbf{N4}^{\perp}$ содержат все аксиомы позитивной логики, и, стало быть,

$$(p_1 \leftrightarrow q_1) \to ((p_1 \leftrightarrow q_2) \to ((p_1 * p_2) \leftrightarrow (q_1 * q_2))) \in \mathbf{N4} \subseteq \mathbf{N4}^{\perp}, \quad * \in \{\vee, \wedge, \to\}\,.$$

Далее доказываем индукцией по сложности формулы χ, как и в случае позитивной логики. □

Упражнение 2.5.3. *В логиках* $\mathbf{N4}$ *и* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *производным является кратное позитивное правило замены*

$$\frac{p_1 \leftrightarrow q_1, \ldots, p_n \leftrightarrow q_n}{\chi(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \chi(q_1, \ldots, q_n)}\,,$$

где χ *—* $\sim$*-свободна.*

Говорим, что формула φ находится в *негативной нормальной форме* (н. н. ф.), если символ $\sim$ стоит только перед атомными формулами (перед пропозициональными переменными или перед константой $\perp$).

Следующее утверждение несложно доказать с помощью позитивного правила замены и аксиом сильного отрицания.

Упражнение 2.5.4. *Для любой формулы* $\varphi \in For(\mathcal{L}^{\sim})(For(\mathcal{L}^{\sim,\perp}))$ *найдется формула* $\bar{\varphi} \in For(\mathcal{L}^{\sim})(For(\mathcal{L}^{\sim,\perp}))$ *в н. н. ф. такая, что*

$$\mathbf{N4}(\mathbf{N4}^{\perp}) \vdash \varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}\,.$$

Предложение 2.5.5. *В логиках* $\mathbf{N4}$ *и* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *производным является слабое правило замены*

$$\frac{p \leftrightarrow q \quad \sim p \leftrightarrow \sim q}{\chi\,(p) \leftrightarrow \chi\,(q)}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим случай логики $\mathbf{N4}^{\perp}$. Пусть формула $\chi(p)$, кроме переменной p, содержит также переменные $r_1, \ldots, r_k$, т. е. $\chi(p) = \chi(p, r_1, \ldots, r_k)$. Приведем эту формулу к негативной нормальной форме $\bar{\chi}(p, r_1, \ldots, r_k)$. Ясно, что найдется формула $\chi'(r_1, \ldots, r_{2k+3})$ в языке $\mathcal{L}^{\perp}$ такая, что имеет место графическое равенство формул:

$$\bar{\chi}\,(p, r_1, \ldots, r_k) \;=\; \chi'\,(p, \sim p, r_1, \sim r_1, \ldots, r_k, \sim r_k, \sim \perp).$$

Из эквивалентностей $p \leftrightarrow q$, $\sim p \leftrightarrow \sim q$, $r_1 \leftrightarrow r_1$, $\sim r_1 \leftrightarrow \sim r_1$, $\ldots$, $r_k \leftrightarrow r_k$, $\sim r_k \leftrightarrow \sim r_k$, $\sim \perp \leftrightarrow \sim \perp$ по позитивному кратному правилу замены получаем

$$\chi'(p, \sim p, r_1, \sim r_1, \ldots, r_k, \sim r_k, \sim \perp) \leftrightarrow \chi'(q, \sim q, r_1, \sim r_1, \ldots, r_k, \sim r_k, \sim \perp).$$

Из данной формулы и эквивалентностей

$$\chi(p, r_1, \ldots, r_k) \leftrightarrow \bar{\chi}(p, r_1, \ldots, r_k) \quad \text{и} \quad \chi(q, r_1, \ldots, r_k) \leftrightarrow \bar{\chi}(q, r_1, \ldots, r_k)$$

получаем требуемую эквивалентность $\chi(p, r_1, \ldots, r_k) \leftrightarrow \chi(q, r_1, \ldots, r_k)$. Таким образом, мы доказали, что

$$\{p \leftrightarrow q, \sim p \leftrightarrow \sim q\} \vdash_{\mathbf{N4}^{\perp}} \chi\,(p) \leftrightarrow \chi\,(q).$$

□

Далее определим избыточную логику Нельсона

$$\mathbf{N3} \ = \ \mathbf{N4} + \{\sim p \to (p \to q)\}.$$

Положим $\bot :=\sim (p_0 \to p_0)$. Тогда несложно доказать

$$\mathbf{N3} \vdash (\bot \to p) \wedge (p \to \sim \bot)\,.$$

По этой причине мы отождествляем логики **N3** и $\mathbf{N4}^{\bot} + \{\sim p \to (p \to q)\}$.

Кроме того, имеет место

$$\mathbf{N3} \vdash \sim p \to \neg p \quad (= \ \sim p \to (p \to \bot))$$

(поэтому связку $\sim$ в логиках Нельсона принято называть *сильным* отрицанием).

Также отметим, что, если определить дефинициальное расширение $\mathbf{N3}^{\bot}$ логики **N3** в языке $\mathcal{L}^{\sim,\bot}$ как $\mathbf{N3} + \{\bot \leftrightarrow\sim (p_0 \to p_0)\}$, мы не сможем доказать дефинициальную эквивалентность логик **N3** и $\mathbf{N3}^{\bot}$, пользуясь предложением 1.4.19, так как у нас нет правила замены (в общем виде), а есть лишь слабое правило замены. Таким образом, в расширениях логик **N4** и $\mathbf{N4}^{\bot}$ нужно определять не только новую пропозициональную связку или константу, но и ее сильное отрицание. Например, если мы определим

$$\mathbf{N3}^{\bot} \ := \ \mathbf{N3} + \{\bot \leftrightarrow \sim (p_0 \to p_0),\, \sim \bot \leftrightarrow (p_0 \to p_0)\}\,,$$

то логики **N3** и $\mathbf{N3}^{\bot}$ будут дефинициально эквивалентны.

Семантика Крипке для N3, N4 и $\mathbf{N4}^{\bot}$

Далее понятие модели определяется сразу для языка $\mathcal{L}^{\sim,\bot}$, поэтому, в частности, не делается различия между моделями для **N4** и $\mathbf{N4}^{\bot}$, хотя несколько более аккуратным было бы рассматривать в качестве моделей для **N4** сужения моделей для $\mathbf{N4}^{\bot}$ на язык без $\bot$, и аналогично для **N3** и $\mathbf{N3}^{\bot}$ (см. определение ниже).

Определение 2.5.6. *Шкала* — это пара $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$, состоящая из множества W с заданным на нём предпорядком $\leq$.

N4-*модель* (*над шкалой* $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$) — это тройка $\mu = \langle \mathcal{W}, v^+, v^- \rangle$, состоящая из шкалы $\mathcal{W}$ вместе с двумя оценками $v^+, v^- : \mathit{Prop} \to \langle W, \leq \rangle^+$, а **N3**-*модель* $\mu = \langle \mathcal{W}, v^+, v^- \rangle$ есть **N4**-модель, удовлетворяющая дополнительно условию

$$v^+(p) \cap v^-(p) \ = \ \varnothing \quad \text{для всех } \ p \in \mathit{Prop}\,.$$

Теперь определим два отношения выполнимости $\models^+$ (*позитивное*) и $\models^-$ (*негативное*) $\mathcal{L}^{\sim,\bot}$-формул в мирах произвольной **N4**-модели $\mu = \langle W, \leq, v^+, v^- \rangle$ (одновременной индукцией по сложности формул):

- $\mu, w \models^+ p \iff w \in v^+(p)\,;$
  $\mu, w \models^- p \iff w \in v^-(p)\,;$
- $\mu, w \models^+ \varphi \wedge \psi \iff \mu, w \models^+ \varphi$ и $\mu, w \models^+ \psi\,;$
  $\mu, w \models^- \varphi \wedge \psi \iff \mu, w \models^- \varphi$ или $\mu, w \models^- \psi\,;$
- $\mu, w \models^+ \varphi \vee \psi \iff \mu, w \models^+ \varphi$ или $\mu, w \models^+ \psi\,;$
  $\mu, w \models^- \varphi \vee \psi \iff \mu, w \models^- \varphi$ и $\mu, w \models^- \psi\,;$

- $\mu, w \models^+ \varphi \to \psi \iff \forall w' \, (w \leq w' \;\Rightarrow\; (\mu, w' \models^+ \varphi \;\Rightarrow\; \mu, w' \models^+ \psi))$;
  $\mu, w \models^- \varphi \to \psi \iff \mu, w \models^+ \varphi$ и $\mu, w \models^- \psi$;
- $\mu, w \models^+ \sim\varphi \iff \mu, w \models^- \varphi$;
  $\mu, w \models^- \sim\varphi \iff \mu, w \models^+ \varphi$;
- $\mu, w \not\models^+ \bot$ и $\mu, w \models^- \bot$.

Кроме того, для каждой $\mathcal{L}^{\sim,\bot}$-формулы (в частности, $\mathcal{L}^{\sim}$-формулы) φ полагаем

$$\mu^+(\varphi) \;:=\; \{x \in W \mid \mu, x \models^+ \varphi\} \quad \text{и} \quad \mu^-(\varphi) \;:=\; \{x \in W \mid \mu, x \models^- \varphi\}.$$

Лемма 2.5.7 (О монотонности). *Пусть* $\mu = \langle W, \leq, v^+, v^- \rangle$ — **N4**-*модель. Тогда для каждой* $\mathcal{L}^{\sim,\bot}$-*формулы* φ *верно* $\{\mu^+(\varphi), \mu^-(\varphi)\} \subseteq \langle W\ \leq\rangle^+$, *т. е. для любых* $\{x, y\} \subseteq W$ *имеют место импликации*

$$\begin{aligned} \mu, x \models^+ \varphi, \quad x \leq y \quad &\Longrightarrow \quad \mu, y \models^+ \varphi, \\ \mu, x \models^- \varphi, \quad x \leq y \quad &\Longrightarrow \quad \mu, y \models^- \varphi. \end{aligned}$$

Доказательство. Индукцией по сложности формулы. По определению отношений выполнимости и опровержимости $\mu^+(\bot) = \varnothing$ и $\mu^-(\bot) = W$, кроме того, для любой пропозициональной переменной p верны равенства $\mu^+(p) = v^+(p)$ и $\mu^-(p) = v^-(p)$, поэтому база индукции следует из определения **N4**-модели.

Предположим, что $\mu^+(\varphi)$, $\mu^-(\varphi)$, $\mu^+(\psi)$ и $\mu^-(\psi)$ лежат в $\langle W, \leq\rangle^+$.

Для $\mu^+(\varphi * \psi)$, где $* \in \{\vee, \wedge, \to\}$, индукционный переход в точности такой же, как в лемме 2.1.8. Кроме того, $\mu^+(\sim\varphi) = \mu^-(\varphi)$ и $\mu^-(\sim\varphi) = \mu^+(\varphi)$, поэтому $\mu^+(\sim\varphi)$, $\mu^-(\sim\varphi) \in \langle W, \leq\rangle^+$.

Из определения отношения опровержимости легко следуют соотношения:

$$\mu^-(\varphi \vee \psi) = \mu^-(\varphi) \cap \mu^-(\psi),\ \mu^-(\varphi \wedge \psi) = \mu^-(\varphi) \cup \mu^-(\psi),\ \mu^-(\varphi \to \psi) = \mu^+(\varphi) \cap \mu^-(\psi),$$

откуда немедленно получаем $\mu^-(\varphi \vee \psi)$, $\mu^-(\varphi \wedge \psi)$, $\mu^-(\varphi \to \psi) \in \langle W, \leq\rangle$. □

Теперь заметим, что условие $v^+(p) \cap v^-(p) = \varnothing$ из определения **N3**-модели переносится на все формулы.

Лемма 2.5.8. *Пусть* $\mu = \langle W, \leq, v^+, v^- \rangle$ — **N3**-*модель. Тогда для каждой* $\mathcal{L}^{\sim,\bot}$-*формулы* φ *верно*

$$\mu^+(\varphi) \cap \mu^-(\varphi) \;=\; \varnothing\,.$$

Доказательство. Опять используем индукцию по сложности формулы, причем база индукции прямо следует из определения **N3**-модели.

Предположим, что уже доказаны соотношения

$$\mu^+(\varphi) \cap \mu^-(\varphi) \;=\; \varnothing \quad \text{и} \quad \mu^+(\psi) \cap \mu^-(\psi) \;=\; \varnothing.$$

Очевидно, что $\mu^+(\sim\varphi) \cap \mu^-(\sim\varphi) = \mu^-(\varphi) \cap \mu^+(\varphi) = \varnothing$.

Допустим, что $x \in \mu^+(\varphi \wedge \psi) \cap \mu^-(\varphi \wedge \psi)$. Тогда $x \in \mu^+(\varphi) \cap \mu^+(\psi)$ и либо $x \in \mu^-(\varphi)$, либо $x \in \mu^-(\psi)$. Если $x \in \mu^-(\varphi)$, то $x \in \mu^+(\varphi) \cap \mu^-(\varphi)$, что противоречит индукционному предположению. Если же $x \in \mu^-(\psi)$, то $x \in \mu^+(\psi) \cap \mu^-(\psi)$, что опять противоречит индукционному предположению.

Случай дизъюнкции разбирается аналогично.

Пусть $x \in \mu^+(\varphi \to \psi) \cap \mu^-(\varphi \to \psi)$. Условие $x \in \mu^-(\varphi \to \psi)$ эквивалентно $x \in \mu^+(\varphi)$ и $x \in \mu^-(\psi)$. Из $x \in \mu^+(\varphi \to \psi)$ следует, что $x \in \mu^+(\varphi)$ влечет $x \in \mu^+(\psi)$. Таким образом, $x \in \mu^+(\psi) \cap \mu^-(\psi)$, что противоречит индукционному предположению. □

Посмотрим, как выглядит в рассматриваемом контексте лемма о порождённой подмодели.

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — шкала, $\mu = \langle W, \leq, v^+, v^- \rangle$ — **N4**-модель и $K \in \mathcal{W}^+$. Определим *порождёуную подшкалу*

$$\mathcal{W}^K \;:=\; \langle K, \leq \cap K^2 \rangle$$

и *порождёуную подмодель*

$$\mu^K \;:=\; \langle \mathcal{W}^K, v_K^+, v_K^- \rangle\,,$$

где

$$v_K^+(p) \;=\; v^+(p) \cap K\,,\;\; v_K^-(p) \;=\; v^-(p) \cap K \quad \text{для всех } p \in Prop\,.$$

Как и ранее, используем следующие обозначения: $\mathcal{W}^w := \mathcal{W}^{\breve{w}}$ и $\mu^w := \mu^{\breve{w}}$, где $w \in W$ и $\breve{w} := \{u \in W \mid w \leq u\}$ — конус, порождёуный миром w.

Доказательство следующего утверждения (одновременной индукцией по сложности формул) оставляется в качестве упражнения читателю.

Лемма 2.5.9 (О порождённой подмодели). *Пусть* $\mu = \langle W, \leq, v^+, v^- \rangle$ — **N4**-*модель и* $K \in \mathcal{W}^+$. *Тогда для любых* $\mathcal{L}^{\sim,\perp}$-*формулы* φ *и мира* $x \in K$ *верно*

$$\begin{array}{ccc} \mu, x \models^+ \varphi & \Longleftrightarrow & \mu^K, x \models^+ \varphi\,; \\ \mu, x \models^- \varphi & \Longleftrightarrow & \mu^K, x \models^- \varphi\,. \end{array}$$

Пусть $\mu = \langle W, \leq, v^+, v^- \rangle$ — произвольная **N4**-модель над шкалой $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$. Говорим, что формула φ (языка $\mathcal{L}^{\sim,\perp}$)

- *истинна в* μ (обозначается $\mu \models \varphi$), если $\mu, x \models^+ \varphi$ для всех $x \in W$;
- **N4**-*истинна в* $\mathcal{W}$ ($\mathcal{W} \models_{\mathbf{N4}} \varphi$), если φ истинна во всех **N4**-моделях над $\mathcal{W}$;
- **N3**-*истинна в* $\mathcal{W}$ ($\mathcal{W} \models_{\mathbf{N3}} \varphi$), если φ истинна во всех **N3**-моделях над $\mathcal{W}$.

Далее для класса шкал $\mathcal{K}$ пишем $\mathcal{K} \models_{\mathbf{N4}} \varphi$, если $\mathcal{W} \models_{\mathbf{N4}} \varphi$ для любой $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$, и $\mathcal{K} \models_{\mathbf{N3}} \varphi$, если $\mathcal{W} \models_{\mathbf{N3}} \varphi$ для любой $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$. Теперь рассмотрим множества

$$L^3\mathcal{K} \;:=\; \{\varphi \in For(\mathcal{L}^{\sim}) \mid \mathcal{K} \models_{\mathbf{N3}} \varphi\}\,, \quad L^4\mathcal{K} \;:=\; \{\varphi \in For(\mathcal{L}^{\sim}) \mid \mathcal{K} \models_{\mathbf{N4}} \varphi\}\,,$$
$$L^{4,\perp}\mathcal{K} \;:=\; \left\{\varphi \in For(\mathcal{L}^{\sim,\perp}) \mid \mathcal{K} \models_{\mathbf{N4}} \varphi\right\}.$$

В частности, если класс одноэлементен, т. е. при $\mathcal{K} = \{\mathcal{W}\}$, полагаем

$$L^3\mathcal{W} \;:=\; L^3\{\mathcal{W}\}\,, \quad L^3\mathcal{W} \;:=\; L^4\{\mathcal{W}\} \quad \text{и} \quad L^{4,\perp}\mathcal{K} \;:=\; L^{4,\perp}\{\mathcal{W}\}\,.$$

Следующее утверждение фактически является теоремой о корректности логик **N3**, **N4** и $\mathbf{N4}^\perp$ относительно введенной семантики.

Предложение 2.5.10. *Для любой шкалы* $\mathcal{W}$ *и любого класса шкал* $\mathcal{K}$ *имеем*

$$\left\{L^3\mathcal{W}, L^3\mathcal{K}\right\} \subset \mathcal{E}\mathbf{N3}\,, \quad \left\{L^4\mathcal{W}, L^4\mathcal{K}\right\} \subset \mathcal{E}\mathbf{N4} \quad \textit{и} \quad \left\{L^{4,\perp}\mathcal{W}, L^{4,\perp}\mathcal{K}\right\} \subset \mathcal{E}\mathbf{N4}^\perp\,.$$

Доказательство. По сути, аналогично доказательству предложений 2.2.5 и 2.1.10 и потому оставляется в качестве упражнения. Отметим лишь, что при доказательстве замкнутости множеств $L^3\mathcal{W}, L^3\mathcal{K}, \ldots$ относительно правила подстановки нужно учесть наличие двух оценок в **N4**-моделях. $\square$

Докажем теперь теорему полноты для логик **N3**, **N4** и $\mathbf{N4}^{\perp}$. Мы будем использовать несложную модификацию метода канонических моделей.

Для любой логики L, расширяющей **N4** или $\mathbf{N4}^{\perp}$, понятие *простой теории* определяется стандартным образом (см. 1.3.3). Лемма о расширении также формулируется и доказывается стандартным образом (по аналогии, например, с доказательством леммы 1.3.5).

Определение 2.5.11 (Каноническая модель). Пусть L — логика, расширяющая **N4** или $\mathbf{N4}^{\perp}$ (в языке $\mathcal{L}^{\sim}$ или $\mathcal{L}^{\sim,\perp}$ соответственно). *Канонической L-шкалой* назовем пару вида $\mathcal{W}^L = \langle W^L, \leq^L \rangle$, где

1) W^L — множество всех простых L-теорий;

2) $\Gamma \leq^L \Delta \iff \Gamma \subseteq \Delta$.

Далее *каноническая L-модель* μ^L — это каноническая L-шкала $\mathcal{W}^L$ вместе с двумя означиваниями v^{+L} и v^{-L}, заданными посредством эквивалентностей

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \in v^{+L}(p) & \iff & p \in \Gamma\,; \\ \Gamma \in v^{-L}(p) & \iff & \sim p \in \Gamma \end{array}$$

(легко понять, каноническая L-модель оказывается **N4**-моделью).

При таком переходе свойство избыточности тоже сохраняется, а именно

Предложение 2.5.12. *Для всякого* **N3**-*расширения* L *его каноническая модель* μ^L *является* **N3**-*моделью.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{N3} \subseteq L$. Допустим, что нашлись простая L-теория Γ и пропозициональная переменная p такие, что $\Gamma \in v^{+L}(p) \cap v^{-L}(p)$, т. е. $p \in \Gamma$ и $\sim p \in \Gamma$. Для любой формулы φ имеем $\sim p \to (p \to \varphi) \in L \subseteq \Gamma$, поэтому любая формула φ лежит в Γ, что противоречит условию $\Gamma \neq For(\mathcal{L}^{\sim})$ из определения простой теории. Таким образом, $v^{+L}(p) \cap v^{-L}(p) = \varnothing$ для любой пропозициональной переменной, т. е. μ^L — **N3**-модель. □

Лемма 2.5.13 (О канонической модели). *Пусть L — логика, расширяющая* **N4** *или* $\mathbf{N4}^{\perp}$. *В канонической L-модели μ^L для любых $\Gamma \in W^L$ и $\mathcal{L}^{\sim,\perp}$-формулы φ верно*

$$\begin{array}{ccc} \mu^L \models^+_\Gamma \varphi & \iff & \varphi \in \Gamma\,; \\ \mu^L \models^-_\Gamma \varphi & \iff & \sim \varphi \in \Gamma\,. \end{array}$$

Доказательство. Индукцией по сложности φ. База индукции следует из определения оценок v^{+L} и v^{-L}.

Предположим, что для формул φ и ψ утверждение леммы уже доказано, т. е. для каждой теории $\Gamma \in W^L$ верны эквивалентности

$$\begin{array}{ccc} \mu^L \models^+_\Gamma \varphi \iff \varphi \in \Gamma & \text{и} & \mu^L \models^-_\Gamma \varphi \iff \sim \varphi \in \Gamma\,; \\ \mu^L \models^+_\Gamma \psi \iff \psi \in \Gamma & \text{и} & \mu^L \models^-_\Gamma \psi \iff \sim \psi \in \Gamma\,. \end{array}$$

Индукционный переход для $\mu^L \models^+_\Gamma \varphi * \psi$, где $* \in \{\vee, \wedge, \to\}$, в точности такой же, как для позитивной логики (см. лемму 2.1.18). Рассмотрим сильное отрицание:

$$\mu^L \models^+_\Gamma \sim \varphi \iff \mu^L \models^-_\Gamma \varphi \overset{\text{инд. гипотеза}}{\iff} \sim \varphi \in \Gamma\,;$$
$$\mu^L \models^-_\Gamma \sim \varphi \iff \mu^L \models^+_\Gamma \varphi \overset{\text{инд. гипотеза}}{\iff} \varphi \in \Gamma \iff \sim (\sim \varphi) \in \Gamma\,.$$

Последняя эквивалентность верна ввиду аксиомы $p \leftrightarrow \sim\sim p$.

Теперь перейдём к случаю конъюнкции в контексте отношения опровержимости:

$$\mu^L \models^-_\Gamma \varphi \wedge \psi \iff (\mu^L \models^-_\Gamma \varphi \text{ или } \mu^L \models^-_\Gamma \psi) \overset{\text{инд. гипотеза}}{\iff}$$
$$(\sim\varphi \in \Gamma \text{ или } \sim\psi \in \Gamma) \iff \sim\varphi \vee \sim\psi \in \Gamma \iff \sim(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma.$$

Последняя эквивалентность верна ввиду закона Де Моргана $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

Случай дизъюнкции рассматривается двойственным образом.

Рассмотрим импликацию. Имеем

$$\mu^L \models^-_\Gamma \varphi \to \psi \iff (\mu^L \models^+_\Gamma \varphi \text{ и } \mu^L \models^-_\Gamma \psi) \overset{\text{инд. гипотеза}}{\iff}$$
$$(\varphi \in \Gamma \text{ и } \sim\psi \in \Gamma) \iff \varphi \wedge \sim\psi \in \Gamma \iff \sim(\varphi \to \psi) \in \Gamma.$$

Последняя эквивалентность верна ввиду аксиомы $\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$. □

Теорема 2.5.14. *Для любой $\mathcal{L}^{\sim,\perp}$-формулы φ верно*

$$\varphi \in \mathbf{N4}^\perp \quad\iff\quad \mu \models \varphi \ \textit{для любой } \mathbf{N4}\textit{-модели},$$

а если к тому же φ не содержит $\perp$, то

$$\varphi \in \mathbf{N3}(\mathbf{N4}) \quad\iff\quad \mu \models \varphi \ \textit{для любой } \mathbf{N3}(\mathbf{N4})\textit{-модели}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай логики $\mathbf{N4}$. Если $\varphi \in \mathbf{N4}$, то формула φ истинна в любой $\mathbf{N4}$-модели ввиду предложения 2.5.10. Пусть $\mathbf{N4} \nvdash \varphi$, тогда по лемме о расширении найдется простая $\mathbf{N4}$-теория Γ такая, что $\varphi \notin \Gamma$. По лемме о канонической модели имеем $\mu^{\mathbf{N4}} \not\models^+_\Gamma \varphi$, где $\mu^{\mathbf{N4}}$-каноническая модель логики $\mathbf{N4}$.

Анологично для $\mathbf{N4}^\perp$ и $\mathbf{N3}$. В последнем случае пользуемся тем, что каноническая модель $\mu^{\mathbf{N3}}$ является $\mathbf{N3}$-моделью. □

В качестве первого приложения теоремы полноты установим, что логики Нельсона обладают конструктивными свойствами.

Предложение 2.5.15. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Логики Нельсона $\mathbf{N3}$, $\mathbf{N4}$ и $\mathbf{N4}^\perp$ обладают дизъюнктивным свойством.*

2. *Логики $\mathbf{N3}$, $\mathbf{N4}$ и $\mathbf{N4}^\perp$ обладают свойством конструктивного отрицания.*

Доказательство. 1. Доказательство (неконструктивное) данного пункта является несложной модификацией доказательства п. 2 из предложения 2.1.21.

2. Пусть $\sim(\varphi \wedge \psi) \in \mathbf{N4}$, тогда по закону Де Моргана $\sim\varphi \vee \sim\psi \in \mathbf{N4}$, и по только что доказанному дизъюнктивному свойству $\sim\varphi \in \mathbf{N4}$ или $\sim\psi \in \mathbf{N4}$. Аналогично для логик $\mathbf{N3}$ и $\mathbf{N4}^\perp$. □

2.6. Связь логик Нельсона с логиками Int и J

В заключение главы покажем, что логики Нельсона точно вкладываются в позитивную и интуиционистскую логики.

Пусть зафиксирован некоторый алгоритм приведения формул к негативной нормальной форме $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$.

Пусть $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in For(\mathcal{L}^{\sim})$, тогда

$$\bar{\varphi} \;=\; \varphi'\,(p_1, \ldots, p_n, \sim p_1, \ldots, \sim p_n)\,,$$

где φ' — позитивная формула. В таком случае полагаем

$$\varphi^* \;:=\; \varphi'\,(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n})\,.$$

Если же $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in For(\mathcal{L}^{\sim,\perp})$, то

$$\bar{\varphi} \;=\; \varphi'\,(\sim\perp, p_1, \ldots, p_n, \sim p_1, \ldots, \sim p_n)\,,$$

где φ' — интуиционистская формула. В этом случае задаём

$$\varphi^* \;:=\; \varphi'\,(\perp\to\perp, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n})\,.$$

Теорема 2.6.1. *Верны следующие эквивалентности:*

1) $\varphi \in \mathbf{N4} \iff \varphi^* \in Pos\,;$

2) $\varphi \in \mathbf{N4}^{\perp} \iff \varphi^* \in Int\,.$

Доказательство. 1) Пусть $\varphi^* \in Pos$, тогда $\varphi^* \in \mathbf{N4}$, так как $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^{\sim}$, а все аксиомы и правила вывода логики Pos являются аксиомами и правилами вывода логики $\mathbf{N4}$. Из равенства $\varphi^* = \varphi'(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n})$ следует, что

$$\bar{\varphi} = \varphi'\,(p_1, \ldots, p_n, \sim p_1, \ldots, \sim p_n) \;\in\; \mathbf{N4}\,,$$

так как это частный случай формулы φ^*. Из $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi} \in \mathbf{N4}$ получаем $\varphi \in \mathbf{N4}$.

Пусть $\varphi^* \notin Pos$, тогда по теореме полноты для позитивной логики (теорема 5.17) найдутся модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ и мир $x \in W$ такие, что $\mu \not\models_x \varphi^*$. Рассмотрим $\mathbf{N4}$-модель $\mu' = \langle W, \leq, v^+, v^-\rangle$ с теми же самыми множеством возможных миров W и отношением достижимости $\leq$ и оценками, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{array}{rclcrcl} v^+\,(p_1) &=& v\,(p_1)\,, & \ldots\,, & v^+\,(p_n) &=& v\,(p_n)\,;\\ v^-\,(p_1) &=& v\,(p_{n+1})\,, & \ldots\,, & v^-\,(p_n) &=& v\,(p_{2n})\,. \end{array}$$

Индукцией по сложности формулы несложно доказать, что для любых позитивной формулы $\psi(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n})$ и мира $y \in W$ верна эквивалентность:

$$\mu \models_y \psi\,(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n}) \iff \mu' \models_y \psi\,(p_1, \ldots, p_n, \sim p_1, \ldots, \sim p_n)\,.$$

Из данной эквивалентности и $\mu \not\models_x \varphi^*$ следует $\mu' \not\models_x \bar{\varphi}$. Поэтому $\bar{\varphi} \notin \mathbf{N4}$, следовательно, $\varphi \notin \mathbf{N4}$.

2) Этот пункт доказывается аналогично предыдущему, нужно лишь в подходящий момент воспользоваться эквивалентностью $\sim\perp \leftrightarrow (\perp\to\perp) \in \mathbf{N4}$ и позитивным правилом замены. □

Для формулы $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in For(\mathcal{L}^{\sim})$ полагаем

$$\tilde{\varphi} \;:=\; \bigwedge_{1\leq i\leq n} \neg\,(p_i \wedge p_{n+i}) \to \varphi^*\,.$$

Теорема 2.6.2. *Для каждой $\mathcal{L}^{\sim}$-формулы верно*

$$\varphi \in \mathbf{N3} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\varphi} \in Int\,.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\mathbf{N3}^{\perp} = \mathbf{N3} + \{\perp \leftrightarrow \sim (p_0 \to p_0), \sim \perp\}$ — консервативное расширение логики $\mathbf{N3}$ в языке $\mathcal{L}^{\sim,\perp}$.

Если $\tilde{\varphi} \in Int$, то $\tilde{\varphi} \in \mathbf{N3}^{\perp}$, ввиду очевидного включения $Int \subseteq \mathbf{N3}^{\perp}$. Следовательно, формула

$$\bigwedge_{1 \le i \le n} \neg\,(p_i \wedge \sim p_i) \to \bar{\varphi}\,,$$

являющаяся частным случаем формулы $\tilde{\varphi}$, также лежит в $\mathbf{N3}^{\perp}$. Поскольку формула $\neg(p_i \wedge \sim p_i) = (p_i \wedge \sim p_i) \to \perp$ доказуема в $\mathbf{N3}^{\perp}$, получаем $\bigwedge_{1 \le i \le n} \neg(p_i \wedge \sim p_i) \in \mathbf{N3}^{\perp}$. Откуда $\bar{\varphi} \in \mathbf{N3}^{\perp}$. Ввиду консервативности $\mathbf{N3}^{\perp}$ над $\mathbf{N3}$ и того, что $\bar{\varphi}$ не содержит константы $\perp$, получаем $\bar{\varphi} \in \mathbf{N3}$. Тем самым, $\varphi \in \mathbf{N3}$.

Пусть $\tilde{\varphi} \notin Int$, тогда по теореме полноты для интуиционистской логики (теорема 6.13) найдутся модель $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ и мир x такие, что $\mu \not\models_x \tilde{\varphi}$. Поскольку

$$\mu \not\models_x \bigwedge_{1 \le i \le n} \neg\,(p_i \wedge p_{n+i}) \to \varphi^*\,,$$

найдется мир $y \ge x$ такой, что $\mu \models_y \bigwedge_{1 \le i \le n} \neg(p_i \wedge p_{n+i})$ и $\mu \not\models \varphi^*$. Выполнимость условия $\mu \models_y \neg(p_i \wedge p_{n+i})$ означает, что $\mu \not\models p_i \wedge p_{n+i}$ для любого $z \ge y$, т. е.

$$v\,(p_i) \cap v\,(p_{n+i}) \cap \check{y} = \varnothing \quad \text{при } \; i \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{2.3}$$

Рассмотрим $\mathbf{N4}$-модель $\mu' = \langle \mathcal{W}^y, v^+, v^- \rangle$, где оценки v^+ и v^- удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{array}{rcl}
v^+\,(p_1) &=& v\,(p_1) \cap \check{y}\,, \quad \ldots, \quad v^+\,(p_n) \;=\; v\,(p_n) \cap \check{y}\,;\\
v^-\,(p_1) &=& v\,(p_{n+1}) \cap \check{y}\,, \quad \ldots, \quad v^-\,(p_n) \;=\; v\,(p_{2n}) \cap \check{y}\,;\\
v^+\,(p_j) &=& v^-\,(p_j) \;=\; \varnothing \quad \text{при } \; j \notin \{1, \ldots, n\}.
\end{array}$$

Из (2.3) немедленно следует, что μ' — $\mathbf{N3}$-модель.

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, показываем, что для любых позитивной формулы $\psi(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n})$ и мира $z \in W$ верна эквивалентность

$$\mu \models_z \psi\,(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{2n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu' \models_z \psi\,(p_1, \ldots, p_n, \sim p_1, \ldots, \sim p_n).$$

Из данной эквивалентности и $\mu \not\models_y \varphi^*$ следует $\mu' \not\models_y \bar{\varphi}$. Поэтому $\bar{\varphi} \notin \mathbf{N3}$, следовательно, $\varphi \notin \mathbf{N3}$. $\square$

Глава 3

Разрешимость и другие фундаментальные свойства

3.1. Метод фильтрации, свойство конечных моделей

Сначала рассмотрим, как определяются фильтрации для моделей минимальной логики.

Пусть $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ — j-модель, а Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^{\perp}$, замкнутое относительно подформул, т. е. вместе с каждой формулой множество Φ содержит также все её подформулы.

Определим на W двуместное отношение $\equiv_{\Phi}$ следующим образом:

$$x \equiv_{\Phi} y \quad\iff\quad \forall\varphi \in \Phi\ (\mu \models_x \varphi\ \Leftrightarrow\ \mu \models_y \varphi)\,,$$

где $x, y \in W$. Ясно, что $\equiv_{\Phi}$ — эквивалентность на множестве возможных миров W. Обозначим $[x]_{\Phi} := \{y \in W \mid x \equiv_{\Phi} y\}$.

Определение 3.1.1. j-Модель $\mu' = \langle W', \leq', Q', v'\rangle$ назовём *фильтрацией j-модели* $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ *по множеству $\mathcal{L}^{\perp}$-формул* Φ, если выполнены следующие условия:

1) $W' = \{[x]_{\Phi} \mid x \in W\}$;

2) $Q' = \{[x]_{\Phi} \mid x \in Q \text{ и } \perp \in \Phi\}$;

3) $v'(p) = \{[x]_{\Phi} \mid x \in v(p) \text{ и } p \in \Phi\}$, при всех $p \in Prop$;

4) $x \leq y$ влечёт $[x]_{\Phi} \leq' [y]_{\Phi}$, при всех $\{x, y\} \subseteq W$;

5) $[x]_{\Phi} \leq' [y]_{\Phi}$ влечёт $\forall\varphi \in \Phi\ (\mu \models_x \varphi\ \Rightarrow\ \mu \models_y \varphi)$, при всех $\{x, y\} \subseteq W$.

Заметим, что если $[x]_{\Phi} \leq' [y]_{\Phi}$ и $[x]_{\Phi} \in Q'$, то $\perp \in \Phi$ и $x \in Q$. Поэтому $\mu \models_x \perp$ и ввиду условия 5 из определения фильтрации $\mu \models_y \perp$, т. е. $y \in Q$. Тем самым, $[y]_{\Phi} \in Q'$ и мы доказали, что Q' — конус относительно $\leq'$. Заметим, что если $\perp \notin \Phi$, то $Q' = \varnothing$.

Аналогично проверяется, что $v'(p)$ — конус относительно $\leq'$. Причем $v'(p) = \varnothing$, если $p \notin \Phi$.

Мы проверили, таким образом, корректность определения 3.1.1: фильтрация j-модели является j-моделью.

Ясно, что условия 4 и 5 определения 3.1.1 неоднозначно задают отношение $\leq'$. Зададим два специальных предпорядка на W', удовлетворяющих условиям 4 и 5:

$$[x]_{\Phi} \leq_l [y]_{\Phi} \quad\iff\quad \exists x', y' \in W\ (x' \equiv_{\Phi} x \wedge y' \equiv_{\Phi} y \wedge x' \leq y')\,;$$

$$[x]_\Phi \leq_g [y]_\Phi \iff \forall\varphi \in \Phi\ (\mu \models_x \varphi \;\Rightarrow\; \mu \models_y \varphi)\,.$$

Если $x \leq y$, то очевидно, что $[x]_\Phi \leq_l [y]_\Phi$. По лемме о монотонности выполнено также $[x]_\Phi \leq_g [y]_\Phi$.

Проверим теперь условие 5.

Пусть $[x]_\Phi \leq_l [y]_\Phi$ и $\{x', y'\} \subseteq W$ таковы, что $x' \equiv_\Phi x$, $y' \equiv_\Phi y$ и $x' \leq y'$. Тогда для любой формулы $\varphi \in \Phi$ верна следующая цепочка импликаций:

$$\mu \models_x \varphi \implies \mu \models_{x'} \varphi \implies \mu \models_{y'} \varphi \implies \mu \models_y \varphi\,,$$

т. е. условие 5 выполняется для $\leq_l$.

Если же $[x]_\Phi \leq_g [y]_\Phi$, то $\forall\varphi \in \Phi\ (\mu \models_x \varphi \;\Rightarrow\; \mu \models_y \varphi)$ по определению $\leq_g$.

Таким образом, если $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ — j-модель, а Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^\perp$, замкнутое относительно подформул, то j-модели $\mu_l = \langle W', \leq_l, Q', v'\rangle$ и $\mu_g = \langle W', \leq_g, Q', v'\rangle$, где W', Q' и v', как в определении 3.1.1, являются фильтрациями модели μ по множеству формул Φ.

Предложение 3.1.2. *Пусть $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ — j-модель, Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^\perp$, замкнутое относительно подформул, и $\mu' = \langle W', \leq', Q', v'\rangle$ — фильтрация модели μ по множеству формул Φ. Тогда $\leq_l \subseteq \leq' \subseteq \leq_g$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in W$. Если $[x]_\phi \leq_l [y]_\Phi$, то найдутся $x', y' \in W$ такие, что $[x]_\Phi = [x']_\Phi$, $[y]_\Phi = [y']_\Phi$ и $x' \leq y'$. Из $x' \leq y'$ по условию 4 определения 3.1.1 следует $[x]_\phi \leq' [y]_\Phi$.

Предположим теперь, что $[x]_\phi \leq' [y]_\Phi$. Ввиду условия 5 определения 3.1.1 выполнено $\forall\varphi \in \Phi\ (\mu \models_x \varphi \Rightarrow \mu \models_y \varphi)$, т. е. $[x]_\phi \leq_g [y]_\Phi$. □

Ввиду данного предложения μ_l будем называть *наименьшей*, а μ_g — *наибольшей фильтрацией j-модели μ по Φ*.

Теперь покажем, что переход к фильтрации по множеству формул Φ не влияет на истинность формул из данного множества.

Лемма 3.1.3 (О фильрации). *Пусть $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ — j-модель, Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^\perp$, замкнутое относительно подформул, и $\mu' = \langle W', \leq', Q', v'\rangle$ — фильтрация j-модели μ по множеству формул Φ. Тогда для любых $\varphi \in \Phi$ и $x \in W$ верно*

$$\mu \models_x \varphi \iff \mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi\,.$$

Доказательство. Индукцией по сложности формулы. Если $p \in \Phi$, то

$$\mu \models_x p \iff x \in v\,(p) \iff [x]_\Phi \in v'\,(p) \iff \mu' \models_{[x]_\Phi} p\,.$$

В случае $\perp \in \Phi$ имеем

$$\mu \models_x \perp \iff x \in Q \iff [x]_\Phi \in Q' \iff \mu' \models_{[x]_\Phi} \perp\,.$$

Предположим, что утверждение леммы справедливо для некоторых формул φ и ψ и любого мира $x \in W$.

Тогда, воспользовавшись цепочкой эквивалентностей

$$\mu \models_x \varphi \wedge \psi \iff \mu \models_x \varphi \text{ и } \mu \models_x \psi \iff$$
$$\mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi \text{ и } \mu' \models_{[x]_\Phi} \psi \iff \mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi \wedge \psi\,,$$

мы приходим к справедливости указанного утверждения уже для $\varphi \wedge \psi$. Случай дизъюнкции рассматривается столь же просто.

Рассмотрим случай импликации. Предположим, что $\mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi \to \psi$. Пусть $y \geq x$ и $\mu \models_y \varphi$. По индукционному предположению $\mu' \models_{[y]_\Phi} \varphi$, кроме того, $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$ по условию 4 определения 3.1.1. Следовательно, $\mu' \models_{[y]_\Phi} \psi$. Применяя опять индукционное предположение, получаем $\mu \models_y \psi$. Таким образом, мы доказали, что $\mu' \models_x \varphi \to \psi$.

Предположим теперь, что $\mu' \not\models_{[x]_\Phi} \varphi \to \psi$. Тогда для некоторого класса $[y]_\Phi$ такого, что $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$, выполнено $\mu' \models_{[y]_\Phi} \varphi$ и $\mu' \not\models_{[y]_\Phi} \psi$. По индукционному предположению $\mu \models_y \varphi$ и $\mu \not\models_y \psi$, значит $\mu \not\models_y \varphi \to \psi$. Поскольку $\varphi \to \psi \in \Phi$ и $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$, то ввиду условия 5 определения 3.1.1 верна импликация ($\mu \models_x \varphi \to \psi \;\Rightarrow\; \mu \models_y \varphi \to \psi$). Стало быть, $\mu \not\models_x \varphi \to \psi$. □

Теорема 3.1.4. *Минимальная логика J полна относительно класса конечных j-шкал.*

Доказательство. Если $\varphi \in J$, то формула φ истинна во всех j-шкалах, в частности, во всех конечных j-шкалах.

Пусть $\varphi \notin J$. По теореме 2.2.20 (о полноте J) найдутся j-модель $\mu = \langle W, \leq, Q, v\rangle$ и мир $x \in W$ такие, что $\mu \not\models_x \varphi$. Далее, пусть Φ — множество всех подформул формулы φ, а $\mu' = \langle W', \leq', Q', v'\rangle$ — некоторая фильтрация модели μ по Φ. Тогда по лемме о фильтрации $\mu' \not\models_{[x]_\Phi} \varphi$. Осталось заметить, что ввиду конечности множества Φ множество W' также конечно, точнее $|W'| \leq 2^{|\Phi|}$. □

Теорема 3.1.5. *Позитивная логика Pos и интуиционистская логика Int полны относительно класса конечных шкал.*

Доказательство. Понятие фильтрации для моделей позитивной и интуиционистской логик полностью аналогично понятию фильтрации j-модели (не нужно определять конус Q'). Дословно также доказывается лемма о фильтрации и из неё выводится утверждение теоремы. □

Заметим, что, хотя мы доказали полноту относительно классов конечных шкал и конечных j-шкал, свойство сильной полноты теряется при переходе к конечным шкалам.

Теорема 3.1.6. *Логики Pos и Int не сильно полны относительно класса конечных шкал. Логика J не сильно полна относительно класса конечных j-шкал.*

Доказательство. Разберём случай логики Pos. Для логик Int и J рассуждения полностью аналогичны. Полагаем

$$\mathcal{K}_{fin} \;:=\; \{\langle W, \leq\rangle \mid W \text{ — конечно}\}\,.$$

Рассмотрим множество формул

$$\Gamma \;:=\; \{(p_i \leftrightarrow p_j) \to p_0 \mid i, j > 0,\; i \neq j\}\,.$$

Проверим, что $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$, т. е. для любой модели $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$, где W — конечно, и любого $x \in W$ верна импликация

$$\mu \models_x \Gamma \quad\Longrightarrow\quad \mu \models_x p_0\,. \tag{3.1}$$

Пусть $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ — произвольная модель над конечной шкалой. Множество конусов $\langle W, \leq\rangle^+$ — конечно, следовательно, найдутся натуральные числа i_0 и j_0 такие, что $i_0 \neq j_0$ и при этом $v\,(p_{i_0}) = v\,(p_{j_0})$. Тогда $\mu \models_x p_{i_0} \leftrightarrow p_{j_0}$ для каждого $x \in W$.

Теперь если $x \in v(p_0)$, то $\mu \models_x p_0$. Следовательно, импликация (3.1) верна.

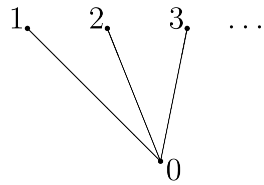
Если же $x \notin v(p_0)$, то $\mu \not\models_x p_0$. Однако в этом случае имеем $\mu \models_x p_{i_0} \leftrightarrow p_{j_0}$ и $\mu \not\models_x p_0$. Значит, $\mu \not\models_x (p_{i_0} \leftrightarrow p_{j_0}) \to p_0$ и отсюда $\mu \not\models_x \Gamma$. Стало быть, импликация (3.1) справедлива и в этой ситуации.

Итак, доказано $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$. Покажем, что выводимость $\Gamma \vdash_{Pos} p_0$ не имеет места. Ввиду сильной полноты логики Pos относительно класса всех шкал (теорема 2.1.19) достаточно найти модель μ_0 такую, что $\mu_0 \models_x \Gamma$ и $\mu_0 \not\models_x p_0$ для некоторого мира x модели μ_0. Поскольку $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$, то ясно, что модель μ_0 должна быть бесконечной.

Возьмём модель $\mu_0 := \langle \omega, \leq_0, v_0 \rangle$, где ω есть множество натуральных чисел, а отношение $\leq_0$ и оценка v_0 определены следующим образом:

$$\leq_0 \; := \; \{(i,i) \mid i \in \omega\} \cup \{(0,i) \mid i \in \omega \setminus \{0\}\}\,;$$
$$v_0\,(p_0) \; := \; \omega \setminus \{0\} \quad \text{и} \quad v_0\,(p_i) \; := \; \{i\} \;\; \text{при} \;\; i > 0\,.$$

Графически предпорядок $\leq_0$ можно изобразить так:



Проверим, что $\mu_0 \models_0 \Gamma$. Если $i > 0$, то $\mu_0 \models_i p_0$, поэтому для любых j, k верна импликация $(\mu_0 \models_i (p_j \leftrightarrow p_k) \Rightarrow \mu_0 \models_i p_0)$.

Пусть $i = 0$. По построению $\mu_0 \not\models_0 p_0$. С другой стороны, легко понять, что для всех пар $j \neq k$ мы имеем $\mu_0 \not\models_0 p_j \leftrightarrow p_k$. Отсюда получаем $\mu_0 \models_0 \Gamma$, но при этом $\mu_0 \not\models_0 p_0$. $\square$

Оказывается, сильная полнота относительно класса конечных шкал возможна только в том случае, когда логика задаётся единственной конечной шкалой.

Логика L из $\mathcal{E}Pos$ ($\mathcal{E}Int$ или $\mathcal{E}J$) называется *табличной*, если найдется конечная (j)-шкала $\mathcal{W}$, для которой $L\mathcal{W} = L$.

Теорема 3.1.7 (W. Dziobiak, 1980). *Логика $L \in \mathcal{E}Int$ сильно полна относительно какого-нибудь класса конечных шкал, если и только если L таблична.*

Упражнение 3.1.8. *Логики Pos, Int и J не являются табличными.*

Подсказка. Рассмотрите формулы

$$\mathbf{bc}_n \; := \; p_0 \vee (p_0 \to p_1) \vee \ldots \vee ((p_0 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_n)\,, \quad n \in \omega \setminus \{0\}\,,$$

и докажите, что для острой шкалы $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$, являющейся частичным порядком, верна эквивалентность

$$\mathcal{W} \models \mathbf{bc}_n \quad \Longleftrightarrow \quad |W| \leq n\,.$$

Логика L из $\mathcal{E}Pos$ ($\mathcal{E}Int$ или $\mathcal{E}J$) называется *финитно аппроксимируемой*, если для любой формулы $\varphi \notin L$ (языка данной логики) найдется конечная (j)-шкала $\mathcal{W}$ со свойствами: $\mathcal{W} \models L$ и $\mathcal{W} \not\models \varphi$. В этом случае (и аналогичных ему) ещё говорят, что соответствующая логика L обладает *свойством конечных моделей*: любая формула рассматриваемого языка, не являющаяся теоремой L, опровергается в некоторой конечной модели логики L.

Теорема 3.1.9 (Харропа). *Если логика L из $\mathcal{E}Pos$ ($\mathcal{E}Int$ или $\mathcal{E}J$) вычислимо перечислима и финитно аппроксимируема, и к тому же класс её конечных моделей вычислимо перечислим, то L разрешима.*

Доказательство. Очевидно, что для любой конечной шкалы $\mathcal{W}$ и формулы φ за конечное число шагов можно эффективно проверить, верно ли $\mathcal{W} \models \varphi$. Поэтому перечислимость класса конечных моделей вместе с финитной аппроксимируемостью позволяют построить перечисление формул, не лежащих в данной логике. Остаётся только применить теорему Поста. □

Следствие 3.1.10. *Логики Pos, Int и J разрешимы.*

Пусть L — финитно аппроксимируемая логика. Её *функция сложности* f_L (действующая на ω) определяется следующим образом:

$$f_L\,(n) \;:=\; \max_{lh(\varphi)\le n,\ \varphi\notin L}\ \min_{\mathcal{W}\models L,\ \mathcal{W}\not\models\varphi} |\mathcal{W}|\ ,$$

где $lh(\varphi)$ — длина формулы φ.

Говорим, что логика L *экспоненциально* (соответственно *полиномиально*, или *линейно*) аппроксимируема, если существует константа c, для которой выполнено

$$f_L\,(n) \le 2^{c\cdot n} \quad (\,f_L\,(n) \le n^c\,,\ \text{ или }\ f_L\,(n) \le c\cdot n\,) \quad \text{ при всех }\ n\in\omega\,.$$

Из доказательств теорем 3.1.4 и 3.1.5 получаем

Следствие 3.1.11. *Логики Pos, Int и J экспоненцильно аппроксимируемы.*

Логика L_1 называется *экспоненциально* (*полиномиально* или *линейно*) *сводимой к логике* L_2 (здесь эти логики могут быть в разных языках), если L_1 точно вкладывается в L_2 посредством τ и значение $\tau\,(\varphi)$ вычисляется за экспоненциальное (полиномиальное, или линейное) время от длины формулы φ.

Из теорем 2.6.1 и 2.6.2 вытекает

Следствие 3.1.12. *Логика* **N4** *линейно сводима к Pos, а логики* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *и* **N3** *линейно сводимы к Int.*

Теорема 3.1.13. *Логика Int не является полиномиально аппроксимируемой.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность формул

$$\beta_n \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{n-1} (((\neg p_{i+1} \to q_{i+1}) \vee (p_{i+1} \to q_{i+1})) \to q_i) \;\to\; ((\neg p_1 \to q_1) \vee (p_1 \to q_1))\,.$$

Очевидно, что $lh\,(\beta_n) = O\,(n)$. Для доказательства теоремы будет достаточно установить, что шкала, на которой опровергается формула β_n, содержит не менее 2^n миров.

Пусть $\mu = \langle W, \le, v\rangle$ и $\mu \not\models_x \beta_n$ для некоторого $x \in W$. Тогда

$$\mu \models_x ((\neg p_{i+1} \to q_{i+1}) \vee (p_{i+1} \to q_{i+1})) \to q_i \quad \text{при }\ i \in \{1,\ldots,n-1\}\,;$$
$$\mu \not\models_x (\neg p_1 \to q_1) \vee (p_1 \to q_1)\,.$$

Последнее условие влечёт существование миров x_0 и x_1 (из W) таких, что $x \le x_0, x_1$ и

$$\mu \models_{x_0} p_1\,, \quad \mu \not\models_{x_0} q_1\,; \qquad \mu \models_{x_1} \neg p_1\,, \quad \mu \not\models_{x_1} q_1\,.$$

Из $\mu \models_{x_0} p_1$ и $\mu \models_{x_1} \neg p_1$ вытекает, что миры x_0 и x_1 не имеют общих последователей. А из $\mu \not\models_{x_i} q_1$, $i \in \{0,1\}$, следует

$$\mu \not\models_{x_i} (\neg p_2 \to q_2) \vee (p_2 \to q_2)\,.$$

Это, в свою очередь, означает, что найдутся миры $x_{00}, x_{01} \geq x_0$ и $x_{10}, x_{11} \geq x_1$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{array}{llll} \mu \models_{x_{00}} p_2\,, & \mu \not\models_{x_{00}} q_2\,; & \mu \models_{x_{01}} \neg p_2\,, & \mu \not\models_{x_{01}} q_2\,; \\ \mu \models_{x_{10}} p_2\,, & \mu \not\models_{x_{10}} q_2\,; & \mu \models_{x_{11}} \neg p_2\,, & \mu \not\models_{x_{11}} q_2\,. \end{array}$$

При этом x_{00} и x_{01} не имеют общих последователей, и также x_{10} и x_{11} не имеют общих последователей. Продолжая данный процесс, мы получим полное бинарное дерево глубины n, состоящее из различных миров модели μ. $\square$

Последняя из теорем допускает следующее нетривиальное обобщение.

Теорема 3.1.14. *Любая нетривиальная логика $L \in \mathcal{E}Int$, обладающая дизъюнктивным свойством, не является полиномиально аппроксимируемой.*

3.2. Табличное исчисление для Cl

Идея табличных исчислений очень проста. Вместо того, чтобы попытаться найти вывод утверждения из аксиом, мы пытаемся построить контрмодель для данного утверждения. Если все попытки найти контрмодель проваливаются, то это и означает, что мы доказали данное утверждение. Поскольку семантика рассматриваемых нами логик формальна, то процесс поиска контрмодели действительно может быть представлен в виде исчисления. Рассмотрим сначала табличное исчисление для классической логики.

Множество формул X языка $\mathcal{L}^{CL}$ назовём *(Cl-)выполнимым*, если существует Cl-оценка v такая, что $v(\varphi) = 1$ для всех $\varphi \in X$. В такой ситуации говорим, что v является *моделью для X* или что X *выполнимо на v*.

В дальнейшем вместо $X \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ пишем

$$X;\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\,,$$

где $X \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — некое множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул. Несложно доказать

Предложение 3.2.1. *Справедливы следующее эквивалентности:*

- $X;\, \neg\neg\varphi$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \varphi$ *выполнимо;*
- $X;\, \varphi \wedge \psi$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \varphi,\, \psi$ *выполнимо;*
- $X;\, \varphi \vee \psi$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \varphi$ *выполнимо или* $X;\, \psi$ *выполнимо;*
- $X;\, \varphi \to \psi$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \neg\varphi$ *выполнимо или* $X;\, \psi$ *выполнимо;*
- $X;\, \neg(\varphi \wedge \psi)$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \neg\varphi$ *выполнимо или* $X;\, \neg\psi$ *выполнимо;*
- $X;\, \neg(\varphi \vee \psi)$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \neg\varphi,\, \neg\psi$ *выполнимо;*
- $X;\, \neg(\varphi \to \psi)$ *выполнимо* $\iff$ $X;\, \varphi,\, \neg\psi$ *выполнимо.*

Данное предложение показывает, как вопрос о выполнимости множества формул может быть сведен к вопросу о выполнимости одного или двух множеств формул, имеющих меньшую “сложность”. Приводимые ниже *правила* $\mathbf{T}$*-исчисления* (преобразующие одни множества формул в другие) в точности соответствуют пунктам последнего предложения:

$$(\wedge)\quad \frac{X;\varphi\wedge\psi}{X;\varphi,\psi}; \qquad (\neg\wedge)\quad \frac{X;\neg(\varphi\wedge\psi)}{X;\neg\varphi \quad | \quad X;\neg\psi};$$

$$(\vee)\quad \frac{X;\varphi\vee\psi}{X;\varphi \quad | \quad X;\psi}; \qquad (\neg\vee)\quad \frac{X;\neg(\varphi\vee\psi)}{X;\neg\varphi,\neg\psi};$$

$$(\to)\quad \frac{X;\varphi\to\psi}{X;\neg\varphi \quad | \quad X;\psi}; \qquad (\neg\to)\quad \frac{X;\neg(\varphi\vee\psi)}{X;\varphi,\neg\psi};$$

$$(\neg)\quad \frac{X;\neg\neg\varphi}{X;\varphi}\ .$$

Говорим, что множество формул X *замкнуто* или что X *содержит конфликт* (английский термин — *clash*), если $\{\varphi,\neg\varphi\} \subseteq X$ для некоторой φ.

Определение 3.2.2. Пусть $X_0 \subset For_{\mathcal{L}^{CL}}$. *Таблица для* X_0 — это дерево T степени ветвления ≤ 2, вершинами которого являются множества формул. При этом корнем дерева является множество X_0; переходы от вершин к их последователям происходят по правилам **T**-исчисления; замкнутые вершины являются листьями дерева; дальнейшее применение правил к незамкнутым листьям невозможно.

Говорим, что таблица T *замкнута*, если все листья таблицы T замкнуты. В противном случае таблица T — *открыта*.

Определение 3.2.3. Множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул X называется **T**-*совместным*, если никакая таблица для X не является замкнутой. В противном случае, т. е. если найдется замкнутая таблица для X, множество X называется **T**-*несовместным*.

Формула φ (языка $\mathcal{L}^{CL}$) *доказуема в* **T**-исчислении, если множество $\{\neg\varphi\}$ является **T**-несовместным.

Прежде всего отметим, что все рассматриваемые здесь таблицы будут конечны (если отправляемся от конечного множества посылок).

Предложение 3.2.4. *Пусть X — конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул. Тогда любая таблица для X конечна.*

Доказательство. Пусть T — некоторая таблица для X. Если множество формул X_1 является последователем X_0 в дереве T, то из вида правил **T**-исчисления легко следует, что

$$\sum_{\varphi\in X_1} lh\,(\varphi) \;<\; \sum_{\varphi\in X_0} lh\,(\varphi)\,.$$

Поэтому длина любой ветви в дереве T конечна. Если в дереве с конечным ветвлением каждая ветвь конечна, то согласно лемме Кёнига это дерево конечно. □

Теорема 3.2.5 (Полнота T-исчисления). *Пусть X — конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул. Тогда X является* **T**-*совместным, если и только если X выполнимо.*

Доказательство. Сначала мы покажем, что каждое выполнимое множество формул является **T**-совместным.

Пусть множество формул X выполнимо и T — некоторая таблица для X. Как следует из предложения 3.2.1, если правило **T**-исчисления применяется к выполнимому множеству формул (множество формул над чертой), то по крайней мере одно из получающихся множеств (одно или два множества, стоящие под чертой) также выполнимо. Корень таблицы T является выполнимым, поэтому в дереве T найдется ветвь, состоящая из выполнимых множеств формул. Данная ветвь конечна согласно предложению 3.2.4, поэтому она оканчивается листом, который также является выполнимым множеством формул. Очевидно, что выполнимое множество формул не может содержать конфликт. Тем самым, мы нашли в дереве T незамкнутый лист, т. е. дерево T является открытым. Поскольку T — прозвольная таблица для X, мы доказали, что множество формул X является $\mathbf{T}$-совместным.

Предположим теперь, что множество формул X является $\mathbf{T}$-совместным, и докажем его выполнимость. Пусть T — произвольная таблица для X и X_0 — незамкнутый лист этой таблицы. Это означает, что X_0 не содержит конфликта, но ни одно из правил $\mathbf{T}$-исчисления не может быть применено к X_0. Последнее возможно лишь в том случае, если элементами X_0 являются только пропозициональные переменные и отрицания пропозициональных переменных. Определим Cl-оценку v_0 со свойствами:

$$\begin{array}{rcll} v_0(p) & = & 1\,, & \text{если} \quad p \in X_0\,; \\ v_0(p) & = & 0\,, & \text{если} \quad \neg p \in X_0 \end{array}$$

(для переменных q, не входящих в X_0, значение $v_0(q)$ можно задать произвольным образом). Очевидно, что X_0 выполнимо на v_0. Из вида правил $\mathbf{T}$-исчисления легко следует, что если отличная от корня вершина Y таблицы T выполнима на некоторой оценке, то её единственный непосредственный предшественник также выполним на этой оценке. Поэтому из выполнимости X_0 на v_0 следует, что X также выполнимо на v_0. □

Следствие 3.2.6. *Пусть $X \cup \{\varphi\}$ — конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул. Верны следующие эквивалентности:*

1) $\varphi \in Cl \iff \varphi$ является $\mathbf{T}$-доказуемой;

2) $X \vdash_{Cl} \varphi \iff X; \neg\varphi$ является $\mathbf{T}$-несовместным.

Следствие 3.2.7. *Пусть X — конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул. Верны следующие эквивалентности:*

1) X является $\mathbf{T}$-совместным $\iff$ некоторая таблица для X не является замкнутой;

2) X является $\mathbf{T}$-несовместным $\iff$ любая таблица для X является замкнутой.

Доказательство. 1) Если множество формул X $\mathbf{T}$-совместно, то по определению 3.2.3 любая таблица для X не замкнута.

Пусть некоторая таблица T для X не замкнута, тогда некоторый лист этой таблицы не замкнут. Следовательно, он выполним на некоторой оценке v_0 (см. доказательство теоремы о полноте $\mathbf{T}$-исчисления). Тогда и множество X выполнимо на v_0. По теореме полноты из выполнимости следует $\mathbf{T}$-совместность.

2) Этот пункт следует из предыдущего. □

Замечание 3.2.8. Данное следствие даёт нам разрешающий алгоритм для классической логики. Чтобы проверить принадлежность формулы φ логике Cl, мы должны построить произвольную таблицу для множества формул $\{\neg\varphi\}$. Если эта таблица открыта, то формула $\neg\varphi$ выполнима, тем самым $\varphi \notin Cl$. Если же таблица замкнута, то $\varphi \in Cl$.

Кроме того, теорема полноты для *генценовского* (*секвенциального*) исчисления для классической логики легко сводится к полноте **T**-исчисления.

Рассмотрим **G**-исчисление, вариант Генценовского исчисления для классической логики, в котором секвенции имеют вид $X \vdash \varphi$, где $X \cup \{\varphi\}$ — конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул (именно множество, а не последовательность). В таком исчислении можно не вводить в рассмотрение структурные правила вывода.

Аксиомами **G**-исчисления являются все секвенции вида $X \vdash \varphi$, где $\varphi \in X$. *Правила* **G**-*исчисления* приведены ниже:

$$(\to \mathtt{e}) \quad \frac{X \vdash \varphi \quad X \vdash \varphi \to \psi}{X \vdash \psi}; \qquad (\to \mathtt{i}) \quad \frac{X; \varphi \vdash \psi}{X \vdash \varphi \to \psi};$$

$$(\wedge \mathtt{e}) \quad \frac{X \vdash \varphi \wedge \psi}{X \vdash \varphi}, \quad \frac{X \vdash \varphi \wedge \psi}{X \vdash \psi}; \qquad (\wedge \mathtt{i}) \quad \frac{X \vdash \varphi \quad X \vdash \psi}{X \vdash \varphi \wedge \psi};$$

$$(\vee \mathtt{e}) \quad \frac{X; \varphi \vdash \chi \quad X; \psi \vdash \chi}{X; \varphi \vee \psi \vdash \chi}; \qquad (\vee \mathtt{i}) \quad \frac{X \vdash \varphi}{X \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{X \vdash \psi}{X \vdash \varphi \vee \psi};$$

$$(\neg) \quad \frac{X; \neg\varphi \vdash \psi \quad X; \neg\varphi \vdash \neg\psi}{X \vdash \varphi}.$$

Понятие *вывода* в виде дерева *доказуемой в* **G**-*исчислении секвенции*, а также понятия *допустимого* и *производного правил вывода* определяются стандартным образом. Конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул X называется **G**-*несовместным*, если секвенция $X \vdash \varphi$ доказуема в **G**-исчислении для любой $\mathcal{L}^{CL}$-формулы φ.[1]

Упражнение 3.2.9. *Следующие правила вывода производны в* **G**-*исчислении:*

$$(\neg \mathtt{i}) \quad \frac{X \vdash \varphi \quad X \vdash \neg\varphi}{X \vdash \psi}, \qquad (\neg \mathtt{j}) \quad \frac{X; \varphi \vdash \psi \quad X; \varphi \vdash \neg\psi}{X \vdash \neg\varphi}.$$

Как следует из допустимости правила $(\neg\,\mathtt{i})$, конечное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул X является **G**-несовместным, если и только если секвенции $X \vdash \varphi$ и $X \vdash \neg\varphi$ доказуемы в **G**-исчислении для некоторой $\mathcal{L}^{CL}$-формулы φ.

Теперь докажем, что из **T**-несовместности следует **G**-несовместность. Для этого нам потребуется ещё несколько производных правил.

Упражнение 3.2.10. *Следующие правила вывода производны в* **G**-*исчислении:*

$$(1) \quad \frac{X; \varphi; \psi \vdash \chi}{X; \varphi \wedge \psi \vdash \chi}; \qquad (2) \quad \frac{X; \neg\varphi \vdash \chi \quad X; \neg\psi \vdash \chi}{X; \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \chi};$$

$$(3) \quad \frac{X; \varphi \vdash \chi \quad X; \psi \vdash \chi}{X; \varphi \vee \psi \vdash \chi}; \qquad (4) \quad \frac{X; \neg\varphi; \neg\psi \vdash \chi}{X; \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \chi};$$

$$(5) \quad \frac{X; \neg\varphi \vdash \chi \quad X; \psi \vdash \chi}{X; \varphi \to \psi \vdash \chi}; \qquad (6) \quad \frac{X; \varphi; \neg\psi \vdash \chi}{X; \neg(\varphi \to \psi) \vdash \chi};$$

$$(7) \quad \frac{X; \varphi \vdash \psi}{X; \neg\neg\varphi \vdash \psi}.$$

[1] Отметим, что по определению, если X — **G**-несовместно, то оно конечно.

Заметим, что правило (3) в точности совпадает с правилом ($\vee$e).

Предложение 3.2.11. *Каждое конечное* **T**-*несовместное множество* $\mathcal{L}^{CL}$-*формул является* **G**-*несовместным.*

Доказательство. Пусть X — конечное **T**-несовместное множество $\mathcal{L}^{CL}$-формул. Тогда существует замкнутая таблица T для X. Пусть Y — некоторый лист таблицы T. Он замкнут, поэтому $\varphi, \neg\varphi \in Y$ для некоторой формулы φ. Следовательно, секвенции $Y \vdash \varphi$ и $Y \vdash \neg\varphi$ доказуемы в **G**-исчислении. Таким образом, любой лист Y таблицы T является **G**-несовместным множеством формул, в частности, секвенции $Y \vdash p_0$ и $Y \vdash \neg p_0$ доказуемы. Заметим, что правила из упражнения 3.2.10 в точности соответствуют правилам **T**-исчисления, что позволяет доказать выводимость секвенций $X \vdash p_0$ и $X \vdash \neg p_0$. Например, пусть вершина Z имеет два последователя Y_1 и Y_2, получающиеся по правилу **T**-исчисления ($\neg\wedge$), и уже установлено, что секвенции $Y_i \vdash p_0$ и $Y_i \vdash \neg p_0$, $i \in \{1, 2\}$, доказуемы в **G**-исчислении. В этом случае

$$Z \;=\; Z' \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi)\}\,, \quad Y_1 \;=\; Z' \cup \{\neg\varphi\} \quad \text{и} \quad Y_2 \;=\; Z' \cup \{\neg\psi\}\,.$$

Из доказуемости секвенций $Z'; \neg\varphi \vdash p_0$ и $Z'; \neg\psi \vdash p_0$ по правилу (2) из Упражнения 3.2.10 получаем, что выводима секвенция $Z'; \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash p_0$. Аналогичным образом доказываем выводимость для $Z'; \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg p_0$. Таким образом, мы доказали, что для любой вершины Z дерева T множество Z является **G**-несовместным, в частности, множество X — **G**-несовместно. □

Теорема 3.2.12 (Полнота G-исчисления). *Пусть* $X \cup \{\varphi\}$ *— конечное множество* $\mathcal{L}^{CL}$-*формул. Тогда секвенция* $X \vdash \varphi$ *доказуема в* **G**-*исчислении, если и только если выполнено* $X \models_{Cl} \varphi$.

Доказательство. Корректность, т. е. прямая импликация, доказывается стандартным образом, индукцией по сложности вывода (в данном случае индукцией по глубине дерева вывода). Докажем собственно полноту.

Пусть $X \models_{Cl} \varphi$. В этом случае множество $X; \neg\varphi$ не является выполнимым. Следовательно, по теореме 3.2.5 (о полноте **T**-исчисления) множество $X; \neg\varphi$ является **T**-несовместным. Значит, ввиду предложения 3.2.11 множество $X; \neg\varphi$ также **G**-несовместно, т. е. **G**-доказуемы секвенции $X; \neg\varphi \vdash p_0$ и $X; \neg\varphi \vdash \neg p_0$. Отсюда по правилу ($\neg$) **G**-исчисления получаем, что секвенция $X \vdash \varphi$ доказуема в **G**-исчислении. □

3.3. Табличное исчисление для Int

Данное исчисление впоследствии будем называть **Ti**-*исчислением.* Главное его отличие от **T**-исчисления (для классической логики) состоит в том, что мы будем работать с множествами «отмеченных» (см. определение ниже) формул. Кроме того, это исчисление будет сформулировано для языка $\mathcal{L}^{\perp}$.

Отмеченной формулой называется выражение вида $+\varphi$ или $-\varphi$, где $\varphi \in For_{\mathcal{L}^{\perp}}$.

Множество X отмеченных формул называется *замкнутым* (*содержит конфликт*), если $+\perp \in X$ или $\{+\varphi, -\varphi\} \subset X$ для некоторой $\mathcal{L}^{\perp}$-формулы φ.

Множество X отмеченных формул называется Int-*выполнимым*, если существуют (Int-)модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ и мир $w \in W$ такие, что

$$\begin{aligned} &\mu, w \models \varphi\,, \qquad \text{если} \quad +\varphi \in X\,;\\ &\mu, w \not\models \varphi\,, \qquad \text{если} \quad -\varphi \in X\,, \end{aligned}$$

т. е. в мире w модели μ выполнены все формулы, входящие в X с меткой "+", и не выполнена никакая из формул, входящих в X с меткой "−".[2]

Для множества X отмеченных формул полагаем

$$X^{+} \;:=\; \{+\varphi \mid +\varphi \in X\}\,.$$

Далее, если в **T**-исчислении при применении некоторого правила к формуле эта формула сама удалялась из набора, то при применении *правил* **Ti**-*исчисления* (за исключением правила $(\to\,-)$, см. ниже) никакие формулы из множества посылок удаляться не будут. Поэтому конечность таблиц **Ti**-исчисления теперь будет гарантироваться специальным механизмом обнаружения циклов. Интуитивно: правило можно не применять к множеству формул X, если такое применение даёт множество формул Y, уже имеющееся в текущей таблице.

Итак, приведём *правила* **Ti**-*исчисления*:

$$(\wedge+)\qquad \frac{+(\varphi\wedge\psi)\in X}{X;+\varphi,+\psi}; \qquad\qquad (\wedge-)\qquad \frac{-(\varphi\wedge\psi)\in X}{X;-\varphi \quad\mid\quad X;-\psi};$$

$$(\vee+)\qquad \frac{+(\varphi\vee\psi)\in X}{X;+\varphi \quad\mid\quad X;+\psi}; \qquad\qquad (\vee-)\qquad \frac{-(\varphi\vee\psi)\in X}{X;-\varphi,-\psi};$$

$$(\to+)\qquad \frac{+(\varphi\to\psi)\in X}{X;-\varphi \quad\mid\quad X;+\psi}; \qquad\qquad (\to-)\qquad \frac{-(\varphi\to\psi)\in X}{X^{+};+\varphi,-\psi}\,.$$

Определение 3.3.1. Пусть X — множество отмеченных формул. *Таблица для* X — это конечное дерево степени ветвления ≤ 2, вершины которого — множества отмеченных формул, корень дерева — множество X, а переходы от вершин к их последователям осуществляются по правилам **Ti**-исчисления. Кроме того, множество отмеченных формул Y является листом дерева T, если и только если выполнено одно из двух условий: либо 1) множество Y замкнуто, либо 2) применение любого из правил **Ti**-исчисления к множеству Y дает множество отмеченных формул, уже являющееся вершиной дерева T.

Пусть $Sub\,(\varphi)$ обозначает множество подформул $\mathcal{L}^{\perp}$-формулы φ. Для $\Gamma \subseteq For_{\mathcal{L}^{\perp}}$ определяем

$$Sub\,(\Gamma) \;:=\; \bigcup_{\varphi\in\Gamma} Sub\,(\varphi)\,,$$

а для множества отмеченных формул X полагаем

$$X^{()} \;:=\; \{\varphi \mid +\varphi \in X \;\text{ или }\; -\varphi \in X\} \quad\text{ и }\quad Sub\,(X) \;:=\; \bigl\{+\varphi,\,-\varphi \mid \varphi \in Sub\bigl(X^{()}\bigr)\bigr\}\,.$$

Разумеется, аналогичные определения легко дать и в случае языка, отличного от $\mathcal{L}^{\perp}$ (одновременно модифицировав понятия отмеченной формулы и конфликта).

Предложение 3.3.2. *Пусть* X *— конечное множество отмеченных формул. Тогда любая таблица для* X *конечна.*

[2] Очевидно, что замкнутое множество отмеченных формул не может быть Int-выполнимым.

Доказательство. Пусть T — произвольная таблица для X и пусть $n := |Sub\,(X)|$. Применение любого из правил **Ti**-исчисления к множеству X дает некоторое подмножество множества $Sub(X)$. То же самое верно и для любой вершины Y таблицы T, $Y \subseteq Sub(X)$. Поэтому процесс применения правил вывода завершается за не более чем 2^n шагов. □

Определение 3.3.3. Множество отмеченных формул X называется **Ti**-*совместным*, если никакая таблица для X не является замкнутой. В противном случае, т. е. если найдется замкнутая таблица для X, множество X называется **Ti**-*несовместным.*

Формула φ языка $\mathcal{L}^{\perp}$ *доказуема в* **Ti**-*исчислении* (**Ti**-*доказуема*), если множество $\{-\varphi\}$ является **Ti**-несовместным.

Сперва докажем утверждение о корректности для **Ti**-исчисления.

Теорема 3.3.4. *Каждое конечное Int-выполнимое множество отмеченных формул является* **Ti**-*совместным.*

Доказательство. Заметим, что если множество X отмеченных формул Int-выполнимо, то при применении к X любого из правил **Ti**-исчисления по крайней мере один из последователей множества X будет Int-выполним.

Рассмотрим только правило $(\to -)$. Пусть $-(\varphi \to \psi) \in X$ и множество X является Int-выполнимым. Последнее означает, что найдутся модель $\mu = \langle W, \leq, v \rangle$ и мир $w \in W$, выполняющие X. В частности, $\mu, w \not\models \varphi \to \psi$. Поэтому найдется мир $u \in W$ такой, что $w \leq u$, $\mu, u \models \varphi$ и $\mu, u \not\models \psi$. Кроме того, для любой формулы $+\chi \in X$ из $\mu, w \models \chi$ следует $\mu, u \models \chi$. Таким образом, множество X^{+}; $+\varphi$; $-\psi$ выполнимо в мире u модели μ.

Теперь рассмотрим произвольную таблицу T для конечного множества отмеченных формул X. Корень этого дерева является Int-выполнимым множеством. Ввиду доказанного выше в дереве найдется путь τ, состоящий из Int-выполнимых множеств отмеченных формул. Дерево T конечно по предложению 3.3.2, поэтому τ также конечен и заканчивается листом Y, который Int-выполним. Ясно, что Int-выполнимое множество формул не содержит конфликта. Таким образом, мы доказали, что произвольная **Ti**-таблица для X не замкнута, т. е. множество X является **Ti**-совместным. □

Следующее понятие будет играть важную роль при доказательстве теоремы о полноте.

Определение 3.3.5. Пусть X — конечное множество отмеченных формул. Множество X называется **Ti**-*насыщенным*, если оно **Ti**-совместно и для всех $\mathcal{L}^{\perp}$-формул φ и ψ выполнено:

$$
\begin{array}{rlcl}
\texttt{i.} & +(\varphi \wedge \psi) \in X & \Longrightarrow & +\varphi,\ +\psi \in X; \\
\texttt{ii.} & -(\varphi \wedge \psi) \in X & \Longrightarrow & -\varphi \in X \text{ или } -\psi \in X; \\
\texttt{iii.} & +(\varphi \vee \psi) \in X & \Longrightarrow & +\varphi \in X \text{ или } +\psi \in X; \\
\texttt{iv.} & -(\varphi \vee \psi) \in X & \Longrightarrow & -\varphi,\ -\psi \in X; \\
\texttt{v.} & +(\varphi \to \psi) \in X & \Longrightarrow & -\varphi \in X \text{ или } +\psi \in X.
\end{array}
$$

Лемма 3.3.6. *Любое конечное* **Ti**-*совместное множество отмеченных формул X содержится в некотором конечном* **Ti**-*насыщенном множестве формул X', причём можно выбрать X' так, чтобы $X' \subseteq Sub\,(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное конечное множество отмеченных формул X, являющееся **Ti**-совместным.

Допустим, что условие (i) не выполнено для формулы $+(\varphi \wedge \psi) \in X$. Рассмотрим множество $X;\ +\varphi;\ +\psi$. Если это множество **Ti**-несовместно и T — замкнутая таблица для $X;\ +\varphi;\ +\psi$, то

$$\frac{T}{X}$$

— замкнутая таблица для X, что противоречит **Ti**-совместности X. Стало быть, множество $X;\ +\varphi;\ +\psi$ — **Ti**-совместно.

Предположим теперь, что условие (ii) не выполнено для формулы $-(\varphi \wedge \psi) \in X$, но каждое из множеств $X;\ -\varphi$ и $X;\ -\psi$ является **Ti**-несовместным. Тогда найдутся замкнутая таблица T_1 для $X;\ -\varphi$ и замкнутая таблица T_2 для $X;\ -\psi$. Но в этом случае дерево

$$\frac{T_1 \quad T_2}{X}$$

будет примером замкнутой таблицы для X, что противоречит **Ti**-совместности X.

Аналогичным образом проверяется, что если одно из условий (iii–v) не выполнено для некоторой отмеченной формулы из X, то к X можно добавить формулы из $Sub\,(X)$ так, чтобы получившееся множество X' было по-прежнему **Ti**-совместно и соответствующее условие (из определения 3.3.5) выполнялось для данной формулы. Итерируя процесс добавления формул, мы получим через конечное число шагов **Ti**-насыщенное множество X', расширяющее X. $\square$

Теорема 3.3.7 (Полнота Ti-исчисления). *Конечное множество отмеченных формул* **Ti**-*совместно, если и только если это множество* Int-*выполнимо.*

Доказательство. Ввиду установленной ранее корректности, нам достаточно показать, что каждое **Ti**-совместное множество является Int-выполнимым.

Пусть X — конечное **Ti**-совместное множество отмеченных формул. Рассмотрим модель

$$\mu^X \ := \ \langle W^X, \leq, v \rangle\,,$$

где

- W^X — семейство всех **Ti**-насыщенных подмножеств множества $Sub\,(X)$;
- $S_1 \leq S_2 \iff S_1^+ \subseteq S_2^+$;
- $v\,(p) \ := \ \left\{ S \in W^X \mid +p \in S \right\}$.

Индукцией по сложности формул докажем, что для любых $\varphi \in Sub\left(X^0\right)$ и $S \in W^X$ верны импликации:

$$\begin{array}{lcl} +\varphi \in S & \Longrightarrow & \mu^X, S \models \varphi\,; \\ -\varphi \in S & \Longrightarrow & \mu^X, S \not\models \varphi\,. \end{array}$$

Если $+p \in S$, то $S \in v\,(p)$ по определению оценки v, т. е. $\mu^X, S \models p$. Если $-p \in S$, то $+p \notin S$ ввиду **Ti**-совместности множества S. Следовательно, $S \notin v\,(p)$ и $\mu^X, S \not\models p$. Базис индукции доказан.

Пусть требуемые импликации уже установлены для отмеченных формул $+\varphi$, $-\varphi$, $+\psi$ и $-\psi$ (при всех $S \in W^X$).

Если $+(\varphi \wedge \psi) \in S$, то $+\varphi, +\psi \in S$ ввиду **Ti**-насыщенности множества S. Следовательно, по индукционному предположению выполнено $\mu^X, S \models \varphi$ и $\mu^X, S \models \psi$, откуда $\mu^X, S \models \varphi \wedge \psi$.

Если $-(\varphi \wedge \psi) \in S$, то $-\varphi \in S$ или $-\psi \in S$ ввиду **Ti**-насыщенности множества S. Следовательно, по индукционному предположению выполнено $\mu^X, S \not\models \varphi$ или $\mu^X, S \not\models \psi$. В любом случае верно $\mu^X, S \not\models \varphi \wedge \psi$.

Случай дизъюнкции рассматривается аналогично.

Пусть $+(\varphi \to \psi) \in S$. Допустим, что $\mu^X, S \not\models \varphi \to \psi$. Тогда найдется множество $S' \geq S$ такое, что

$$\mu^X, S' \models \varphi \quad \text{и} \quad \mu^X, S' \not\models \psi\,. \tag{3.2}$$

Из $S \leq S'$ следует $+(\varphi \to \psi) \in S'$. Ввиду **Ti**-насыщенности множества S' имеем $-\varphi \in S'$ или $+\psi \in S'$. По индукционному предположению получаем

$$\mu^X, S' \not\models \varphi \quad \text{или} \quad \mu^X, S' \models \psi\,. \tag{3.3}$$

Любое из этих условий противоречит (3.2). Следовательно, $\mu^X, S \models \varphi \to \psi$.

Наконец, пусть $-(\varphi \to \psi) \in S$. Множество S — **Ti**-совместно, поэтому множество $S^+ \cup \{+\varphi, -\psi\}$ также **Ti**-совместно. По лемме 3.3.6 найдётся **Ti**-насыщенное подмножество S' множества $Sub\,(X)$ такое, что $S^+ \cup \{+\varphi, -\psi\} \subseteq S'$. Очевидно, что $S \leq S'$. Кроме того, по индукционному предположению имеем

$$\mu^X, S' \models \varphi \quad \text{и} \quad \mu^X, S' \not\models \psi\,, \tag{3.4}$$

что доказывает $\mu^X, S \not\models \varphi \to \psi$.

Итак, мы доказали, что любое насыщенное подмножество S множества $Sub\,(X)$ выполнимо в мире S модели μ^X. По лемме 3.3.6 множество X содержится в некотором S из W^X. Следовательно, X выполнимо в мире S, т. е. множество X — Int-выполнимо. □

Ранее было отмечено, что **T**-исчисление даёт нам разрешающий алгоритм для классической логики (см. замечание 3.2.8). В свою очередь, теорема полноты для **Ti**-исчисления даёт нам алгоритм для проверки принадлежности произвольной $\mathcal{L}^{\perp}$-формулы φ к логике Int. Однако в случае классической логики и **T**-исчисления нам было достаточно построить одну таблицу для множества формул вида $\{\neg\psi\}$ (где $\psi \in For_{\mathcal{L}CL}$), а затем посмотреть, открыта она или замкнута. Для проверки же условия $\varphi \in Int$ нам нужно перебрать все таблицы **Ti**-исчисления для множества отмеченных формул $\{-\varphi\}$. Далее, если в процессе такого перебора нам встретится замкнутая таблица, то $\varphi \in Int$. Если же мы перебрали все таблицы и все они оказались открытыми, то $\varphi \notin Int$.

3.4. Исчисление Воробьёва – Дыкхова для Int

Отличительной чертой **Ti**-исчисления является механизм обнаружения циклов. Мы не можем применить правило к вершине таблицы **Ti**-исчисления, если в результате возникает вершина, совпадающая с одной из построенных ранее вершин таблицы. Данное свойство неудобно при реализации процесса построения таблиц. Мы должны хранить в памяти всю таблицу и перед каждым применением правила вывода проверять, не получим ли мы одну из имеющихся вершин. В этом разделе мы рассмотрим табличное исчисление для интуиционистской логики, которое лишено указанного недостатка. Его правила будут выглядеть примерно так же, как правила **T**-исчисления, т. е. при применении правила к формуле эта формула будет удаляться из рассматриваемого множества.

Мы по-прежнему будем работать с отмеченными формулами вида $+\varphi$ или $-\varphi$, где $\varphi \in For_{\mathcal{L}^{\perp}}$. Как и ранее, множество X отмеченных формул называется *замкнутым* (*содержит конфликт*), если $+\perp \in X$ или $\{+\varphi, -\varphi\} \subseteq X$ для некой $\mathcal{L}^{\perp}$-формулы φ.

Правила *исчисления Воробьёва – Дыкхова* (в дальнейшем сокращённо именуемого **VD**-*исчислением*) представлены ниже:

$$(\wedge+)\quad \frac{X; +(\varphi\wedge\psi)}{X; +\varphi, +\psi}; \qquad (\wedge-)\quad \frac{X; -(\varphi\wedge\psi)}{X; -\varphi \quad | \quad X; -\psi};$$

$$(\vee+)\quad \frac{X; +(\varphi\vee\psi)}{X; +\varphi \quad | \quad X; +\psi}; \qquad (\vee-)\quad \frac{X; -(\varphi\vee\psi)}{X; -\varphi, -\psi};$$

$$(\to p)\quad \frac{X; +p, +(p\to\varphi)}{X; +p, +\varphi}; \qquad (\to\vee)\quad \frac{X; +(\varphi\vee\psi)\to\chi}{X; +(\varphi\to\chi), +(\psi\to\chi)};$$

$$(\to\wedge)\quad \frac{X; +(\varphi\wedge\psi)\to\chi}{X; +(\varphi\to(\psi\to\chi))}; \qquad (\to\to)\quad \frac{X; +(\varphi\to\psi)\to\chi}{X^+; +\varphi, -\psi, +(\psi\to\chi) \quad | \quad X; +\chi};$$

$$(\to -)\quad \frac{-(\varphi\to\psi)\in X}{X^+; +\varphi, -\psi}.$$

Определение 3.4.1. Пусть X — множество отмеченных формул. **VD**-таблица для X — это конечное дерево T степени ветвления ≤ 2, вершины которого — множества отмеченных формул, корень дерева — множество X, а переходы от вершин к их последователям осуществляются по правилам **VD**-исчисления. Кроме того, множество отмеченных формул Y является листом дерева T, если и только если выполнено одно из двух условий: либо 1) множество Y замкнуто, либо 2) дальнейшее применение правил **VD**-исчисления к формулам множества Y невозможно.

Замечание 3.4.2. Легко понять, открытая вершина **VD**-таблицы может содержать лишь формулы следующих видов: $+p$, $-p$, $-\bot$, $+(p\to\varphi)$.

Для установления конечности **VD**-таблиц нам понадобится ряд вспомогательных понятий.

Пусть X — произвольное множество, $\langle T, \sqsubseteq\rangle$ — фундированный порядок, а $W : X \to T$ — функция, сопоставляющая каждому элементу $x \in X$ его *вес* $W(x) \in T$.

Обозначим через $\mathcal{P}^{<\omega}(X)$ множество всех конечных подмножеств множества X.

Порядок Дершовица – Манны $\leq_{DM}$ на $\mathcal{P}^{<\omega}(X)$ определяется следующим образом: отношение $\Gamma \leq_{DM} \Delta$ имеет место в том и только в том случае, если Γ получается из Δ в результате замены нескольких элементов (число таких элементов может быть равно 0) из Δ на конечное множество элементов из X, каждый из которых имеет строго меньший вес, чем замещаемый элемент из Δ.

Предложение 3.4.3. *Предположим, что порядок $\sqsubseteq$ на множестве весов T линеен. Тогда порядок $\leq_{DM}$ на $\mathcal{P}^{<\omega}(X)$ фундирован.*

Доказательство. Рассмотрим лексикографический порядок $\preceq$ на $T\times N$, где N — множество натуральных чисел со стандартным порядком $\leq$:

$$(x, n) \preceq (y, m) \quad \iff \quad (x \sqsubseteq y \wedge x \neq y) \vee (x = y \wedge n \leq m).$$

Доказывать предложение мы будем трансфинитной индукцией по порядку $\preceq$.

Пусть $(x, n) \in T \times N$. Предположим, что для любого конечного множества $\Gamma \in \mathcal{P}^{<\omega}(X)$ такого, что $h(\Gamma) \lneqq (x, n)$, где $h(\Gamma) := (y, m)$, $y := \max\{W(a) \mid a \in \Gamma\}$, а m есть число элементов веса y в Γ, уже доказано, что любая строго убывающая $\leq_{DM}$-цепь с началом в Γ конечна.

Пусть $\Delta \in \mathcal{P}^{<\omega}(X)$ такое, что $h(\Delta) = (x, n)$. Докажем, что любая строго убывающая $\leq_{DM}$-цепь с началом в Δ конечна. Пусть дана некоторая цепь с началом Δ:

$$\Delta = \Delta_0 \ \gneqq_{DM} \ \Delta_1 \ \gneqq_{DM} \ \ldots$$

Если в этой цепи найдется элемент Δ_i такой, что $h(\Delta_i) \lneqq (x, n)$, то по индукционному предположению за Δ_i может следовать лишь конечное число элементов цепи. Следовательно, и вся цепь конечна. Если же такого элемента в рассматриваемой цепи нет, это означает, что при переходе от Δ_i к Δ_{i+1} только элементы веса строго меньше x заменяются на конечные множества элементов меньших весов. Пусть Δ'_i получается из Δ_i удалением всех элементов веса x. Получаем строго убывающую цепь

$$\Delta'_0 \ \gneqq_{DM} \ \Delta'_1 \ \gneqq_{DM} \ \ldots ,$$

которая должна быть конечна по индукционному предположению. Следовательно, и исходная цепь конечна. $\square$

Предложение 3.4.4. *Пусть X — конечное множество отмеченных формул. Любая* **VD**-*таблица для X конечна.*

Доказательство. Определим веса формул следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} W(p) & := & 0\,; \\ W(\varphi \vee \psi) & := & W(\varphi) + W(\psi) + 1\,; \\ W(\varphi \to \psi) & := & W(\varphi) + W(\psi) + 1\,; \\ W(\varphi \wedge \psi) & := & W(\varphi) + W(\psi) + 2\,. \end{array}$$

Для отмеченных формул будем считать

$$W(+\varphi) \ = \ W(-\varphi) \ := \ W(\varphi)\,.$$

Теперь мы можем рассмотреть порядок $\leq_{DM}$ на конечных множествах отмеченных формул. Ввиду предыдущего предложения этот порядок фундирован.

Несложно заметить, что применение любого из правил **VD**-исчисления к множеству отмеченных формул X дает множество, которое строго меньше X относительно порядка Дершовица – Манны.

Пусть T — произвольная **VD**-таблица. Из последнего замечания и фундированности порядка $\leq_{DM}$ следует, что любой путь в таблице T конечен. Поэтому и сама таблица T конечна. $\square$

Определение 3.4.5. Произвольное конечное множество X отмеченных формул будем называть **VD**-*совместным*, если никакая **VD**-таблица для X не является замкнутой. В противном случае, т. е. если найдётся замкнутая **VD**-таблица для X, множество X будем называть **VD**-*несовместным*. Далее, $\mathcal{L}^{\perp}$-формула φ *доказуема в* **VD**-*исчислении* (**VD**-*доказуема*), если $\{-\varphi\}$ является **VD**-несовместным.

Установим корректность для **VD**-исчисления.

Теорема 3.4.6. *Любое конечное Int-выполнимое множество отмеченных формул является* **VD***-совместным.*

Доказательство. Сначала докажем, что если множество X отмеченных формул является Int-выполнимым, то при применении к X любого из правил **Ti**-исчисления по крайней мере один из последователей множества X будет Int-выполним.

Рассмотрим только новые (по сравнению с **Ti**-исчислением) правила **VD**-исчисления для импликации.

Для правила $(\to p)$. Пусть множество отмеченных формул $X;\, +p,\, +(p \to \varphi)$ — Int-выполнимо, т. е. существуют модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ и мир $w \in W$ такие, что $\mu \models_w X$, $\mu \models_w p$ и $\mu \models_w p \to \varphi$. Из двух последних соотношений сразу следует $\mu \models_w \varphi$, тем самым множество $X;\, +p,\, +\varphi$ также Int-выполнимо (в мире w модели μ).

Для правила $(\to \vee)$. Пусть множество отмеченных формул $X;\, +(\varphi \vee \psi) \to \chi$ — Int-выполнимо в мире $w \in W$ модели $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$. В частности, $\mu \models_w (\varphi \vee \psi) \to \chi$. Тогда $\mu \models_w (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$, поскольку

$$((\varphi \vee \psi) \to \chi) \leftrightarrow ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \;\in\; Int\,.$$

Следовательно, $\mu \models_w \varphi \to \chi$ и $\mu \models_w \psi \to \chi$, т. е. множество $X;\, +(\varphi \to \chi),\, +(\psi \to \chi)$ также Int-выполнимо.

Для правила $(\to \wedge)$. Пусть множество отмеченных формул $X;\, +((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$ Int-выполнимо в мире $w \in W$ модели $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$. В частности, $\mu \models_w (\varphi \wedge \psi) \to \chi$. Тогда $\mu \models_w \varphi \to (\psi \to \chi)$, поскольку

$$((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \leftrightarrow (\varphi \to (\psi \to \chi)) \;\in\; Int\,,$$

т. е. множество $X;\, +(\varphi \to (\psi \to \chi))$ также Int-выполнимо.

Для правила $(\to\to)$. Предположим, наконец, что множество отмеченных формул $X;\, +((\varphi \to \psi) \to \chi)$ является Int-выполнимым в мире $w \in W$ модели $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$. Это означает, в частности, что $\mu \not\models_w \varphi \to \psi$ или $\mu \models_w \chi$. В случае, когда $\mu \models_w \chi$, Int-выполнимо множество $X;\, +\chi$. Если же $\mu \not\models_w \varphi \to \psi$, тогда найдётся $u \in W$ такой, что $w \leq u$, $\mu \models_u \varphi$ и $\mu \not\models_w \psi$. Покажем, что в этом случае также $\mu \models_u \psi \to \chi$. Пусть $u \leq t$ и $\mu \models_t \psi$. Кроме того, по лемме о монотонности (для Int) имеем $\mu \models_t (\varphi \to \psi) \to \chi$, а кроме того, $\mu \models_t \varphi \to \psi$ ввиду того, что $\psi \to (\varphi \to \psi) \in Int$. Таким образом, $\mu \models_t \chi$, что доказывает $\mu \models_u \psi \to \chi$. Мы показали, тем самым, Int-выполнимость множества $X^+;\, +\varphi,\, -\psi,\, +(\psi \to \chi)$ в мире u модели μ.

Доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 3.3.4. Рассмотрим произвольную **VD**-таблицу T для конечного множества отмеченных формул X. Корень этого дерева является Int-выполнимым множеством. В силу доказанного выше в дереве найдётся путь τ, состоящий из Int-выполнимых множеств отмеченных формул. Дерево T конечно по предложению 3.4.4, поэтому путь τ также конечен и заканчивается листом Y, который Int-выполним. Ясно, что Int-выполнимое множество формул не содержит конфликта. Таким образом, мы доказали, что произвольная **VD**-таблица для X не замкнута, т. е. множество X является **VD**-совместным. □

Для установления полноты нам придётся несколько видоизменить понятие насыщенного множества (см. определение 3.3.5).

Определение 3.4.7. Пусть X — конечное множество отмеченных формул. Множество X называется **VD**-*насыщенным*, если это множество **VD**-совместно и для всех $\mathcal{L}^{\perp}$-формул φ, ψ и χ выполнено:

$$
\begin{array}{rrcl}
\texttt{i.} & +(\varphi\wedge\psi)\in X & \Longrightarrow & +\varphi,\ +\psi\in X\,;\\
\texttt{ii.} & -(\varphi\wedge\psi)\in X & \Longrightarrow & -\varphi\in X \text{ или } -\psi\in X\,;\\
\texttt{iii.} & +(\varphi\vee\psi)\in X & \Longrightarrow & +\varphi\in X \text{ или } +\psi\in X\,;\\
\texttt{iv.} & -(\varphi\vee\psi)\in X & \Longrightarrow & -\varphi,\ -\psi\in X\,;\\
\texttt{v.} & +p,\ +(p\to\varphi)\in X & \Longrightarrow & +\varphi\in X\,;\\
\texttt{vi.} & +(\varphi\vee\psi)\to\chi\in X & \Longrightarrow & +(\varphi\to\chi),\ +(\psi\to\chi)\in X\,;\\
\texttt{vii.} & +(\varphi\wedge\psi)\to\chi\in X & \Longrightarrow & +(\varphi\to(\psi\to\chi))\in X\,;\\
\texttt{viii.} & +(\varphi\to\psi)\to\chi\in X & \Longrightarrow & +\chi\in X \text{ или множество}\\
 & & & (X^{+}\setminus\{+(\varphi\to\psi)\to\chi\})\cup\{+\varphi,-\psi,+(\psi\to\chi)\}\\
 & & & \text{является } \mathbf{VD}\text{-совместным}\,.
\end{array}
$$

Пусть $\Gamma \subseteq For^{\mathcal{L}^{\perp}}$. Обозначим через $Sub^{*}(\Gamma)$ наименьшее множество $\mathcal{L}^{\perp}$-формул, которое содержит Γ, а также замкнуто относительно подформул (в стандартном смысле) и относительно следующих правил:

$$
\frac{(\varphi\vee\psi)\to\chi}{\varphi\to\chi,\quad\psi\to\chi}\,;\qquad \frac{(\varphi\wedge\psi)\to\chi}{\varphi\to(\psi\to\chi)}\,;\qquad \frac{(\varphi\to\psi)\to\chi}{\psi\to\chi}\,.
$$

Для множества X отмеченных формул полагаем

$$
Sub^{*}(X)\ :=\ \left\{+\varphi,-\varphi \mid \varphi\in Sub^{*}\left(X^{()}\right)\right\}.
$$

Несложно заметить, что если множество (отмеченных) формул X конечно, то множество $Sub^{*}(X)$ также конечно.

Лемма 3.4.8. *Любое конечное* **VD***-совместное множество отмеченных формул X содержится в некотором конечном* **VD***-насыщенном множестве формул X' таком, что $X'\subseteq Sub^{*}(X)$.*

Доказательство. Пусть X является **VD**-совместным конечным множеством отмеченных формул X. Полагаем $X_0 := X$. Далее будем пошагово расширять множество, если какие-либо условия из определения 3.4.7 не выполнены.

Если для некоторой формулы **VD**-совместного множества X_n, построенного на шаге $n\geq 0$, не выполнено одно из условий (`i`–`iv`), то поступаем, как в доказательстве леммы 3.3.6.

Допустим, что условие (`v`) не выполнено для формул $\{+p,+(p\to\varphi)\}\subseteq X_n$. Рассмотрим множество $(X_n\setminus\{+(p\to\varphi)\})\cup\{+\varphi\}$. Если это множество **VD**-несовместно и T — замкнутая таблица для $(X_n\setminus\{+(p\to\varphi)\})\cup\{+\varphi\}$, то

$$
\frac{T}{X_n}
$$

— замкнутая таблица для X_n, что противоречит **VD**-совместности X_n. Стало быть, множество $(X_n\setminus\{+(p\to\varphi)\})\cup\{+\varphi\}$ **VD**-совместно. Очевидно, что в этом случае также и множество $X_{n+1}:=X_n\cup\{+\varphi\}$ будет **VD**-совместным.

Условия (`vi`) и (`vii`) рассматриваются аналогично.

Перейдём к условию (`viii`). Пусть $+((\varphi\to\psi)\to\chi)\in X_n$ и $+\chi\notin X_n$, и при этом множество $(X_n^{+}\setminus\{+((\varphi\to\psi)\to\chi)\})\cup\{+\varphi,-\psi,+(\psi\to\chi)\}$ не является **VD**-совместным, что подтверждается замкнутой таблицей T_1. Допустим, что **VD**-совместным не является также множество $(X_n\setminus\{+((\varphi\to\psi)\to\chi)\})\cup\{+\chi\}$ и T_2 — соответствующая замкнутая таблица для этого множества. Тогда

$$
\frac{T_1\quad T_2}{X_n}
$$

будет замкнутой таблицей для X_n, что противоречит предположению о **VD**-совместности данного множества. Следовательно, множество $(X_n \setminus \{+((\varphi \to \psi) \to \chi)\}) \cup \{+\chi\}$ является **VD**-совместным, а вместе с ним будет **VD**-совместным и $X_{n+1} := X_n \cup \{+\chi\}$.

Ясно, что $X_n \subseteq Sub^*(X)$ для любого n. Ввиду конечности множества $Sub^*(X)$, через конечное число шагов мы получим **VD**-совместное множество $X_{n_0} =: X'$, для которого выполнены все условия определения 3.4.7. □

Теорема 3.4.9 (Полнота VD-исчисления). *Конечное множество отмеченных формул* **VD***-совместно, если и только если это множество* Int*-выполнимо.*

Доказательство. В силу установленной ранее корректности нам достаточно показать, что каждое **VD**-совместное множество является Int-выполнимым.

Пусть X — конечное **VD**-совместное множество отмеченных формул. Рассмотрим модель

$$\mu^X \;:=\; \langle W^X, \leq, v \rangle,$$

где

- W^X — семейство всех **VD**-насыщенных подмножеств множества $Sub^*(X)$;
- $S_1 \leq S_2 \iff S_1^+ \subseteq S_2^+$;
- $v(p) \;:=\; \left\{ S \in W^X \mid +p \in S \right\}$.

Индукцией по весу формул докажем, что для любых $\varphi \in Sub^*\left(X^{()}\right)$ и $S \in W^X$ верны импликации:

$$\begin{array}{lcl} +\varphi \in S & \Longrightarrow & \mu^X, S \models \varphi\,; \\ -\varphi \in S & \Longrightarrow & \mu^X, S \not\models \varphi\,. \end{array}$$

Рассмотрим только случай позитивно отмеченных импликаций, так как все остальные случаи разбираются так же, как это было в доказательстве теоремы 3.3.7.

Предположим, что для всех формул с весом $< n$ требуемые импликации уже доказаны. Пусть $W(p \to \varphi) = n$ и $+(p \to \varphi) \in S$. Если $\mu^X, T \models p$ для $T \geq S$, то $+p \in T$ по определению оценки v и $+(p \to \varphi) \in T$ ввиду $S \leq T$. Из $\{+p, +(p \to \varphi)\} \subseteq T$ следует $+\varphi \in T$, так как T — **VD**-замкнуто. По индукционному предположению получаем $\mu^X, T \models \varphi$. Тем самым доказали $\mu^X, S \models p \to \varphi$.

Пусть $W((\varphi \vee \psi) \to \chi) = n$ и $+((\varphi \vee \psi) \to \chi) \in S$. Тогда $\{+(\varphi \to \chi), +(\psi \to \chi)\} \subseteq S$ ввиду **VD**-замкнутости S. Кроме того, $W(\varphi \to \chi) < n$ и $W(\psi \to \chi) < n$, поэтому по индукционному предположению $\mu^X, S \models \varphi \to \chi$ и $\mu^X, S \models \psi \to \chi$. Следовательно, получаем $\mu^X, S \models (\varphi \vee \psi) \to \chi$.

Случай формулы $+((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$ рассматривается аналогично.

Пусть $W((\varphi \to \psi) \to \chi) = n$ и $+((\varphi \to \psi) \to \chi) \in S$. Предположим, что $\mu^X, T \models \varphi \to \psi$ для некоторого $T \geq S$. Из $S \leq T$ следует $+((\varphi \to \psi) \to \chi) \in T$. Допустим, $+\chi \notin T$. Тогда множество $T;\, +\varphi, -\psi, +(\psi \to \chi)$ — **VD**-совместно. Следовательно, найдётся $U \in W^X$ такое, что $T \leq U$ и $\{+\varphi, -\psi\} \subseteq U$. По индукционному предположению $\mu^X, U \models \varphi$ и $\mu^X \not\models \psi$, что противоречит $\mu^X, T \models \varphi \to \psi$. Поэтому $+\chi \in T$ и по индукционному предположению $\mu^X, T \models \chi$. Мы доказали, тем самым, $\mu^X, S \models (\varphi \to \psi) \to \chi$.

Итак, мы доказали, что любое насыщенное подмножество S множества $Sub^*(X)$ выполнимо в мире S модели μ^X. По лемме 3.4.8 наше **VD**-совместное множество X содержится в некотором $S \in W^X$. Следовательно, X выполнимо в мире S, т. е. множество X — Int-выполнимо. □

3.5. Интерполяция и определимость

Сейчас от изучения вопросов разрешимости мы перейдём к рассмотрению ряда других фундаментальных свойств логик.

Пусть $var(\varphi)$ обозначает множество пропозициональных переменных, входящих в формулу φ (некоторого языка $\mathcal{L}$). Кроме того, если X — множество $\mathcal{L}$-формул, то полагаем

$$var(X) \ := \ \bigcup_{\varphi\in X} var(\varphi)\,.$$

Определение 3.5.1. Логика L в языке $\mathcal{L}$ обладает *интерполяционным свойством Крейга* (*CIP*) в случае, когда выполнено следующее условие: для любых $\mathcal{L}$-формул φ и ψ, если $\varphi \to \psi \in L$, то найдётся $\mathcal{L}$-формула χ такая, что

$$var(\chi) \subseteq var(\varphi) \cap var(\psi) \quad \text{и} \quad \{\varphi \to \chi, \chi \to \psi\} \subseteq L$$

(при этом χ называется *интерполянтом импликации* $\varphi \to \psi$ *в логике* L).

Например, формула q является интерполянтом импликации $(p \wedge q) \to (q \vee r)$ в позитивной логике Pos, а также во всех ее расширениях.

В дальнейшем мы будем рассматривать классическую логику CL в языке $\mathcal{L}^{\perp,\top} := \mathcal{L}^{\perp} \cup \{\top\}$ с дополнительной определимой константой $\top \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow p_0)$.

Теорема 3.5.2. *Классическая логика Cl обладает свойством CIP.*

Доказательство. Пусть $d(\varphi,\psi) := |var(\varphi) \setminus var(\psi)|$. Будем доказывать индукцией по числу $d(\varphi,\psi)$. Если $d(\varphi,\psi) = 0$, то формула φ является интерполянтом импликации $\varphi \to \psi$.

Предположим, что для любых формул φ и ψ таких, что $d(\varphi,\psi) = n$ и $\varphi \to \psi \in Cl$, существование интерполянта доказано.

Пусть $\varphi \to \psi \in Cl$ и $d(\varphi,\psi) = n+1$. Возьмем переменную $q \in var(\varphi) \setminus var(\psi)$. Пусть φ^0 есть результат замены q на $\perp$ всюду в формуле φ ($\varphi^0 := \varphi\,(q/\perp)$), а φ^1 — результат замены q на $\top$ всюду в формуле φ ($\varphi^1 := \varphi\,(q/\top)$).

В этом случае импликации $\varphi^0 \to \psi$ и $\varphi^1 \to \psi$ лежат в Cl, так как это частные случаи формулы $\varphi \to \psi$. По индукционному предположению существуют интерполянты χ^0 и χ^1 для импликаций $\varphi^0 \to \psi$ и $\varphi^1 \to \psi$ соответственно:

$$\begin{aligned} var(\chi^0) \subseteq var(\varphi^0) \cap var(\psi)\,, &\quad \left\{\varphi^0 \to \chi^0, \chi^0 \to \psi\right\} \subseteq Cl\,;\\ var(\chi^1) \subseteq var(\varphi^1) \cap var(\psi)\,, &\quad \left\{\varphi^1 \to \chi^1, \chi^1 \to \psi\right\} \subseteq Cl\,. \end{aligned}$$

Полагаем $\chi := \chi^0 \vee \chi^1$. Из $\{\chi^0 \to \psi, \chi^1 \to \psi\} \subseteq Cl$ следует $(\chi^0 \vee \chi^1) \to \psi \in Cl$. Проверим (семантически), что $\varphi \to (\chi^0 \vee \chi^1) \in Cl$. Пусть v — произвольная Cl-оценка, для которой $v(\varphi) = 1$.

Если $v(q) = 0$, то $v(\varphi) = v(\varphi^0)$. Следовательно, $v(\chi^0) = 1$ и $v(\chi^0 \vee \chi^1) = 1$.

Если же $v(q) = 1$, то $v(\varphi) = v(\varphi^1)$. Следовательно, $v(\chi^1) = 1$ и, тем самым, опять $v(\chi^0 \vee \chi^1) = 1$. □

Пусть X — множество формул языка $\mathcal{L}^{\perp,\top}$, а v — Cl-оценка. Говорим, что v *является моделью множества* X (пишем $v \in Mod(X)$), если $v(\varphi) = 1$ для всех $\varphi \in X$.

Определение 3.5.3. Пусть X — множество $\mathcal{L}^{\perp,\top}$-формул, и $q \in var(X)$. Множество X *явно определяет переменную q в логике Cl*, если найдется $\mathcal{L}^{\perp,\top}$-формула φ такая, что

$$var(\varphi) \subseteq var(X)\,, \quad q \notin var(\varphi) \quad \text{и} \quad X \vdash_{Cl} q \leftrightarrow \varphi\,.$$

Множество X *неявно определяет переменную q в логике Cl*, если для любых элементов $v, v' \in Mod(X)$ верна импликация:

$$(\forall p \in var(X)\ (p \neq q \ \Rightarrow \ v(p) = v'(p))) \quad \Longrightarrow \quad v(q) = v'(q).$$

Упражнение 3.5.4. *Множество $\mathcal{L}^{\perp,\top}$-формул X неявно определяет переменную q в Cl, если и только если $X \cup X\,(q/q') \vdash_{Cl} q \leftrightarrow q'$, где q' — произвольная переменная, не входящая в $var(X)$.*

Теорема 3.5.5. *Пусть X — множество $\mathcal{L}^{\perp,\top}$-формул, и $q \in var(X)$. Тогда множество X явно определяет переменную q в логике Cl, если и только если X неявно определяет q в логике Cl.*

Доказательство. Легко понять, из явной определимости следует неявная определимость. Установим обратную импликацию.

Пусть $X \cup X\,(q/q') \vdash_{Cl} q \leftrightarrow q'$. Тогда найдётся конечное подмножество $X_0 \subseteq X$ такое, что $X_0 \cup X_0(q/q') \vdash_{Cl} q \leftrightarrow q'$. Положим $\varphi := \bigwedge X_0$ и $\varphi' := \bigwedge X_0\,(q/q')$. Тогда

$$\vdash_{Cl} (\varphi \wedge \varphi') \to (q \to q')\,,$$

или, что эквивалентно,

$$\vdash_{Cl} (\varphi \wedge q) \to (\varphi' \to q')\,.$$

Мы уже доказали, что Cl обладает CIP, поэтому существует $\mathcal{L}^{\perp,\top}$-формула ψ, для которой $var(\psi) \subseteq var(X) \setminus \{q, q'\} = var(X) \setminus \{q\}$ и, кроме того,

$$\vdash_{Cl} (\varphi \wedge q) \to \psi \ \ \text{и} \ \ \vdash_{Cl} \psi \to (\varphi' \to q').$$

Заменяя во второй формуле q' на q, получим

$$\vdash_{Cl} (\varphi \wedge q) \to \psi \quad \text{и} \quad \vdash_{Cl} \psi \to (\varphi \to q)\,,$$

откуда

$$\vdash_{Cl} \varphi \to (q \to \psi) \quad \text{и} \quad \vdash_{Cl} \varphi \to (\psi \to q)\,,$$

тем самым $\varphi \vdash_{Cl} q \leftrightarrow \psi$. Поскольку φ — это конъюнкция формул из X, мы имеем $X \vdash_{Cl} q \leftrightarrow \psi$. □

Теорема 3.5.6. *Логика Int обладает свойством CIP.*

Доказательство. Наличие интерполяционного свойства у интуиционистской логики вытекает из интерполяционного свойства модальной логики **S4**, которое будет установлено в дальнейшем. □

Определение 3.5.7. Логика L в языке $\mathcal{L}$ обладает *свойством Бета* (***B1***) в случае, когда выполнено следующее условие: для всякой $\mathcal{L}$-формулы $\varphi(\bar{p}, q) = \varphi(p_1, \ldots, p_n, q)$, если

$$L \vdash (\varphi\,(\bar{p}, q) \wedge \varphi\,(\bar{p}, q')) \to (q \leftrightarrow q')\,,$$

то найдётся $\mathcal{L}$-формула $\psi(\bar{p})$ такая, что

$$L \vdash \varphi\,(\bar{p}, q) \to (q \leftrightarrow \psi\,(\bar{p}))\,.$$

Как и ранее, предполагаем, что константа $\top$ дополнительно присутствует в языке Int.

Теорема 3.5.8 (G. Kreisel, 1960). *Каждая логика $L \in \mathcal{E}Int$ обладает свойством **B1**.*

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{E}Int$ и $L \vdash (\varphi(\bar{p}, q) \wedge \varphi(\bar{p}, q')) \to (q \leftrightarrow q')$, тогда

$$L \vdash \varphi(\bar{p}, q) \to (\varphi(\bar{p}, q') \to (q \leftrightarrow q'))\,. \tag{3.5}$$

Напомним, что правило замены является производным в логике Int и, стало быть, в L. Поэтому

$$L \vdash (q \leftrightarrow q') \to (\varphi(\bar{p}, q) \leftrightarrow \varphi(\bar{p}, q'))\,,$$

в частности,

$$L \vdash (q \leftrightarrow q') \to (\varphi(\bar{p}, q) \to \varphi(\bar{p}, q'))\,,$$

откуда

$$L \vdash \varphi(\bar{p}, q) \to ((q \leftrightarrow q') \to \varphi(\bar{p}, q'))\,. \tag{3.6}$$

Далее, из (3.5) и (3.6) получаем

$$L \vdash \varphi(\bar{p}, q) \to ((q \leftrightarrow q') \leftrightarrow \varphi(\bar{p}, q'))\,,$$

в частности,

$$L \vdash \varphi(\bar{p}, q) \to ((q \leftrightarrow \top) \leftrightarrow \varphi(\bar{p}, \top))\,,$$

откуда с учетом $q \leftrightarrow (q \leftrightarrow \top) \in Int$ выводится требуемое соотношение:

$$L \vdash \varphi(\bar{p}, q) \to (q \leftrightarrow \varphi(\bar{p}, \top))$$

(т. е. в качестве искомой формулы можно взять $\psi\,(\bar{p}) := \varphi(\bar{p}, \top)$). □

В отличие от свойства Бета интерполяционное свойство Крейга выполняется лишь для конечного числа суперинтуиционистских логик.

Теорема 3.5.9 (Л. Л. Максимова, 1972). *В классе $\mathcal{E}Int$ имеется ровно 7 логик с интерполяционным свойством Крейга:*

$$\begin{array}{lcl}
L_1 & := & Int, \\
L_2 & := & Int + \{\neg p \vee \neg\neg p\}, \\
L_3 & := & Int + \{p \vee (p \to (q \vee \neg q))\}, \\
L_4 & := & L_3 + \{(p \to q) \vee (q \to p) \vee (p \leftrightarrow \neg q)\}, \\
L_5 & := & L_3 + \{\neg p \vee \neg\neg p\}, \\
L_6 & := & Int + \{(p \to q) \vee (q \to p)\}, \\
L_7 & := & Cl.
\end{array}$$

Это был один из первых результатов, показывающих, что в континуальном классе логик имеется лишь конечное число логик, обладающих тем или иным фундаментальным свойством. Сейчас мы приведём самый первый результат такого рода, который также принадлежит Л. Л. Максимовой.

Логика $L \in \mathcal{E}Int$ называется *предтабличной*, если она не таблична, но любое ее собственное расширение является табличным.

Теорема 3.5.10 (Л. Л. Максимова, 1972). *Класс $\mathcal{E}Int$ содержит в точности три предтабличные логики:*

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{LC} & := & Int + \{(p \to q) \vee (q \to p)\}, \\
\mathbf{LJ} & := & Int + \{p \vee (p \to (q \vee \neg q))\}, \\
\mathbf{LH} & := & Int + \{\neg p \vee \neg\neg p,\ p \vee (p \to (q \vee (q \to (r \vee \neg r))))\}.
\end{array}$$

3.6. Полнота по Посту, структурная полнота

Говорим, что *логика* L (*в языке* $\mathcal{L}$) *полна по Посту*, если она нетривиальна и при этом у неё нет собственных нетривиальных расширений.

Теорема 3.6.1. *Логика* Cl *полна по Посту.*[3]

Доказательство. Предположим, что у классической логики есть собственное нетривиальное расширение. Пусть $Cl \subset L$ и $\varphi \in L \setminus Cl$. Тогда найдется Cl-оценка v_0, для которой $v_0(\varphi) = 0$. Определим подстановку θ следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta p_i \ &:=\ \top\,, \qquad \text{если}\ \ v_0(p_i)\ =\ 1\,;\\ \theta p_i \ &:=\ \bot\,, \qquad \text{если}\ \ v_0(p_i)\ =\ 0\,. \end{aligned}$$

Очевидно, $v_0\,(\theta\varphi) = v_0\,(\varphi) = 0$. Более того, поскольку формула $\theta\varphi$ не содержит пропозициональных переменных, $v\,(\theta\varphi) = 0$ для любой Cl-оценки v. Следовательно, $v\,(\theta\varphi \to \bot) = 1$ для любой Cl-оценки v, т. е. $\theta\varphi \to \bot \in L$. Получаем $\{\theta\varphi, \theta\varphi \to \bot\} \subseteq L$. Стало быть, $\bot \in L$ и, тем самым, логика L тривиальна (здесь пользуемся тем, что $\bot \to \psi \in Int \subseteq L$ для всех $\mathcal{L}^{\bot,\top}$-формул ψ). □

Логика L в языке $\mathcal{L}$ называется 0-*сводимой*, если для любой $\mathcal{L}$-формулы $\varphi \notin L$ найдётся частный случай $\theta\varphi$ (разумеется, в том же языке) такой, что выполнено $\theta\varphi \notin L$ и $var\,(\theta\varphi) = \varnothing$.

Следствие 3.6.2. *Логика* Cl *является* 0-*сводимой.*

Очевидно, что логика Int не полна по Посту, коль скоро классическая логика — её собственное нетривиальное расширение. С другой стороны, справедлива

Теорема 3.6.3. *Логика* Cl *— единственное полное по Посту расширение* Int.

Доказательство. Пусть L — полное по Посту расширение Int, отличное от Cl. Ясно, что $L \nsubseteq Cl$, а потому найдётся формула $\varphi \in L \setminus Cl$. В силу 0-сводимости существует частный случай $\theta\varphi$, для которого $\theta\varphi \notin Cl$ и $var\,(\theta\varphi) = \varnothing$. Тогда $\neg\theta\varphi \in Cl$. Следовательно, по следствию 2.3.6 (теоремы Гливенко для Int) имеем $\neg\theta\varphi \in Int$ и, значит, $\neg\theta\varphi \in L$. Из $\{\theta\varphi, \neg\theta\varphi\} \subseteq L$ получаем, что логика L тривиальна. □

Упражнение 3.6.4 (*). *Найдите все полные по Посту расширения* J.

Логика L называется *структурно полной*, если каждое её допустимое правило вывода является производным.

Теорема 3.6.5. *Логика* Cl *структурно полна.*

Доказательство. Пусть некоторое правило

$$\frac{\varphi_1\,,\ \ldots\,,\ \varphi_n}{\psi}$$

допустимо в Cl, но не является производным. Последнее означает $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \nvdash_{Cl} \psi$, или, что эквивалентно, $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi \notin Cl$. Ввиду 0-сводимости Cl (по следствию 3.6.2)

[3] По-прежнему рассматриваем Cl в языке $\mathcal{L}^{\bot,\top}$.

найдётся подстановка θ такая, что формула $(\theta\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \theta\varphi_n) \to \theta\psi$ не содержит пропозициональных переменных и

$$v\,((\theta\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \theta\varphi_n) \to \theta\psi) \;=\; 0\,, \quad \text{т. е.}$$
$$v\,(\theta\varphi_1) \;=\; \ldots \;=\; v\,(\theta\varphi_n) \;=\; 1 \quad \text{и} \quad v\,(\theta\psi) \;=\; 0\,,$$

для некой (а потому и для любой) Cl-оценки v. Следовательно, $\{\theta\varphi_1, \ldots, \theta\varphi_n\} \subseteq Cl$ и $\theta\psi \notin Cl$, что противоречит допустимости рассматриваемого правила. $\square$

Предложение 3.6.6. *Правило Скотта*

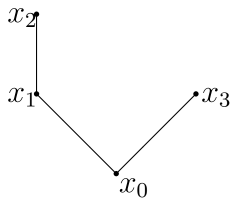
$$\frac{(\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)}{\neg p \vee \neg\neg p}$$

допустимо в логике Int*, но не является производным в* Int*.*

Доказательство. Покажем сначала, что правило Скота не производно, т. е.

$$((\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)) \to (\neg p \vee \neg\neg p) \;\notin\; Int\,.$$

Рассмотрим модель $\mu = \langle\{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \leq, v\rangle$ с порядком, представленным на нижеследующей диаграмме, и оценкой v, заданной как $v(p) := \{x_2\}$ (и произвольным образом на переменных, отличных от p).



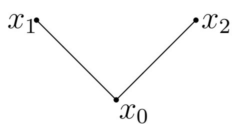
Из $\mu, x_2 \vDash p$ следует $\mu, x_0 \nvDash \neg p$, а $\mu, x_3 \vDash \neg p$ влечёт $\mu, x_0 \nvDash \neg\neg p$. Таким образом, $\mu, x_0 \nvDash \neg p \vee \neg\neg p$.

Проверим, что $\mu, x_0 \vDash (\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)$. Заключение этой импликации верно в максимальных мирах x_2 и x_3, так как $\mu, x_2 \vDash p$ и $\mu, x_3 \vDash \neg p$. А в оставшихся мирах ложна посылка импликации. Действительно, $\mu, x_1 \vDash \neg\neg p$ и $\mu, x_1 \nvDash p$, откуда $\mu, x_1 \nvDash \neg\neg p \to p$. Но $x_0 \leq x_1$, поэтому $\mu, x_0 \nvDash \neg\neg p \to p$.

Теперь покажем, что правило Скотта, тем не менее, допустимо. Пусть

$$\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi \;\notin\; Int\,.$$

Тогда $\neg\varphi \notin Int$ и $\neg\neg\varphi \notin Int$. По следствию 2.3.6 имеем $\neg\varphi \notin Cl$ и $\neg\neg\varphi \notin Cl$. Значит, существуют модели $\mu_1 = \langle\{x_1\}, \{(x_1, x_1)\}, v_1\rangle$ и $\mu_2 = \langle\{x_2\}, \{(x_2, x_2)\}, v_2\rangle$, для которых $\mu_1 \nvDash \neg\varphi$ и $\mu_2 \nvDash \neg\neg\varphi$. Построим новую модель $\mu = \langle\{x_0, x_1, x_2\}, \leq, v\rangle$ с порядком, представленным на диаграмме ниже, и оценкой v, заданной посредством $v(p) := v_1(p) \cup v_2(p)$.



Очевидно, что μ_1 и μ_2 — порождёуные подмодели модели μ. Поэтому $\mu, x_1 \nvDash \neg\varphi$ и $\mu, x_2 \nvDash \neg\neg\varphi$. Значит, $\mu, x_1 \vDash \varphi$ и $\mu, x_2 \vDash \neg\varphi$. Из последнего соотношения получаем $\mu, x_2 \nvDash \varphi$. Кроме того, из $\mu, x_1 \vDash \varphi$ следует $\mu, x_0 \nvDash \neg\varphi$, а из $\mu, x_2 \nvDash \varphi$ вытекает $\mu, x_0 \nvDash \varphi$. Отсюда $\mu, x_0 \nvDash \varphi \vee \neg\varphi$. В то же время несложно проверить, что $\mu, x_0 \vDash \neg\neg\varphi \to \varphi$. Итак, $\mu, x_0 \nvDash (\neg\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$, т. е. $(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi) \notin Int$. $\square$

Таким образом, Int не является структурно полной.

Следующее утверждение легко устанавливается индукцией по сложности формул.

Упражнение 3.6.7. *Пусть $\varphi \in For_{\mathcal{L}^\perp}$ и $var(\varphi) = \varnothing$. Тогда либо $\varphi \leftrightarrow \bot \in Int$, либо $\varphi \leftrightarrow \top \in Int$.*

Следствие 3.6.8. *Для любой $\mathcal{L}^\perp$-формулы φ такой, что $var(\varphi) = \varnothing$, верно*

$$\varphi \in Int \iff \varphi \in Cl\,.$$

Доказательство. Прямая импликация тривиальна, рассмотрим обратную. Пусть $\varphi \in Cl$. Если $\varphi \leftrightarrow \top \in Int$, то $\varphi \in Int$. Если же $\varphi \leftrightarrow \bot \in Int$, то $\neg\varphi \in Int$, что противоречит $\varphi \in Cl$. □

Следствие 3.6.9. *Логика Int не является 0-сводимой.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in Cl \setminus Int$. Очевидно, что $\theta\varphi \in Cl$ для произвольной подстановки θ. Однако если $var(\theta\varphi) = \varnothing$, то по предыдущему следствию из $\theta\varphi \in Cl$ с необходимостью вытекает $\theta\varphi \in Int$. □

Выше мы доказали, что интуиционистская логика не является структурно полной. Отметим еще одно интересное свойство допустимых правил в Int.

Теорема 3.6.10. *Если правило вывода допустимо в Int, то оно является производным в Cl.*

Доказательство. Пусть некое правило $\frac{\varphi_1\,,\ \dots\,,\ \varphi_n}{\psi}$ допустимо в Int, но при этом

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi \ \notin\ Cl\,.$$

Ввиду 0-сводимости логики Cl найдётся подстановка θ такая, что

$$(\theta\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \theta\varphi_n) \to \theta\psi \notin Cl \quad \text{и} \quad var\,((\theta\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \theta\varphi_n) \to \theta\psi) = \varnothing\,.$$

Последнее равенство, в частности, влечёт

$$var\,(\theta\varphi_1) \ = \ \ldots \ = \ var\,(\theta\varphi_n) \ = \ va\,(\theta\psi) = \varnothing\,.$$

Далее, рассуждая как в доказательстве теоремы 3.6.5, мы приходим к заключению, что $\{\theta\varphi_1, \ldots, \theta\varphi_n\} \subseteq Cl$ и $\theta\psi \notin Cl$. Отсюда, по следствию 3.6.8, получаем $\{\theta\varphi_1, \ldots, \theta\varphi_n\} \subseteq Int$ и $\theta\psi \notin Int$ — противоречие с допустимостью правила $\frac{\varphi_1\,,\ \dots\,,\ \varphi_n}{\psi}$. □

Глава 4

Модальные логики

4.1. Нормальные модальные логики, модальные шкалы Крипке

Предшествующий материал был посвящён, в основном, нестандартным интерпретациям связок импликации и отрицания. В оставшейся части курса мы будем изучать, главным образом, модальные логики, при этом следует отметить, что в исторически первой посвящённой модальной логике математической монографии [26] модальности использовались как средство для определения “строгой импликации”:

$$\varphi \rightsquigarrow \psi \ := \ Imp\,(\varphi \wedge \neg\psi) \ := \ \neg\Diamond\,(\varphi \wedge \neg\psi) \ = \ \Box\,(\neg\varphi \vee \psi)\,,$$

где $\rightsquigarrow$ есть связка *строгой импликации*, оператор Imp читается как “невозможно, что …”, $\Diamond$ — “возможно, что …”, $\Box$ — “необходимо, что”, а $\neg$, $\wedge$ и $\vee$ суть обычные классические связки отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Впоследствии мы увидим, что интуиционистская импликация тоже имеет представление такого типа.

Будем рассматривать модальный язык

$$\mathcal{L}^m \ = \ \mathcal{L}^{CL} \cup \{\Box\}\,,$$

который включает в себя все связки классической пропозициональной логики и дополнительно оператор необходимости $\Box$.

Оператор возможности $\Diamond$ считаем определяемым посредством

$$\Diamond\varphi \ := \ \neg\Box\neg\varphi\,.$$

Интуитивное прочтение оператор необходимости может быть различным. В частности, $\Box\varphi$ может означать:

– необходимо истинно, что φ (*алетическая модальность*);

– всегда будет истинно, что φ (*временна́я модальность*);

– должно быть так, что φ (*деонтическая модальность*);

– известно, что φ (*эпистемическая модальность*);

– считается, что φ (*эпистемическая модальность*);

– доказуемо в арифметике Пеано, что φ (*логика доказуемости*);

– после завершения программы имеет место φ (*динамические логики*).

Упражнение 4.1.1 (Неформальное). *Какие из следующих выражений будут истинны при различных прочтениях $\Box\varphi$:*

$$\Box\varphi \to \varphi\,, \quad \Box\varphi \to \Box\Box\varphi\,, \quad \Box(\varphi \to \varphi)\,, \quad \Box\varphi \to \Diamond\varphi\,, \quad \Box\varphi \to \Diamond\neg\varphi\,,$$
$$\Box(\varphi \to \psi) \to \Diamond(\Box\varphi \to \Box\psi)\,, \quad (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)\,, \quad \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi\,?$$

Отмеченная неоднозначность прочтения оператора необходимости обуславливает широкий спектр приложений модальной логики: философская логика, юриспруденция, лингвистика, теоретическая информатика и математика.

Мы будем изучать модальный язык прежде всего как средство описания *реляционных структур*, т. е. структур с отношениями.

Определение 4.1.2. *Модальной шкалой Крипке* (или просто *шкалой*) назовём пару вида $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, где W — непустое множество *возможных миров*, $R \subseteq W^2$ — произвольное отношение *достижимости.*

Для $\{u, v\} \subseteq W$ запись uRv может читаться как "мир v достижим из мира u", "мир v допустим относительно мира u" или даже "мир v является возможной альтернативой мира u".

Определение 4.1.3. *Модель языка $\mathcal{L}^m$* — это пара $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$, где $\mathcal{F}$ — шкала (в только что указанном смысле), а $v : Prop \to 2^W$ — некоторая *оценка* пропозициональных переменных. Говорим в данном случае, что μ — *модель над шкалой $\mathcal{F}$.*

Отметим, в отличие от рассмотренных ранее вариантов семантики типа Крипке для различных немодальных языков, здесь отношение достижимости не обязано быть предпорядком, а соответствонно оценка не должна быть отображением в множество конусов. Разумеется, ниже мы понимаем шкалы и модели именно в этом, актуальном для $\mathcal{L}^m$ смысле.

Выполнимость $\mathcal{L}^m$-формул в мирах модели μ (того же языка) определяется по индукции следующим образом:

$$
\begin{array}{lllll}
1) & \mu, x \vDash p & \iff & x \in v(p)\,; \\
2) & \mu, x \vDash \varphi \wedge \psi & \iff & \mu, x \vDash \varphi \ \text{ и } \ \mu, x \vDash \psi\,; \\
3) & \mu, x \vDash \varphi \vee \psi & \iff & \mu, x \vDash \varphi \ \text{ или } \ \mu, x \vDash \psi\,; \\
4) & \mu, x \vDash \varphi \to \psi & \iff & \mu, x \nvDash \varphi \ \text{ или } \ \mu, x \vDash \psi\,; \\
5) & \mu, x \vDash \neg\varphi & \iff & \mu, x \nvDash \varphi\,; \\
6) & \mu, x \vDash \Box\varphi & \iff & \forall y \in W\ (xRy \ \Rightarrow\ \mu, y \vDash \varphi)\,.
\end{array}
$$

Тогда несложно проверить, что

$$\mu, x \vDash \Diamond\varphi \quad\iff\quad \exists y \in W\ (xRy \ \text{ и } \ \mu, y \vDash \varphi)\,.$$

Далее, для произвольных модели μ и $\mathcal{L}^m$-формулы φ зададим

$$\mu(\varphi) \ := \ \{x \in W \mid \mu, x \vDash \varphi\}\,.$$

Говорим, что $\mathcal{L}^m$-*формула* φ *истинна в модели* μ (пишем $\mu \vDash \varphi$), если $\mu, x \vDash \varphi$ для всех $x \in W$, т. е. $\mu(\varphi) = W$; и φ *истинна в шкале* $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, если $\mu \vDash \varphi$ для любой модели $\mu = \langle \mu, v\rangle$ над шкалой $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс моделей или класс шкал. Полагаем

$$L\mathcal{K} \ := \ \{\varphi \mid \forall\, \mu\,(\mathcal{F}) \in \mathcal{K}\ (\mu \vDash \varphi\,(\mathcal{F} \vDash \varphi))\}\,.$$

По традиции, если $\mathcal{K} = \{\mathcal{F}\}$ либо $\mathcal{K} = \{\mu\}$, то используем обозначения $L\mathcal{F}$ и $L\mu$ вместо $L\{\mathcal{F}\}$ и $L\{\mu\}$ соответственно.

Определение 4.1.4. $\mathcal{L}^m$-Формула называется *тавтологией*, если она есть подстановочный частный случай (в языке $\mathcal{L}^m$) некоторой тавтологии классической логики CL.

Например, $\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi$ (при всех $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$) будет тавтологией, а уже формула $\Box\,(\varphi \vee \neg\varphi)$ тавтологией не является.

Определение 4.1.5. *Нормальная модальная логика* — это множество формул в языке $\mathcal{L}^m$, которое содержит все тавтологии, *аксиому Крипке*

$$(\mathrm{K})\quad \Box\,(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

и замкнуто относительно правил подстановки, *modus ponens* и *нормализации*, где последнее есть

$$(RN)\quad \frac{\varphi}{\Box\varphi}\,.$$

Замечание 4.1.6. Легко понять, если $\{L_i\}_{i\in I}$ — семейство нормальных модальных логик, то $\bigcap_{i\in I} L_i$ — тоже нормальная модальная логика.

Тем самым, существует *наименьшая нормальная модальная логика* (получающаяся как пересечение всех нормальных модальных логик), обозначаемая $\mathbf{K}$.

Теорема 4.1.7 (О корректности). *Пусть $\mathcal{K}$ — некий класс шкал. Тогда $L\mathcal{K}$ — нормальная модальная логика.*

Доказательство. Поскольку $L\mathcal{K} = \bigcap\{L\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathcal{K}\}$, достаточно доказать, что $L\mathcal{F}$ — нормальная модальная логика для любой шкалы $\mathcal{F}$.

Очевидно, все тавтологии классической логики содержатся в $L\mathcal{F}$. Проверим, что

$$\Box\,(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \ \in\ L\mathcal{F}\,.$$

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ и $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$. Достаточно проверить, что для любого $x \in W$ из $\mu, x \vDash \Box\,(p \to q)$ и $\mu, x \vDash \Box p$ следует $\mu, x \vDash \Box q$. Условия $\mu, x \vDash \Box\,(p \to q)$ и $\mu, x \vDash \Box p$ означают

$$\forall y \in W\ (xRy\ \Rightarrow\ (\mu, y \vDash p \to q\ \text{ и }\ \mu, y \vDash p))\,,$$

откуда немедленно вытекает $\forall y \in W\ (xRy\ \Rightarrow\ \mu, y \vDash q)$, т. е. $\mu, x \vDash \Box q$.

Теперь предположим $\mathcal{F} \vDash \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ и покажем, что $\mathcal{F} \vDash \varphi\,(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ (замкнутость $L\mathcal{K}$ относительно подстановок). Пусть $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. Определим модель $\mu' := \langle \mathcal{F}, v'\rangle$, где $v'(p_i) := \mu(\psi_i)$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$. Индукцией по строению формулы φ несложно проверить, что для любого $x \in W$ верна эквивалентность

$$\mu, x \vDash \varphi\,(\psi_1, \ldots, \psi_n) \quad\Longleftrightarrow\quad \mu', x \vDash \varphi\,(p_1, \ldots, p_n)\,.$$

Поскольку μ' — это также модель над $\mathcal{F}$, имеем $\mu' \vDash \varphi(p_1, \ldots, p_n)$. Следовательно, выполнено $\mu \vDash \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

Из того, что все классические тавтологии лежат в $L\mathcal{F}$ и это множество замкнуто относительно подстановки, получаем, что вообще все тавтологии лежат в $L\mathcal{F}$.

Далее, как легко понять, $L\mathcal{F}$ замкнуто относительно *modus ponens*.

Пусть $\varphi \in L\mathcal{F}$, μ — модель над $\mathcal{F}$. Тогда $\mu, x \vDash \varphi$ для всех $x \in W$. Очевидно, что также $\mu, x \vDash \Box\varphi$. Таким образом, множество $L\mathcal{F}$ замкнуто и относительно правила нормализации RN. □

Определение 4.1.8. Пусть даны шкала $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, модель $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ и множество $V \subseteq W$. Полагаем

$$\mathcal{F}^V = \langle V, R \cap V^2\rangle\,, \quad \mu^V = \langle \mathcal{F}^V, v^V\rangle\,,$$

где $v^V(p) \ := \ v(p) \cap V$ при всех $p \in Prop$.

Определение 4.1.9. Рассмотрим шкалу $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ и мир $x \in W$. Выделим следующие подмножества в W:

$$\begin{aligned}
x\uparrow \ &:= \ \{y \in W \mid xRy\}\,, \quad x\downarrow \ := \ \{y \in W \mid yRx\}\,;\\
x\uparrow^0 \ &:= \ \{x\}\,, \quad x\downarrow^0 \ := \ \{x\}\,, \quad x\uparrow^1 \ := \ x\uparrow\,, \quad x\downarrow^1 \ := \ x\downarrow\,;\\
x\uparrow^{n+1} \ &:= \ \left\{y \in W \mid xR^{n+1}y\right\} \ = \ \{y \in W \mid \exists z_1 \ldots \exists z_n \ (xRz_1R\ldots Rz_nRy)\}\,;\\
x\downarrow^{n+1} \ &:= \ \left\{y \in W \mid yR^{n+1}x\right\} \ = \ \{y \in W \mid \exists z_1 \ldots \exists z_n \ (yRz_1R\ldots Rz_nRx)\}\,.
\end{aligned}$$

Наконец, полагаем

$$x\uparrow^* \ := \ \{y \in W \mid xR^*y\} \quad \text{и} \quad x\downarrow^* \ := \ \{y \in W \mid yR^*x\}\,,$$

где R^* — рефлексивное и транзитивное замыкание отношения R.

Легко заметить,

$$x\uparrow^* \ = \ \bigcup_{n\in\omega} x\uparrow^n \quad \text{и} \quad x\downarrow^* \ = \ \bigcup_{n\in\omega} x\downarrow^n\,.$$

Определение 4.1.10. *Модальная степень $\mathcal{L}^m$-формулы* φ, обозначаемая $md(\varphi)$, вычисляется рекурсивно по следующей схеме:

1) $md(p) \quad := \quad 0$ для всех $p \in Prop$;
2) $md(\varphi * \psi) \quad := \quad \max\{md(\varphi), md(\psi)\}$, где $* \in \{\vee, \wedge, \to\}$;
3) $md(\neg\varphi) \quad := \quad md(\varphi)$;
4) $md(\Box\varphi) \quad := \quad md(\varphi) + 1$.

В частности, отсюда видно, что $md(\Diamond\varphi) = md(\varphi) + 1$.

Будем пользоваться следующими обозначениями (здесь всюду $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$):

$$\begin{aligned}
\Box^0\varphi \ := \ \varphi\,, \quad \Box^1\varphi \ := \ \Box\varphi\,, \quad \Box^{n+1}\varphi \ := \ \Box\Box^n\varphi\,,\\
\Diamond^0\varphi \ := \ \varphi\,, \quad \Diamond^1\varphi \ := \ \Diamond\varphi\,, \quad \Diamond^{n+1}\varphi \ := \ \Diamond\Diamond^n\varphi\,.
\end{aligned}$$

Индукцией по натуральному числу n, беря в качестве базы п. 6 из определения выполнимости модальных формул, несложно доказать следующее

Упражнение 4.1.11. *Для произвольного* $n \geq 0$ *верны эквивалентности:*

$$\mu, x \vDash \Box^n \varphi \iff \forall y \in x\uparrow^n (\mu, y \vDash \varphi),$$
$$\mu, x \vDash \Diamond^n \varphi \iff \exists y \in x\uparrow^n (\mu, y \vDash \varphi).$$

Предложение 4.1.12. *Пусть* $\mu = \langle W, R, v\rangle$, $x \in W$ *и* $n \geq 0$. *Положим*

$$\mu_1 := \mu^{x\uparrow^0 \cup \ldots \cup x\uparrow^n}.$$

Тогда для любой $\mathcal{L}^m$*-формулы* φ *такой, что* $md(\varphi) \leq n$, *верна эквивалентность*

$$\mu, x \vDash \varphi \iff \mu_1, x \vDash \varphi.$$

Доказательство. Индукция по сложности формул. Базис индукции и переход для немодальных связок тривиальны.

Рассмотрим случай $\varphi = \Box\psi$. Допустим, что $\mu, x \nvDash \Box\psi$, т. е. существует $y \in x\uparrow$, для которого $\mu, y \nvDash \psi$. Возьмём модель

$$\mu_2 := \mu^{y\uparrow^0 \cup \ldots \cup y\uparrow^{n-1}} = \mu_1^{y\uparrow^0 \cup \ldots \cup y\uparrow^{n-1}}.$$

Поскольку $md(\psi) \leq n-1$, по индукционному предположению имеет место пара эквивалентностей:

$$\mu_2, y \nvDash \psi \iff \mu, y \nvDash \psi;$$
$$\mu_2, y \nvDash \psi \iff \mu_1, y \nvDash \psi.$$

В итоге $\mu, y \nvDash \psi \Leftrightarrow \mu_1, y \nvDash \psi$. Тем самым, $\exists y \in x\uparrow (\mu_1, y \nvDash \psi)$, т. е. $\mu_1, x \nvDash \Box\psi$.

Мы установили, что из $\mu, x \nvDash \Box\psi$ следует $\mu_1, x \nvDash \Box\psi$. Обратная импликация доказывается аналогично. □

Следствие 4.1.13 (О порождённой подмодели). *Пусть* $\mu = \langle W, R, v\rangle$ *и* $x \in W$. *Положим* $\mu' := \mu^{x\uparrow^*}$. *Тогда для всякой* $\mathcal{L}^m$*-формулы* φ *имеем*

$$\mu, x \vDash \varphi \iff \mu', x \vDash \varphi.$$

4.2. Свойства бинарных отношений и модальные формулы

Интересен тот факт, что, как мы увидим чуть позже, многие свойства бинарных отношений можно неким образом выделить с помощью модальных формул. Ниже приведены два списка, первый из которых содержит наиболее значимые из таких свойств, а второй — отвечающие им $\mathcal{L}^m$-формулы.

Список 1. Свойства отношений достижимости.

1. Рефлексивность:

$$\forall x\, (xRx).$$

2. Симметричность:

$$\forall x \forall y\, (xRy \Rightarrow yRx).$$

3. Сериальность:
$$\forall x\, \exists y\ (xRy)\,.$$

4. Транзитивность:
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((xRy \text{ и } yRz) \ \Rightarrow\ xRz)\,.$$

5. Евклидовость:
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((xRy \text{ и } xRz) \ \Rightarrow\ yRz)\,.$$

6. Частичная функциональность:
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((xRy \text{ и } xRz) \ \Rightarrow\ y = z)\,.$$

7. Функциональность:
$$\forall x\, \exists! y\ (xRy)\,.$$

8. Слабая плотность:
$$\forall x\, \forall y\ (xRy \ \Rightarrow\ \exists z\ (xRz \text{ и } zRy))\,.$$

9. Слабая связность:
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((xRy \text{ и } xRz) \ \Rightarrow\ (yRz \text{ или } y = z, \text{ или } zRy))\,.$$

10. Слабая направленность:
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((xRy \text{ и } xRz) \ \Rightarrow\ \exists t\ (yRt \text{ и } zRt))\,.$$

В дальнейшем, если отношение R шкалы $\langle W, R\rangle$ рефлексивно, симметрично и т. п., то мы иногда говорим, что сама шкала рефлексивна, симметрична и т. п.

Список 2. Соответствующие данным свойствам модальные формулы.

1.	$\mathbf{T}: \ \Box p \to p$	
2.	$\mathbf{B}: \ p \to \Box\Diamond p$	*формула Брауэра*
3.	$\mathbf{D}: \ \Box p \to \Diamond p$	*деонтический принцип*
4.	$\mathbf{4}: \ \Box p \to \Box\Box p$	*аксиома системы Льюиса* **S4**
5.	$\mathbf{5}: \ \Diamond p \to \Box\Diamond p$	*аксиома системы Льюиса* **S5**
6.	$\mathbf{D}_C: \ \Diamond p \to \Box p$	*обращение деонтического принципа*
7.	$\Diamond p \leftrightarrow \Box p$	
8.	$\Box\Box p \to \Box p$	
9.	$\mathbf{L}: \ \Box\,((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box\,((q \wedge \Box q) \to p)$	*формула Леммона*
10.	$\mathbf{G}: \ \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$	*формула Гиша*

Упомянутую выше взаимосвязь формализует следующая

Теорема 4.2.1. *Отношение R шкалы $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ обладает одним из свойств 1–10, если и только если соответствующая $\mathcal{L}^m$-формула истинна на $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную шкалу $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$.

1. Пусть отношение R — рефлексивно и $\mu = \langle \mathcal{F}, v \rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. Если $x \vDash \Box p$ (здесь и в дальнейшем вместо $\mu, x \vDash \varphi$ пишем $x \vDash \varphi$, при условии, что из контекста ясно, о какой именно модели идет речь), тогда $\forall y \; (xRy \;\Rightarrow\; y \vDash p)$. В частности, $x \vDash p$, так как xRx.

Предположим теперь, что отношение R не является рефлексивным и $x \in W$ — некая иррефлексивная точка, т. е. не выполнено xRx. Возьмём модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, в которой $v(p) := W \setminus \{x\}$. Тогда $x \vDash \Box p$, но $x \nvDash p$, откуда $\mu \nvDash \Box p \to p$, а потому $\mathcal{F} \nvDash \Box p \to p$.

Таким образом, формула $\mathbf{T}$ истинна в точности на рефлексивных шкалах.

2. Предположим, что отношение R симметрично и $\mu = \langle \mathcal{F}, v \rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. Пусть $x \vDash p$. Проверим, что $x \vDash \Box\Diamond p$. Если xRy, то yRx и, тем самым, $y \vDash \Diamond p$. В итоге $\forall y \; (xRy \;\Rightarrow\; y \vDash \Diamond p)$, т. е. $x \vDash \Box\Diamond p$.

Теперь пусть отношение R не симметрично, тогда найдутся миры $\{x, y\} \subseteq W$ такие, что xRy и не выполнено yRx. Возьмём модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, где $v(p) := \{x\}$. Имеем $x \vDash p$, но при этом $y \nvDash \Diamond p$. Отсюда $x \nvDash \Box\Diamond p$. Таким образом, $\mathcal{F} \nvDash p \to \Diamond\Box p$.

4. Пусть отношение R транзитивно и $\mu = \langle \mathcal{F}, v \rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. Предположим, что $x \vDash \Box p$ и xRy. Если yRz, то xRz по транзитивности, а потому $z \vDash p$ ввиду $x \vDash \Box p$. Мы доказали, что $\forall y \; (xRy \;\Rightarrow y \vDash \Box p)$, т. е. $x \vDash \Box\Box p$.

Предположим теперь, что отношение R не является транзитивным, т. е. найдутся точки $\{x, y, z\} \subseteq W$ такие, что xRy и yRz, но неверно xRz. Рассмотрим модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, где $v(p) := W \setminus \{z\}$. Тогда $x \vDash \Box p$. С другой стороны, $y \nvDash \Box p$ (так как yRz и $z \nvDash p$), откуда $x \nvDash \Box\Box p$. Мы установили, что $\mathcal{F} \nvDash \Box p \to \Box\Box p$.

5. Пусть отношение R евклидово и $\mu = \langle \mathcal{F}, v \rangle$. Предположим, что $x \vDash \Diamond p$. Значит, существует $y \in W$ такой, что xRy и $y \vDash p$. Если xRz, то zRy по евклидовости. Тем самым, $z \vDash \Diamond p$. В итоге получаем $\forall z \; (xRz \;\Rightarrow z \vDash \Diamond p)$, т. е. $x \vDash \Box\Diamond p$.

Предположим теперь, что отношение R не является евклидовым, т. е. найдутся точки $\{x, y, z\} \subseteq W$ такие, что xRy, xRz и при этом не имеем места yRz. Возьмём модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, где $v(p) := \{z\}$. Из $z \vDash p$ следует $x \vDash \Diamond p$. Вместе с тем, $x \nvDash \Box\Diamond p$, так как $y \nvDash \Diamond p$.

9. Допустим, отношение R слабо связно и $\mu = \langle \mathcal{F}, v \rangle$. Предположим, что выполнено $x \nvDash \Box\left((p \wedge \Box p) \to q\right)$, т. е. найдётся мир $y \in W$ такой, что xRy, $y \vDash p \wedge \Box p$ и $y \nvDash q$. Докажем, что в этом случае $x \vDash \Box\left((q \wedge \Box q) \to p\right)$. Пусть xRz. Тогда $y = z$, или yRz, или zRy. Если $y = z$, то $z \vDash p$, откуда $z \vDash ((q \wedge \Box q) \to p)$. Если yRz, то $z \vDash p$ ввиду $y \vDash \Box p$. Опять получаем $z \vDash ((q \wedge \Box q) \to p)$. Если же zRy, то $z \nvDash \Box q$, так как $y \nvDash q$. Стало быть, $z \nvDash q \wedge \Box q$ и $z \vDash ((q \wedge \Box q) \to p)$.

Предположим теперь, что отношение R не слабо связно, т. е. существуют миры x, y и z такие, что xRy, xRz, $y \neq z$, но неверно ни yRz, ни zRy. Зададим модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, где $v(p) := W \setminus \{y\}$ и $v(q) := W \setminus \{z\}$. В этом случае имеем $y \vDash q \wedge \Box q$ и $y \nvDash p$, откуда $x \nvDash \Box\left((q \wedge \Box q) \to p\right)$. Вместе с тем $z \vDash p \wedge \Box p$ и $z \nvDash q$, т. е. $x \nvDash \Box\left((p \wedge \Box p) \to q\right)$.

10. Пусть отношение R слабо направлено и $x \vDash \Diamond\Box p$ для некоторой модели μ над $\mathcal{F}$. Пусть мир $y \in W$ такой, что xRy и $\forall z \; (yRz \;\Rightarrow\; z \vDash p)$. Если xRz, то найдется $t \in W$ такой, что zRt и yRt. Из yRt следует $t \vDash p$, поэтому $z \vDash \Diamond p$. Тем самым, $\forall z \; (xRz \;\Rightarrow\; z \vDash \Diamond p)$, т. е. $x \vDash \Box\Diamond p$.

Пусть слабая направленность нарушается на точках x, y и z, т. е. xRy, xRz и ни для какого t не может быть одновременно верно yRt и zRt. Рассмотрим модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, где $v(p) := \{t \mid yRt\}$. Очевидно, $y \vDash \Box p$, поэтому $x \vDash \Diamond\Box p$. Однако из условия на t получаем $z \nvDash \Diamond p$, следовательно, $x \nvDash \Box\Diamond p$.

Оставшиеся эквивалентности доказываются сравнительно легко и оставлены в качестве упражнения читателю. □

Мы показали, что многие естественные свойства бинарных отношений, выразимые в логике первого порядка (в сигнатуре $\{R^2\}$), могут быть заданы также с помощью модальных формул. Теперь приведём пример перво-порядкового свойства бинарного отношения R, которое не может быть задано с помощью модальной формулы. Таким свойством является иррефлексивность: $\forall x \neg (xRx)$. Однако для доказательства того факта, что класс иррефлексивных шкал нельзя задать с помощью модальной формулы, нам придётся ввести специальный класс отображений между шкалами, сохраняющий истинность $\mathcal{L}^m$-формул.

Определение 4.2.2. Пусть $\mu_1 = \langle W_1, R_1, v_1\rangle$ и $\mu_2 = \langle W_2, R_2, v_2\rangle$ — произвольные модели. Отображение $f : W_1 \to W_2$ называется *p-морфизмом из* μ_1 *в* μ_2 (в таком случае пишем $f : \mu_1 \to \mu_2$), если выполнены следующие три условия:

1) $\forall x, y \in W_1\ (xR_1y \implies f(x)R_2f(y))$;

2) $\forall x \in W_1\, \forall z \in W_2\ (f(x)R_2z \implies \exists y \in W_1\ (xR_1y \text{ и } f(y) = z))$;

3) $\forall x \in W_1\, \forall p \in Prop\ (x \in v_1(p) \iff f(x) \in v_2(p))$.

Отображение $f : W_1 \to W_2$ называется *p-морфизмом из шкалы* $\mathcal{F}_1 = \langle W_1, R_1\rangle$ *в шкалу* $\mathcal{F}_2 = \langle W_2, R_2\rangle$ (в данной ситуации пишем $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$), если выполнены первые два из приведённых выше условий.

Лемма 4.2.3 (Первая лемма о p-морфизмах). *Пусть $\mu_1 = \langle W_1, R_1, v_1\rangle$ и $\mu_2 = \langle W_2, R_2, v_2\rangle$ — произвольные модели, а $f : \mu_1 \to \mu_2$ — некий p-морфизм между ними. Тогда для любых $\mathcal{L}^m$-формулы φ и мира $x \in W_1$ верна эквивалентность:*

$$\mu_1, x \vDash \varphi \iff \mu_2, f(x) \vDash \varphi\,.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по сложности формул. Базис индукции следует из третьего условия в определении p-морфизма, а переход для немодальных связок получается непосредственно.

Пусть $\varphi = \Box\psi$. Предположим $\mu_1, x \vDash \Box\psi$, т. е. $\forall y \in W_1\ (xR_1y \Rightarrow \mu_1, y \vDash \psi)$. Если $f(x)R_2z$, то по условию 2 из определения 4.2.2 найдётся $y \in W_1$ такой, что xR_1y и $f(y) = z$. По индукционному предположению $\mu_1, y \vDash \psi \Leftrightarrow \mu_2, f(y) \vDash \psi$. Таким образом, $\mu_1, x \vDash \Box\psi$ влечёт $\mu_2, f(x) \vDash \Box\psi$.

Пусть теперь $\mu_2, f(x) \vDash \Box\psi$, т. е. $\forall z \in W_2\ (f(x)R_1z \Rightarrow \mu_2, z \vDash \psi)$. Если xR_1y, то $f(x)R_2f(y)$ по условию 1 из определения 4.2.2. По индукционному предположению, в частности, из $\mu_2, f(y) \vDash \psi$ следует $\mu_1, y \vDash \psi$. Итак, мы доказали обратную импликацию: $\mu_2, f(x) \vDash \Box\psi$ влечёт $\mu_1, x \vDash \Box\psi$. □

Определение 4.2.4. Если f — сюръективный p-морфизм из шкалы $\mathcal{F}_1 = \langle W_1, R_1\rangle$ в шкалу $\mathcal{F}_2 = \langle W_2, R_2\rangle$ (в частности, выполнено $f(W_1) = W_2$), то шкала $\mathcal{F}_2$ называется *p-морфным образом шкалы* $\mathcal{F}_1$.

Лемма 4.2.5 (Вторая лемма о p-морфизмах). *Если шкала $\mathcal{F}_2 = \langle W_2, R_2\rangle$ есть p-морфный образ шкалы $\mathcal{F}_1 = \langle W_1, R_1\rangle$, то для $\mathcal{L}^m$-любой формулы φ имеем*

$$\mathcal{F}_1 \vDash \varphi \implies \mathcal{F}_2 \vDash \varphi\,.$$

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{F}_1 \not\models \varphi$, т. е. для некоторых модели $\mu_2 = \langle \mathcal{F}_2, v_2 \rangle$ и $y \in W_2$ получаем $\mu_2, y \not\models \varphi$. Пусть $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ — сюръективный p-морфизм, существующий по условию леммы. Определим модель $\mu_1 := \langle \mathcal{F}_1, v_1 \rangle$, полагая

$$v_1(p) \ := \ \{x \in W_1 \mid f(x) \in v_2(p)\}$$

для всех $p \in Prop$. Тогда очевидно, что f — p-морфизм из μ_1 в μ_2. Возьмём x, для которого $f(x) = y$. По первой лемме о p-морфизмах $\mu_1, x \not\models \varphi$, откуда $\mathcal{F}_1 \not\models \varphi$. □

Наконец, мы готовы показать, что свойство иррефлексивности не выразимо на модальном языке.

Предложение 4.2.6. *Не существует формулы φ языка $\mathcal{L}^m$ такой, что для любой шкалы $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ верна эквивалентность*

$$\mathcal{F} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{отношение } R \textit{ иррефлексивно}.$$

Доказательство. Согласно второй лемме о p-морфизмах, класс шкал, в которых истинна та или иная модальная формула, замкнут относительно p-морфных образов. Рассмотрим две шкалы:

$$\mathcal{F}_1 \ := \ \langle \omega, < \rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_2 \ := \ \langle \{0\}, \{(0,0)\} \rangle ,$$

где $<$ — строгий порядок на множестве натуральных чисел ω. Проверим, что отображение $f : \omega \to \{0\}$, заданное по правилу $f(x) = 0$ для всех $x \in \omega$, является сюръективным p-морфизмом из $\mathcal{F}_1$ на $\mathcal{F}_2$. Сюръективность и первое свойство из определения 4.2.2 выполняются очевидным образом. Осталось установить второе свойство. Пусть $R_2 := \{(0,0)\}$ (отношение шкалы $\mathcal{F}_2$). Если $f(x) R_2 0$, то для $y := x + 1$ имеем $x < y$ и $f(y) = 0$. Таким образом, $\mathcal{F}_2$ оказывается p-морфным образом $\mathcal{F}_1$. При этом шкала $\mathcal{F}_1$ иррефлексивна, а шкала $\mathcal{F}_2$ состоит из единственной рефлексивной точки. Значит, класс иррефлексивных шкал не замкнут относительно p-морфных образов. Следовательно, этот класс нельзя задать с помощью модальной формулы. □

4.3. Наименьшая нормальная модальная логика K

Ранее мы обозначили через **K** наименьшую логику в классе всех нормальных модальных логик. Таким образом, **K** — это наименьшее множество формул, содержащее все тавтологии, формулу $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ и замкнутое относительно правил подстановки, *modus ponens* и нормализации RN $(\frac{\varphi}{\Box\varphi})$. Отсюда, разумеется, немедленно извлекается аксиоматизация логики **K**.

Предложение 4.3.1. *Логика* **K** *— это наименьшее множество $\mathcal{L}^m$-формул, содержащее формулы*

1) $p \to (q \to p)$,

2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$,

3) $(p \wedge q) \to p$,

4) $(p \wedge q) \to q$,

5) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$,

6) $p \to (p \vee q)$,

7) $q \to (p \vee q)$,

8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$,

9) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \ \neg p)$,

10) $\neg p \to (p \to q)$,

11) $p \vee \neg p$,

12) $\Box (p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

и замкнутое относительно правил подстановки, нормализации и modus ponens.

Доказательство. Аксиомы 1–11 — это в точности аксиомы классической логики, они являются тавтологиями и потому принадлежат **K**. Аксиома 12 также лежит в **K**. Поэтому логика, заданная аксиомами 1–12, содержится в **K**. С другой стороны, всякая тавтология получается по правилу подстановки из классической тавтологии, а классическая тавтология выводима из аксиом 1–11 при помощи *modus ponens* и, опять же, правила подстановки. Поэтому замыкание аксиом 1–12 относительно правил подстановки, нормализации и *modus ponens* есть нормальная модальная логика, а потому **K** в нём содержится. □

Приведём ещё один полезный вариант аксиоматизации для **K**.

Упражнение 4.3.2. *Логика* **K** *— это наименьшее множество $\mathcal{L}^m$-формул, содержащее аксиомы 1–11 классической логики Cl, модальные аксиомы*

□1. $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box (p \wedge q)$,

□2. $\Box (p \to p)$

и замкнутое относительно правил подстановки, modus ponens *и правила монотонности*

$$(RM) \quad \frac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi} .$$

Отсюда, в частности, легко получить

Упражнение 4.3.3. $(\Box p_1 \wedge \ldots \wedge \Box p_n) \to \Box (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \ \in \ \mathbf{K}$.

Кроме того, для модальности $\Diamond$ имеем

Предложение 4.3.4. $\Diamond (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m) \to (\Diamond\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\psi_m) \ \in \ \mathbf{K}$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $m = 2$ (затем по индукции рассуждение легко переносится на случай произвольного $m \geq 2$). Построим квазивывод формулы $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$ в **K**:

1) $\neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (классическая тавтология);
2) $\Box (\neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi))$ (по RN из 1);
3) $\Box\neg\varphi \to \Box (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (по аксиоме K и MP из 2);
4) $\Box\neg\psi \to \Box (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (выводится аналогично 3);
5) $(\Box\neg\varphi \vee \Box\neg\psi) \to \Box (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (по правилу разбора случаев из 3 и 4);

6) $\neg\Box(\neg\varphi\vee\neg\psi)\to\neg(\Box\neg\varphi\vee\Box\neg\psi)$ (по правилу контрапозиции из 5);

7) $\neg\Box\neg(\varphi\wedge\psi)\to(\neg\Box\neg\varphi\wedge\neg\Box\neg\psi)$ (по законам Де Моргана и правилу замены из 6).

Осталось заметить, что формула 7 представляет собой расшифровку сокращенной записи $\Diamond(\varphi\wedge\psi)\to(\Diamond\varphi\wedge\Diamond\psi)$. $\square$

Предложение 4.3.5. *Правило замены*

$$\frac{\varphi\leftrightarrow\psi}{\chi(\varphi)\leftrightarrow\chi(\psi)}$$

является производным в логике **K**.

Доказательство. Из правила RM, производность которого мы установили в предыдущем упражнении, получаем, что правило

$$(RE)\quad\frac{\varphi\leftrightarrow\psi}{\Box\varphi\leftrightarrow\Box\psi}$$

также является производным. Теперь, пользуясь индукцией по сложности формул, мы можем провести доказательство для немодальных связок точно так же, как это делалось для классической логики, а индукционный переход в случае формул вида $\Box\chi$ будет следовать из производности RE. $\square$

Следствие 4.3.6. *В любой нормальной модальной логике правило замены является производным.*

Теперь мы займёмся доказательством полноты логики **K** относительно класса всех шкал. В качестве первого шага введём канонические модели для нормальных модальных логик.

Пусть L — нормальная модальная логика. Множество $\mathcal{L}^m$-формул Γ называется *простой L-теорией*, если: 1) $L\subseteq\Gamma$; 2) множество Γ замкнуто относительно *modus ponens*; 3) из $\varphi\vee\psi\in\Gamma$ следует $\varphi\in\Gamma$ или $\psi\in\Gamma$; 4) множество Γ нетривиально, т. е. отлично от $For_{\mathcal{L}^m}$.

Лемма 4.3.7. *Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда любая простая L-теория полна.*

Доказательство. Пусть Γ — простая L-теория, а φ — некоторая $\mathcal{L}^m$-формула. Поскольку $\varphi\vee\neg\varphi$ есть классическая тавтология, то $\varphi\vee\neg\varphi\in L$ и, следовательно, $\varphi\vee\neg\varphi\in\Gamma$. По дизъюнктивному свойству для Γ имеем $\varphi\in\Gamma$ или $\neg\varphi\in\Gamma$. $\square$

Далее, запись $\Gamma\vdash_L\varphi$ означает, что φ может быть получена из элементов $\Gamma\cup L$ с помощью одного лишь *modus ponens*. Очевидно, что данное отношение выводимости удовлетворяет теореме дедукции. Для любой нормальной модальной логики L и множества $\Gamma\cup\{\varphi,\psi\}\subseteq For_{\mathcal{L}^m}$ верна эквивалентность

$$\Gamma,\varphi\vdash_L\psi\quad\Longleftrightarrow\quad\Gamma\vdash_L\varphi\to\psi\,.$$

Если Γ и Δ суть множества $\mathcal{L}^m$-формул, то пишем $\Gamma\vdash_L\Delta$, если и только если существует конечное подмножество $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\subseteq\Delta$ такое, что

$$\Gamma\vdash_L\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_n\,.$$

Лемма о расширении формулируется и доказывается стандартным образом (и потому оставляется в качестве упражнения).

Лемма 4.3.8 (О расширении). *Для любых нормальной модальной логики L и множеств $\mathcal{L}^m$-формул Σ и Δ, если $\Sigma \nvdash_L \Delta$, то найдётся простая L-теория $\Gamma \supseteq \Sigma$ такая, что $\Gamma \nvdash_L \Delta$.*

Определение 4.3.9. Пусть L — нормальная модальная логика. *Каноническая L-шкала* — это $\mathcal{F}^L := \langle W^L, R^L \rangle$, где

1) W^L — множество всех простых L-теорий;

2) $\Gamma R^L \Delta \iff \Gamma_\Box \subseteq \Delta\,, \quad$ где $\Gamma_\Box \;:=\; \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\}$.

Каноническая L-модель μ^L представляет собой пару, состоящую из канонической L-шкалы $\mathcal{F}^L$ и оценки v^L, заданной посредством

$$v^L(p) \;:=\; \bigl\{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\bigr\} \quad \text{для каждого } p \in Prop\,.$$

Лемма 4.3.10. *Для любых Γ и Δ из W^L верна эквивалентность*

$$\Gamma R^L \Delta \quad\iff\quad \Delta^\Diamond \subseteq \Gamma\,,$$

где $\Delta^\Diamond \;:=\; \{\Diamond\varphi \mid \varphi \in \Delta\}\,.$

Доказательство. Пусть $\Gamma R^L \Delta$, т.е. $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$. Предположим, что $\varphi \in \Delta$, но при этом $\Diamond\varphi \notin \Gamma$, т.е. $\neg\Box\neg\varphi \notin \Gamma$. Из полноты теории Γ следует $\Box\neg\varphi \in \Gamma$, откуда $\neg\varphi \in \Delta$, что противоречит нетривиальности Δ. Итак, мы доказали $\Delta^\Diamond \subseteq \Gamma$.

Пусть теперь $\Delta^\Diamond \subseteq \Gamma$ и $\Box\varphi \in \Gamma$. Если $\varphi \notin \Delta$, то ввиду полноты Δ имеем $\neg\varphi \in \Delta$. Откуда $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$, т.е. $\neg\Box\neg\neg\varphi \in \Gamma$. Используя классическую эквивалентность $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ и правило замены, получаем $\neg\Box\varphi \in \Gamma$, что противоречит нетривиальности Γ. Таким образом, $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$. $\Box$

Лемма 4.3.11 (О канонической модели). *Пусть L — нормальная модальная логика. В канонической L-модели μ^L для любых $\Gamma \in W^L$ и $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$ верно*

$$\mu^L, \Gamma \models \varphi \quad\iff\quad \varphi \in \Gamma\,.$$

Доказательство. Индукцией по сложности формул. База индукции и переход для немодальных связок не представляют трудностей. Пусть φ — некоторая $\mathcal{L}^m$-формула, и предположим, что для всех $\Gamma \in W^L$ уже доказана нужная эквивалентность.

Рассмотрим формулу $\Box\varphi$. По определению,

$$\mu^L, \Gamma \models \Box\varphi \quad\iff\quad \forall\Delta \in W^L \bigl(\Gamma_\Box \subseteq \Delta \;\Rightarrow\; \mu^L, \Delta \models \varphi\bigr)\,,$$

что по индукционному предположению равносильно

$$\forall\Delta \in W^L \;(\Gamma_\Box \subseteq \Delta \;\Rightarrow\; \varphi \in \Delta)\,.$$

Установим эквивалентность

$$\forall\Delta \in W^L \;(\Gamma_\Box \subseteq \Delta \;\Rightarrow\; \varphi \in \Delta) \quad\iff\quad \Box\varphi \in \Gamma\,.$$

Если $\Box\varphi \in \Gamma$, то из $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ следует $\varphi \in \Delta$ по определению множества $\Gamma_\Box$.

Предположим, что $\Box\varphi \notin \Gamma$, и построим простую L-теорию Δ, для которой $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ и $\varphi \notin \Delta$. По лемме о расширении достаточно показать, что $\Gamma_\Box \nvdash_L \varphi$.

Пусть $\Gamma_\Box \vdash_L \varphi$. Тогда найдутся $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_\Box$ такие, что $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi \in L$. По правилу RN имеем

$$\Box\left((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi\right) \ \in \ L\,.$$

Отсюда с помощью аксиомы Крипке получаем

$$\Box\,(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \Box\varphi \ \in \ L\,.$$

Воспользовавшись упражнением 4.3.3 и транзитивностью импликации, имеем

$$(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\varphi \ \in \ L\,,$$

откуда $\Box\varphi \in \Gamma$, что противоречит предположению $\Box\varphi \notin \Gamma$. □

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал. Отношение $\Gamma \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$ имеет место, если и только если для каждой шкалы $\mathcal{W} = \langle W, R\rangle$ из $\mathcal{K}$, любой модели $\mu = \langle W, R, v\rangle$ над $\mathcal{W}$ и всех $x \in W$ верна импликация

$$\forall\psi \in \Gamma\ (\mu, x \vDash \psi) \quad\Longrightarrow\quad \mu, x \vDash \varphi\,.$$

Напомним определения полноты и сильной полноты логики относительно класса шкал. Говорим, что нормальная модальная логика L *полна относительно класса шкал* $\mathcal{K}$, если

$$\varphi \in L \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{K} \models \varphi$$

для любой $\mathcal{L}^m$-формулы φ; и L *сильно полна относительно класса шкал* $\mathcal{K}$, если отношение $\vdash_L$ совпадает с отношением $\vDash_{\mathcal{K}}$.

Теорема 4.3.12. *Логика* **K** *сильно полна относительно класса всех шкал.*

Доказательство. Пусть $\vDash_{\mathbf{K}}$ означает отношение следования на классе всех шкал. Включение $\vdash_{\mathbf{K}} \subseteq \vDash_{\mathbf{K}}$ легко следует из теоремы о корректности (теорема 4.1.7).

Пусть $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$. По лемме о расширении найдётся простая **K**-теория Γ' такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\varphi \notin \Gamma'$. Далее, по лемме о канонической модели,

$$\forall\psi \in \Gamma\ \left(\mu^{\mathbf{K}}, \Gamma' \models \psi\right) \quad \text{и} \quad \mu^{\mathbf{K}}, \Gamma' \not\models \varphi\,.$$

□

4.4. Канонические модальные логики

Теорема 4.4.1. *Если нормальная модальная логика L содержит одну из формул 1–8 или 10 из списка 2, то отношение достижимости R^L канонической модели μ^L удовлетворяет соответствующему условию из списка 1.*

Доказательство. Докажем только случаи пунктов 2, 4, 5 и 8 из списка 2.

2. Пусть формула Брауэра $p \to \Box\Diamond p$ лежит в L. Покажем, что отношение R^L является симметричным. Предположим, что простые L-теории Γ и Δ таковы, что $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$, но $\Delta_\Box \nsubseteq \Gamma$. Тогда найдётся формула φ, для которой $\Box\varphi \in \Delta$ и $\varphi \notin \Gamma$. Поскольку простые теории полны (лемма 4.3.7), $\neg\varphi \in \Gamma$. Воспользовавшись формулой Брауэра, имеем $\Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$. Из включения $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ следует $\Diamond\neg\varphi \in \Delta$, т. е. $\neg\Box\neg\neg\varphi \in \Delta$. Из классической эквивалентности $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ и правила подстановки получаем $\neg\Box\varphi \in \Delta$. Следовательно, теория Δ противоречива и потому тривиальна, что противоречит определению простой теории. Тем самым, $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ всегда влечёт $\Delta_\Box \subseteq \Gamma$.

4. Пусть $\Box p \to \Box\Box p \in L$. Установим транзитивность отношения R^L. Предположим, что для $\{\Gamma, \Delta, \Sigma\} \subseteq W^L$ верно $\Gamma R^L \Delta$ и $\Delta R^L \Sigma$, т. е. $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ и $\Delta_\Box \subseteq \Sigma$. Теперь если $\varphi \in \Gamma_\Box$, что равносильно $\Box\varphi \in \Gamma$, то $\Box\Box\varphi \in \Gamma$ ввиду $\Box p \to \Box\Box p \in L$. Поэтому $\Box\varphi \in \Gamma_\Box \subseteq \Delta$, откуда $\varphi \in \Delta_\Box \subseteq \Sigma$. Итак, мы доказали включение $\Gamma_\Box \subseteq \Sigma$, т. е. $\Gamma R^L \Sigma$.

5. Допустим, формула $\mathbf{5} = \Diamond p \to \Box\Diamond p$ лежит в L, и покажем, что отношение R^L — эвклидово. Пусть для $\{\Gamma, \Delta, \Sigma\} \subseteq W^L$ выполнено $\Gamma R^L \Delta$ и $\Gamma R^L \Sigma$, т. е. $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ и $\Sigma^\Diamond \subseteq \Gamma$. Предположим, что $\Delta_\Box \nsubseteq \Sigma$ и формула φ такова, что $\Box\varphi \in \Delta$ и $\varphi \notin \Sigma$. Тогда $\neg\varphi \in \Sigma$ в силу полноты Σ. При этом, поскольку $\Sigma^\Diamond \subseteq \Gamma$, то $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$. Применяя формулу $\mathbf{5}$, имеем $\Box\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$, откуда с учётом $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$ следует $\Diamond\neg\varphi \in \Delta$, что эквивалентно $\neg\Box\varphi \in \Delta$. В итоге получили противоречивость множества Δ, чего быть не может. Таким образом, из $\Gamma R^L \Delta$ и $\Gamma R^L \Sigma$ всегда вытекает $\Delta R^L \Sigma$.

8. Пусть $\Box\Box p \to \Box p \in L$. Докажем, что отношение R^L является слабо плотным. Пусть для $\{\Gamma, \Delta\} \subseteq W^L$ верно $\Gamma R^L \Delta$. Найдём теорию $\Sigma \in W^L$, для которой $\Gamma R^L \Sigma$ и $\Sigma R^L \Delta$, что с учётом леммы 4.3.10 равносильно $\Gamma_\Box \subseteq \Sigma$ и $\Delta^\Diamond \subseteq \Sigma$. Для этого ввиду леммы о расширении достаточно установить нетривиальность множества

$$\Gamma_\Box \cup \Delta^\Diamond \;=\; \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\} \cup \{\Diamond\psi \mid \psi \in \Delta\}$$

относительно L, т. е. что не любая $\mathcal{L}^m$-формула выводима из данного множества (по $\vdash_L$).

Покажем, что $\Gamma_\Box \cup \Delta^\Diamond \nvdash_L \bot$. Предположим противное. Допустим, найдутся формулы $\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n \in \Gamma$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \Delta$, для которых верно

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_m\} \vdash_L \bot\,.$$

Последнее эквивалентно, по теореме дедукции для $\vdash_L$, соотношению

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \Diamond\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\psi_m) \to \bot \in L\,,$$

откуда

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \neg\,(\Diamond\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\psi_m) \;\in\; L\,. \tag{4.1}$$

С другой стороны, обозначая $\Psi := \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m$, по предложению 4.3.4 имеем

$$\Diamond\Psi \to (\Diamond\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\psi_m) \;\in\; L\,,$$

и значит, ввиду правила контрапозиции,

$$\neg\,(\Diamond\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\psi_m) \to \neg\Diamond\Psi \;\in\; L\,. \tag{4.2}$$

Далее, из (4.1) и (4.2) в силу транзитивности $\to$ получаем

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \neg\Diamond\Psi \;\in\; L\,.$$

Отсюда, комбинируя аксиому K и правило RN, приходим к

$$\Box\,(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \Box\neg\Diamond\Psi \;\in\; L\,.$$

Воспользовавшись аксиомой $\Box$1 (см. упражнение 4.3.2), получаем

$$(\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\varphi_n) \to \Box\neg\Diamond\Psi \;\in\; L\,.$$

Следовательно, $\Box\neg\Diamond\Psi \in \Gamma$, т. е. $\Box\Box\neg\Psi \in \Gamma$. Тогда из $\Box\Box\neg\Psi \to \Box\neg\Psi \in \Gamma$ вытекает $\Box\neg\Psi \in \Gamma$. Значит, $\neg\Psi \in \Delta$, поскольку $\Gamma_\Box \subseteq \Delta$. С другой стороны, $\Psi \in \Delta$. Поэтому простая L-теория Δ противоречива и, тем самым, тривиальна. Таким образом, предположение $\Gamma_\Box \cup \Delta^\Diamond \vdash_L \bot$ приводит к противоречию.

Оставшиеся пункты остаются в качестве упражнения читателю. $\Box$

Определение 4.4.2. Нормальная модальная логика L называется *канонической*, если $\mathcal{F}^L \models L$, где $\mathcal{F}^L$ — каноническая L-шкала.

Следствие 4.4.3. *Если нормальная модальная логика L получается из логики* $\mathbf{K}$ *присоединением нескольких (возможно, ни одной) формул с номерами 1–8 или 10 (см. список 2), то логика L является канонической.*

Доказательство. Каноничность логики $\mathbf{K}$ очевидна, поскольку её теоремы истинны во всех шкалах.

Рассмотрим, например, нормальную модальную логику

$$L \ := \ \mathbf{K} + \{\Box p \to p, p \to \Box\Diamond p, \Box p \to \Box\Box p\}\,,$$

полученную присоединением к логике $\mathbf{K}$ аксиом $\mathbf{T}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{4}$ (с номерами 1, 2 и 4 соответственно). В соответствии с предыдущей теоремой отношение R^L канонической L-шкалы $\mathcal{F}^L = \langle W^L, R^L\rangle$ будет рефлексивным, симметричным и транзитивным, т. е. окажется отношением эквивалентности. Из теоремы 4.2.1 следует

$$\mathcal{F}^L \models \mathbf{T},\ \mathbf{B},\ \mathbf{4}\,,$$

а потому $\mathcal{F}^L \vDash L$. Последнее как раз и означает, что L — каноническая логика. □

Следствие 4.4.4. *Если нормальная модальная логика L получается из логики* $\mathbf{K}$ *присоединением нескольких (возможно, ни одной) формул с номерами 1–8 или 10 (см. список 2), то логика L сильно полна относительно класса шкал, удовлетворяющих соответствующему набору свойств.*

Доказательство. Рассмотрим, например, ту же логику $L := \mathbf{K} + \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{4}\}$ и покажем, что она сильно полна относительно класса эквивалентностей. Пусть $\Gamma \not\vdash_L \varphi$. По лемме о расширении найдётся простая L-теория Γ' такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\varphi \notin \Gamma'$. Тогда по лемме о канонической модели

$$\forall \psi \in \Gamma\ \big(\mu^L, \Gamma' \models \psi\big) \quad \text{и} \quad \mu^L, \Gamma' \not\models \varphi\,.$$

Остаётся заметить, что шкала $\mathcal{F}^L$ канонической L-модели μ^L является эквивалентностью в силу предыдущего следствия. □

Мы установили, таким образом, теоремы полноты уже для довольно большого числа модальных логик. Возникает вопрос, как эти логики обозначать. Условимся, что обозначение для логики, являющейся результатом присоединения нескольких аксиом к логике $\mathbf{K}$, получается приписыванием справа к букве $\mathbf{K}$ аббревиатур соответствующих аксиом. Разумеется, одна и та же логика может получить при этом несколько наименований. Скажем, логика L, рассматривавшаяся в качестве примера в доказательствах двух последних следствий, должна получить обозначение **KTB4**. В то же время если отношение R рефлексивно и евклидово, то несложно проверить, что R будет симметрично и транзитивно. Очевидно также, что любая эквивалентность есть эвклидово отношение. Потому имеет место равенство

$$\mathbf{KTB4} \ = \ \mathbf{KT5}\,.$$

Кроме того, ряд известных модальных логик имеет традиционные обозначения (та же логика **KTB4** обычно обозначается как **S5**).

Приводимый ниже список содержит традиционные обозначения для ряда логик. Кроме того, в нём указаны классы шкал, относительно которых эти логики сильно полны. Для бóльшей полноты картины нам понадобятся ещё две аксиомы:

$\mathbf{M}: \ \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ (*формула МакКинси*);

$\mathbf{W}: \ \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (*формула Лёба*).

Список 3. Обозначения для основных модальных логик.

1.	$\mathbf{T} := \mathbf{KT}$	рефлексивные шкалы
2.	$\mathbf{D} := \mathbf{KD}$	сериальные шкалы
3.	$\mathbf{K4}$	транзитивные шкалы
4.	$\mathbf{B} := \mathbf{KB}$	симметричные шкалы
5.	$\mathbf{S4} := \mathbf{KT4}$	предпорядки
6.	$\mathbf{S5} := \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$	эквивалентности
7.	$\mathbf{K4.1} := \mathbf{K4M}$	?
8.	$\mathbf{K4.2} := \mathbf{K4G}$	транзитивные, слабо направленные шкалы
9.	$\mathbf{K4.3} := \mathbf{K4L}$	транзитивные, слабо связные шкалы
10.	$\mathbf{S4.1} := \mathbf{KT4M}$	?
11.	$\mathbf{S4.2} := \mathbf{KT4G}$	рефлексивные, транзитивные, слабо направленные шкалы
12.	$\mathbf{S4.3} := \mathbf{KT4L}$	рефлексивные, транзитивные, слабо связные шкалы
13.	$\mathbf{GL} := \mathbf{KW} = \mathbf{K4W}$	?

Отметим, что с помощью теоремы 4.4.1 (и её следствий) нельзя установить полноту логик **K4.3** и **S4.3** (хотя она и имеет место). Здесь мы докажем лишь теорему полноты для **S4.3**.

Теорема 4.4.5. *Логика* **S4.3** *сильно полна относительно класса всех шкал, являющихся рефлексивными, транзитивными и слабо связными одновременно.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{T} \in \mathbf{S4.3}$, несложно проверить, что $(p \wedge \Box p) \leftrightarrow p \in \mathbf{S4.3}$. Воспользовавшись данной эквивалентностью и правилом замены, можно упростить формулу Леммона следующим образом:

$$\mathbf{S4.3} \vdash_{\mathbf{K}} \mathbf{L} \leftrightarrow (\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p))\,.$$

Пусть $\mu = \langle W, R, v\rangle = \langle W^{\mathbf{S4.3}}, R^{\mathbf{S4.3}}, v^{\mathbf{S4.3}}\rangle$. Из теоремы 4.4.1 вытекает рефлексивность и транзитивность отношения R. Докажем, что R слабо связно. В силу его рефлексивности достаточно проверить выполнение следующего условия:

$$\forall \Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \in W \ \ ((\Gamma R \Delta_1 \text{ и } \Gamma R \Delta_2) \ \Rightarrow \ (\Delta_1 R \Delta_2 \text{ или } \Delta_2 R \Delta_1))\,.$$

Пусть, напротив, нашлись такие простые **S4.3**-теории $\{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2\} \subseteq W$, для которых

$$\Gamma R \Delta_1\,, \quad \Gamma R \Delta_2\,, \quad \neg(\Delta_1 R \Delta_2) \quad \text{и} \quad \neg(\Delta_2 R \Delta_1)\,.$$

В этом случае найдутся модальные формулы φ и ψ такие, что

$$\Box\varphi \in \Delta_1,\ \varphi \notin \Delta_2 \quad \text{и} \quad \Box\psi \in \Delta_2,\ \psi \notin \Delta_1\,.$$

Поскольку Γ — простая **S4.3**-теория, имеем $\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi) \in \Gamma$. Кроме того, простые теории обладают дизъюнктивным свойством, поэтому

$$\Box(\Box\varphi \to \psi) \ \in \ \Gamma \quad \text{или} \quad \Box(\Box\psi \to \varphi) \ \in \ \Gamma\,.$$

Для определённости, пусть $\Box(\Box\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Тогда $\Box\varphi \to \psi \in \Delta_1$. Из $\Box\varphi \in \Delta_1$ получаем $\psi \in \Delta_1$, что противоречит выбору ψ. В случае $\Box\,(\Box\psi \to \varphi) \in \Gamma$ приходим к противоречию, рассуждая по симметричной схеме.

Мы доказали, что каноническая шкала логики **S4.3** рефлексивна, транзитивна и слабо связна. Теперь доказательство сильной полноты завершается стандартным образом. $\Box$

Отметим ещё один простой, но важный факт. Бинарное отношение R на множестве W будем называть *универсальным*, если $R = W^2$.

Теорема 4.4.6. *Логика* **S5** *сильно полна относительно класса всех шкал с универсальным отношением достижимости (т. е. универсальных шкал).*

Доказательство. Мы уже знаем, что **S5** сильно полна относительно класса эквивалентностей. Отношение W^2 также является эквивалентностью, поэтому имеет место сильная корректность **S5** относительно универсальных шкал.

Предположим, что $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S5}} \varphi$. Пусть модель $\mu = \langle W, R, v\rangle$ и мир $w \in W$ таковы, что R — отношение эквивалентности и

$$\forall\psi \in \Gamma\ (\mu, w \vDash \psi) \quad \text{и} \quad \mu, w \nvDash \varphi\,.$$

Согласно лемме о порождённой подмодели (следствие 4.1.13) имеем

$$\forall\psi \in \Gamma\ \left(\mu^{w\uparrow^*}, w \vDash \psi\right) \quad \text{и} \quad \mu^{w\uparrow^*}, w \nvDash \varphi\,.$$

Осталось заметить, что $w\uparrow^* = [w]_R = \{u \mid wRu\}$ и $R \cap (w\uparrow^*)^2 = (w\uparrow^*)^2$. $\Box$

4.5. Метод фильтрации, свойство конечных моделей

Сейчас мы займемся адаптацией метода фильтраций для модальных логик. Пусть даны модель $\mu = \langle W, R, v\rangle$ языка $\mathcal{L}^m$, а также множество $\Phi \subseteq For_{\mathcal{L}^m}$, замкнутое относительно подформул. Как и ранее, определим на W отношение эквивалентности

$$x \equiv_\Phi y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varphi \in \Phi\,(\mu, x \vDash \varphi \ \Leftrightarrow\ \mu, y \vDash \varphi)\,,$$

где $\{x, y\} \subseteq W$. Далее, полагаем

$$W_{/\Phi} \ := \ \{[x]_\Phi \mid x \in W\}\,, \quad \text{где}\ [x]_\Phi := \{y \in W \mid x \equiv_\Phi y\}\,.$$

Зададим оценку $v_{/\Phi} : Prop \to 2^{W_{/\Phi}}$ следующим образом:

$$v_{/\Phi}\,(p) \ := \ \{[x]_\Phi \mid x \in v(p)\ \text{ и }\ p \in \Phi\}\,.$$

Отношение R' на множестве $W_{/\Phi}$ называется Φ-*фильтрацией отношения* R (*в модели* μ), если для всех $\{x, y\} \subseteq W$ выполнено:

(F1) $xRy \quad\Longrightarrow\quad [x]_\Phi R' [y]_\Phi$;

(F2) $[x]_\Phi R' [y]_\Phi \quad\Longrightarrow\quad \forall\varphi\,((\Box\varphi \in \Phi\ \text{ и }\ \mu, x \vDash \Box\varphi)\ \Rightarrow\ \mu, y \vDash \varphi)\,.$

Определение 4.5.1. Пусть $\mu = \langle W, R, v\rangle$ — модель (языка $\mathcal{L}^m$). Любую модель вида $\mu' = \langle W_{/\Phi}, R', v_{/\Phi}\rangle$, где R' является Φ-фильтрацией отношения R (в μ), будем называть Φ-*фильтрацией модели* μ.

Опять же ясно, что Ф-фильтрация отношения R определена неоднозначно. Рассмотрим несколько примеров фильтраций. Мы будем в дальнейшем опускать нижний индекс в обозначении $[x]_\Phi$, если это не приводит к недоразумениям.

1. *Наименьшая фильтрация* R^σ:
$$[x]R^\sigma[y] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x' \in [x]\, \exists y' \in [y]\, (x'Ry')\,.$$

2. *Наибольшая фильтрация* R^λ:
$$[x]R^\lambda[y] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varphi\, ((\Box\varphi \in \Phi \text{ и } \mu, x \vDash \Box\varphi) \;\Rightarrow\; \mu, y \vDash \varphi)\,.$$

3. *Транзитивная фильтрация* R^τ:
$$[x]R^\tau[y] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varphi\, ((\Box\varphi \in \Phi \text{ и } \mu, x \vDash \Box\varphi) \;\Rightarrow\; \mu, y \vDash \Box\varphi \wedge \varphi)\,.$$

Предложение 4.5.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Отношения R^σ и R^λ являются Ф-фильтрациями отношения R.*
2. *Если R' — произвольная Ф-фильтрация отношения R, то $R^\sigma \subseteq R' \subseteq R^\lambda$.*
3. *Отношение R^τ транзитивно и удовлетворяет условию (F2). Если к тому же само отношение R транзитивно, то R^τ — Ф-фильтрация отношения R.*
4. *Такие свойства отношения R, как рефлексивность, сериальность, слабая связность и слабая направленность, сохраняются при переходе к любой Ф-фильтрации.*

Доказательство. Оставляется в качестве упражнения читателю. □

Лемма 4.5.3 (О фильтрации). *Пусть $\mu = \langle W, R, v\rangle$ — модель (языка $\mathcal{L}^m$), Φ — множество $\mathcal{L}^m$-формул, замкнутое относительно подформул, а $\mu' = \langle W_{/\Phi}, R', v_{/\Phi}\rangle$ — некоторая Ф-фильтрация модели μ. Тогда для всех $\varphi \in \Phi$ и $x \in W$ будет верна эквивалентность*
$$\mu, x \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu', [x] \models \varphi\,.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по сложности формул. Базис индукции непосредственно следует из определения оценки v/Φ. Индукционный переход для случая немодальных связок тривиален ввиду того, что они ведут себя классически. Предположим, что эквивалентность
$$\mu, x \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu', [x] \vDash \varphi$$
установлена для некоторой $\varphi \in \Phi$ и любого мира $x \in W$. Теперь рассмотрим случай $\Box\varphi \in \Phi$ и (для всякого $x \in W$) докажем, что
$$\forall y \in W\, (xRy \;\Rightarrow\; \mu, y \vDash \varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in W\, ([x]R[y] \;\Rightarrow\; \mu', [y] \vDash \varphi)\,.$$

Допустим, выполнено условие слева, т. е. $\mu, x \vDash \Box\varphi$. Тогда, если $[x]R[y]$, то ввиду свойства (F2) из $\mu, x \vDash \Box\varphi$ следует $\mu, y \vDash \varphi$, откуда по индукционному предположению заключаем $\mu', [y] \vDash \varphi$.

Напротив, допустим, что $\mu', [x] \vDash \varphi$, т. е. выполнено условие справа. Если xRy, то $[x]R[y]$ по свойству (F1), поэтому $\mu', [y] \vDash \varphi$, откуда по индукционному предположению имеем $\mu, y \vDash \varphi$. □

Упражнение 4.5.4. *Пусть Φ — множество $\mathcal{L}^m$-формул, замкнутое относительно подформул, а Φ^b — булево замыкание множества Φ, т. е. замыкание Φ относительно лишь немодальных связок. Докажите, что в такой ситуации лемма о фильтрации будет верна для всех формул из Φ^b.*

Теорема 4.5.5. *Логика* $\mathbf{K}$ *слабо полна относительно класса конечных (модальных) шкал.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{K}$, то по теореме о корректности (теорема 4.1.7) формула φ истинна в любой шкале и, в частности, во всех конечных шкалах.

Если $\varphi \notin \mathbf{K}$, то найдутся модель $\mu = \langle W, R, v\rangle$ и мир $x \in W$ такие, что $\mu, x \not\models \varphi$. Возьмём в качестве Φ множество всех подформул формулы φ и рассмотрим произвольную Φ-фильтрацию $\mu' = \langle W_{/\Phi}, R', v_{/\Phi}\rangle$ модели μ. По лемме о фильтрации, $\mu', [x] \not\models \varphi$. Из конечности множества Φ легко следует конечность множества $W_{/\Phi}$: действительно, $\left|W_{/\Phi}\right| \leq 2^{|W|}$. Мы доказали, таким образом, что любая $\mathcal{L}^m$-формула $\varphi \notin \mathbf{K}$ опровергается на некоторой конечной шкале. □

Тем самым, логика $\mathbf{K}$ финитно аппроксимируема и по теореме Харропа получаем

Следствие 4.5.6. *Логика* $\mathbf{K}$ *разрешима.*

Упражнение 4.5.7. *Для каких ещё расширений логики* $\mathbf{K}$ *можно доказать финитную аппроксимируемость и разрешимость с помощью леммы о фильтрации и предложения 4.5.2?*

Ранее мы установили, что логика $\mathbf{K}$ полна относительно класса конечных шкал Крипке. Покажем, что логика $\mathbf{K}$ не является сильно полной относительно этого класса шкал. Пусть

$$\mathcal{K}_{fin} \;:=\; \{\langle W, R\rangle \mid W \text{ — конечно}\}\,.$$

Предложение 4.5.8. $\vdash_{\mathbf{K}} \neq \models_{\mathcal{K}_{fin}}$.

Доказательство. Мы построим множество формул Γ и формулу φ такие, что $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} \varphi$, но при этом $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$. Множество Γ должно быть бесконечным. Действительно, предположим, что $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ и $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$, тогда по теореме дедукции

$$(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi \;\notin\; \mathbf{K}\,.$$

В силу полноты логики $\mathbf{K}$ относительно класса конечных шкал найдутся конечная шкала $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, модель $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ и мир $x \in W$ такие, что

$$\mu, x \not\models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi\,,$$

т. е. $\mu, x \models \psi_i$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\mu, x \not\models \varphi$. Последнее доказывает, что $\Gamma \not\models_{\mathcal{K}_{fin}} \varphi$.

Рассмотрим множество формул

$$\Gamma \;:=\; \{\Box\,(p_i \leftrightarrow p_j) \to p_0 \mid i \neq j,\; i, j > 0\}$$

и покажем, что $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$. Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle \in \mathcal{K}_{fin}$ и $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. Множество 2^W конечно, поэтому найдутся такие i и j, что $i \neq j$ и $v\,(p_i) = v\,(p_j)$. Тогда для любого $x \in W$ выполнено $\mu, x \models p_i \leftrightarrow p_j$. Следовательно, для любого $x \in W$ верно

$$\mu, x \models \Box\,(p_i \leftrightarrow p_j)\,.$$

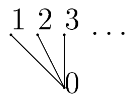
Если $x \notin v(p_0)$, то $\mu, x \nvDash \Box(p_i \leftrightarrow p_j) \to p_0$. Поэтому $\mu, x \nvDash \Gamma$ и импликация

$$\mu, x \vDash \Gamma \;\Rightarrow\; \mu, x \vDash p_0 \qquad (\star)$$

верна. Если же $x \in v(p_0)$, то $\mu, x \vDash p_0$, и импликация $(\star)$ верна тривиальным образом.

Мы доказали, что $\Gamma \vDash_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$. Покажем, что $\Gamma \nvDash_{\mathbf{K}} p_0$. Ввиду сильной полноты $\mathbf{K}$ относительно класса всех шкал достаточно найти модель $\mu = \langle W, R, v\rangle$ и $x \in W$ такие, что $\mu, x \vDash \Gamma$, но при этом $x \notin v(p_0)$.

Пусть $W := \omega$; $R := \{(0, i) \mid i > 0\}$; $v(p_0) := \varnothing$, $v(p_i) := \{i\}$ для $i > 0$. Отношение R представлено на следующей диаграмме:



Очевидно, что для любых i и j, если $i \neq j$, то $\mu, 0 \nvDash \Box(p_i \leftrightarrow p_j)$. Следовательно, $\mu, 0 \vdash \Box(p_i \leftrightarrow p_j) \to p_0$ при $i \neq j$, т. е. $\mu, 0 \vDash \Gamma$. При этом по определению $\mu, 0 \nvDash p_0$. $\Box$

4.6. Логика доказуемости GL

Логикой Гёделя – Лёба будем называть введённую ранее нормальную модальную логику $\mathbf{GL}$ (из списка 3). В силу определения $\mathbf{GL} = \mathbf{KW}$. Кроме того, нами было отмеченно равенство $\mathbf{KW} = \mathbf{K4W}$, которое сразу же вытекает из следующего предложения.

Предложение 4.6.1. $\mathbf{GL} \vDash \Box p \to \Box\Box p$.

Доказательство. Вот квазивывод аксиомы **4** в логике **KW**:

1) $(\Box\Box p \wedge \Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)$ — классическая тавтология;

2) $(\Box\Box p \wedge \Box p) \to (p \to (\Box p \wedge p))$ — экспорт посылки;

3) $\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box\Box p \wedge \Box p)$ — частный случай аксиомы $\Box 1$;

4) $\Box(\Box p \wedge p) \to (p \to (\Box p \wedge p))$ — по транзитивности имликации из 3 и 2;

5) $p \to (\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p))$ — перестановка посылок в 4;

6) $\Box p \to \Box(\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p))$ — сначала применяем правило RM к 5, а затем пользуемся аксиомой Крипке;

7) $\Box(\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)) \to \Box(\Box p \wedge p)$ — частный случай $\mathbf{W}$;

8) $\Box p \to \Box(\Box p \wedge p)$ — по транзитивности импликации из 6 и 7;

9) $(\Box p \wedge p) \to \Box p$ — классическая тавтология;

10) $\Box(\Box p \wedge p) \to \Box\Box p$ — сначала применяем правило RM к 9, а затем пользуемся аксиомой Крипке;

11) $\Box p \to \Box\Box p$ — по транзитивности импликации из 8 и 10.

$\Box$

Теперь постараемся объяснить, почему логика **GL** называется *логикой доказуемости* (англ. *provability logic*). Для этого нам понадобится экскурс в формальную арифметику. Напомним, что *арифметика Пеано* — это теория **PA** первого порядка (с равенством) в сигнатуре $\sigma := \{0^0, s^1, +^2, \cdot^2\}$, заданная аксиомами

Q1. $\forall x\,(s\,(x) \neq 0)$,

Q2. $\forall x\,\forall y\,(s\,(x) = s\,(y) \to x = y)$,

Q3. $\forall x\,(x \neq 0 \to \exists y\,(x = s\,(y)))$,

Q4. $\forall x\,(x + 0 = x)$,

Q5. $\forall x\,\forall y\,(x + s\,(y) = s\,(x + y))$,

Q6. $\forall x\,(x \cdot 0 = 0)$,

Q7. $\forall x\,\forall y\,(x \cdot s\,(y) = x \cdot y + x)$

вместе со схемой аксиом индукции

Ind. $(\varphi\,(0) \wedge \forall x\,(\varphi\,(x) \to \varphi\,(s\,(x)))) \to \forall x\,\varphi\,(x)$ для всех σ-формул φ.

Пусть $\gamma : \mathrm{Term}_\sigma \cup \mathrm{For}_\sigma \to \omega$ — гёделевская нумерация термов и формул сигнатуры арифметики **PA**. Термы вида

$$\bar{n} \ := \ \underbrace{s\ldots s}_{n \text{ раз}}(0)$$

будем называть *нумералами*. Введём обозначения

$$\ulcorner t \urcorner \ := \ \overline{\gamma\,(t)} \quad \text{и} \quad \ulcorner \varphi \urcorner \ := \ \overline{\gamma\,(\varphi)}\,;$$

иными словами, $\ulcorner t \urcorner$ и $\ulcorner \varphi \urcorner$ — это нумералы, представляющие гёделевские номера терма t и формулы φ соответственно.

Из курса логики известно, что можно выписать арифметическую формулу

$$\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}\,(x, y)\,,$$

означающую (интуитивно), что "x есть гёделевский номер доказательства формулы с гёделевским номером y". При этом если $\psi_0, \ldots, \psi_n = \varphi$ — доказательство в арифметике Пеано, то это можно установить в самой **PA**, т. е.

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}\,(\ulcorner(\psi_0, \ldots, \psi_n)\urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner)\,. \tag{$*$}$$

Если же число n не является гёделевским номером доказательства формулы φ, то

$$\mathbf{PA} \vdash \neg \mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}\,(\overline{n}, \ulcorner \varphi \urcorner)\,.$$

Запись $\ulcorner(\psi_0, \ldots, \psi_n)\urcorner$ подразумевает расширение гёделевской нумерации на конечные кортежи термов и формул. Обычно это делается следующим образом:

$$\gamma\,((\psi_0, \ldots, \psi_n)) \ := \ \mathrm{p}_0^{\gamma(\psi_0)+1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}_n^{\gamma(\psi_n)+1}\,, \quad \ulcorner(\psi_0, \ldots, \psi_n)\urcorner \ := \ \overline{\gamma\,((\psi_0, \ldots, \psi_n))}$$

(здесь p_i — i-е простое число). Далее, *предикат доказуемости* определяется как

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}\,(x) \ := \ \exists y\,\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}\,(y, x)\,.$$

Известно, что предикат доказуемости обладает следующими свойствами:

(L1) $\mathbf{PA} \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$;

(L2) $\mathbf{PA} \vdash (\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner)) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \psi \urcorner)$;

(L3) $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

Данные свойства называют ещё *условиями Лёба на предикат доказуемости.* Свойство (L1) немедленно следует из (∗). Для доказательства свойств (L2) и (L3) требуется значительно бóльший объем работы, чем тот, который необходим для доказательства представимости вычислимых функций в арифметике. Например, для доказательства (L2) необходимо доказать в **PA** следующую формулу со свободными переменными:

$$(\mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(x, \ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(y, \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner)) \to \mathrm{Prf}_{\mathbf{PA}}(x * y * \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner),$$

где $*$ — примитивно-рекурсивная функция, которая по гёделевским номерам кортежей формул строит гёделевский номер их конкатенации.

Ключевую роль в доказательстве теорем Гёделя о неполноте имеет так называемая *диагонализационная лемма.* В ней строится предложение, утверждающее (интуитивно) нечто о себе самом; предложения такого рода лежат в основе большинства логических парадоксов. Скажем, парадокс лжеца связан с предложением, утверждающим собственную ложность.

Для доказательства этой леммы нам понадобится *функция подстановки* $\mathrm{sub}(x, y)$ такая, что для любых σ-формулы $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x и натурального числа n справедливо равенство $\mathrm{sub}(\gamma(\varphi(x)), n) = \gamma(\varphi(\overline{n}))$ — это примитивно рекурсивная функция. Ввиду представимости вычислимых функций в арифметике Пеано существует σ-формула $\Phi_{\mathrm{sub}}(x, y, z)$ такая, что для любых σ-формулы $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x и натурального числа n справедливо

$$\mathbf{PA} \vdash \Phi_{\mathrm{sub}}(\ulcorner \varphi(x) \urcorner, \overline{n}, \ulcorner \varphi(\overline{n}) \urcorner).$$

В дальнейшем будем использовать запись вида $\Psi(\mathrm{sub}(x, y))$ в качестве сокращения для арифметической формулы $\exists z(\Psi(z) \wedge \Phi_{\mathrm{sub}}(x, y, z))$.

Лемма 4.6.2 (О диагонализации). *Для каждой σ-формулы $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x найдётся σ-предложение ψ такое, что*

$$\mathbf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

Доказательство. Рассмотрим “диагонализацию” для $\varphi(x)$, определяемую как

$$\theta(x) \; := \; \varphi(\mathrm{sub}(x, x)).$$

Далее, пусть $m := \gamma(\theta(x))$ и $\psi := \theta(\overline{m})$. Докажем, что ψ — требуемое предложение. В **PA** доказуема следующая цепочка эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \psi \leftrightarrow \theta(\overline{m}) \quad & \leftrightarrow \quad \varphi(\mathrm{sub}(\overline{m}, \overline{m})) \\ & \leftrightarrow \quad \varphi(\mathrm{sub}(\ulcorner \theta(x) \urcorner, \overline{m})) \text{ (так как } m = \gamma(\theta(x))) \\ & \leftrightarrow \quad \varphi(\ulcorner \theta(\overline{m}) \urcorner) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner). \end{aligned}$$

□

Теорема 4.6.3 (1-я теорема Гёделя о неполноте). *Пусть σ-предложение φ таково, что $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. Если теория* **PA** *непротиворечива, то $\mathbf{PA} \nvdash \varphi$.*

Доказательство. Предположим, $\mathbf{PA} \vdash \varphi$, тогда $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ по условию (L1). С другой стороны, $\mathbf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$, так как $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Получили, что **PA** противоречива. □

Предложение φ из формулировки данной теоремы утверждает собственную недоказуемость. При этом φ на самом деле недоказуемо в **PA**, поэтому (интуитивно) φ должно быть истинно в стандартной модели арифметики $\langle\omega; 0, s, +, \cdot\rangle$. И это действительно так, хотя формальное установление данного факта (например, в рамках теории множеств **ZFC**) требует дополнительных усилий. Таким образом, 1-я теорема о неполноте даёт пример истинного, но не доказуемого предложения.

Теорема 4.6.4 (2-я теорема Геделя о неполноте). *Пусть*

$$\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \;:=\; \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)\,,$$

где $\bot := 0 = s(0)$*. Если теория* **PA** *непротиворечива, то* $\mathbf{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Покажем, что $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$.

Из $\mathbf{PA} \vdash \bot \to \varphi$ по условию (L1) получаем $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot \to \varphi\urcorner)$. Откуда по (L2) следует $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Используя правило контрапозиции, приходим к $\mathbf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$. Согласно выбору φ, имеем $\mathbf{PA} \vdash \varphi \to \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. В итоге $\mathbf{PA} \vdash \varphi \to \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$, т. е.

$$\mathbf{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}\,.$$

Докажем обратную импликацию. Учитывая выбор φ, по контрапозиции получаем $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\varphi$, откуда $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\varphi\urcorner)$ по (L1), а значит, $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$ по (L2). Далее, согласно (L3), $\mathbf{PA} \vdash Pr_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to Pr_{\mathbf{PA}}(\ulcorner Pr_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$. Таким образом, $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$, т. е. имеет место $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi \to \bot\urcorner)$. Затем, воспользовавшись классической тавтологией $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$, приходим к

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to (\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi \to \bot\urcorner))\,.$$

С другой стороны, по (L2) имеем

$$\mathbf{PA} \vdash (\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi \to \bot\urcorner)) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)\,.$$

Отсюда по транзитивности получаем $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$. Наконец, ещё раз воспользуемся контрапозицией: $\mathbf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$, т. е.

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\,,$$

откуда, в силу определения φ, имеем

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \to \varphi\,.$$

Теперь невыводимость $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ следует из невыводимости формулы φ (т. е. из 1-й теоремы Гёделя). □

Настало время обратить внимание на аналогию между условиями Лёба и аксиомами и правилами модальной логики. Здесь (L1) соответствует правилу нормализации RN, (L2) — модальной аксиоме K, а (L3) — аксиоме **4**. Более того, доказательство 2-й теоремы о неполноте в сущности представляет собой вывод в логике **K4**.

Откуда же появится аналог аксиомы **W**? Дело в том, что нам известны ещё не все модальные свойства предиката доказуемости в арифметике Пеано. "Недостающее" свойство было открыто М. Лёбом (M. Löb) в результате поиска ответа на вопрос, поставленный в 1952 г. Л. Генкином (L. Henkin):

«Что можно сказать о предложениях, которые эквивалентны
утверждению о своей собственной доказуемости?»

В 1955 г. Лёб установил, что это в точности доказуемые в **PA** предложения.

Теорема 4.6.5 (Лёба). *Для любого σ-предложения φ выполнено*

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{PA} \vdash \varphi\,.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$. Применим лемму о диагонализации к формуле $\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(x) \to \varphi$. Пусть σ-предложение ψ таково, что

$$\mathbf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi)\,.$$

Воспользовавшись условиями (L1) и (L2), получаем

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi\urcorner)\,.$$

Применим (L2) ещё раз:

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to (\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner))\,.$$

С другой стороны, по (L3) имеем $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$. Следовательно, $\mathbf{PA} \vdash Pr_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to Pr_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Согласно исходному предположению, имеем $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, откуда $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to \varphi$. Отсюда, исходя из выбора ψ, получаем $\mathbf{PA} \vdash \psi$. Значит, $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner)$ по (L1). В итоге $\mathbf{PA} \vdash \varphi$.

Обратная же импликация очевидна. □

Заметим, что 2-я теорема о неполноте — это частный случай теоремы Лёба:

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner) \to \bot \ \ (\leftrightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{PA} \vdash \bot\,.$$

Формализация доказательства теоремы Лёба внутри **PA** (т. е. его "арифметизация") приводит к следующему утверждению, которое мы оставляем без доказательства.

Теорема 4.6.6 (Формализованная теорема Лёба). *Для всех σ-предложений φ верно*

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\,.$$

Вышеуказанная схема формул даёт, по сути, ещё одно условие на предикат доказуемости, соответствующее, разумеется, модальной аксиоме **W**. Оказывается, мы перечислили все существенные свойства предиката доказуемости (точный смысл этого утверждения даётся следующей теоремой).

Определение 4.6.7. Отображение $f : For_{\mathcal{L}^m} \to \mathrm{For}_\sigma$ назовём *реализацией*, если выполнены следующие условия:

1) $f(p)$ есть σ-предложение, при всех $p \in Prop$;

2) $f(\neg\varphi) = f(\varphi) \to \bot$;

3) $f(\varphi * \psi) = f(\varphi) * f(\psi)$, при $* \in \{\vee, \wedge, \to\}$;

4) $f(\Box\varphi) = \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner f(\varphi) \urcorner)$.

Теорема 4.6.8 (R. Solovay, 1976). *Для любой $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$ имеет место эквивалентность*

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff \mathbf{PA} \vdash f(\varphi) \text{ для любой реализации } f.$$

Таким образом, логика Гёделя – Лёба **GL** в некотором смысле полностью описывает модальные свойства предиката доказуемости в арифметике Пеано (относительно введённого понятия реализации).

4.7. Нётеровы шкалы, неканоничность логики GL

Выше мы убедились, что оператор необходимости в логике **GL** имеет строгую математическую интерпретацию, которая чрезвычайно важна для оснований математики. Сейчас мы займёмся изучением свойств логики **GL**. Сначала посмотрим, какой класс шкал выделяет аксиома $\mathbf{W} = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

Шкала $\langle W, R\rangle$ называется *нётеровой*, если она не содержит бесконечных возрастающих R-цепей, т. е. не существует бесконечной последовательности $x_0, x_1, \ldots$ элементов множества W такой, что $x_i R x_{i+1}$ для всех i. Отметим, что элементы последовательности $x_0, x_1, \ldots$ не должны быть различными. Поэтому шкала $\langle W, R\rangle$, содержащая рефлексивную точку x_0 ($x_0 R x_0$), не является нётеровой, ибо точка x_0 порождает бесконечную цепь $x_0 R x_0 R x_0 \ldots$.

Шкала $\langle W, R\rangle$ называется *строгим порядком*, если отношение R иррефлексивно и транзитивно.

Предложение 4.7.1. *Для любой шкалы $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ справедлива эквивалентность*

$$\mathcal{F} \models \mathbf{W} \iff \mathcal{F} \text{ — нётеров строгий порядок}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — нётеров строгий порядок и $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. Допустим, что $\mu, x_0 \not\models \mathbf{W}$ для некоторого $x_0 \in W$. Тогда $\mu, x_0 \models \Box(\Box p \to p)$ и $\mu, x_0 \not\models \Box p$. Следовательно, найдётся $x_1 \in W$, для которого $x_0 R x_1$ и $\mu, x_1 \not\models p$. Но при этом $\mu, x_1 \models \Box p \to p$, поэтому $\mu, x_1 \not\models \Box p$ и существует $x_2 \in W$ такой, что $x_1 R x_2$ и $\mu, x_2 \not\models p$. Ввиду транзитивности отношения R имеем $x_0 R x_2$, откуда $\mu, x_2 \models \Box p \to p$ и $\mu, x_2 \not\models \Box p$. Продолжая в том же духе, мы получим бесконечную возрастающую цепь, что противоречит нётеровости шкалы $\mathcal{F}$. Таким образом, $\mathcal{F} \models \mathbf{W}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{F}$ не является нётеровым строгим порядком, и покажем, что в этом случае $\mathcal{F} \not\models \mathbf{W}$. Рассмотрим следующие случаи.

а) $\mathcal{F}$ — строгий порядок, содержащий бесконечную возрастающую цепь $x_0 R x_1 R x_2 \ldots$ Положим $C := \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ и рассмотрим модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v\rangle$, где $v(p) := W \setminus C$.

Очевидно, $\mu, x_0 \nvDash \Box p$. Покажем, что $\mu, x_0 \vDash \Box(\Box p \to p)$. Действительно, если $x_0 R y$ и $y \notin C$, то $\mu, y \vDash p$ и, тем самым, $\mu, y \vDash \Box p \to p$. Если же $x_0 R y$ и $y \in C$, то для некоторого $i \in \omega$ имеем $y = x_i$ и $x_i R x_{i+1}$. Следовательно, $\mu, y \nvDash \Box p$ и $\mu, y \vDash \Box p \to p$.

б) Шкала $\mathcal{F}$ содержит рефлексивную точку x_0. Эта точка порождает бесконечную возрастающую цепь $x_0 R x_0 R x_0 \ldots$ и мы можем рассуждать так же, как и в предшествующем случае.

в) Шкала $\mathcal{F}$ не транзитивна. Пусть $\{x, y, z\} \subseteq W$ таковы, что xRy и yRz, но неверно xRz. Рассмотрим модель $\mu := \langle \mathcal{F}, v \rangle$, где $v(p) := W \setminus \{y, z\}$. Ясно, что $\mu, x \nvDash \Box p$. Покажем, что $\mu, x \vDash \Box(\Box p \to p)$. Если xRt и $t \notin \{y, z\}$, то $\mu, t \vDash p$ и, тем самым, $\mu, t \vDash \Box p \to p$. В то же время xRy и $\mu, y \nvDash \Box p$, так как yRz. Поэтому $\mu, y \vDash \Box p \to p$. Поскольку элемент z недостижим из x, мы получили $\mu, x \vDash \Box(\Box p \to p)$. $\Box$

Заметим, что класс нётеровых строгих порядков не аксиоматизируем в логике первого порядка. Пусть T — элементарная теория нётеровых строгих порядков, т. е. множество всех предложений сигнатуры $\{R^2\}$ языка логики предикатов с равенством, которые истинны во всех нётеровых строгих порядках. Покажем, что теория T имеет модель, которая не является нётеровым строгим порядком. Рассмотрим множество формул

$$\Sigma \ := \ T \cup \{R(x_i, x_{i+1}) \mid i \in \omega\}.$$

Множество формул Σ локально совместно. Действительно, любое конечное подмножество Σ содержится в множестве формул вида

$$\Sigma_n \ := \ T \cup \{R(x_i, x_{i+1}) \mid i < n\}$$

для некоторого достаточно большого $n \in \omega$, а это множество формул выполнимо в любом нётеровом строгом порядке, содержащем возрастающую цепь длины $n+1$. Следовательно, по теореме компактности Гёделя – Мальцева множество формул Σ выполнимо. Если $\mathfrak{M} \vDash \Sigma[\gamma]$, то значения $\gamma(x_i)$ переменных x_i образуют бесконечную возрастающую цепь относительно интерпретации предиката R в модели $\mathfrak{M}$. Стало быть, $\mathfrak{M} \vDash T$, но при этом модель $\mathfrak{M}$ не является нётеровым строгим порядком.

Таким образом, у нас есть пример свойства бинарных отношений, которое выразимо в модальном языке, но не выразимо в логике первого порядка.

Предложение 4.7.2. *Логика* $\mathbf{GL}$ *не каноническая.*

Доказательство. Итак, требуется показать, что $\langle W^{\mathbf{GL}}, R^{\mathbf{GL}} \rangle \nvDash \mathbf{GL}$, где $\langle W^{\mathbf{GL}}, R^{\mathbf{GL}} \rangle$ — каноническая $\mathbf{GL}$-шкала. Поскольку $\mathbf{GL} = \mathbf{KW}$ и все формулы логики $\mathbf{K}$ истинны в любой шкале, нам нужно доказать, что $\langle W^{\mathbf{GL}}, R^{\mathbf{GL}} \rangle \nvDash \mathbf{W}$, т. е. каноническая $\mathbf{GL}$ шкала не является нётеровым строгим порядком. Покажем, что шкала $\langle W^{\mathbf{GL}}, R^{\mathbf{GL}} \rangle$ содержит рефлексивную точку.

Рассмотрим множество формул

$$\Gamma_0 \ := \ \{\neg\Box\varphi \mid \varphi \notin \mathbf{GL}\}.$$

Допустим, Γ_0 непротиворечиво. Тогда по лемме о расширении найдётся $\Gamma \in W^{\mathbf{GL}}$ такая, что $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Проверим, что $\Gamma R^{\mathbf{GL}} \Gamma$, т. е. $\Gamma_\Box \subseteq \Gamma$. Пусть $\varphi \notin \Gamma$, в частности, $\varphi \notin \mathbf{GL}$. Тогда $\neg\Box\varphi \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Поскольку теория Γ непротиворечива, получаем $\Box\varphi \notin \Gamma$.

Остаётся установить непротиворечивость множества Γ_0. Предположим, что формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ таковы, что $\varphi_i \notin \mathbf{GL}$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$, но при этом

$$\neg\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\varphi_n \vdash_{\mathbf{GL}} \bot, \quad \text{т. е. } \neg(\neg\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\varphi_n) \in \mathbf{GL}.$$

По лемме о расширении для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдётся простая теория $\Gamma_i \in W^{\mathbf{GL}}$ такая, что $\varphi_i \notin \Gamma_i$. По лемме о канонической модели,

$$\mu^{\mathbf{GL}}, \Gamma_i \nvDash \varphi_i \quad \text{для любого } \ i \in \{1, \ldots, n\} .$$

Рассмотрим порождённые подмодели $\mu_i := \left(\mu^{\mathbf{GL}}\right)^{\Gamma_i \uparrow^*}$, тогда согласно лемме о порождённой подмодели

$$\mu_i, \Gamma_i \nvDash \varphi_i \quad \text{для любого } \ i \in \{1, \ldots, n\} .$$

Пусть $\mu_i = \langle W_i, R_i, v_i \rangle$. Построим новую модель $\mu = \langle W, R, v \rangle$, где

$$\begin{array}{lcl} W & := & W_1 \cup \ldots \cup W_n \cup \{\infty\} , \\ R & := & R_1 \cup \ldots \cup R_n \cup \{(\infty, x) \mid x \in W, \, x \neq \infty\} , \\ v\,(p) & := & v_1\,(p) \cup \ldots \cup v_n\,(p) . \end{array}$$

Проверим, что $\mu \vDash \mathbf{GL}$. Для этого достаточно показать, что для любого мира $x \in W$ и любой формулы φ выполнено

$$\mu, x \vDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi .$$

Каждая из моделей μ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, является, с одной стороны, порождённой подмоделью канонической **GL**-модели, с другой стороны, μ_i — порождённая подмодель в μ. Поэтому $\mu, x \vDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ выполнено при всех $x \in W_1 \cup \ldots \cup W_n$. Остается проверить, что

$$\mu, \infty \vDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi .$$

Допустим, что $\mu, \infty \vDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi)$ и $\mu, \infty \nvDash \Box\varphi$. Тогда найдутся $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $x \in W_i$, для которых $\mu, x \nvDash \varphi$. Но при этом $\mu, x \vDash \Box\varphi \to \varphi$ ввиду $\infty R x$. Следовательно, $\mu, x \nvDash \Box\varphi$.

С другой стороны, для любого $y \in W_i$ выполнено $\infty R y$. Поэтому $\mu, y \vDash \Box\varphi \to \varphi$ для всех $y \in W_i$, откуда $\mu, x \vDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi)$. Получаем $\mu, x \nvDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$, т. е. $\mu_i, x \nvDash \Box\,(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$, чего быть не может, так как μ_i есть порождённая подмодель модели $\mu^{\mathbf{GL}}$. Следовательно, $\mu \models \mathbf{GL}$ и, в частности,

$$\mu \vDash \neg\,(\neg\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\varphi_n) .$$

Однако из $\mu_i \nvDash \varphi_i$ (здесь $i \in \{1, \ldots, n\}$) следует

$$\mu \vDash_\infty \neg\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\varphi_n.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\neg\,(\neg\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box\varphi_n) \notin \mathbf{GL}$. Следовательно, множество формул Γ_0 действительно непротиворечиво. $\Box$

Ввиду условия (F1) из определения фильтрации любая фильтрация канонической **GL**-модели будет содержать рефлексивную точку, т. е. не будет моделью логики **GL**. Таким образом, с помощью метода фильтраций мы не сможем доказать полноту логики **GL** относительно класса нётеровых строгих порядков.

4.8. Системы Хинтикки

Пару (Γ, Δ), где $\Gamma, \Delta \subseteq For_{\mathcal{L}^m}$, будем называть (*семантической*) *таблицей*. Такая таблица (Γ, Δ) называется *дизъюнктной*, если $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ и для любой $\mathcal{L}^m$-формулы φ выполнено $\{\varphi, \neg\varphi\} \nsubseteq \Gamma$ и $\{\varphi, \neg\varphi\} \nsubseteq \Delta$.

Определение 4.8.1. Таблица (Γ, Δ) называется *насыщенной*, если для любых формул $\{\psi, \chi\} \subseteq For_{\mathcal{L}^m}$ выполнены следующие условия:

(S1) $\psi \wedge \chi \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \psi \in \Gamma$ и $\chi \in \Gamma$;

(S2) $\psi \vee \chi \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \psi \in \Gamma$ или $\chi \in \Gamma$;

(S3) $\psi \to \chi \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \psi \in \Delta$ или $\chi \in \Gamma$;

(S4) $\psi \wedge \chi \in \Delta \quad \Longrightarrow \quad \psi \in \Delta$ или $\chi \in \Delta$;

(S5) $\psi \vee \chi \in \Delta \quad \Longrightarrow \quad \psi \in \Delta$ и $\chi \in \Delta$;

(S6) $\psi \to \chi \in \Delta \quad \Longrightarrow \quad \psi \in \Gamma$ и $\chi \in \Delta$.

Говорим, что таблица $t = (\Gamma, \Delta)$ есть *расширение* таблицы $t' = (\Gamma', \Delta')$ (t' есть *подтаблица* таблицы t), и пишем $t' \leq t$, если $\Gamma' \subseteq \Gamma$ и $\Delta' \subseteq \Delta$.

Таблица $t = (\Gamma, \Delta)$ *реализуется в мире x модели $\mu = \langle W, R, v \rangle$*, если $\mu, x \vDash \varphi$ для всех $\varphi \in \Gamma$ и $\mu, x \nvDash \psi$ для всех $\psi \in \Delta$. Таблица t *реализуема в логике* $\mathbf{K}$, если она реализуется в некотором мире некоторой модели.

Определение 4.8.2. *Системой Хинтикки для логики* $\mathbf{K}$ называется пара $\mathcal{H} = (T, S)$, где T — непустое множество дизъюнктных насыщенных таблиц, $S \subseteq T \times T$ и выполнены следующие два условия:

(HS1) если $\{(\Gamma, \Delta), (\Gamma', \Delta')\} \subseteq T$ и $(\Gamma, \Delta)\, S\, (\Gamma', \Delta')$, то $\varphi \in \Gamma'$ для всех $\Box\varphi \in \Gamma$;

(HS2) если $(\Gamma, \Delta) \in T$ и $\Box\varphi \in \Delta$, то найдётся $(\Gamma', \Delta') \in T$ такая, что $(\Gamma, \Delta)\, S\, (\Gamma', \Delta')$ и $\varphi \in \Delta'$.

Говорим, что $\mathcal{H} = (T, S)$ — *система Хинтикки для таблицы* t, если $t \leq t'$ для некоторой таблицы $t' \in T$.

Предложение 4.8.3. *Таблица t реализуема в* $\mathbf{K}$*, если и только если существует система Хинтикки для t.*

Доказательство. Предположим, что таблица t реализуется в мире x_0 модели $\mu = \langle W, R, v \rangle$. Построим систему Хинтикки для t.

Каждому миру $x \in W$ сопоставим таблицу

$$t_x \ := \ (\{\varphi \mid \mu, x \vDash \varphi\}, \{\psi \mid \mu, x \nvDash \psi\}).$$

Очевидно, t_x — дизъюнктная насыщенная таблица, причём $t \leq t_{x_0}$.

Рассмотрим пару $\mathcal{H} = (T, S)$, где $T := \{t_x \mid x \in W\}$ и $t_x S t_y \Leftrightarrow xRy$. Не составляет труда проверить, что $\mathcal{H}$ — система Хинтикки. Из $t \leq t_{x_0}$ следует, что $\mathcal{H}$ — система Хинтикки для t.

Докажем обратную импликацию. Пусть $\mathcal{H} = (T, S)$ — система Хинтикки для t. Рассмотрим модель $\mu := \langle W, R, v \rangle$, где $W := T$, $S := R$ и

$$v(p) \ := \ \{(\Gamma, \Delta) \in T \mid p \in \Gamma\} \quad \text{для любой } p \in Prop.$$

Лемма 4.8.4. *Для любых* $t = (\Gamma, \Delta) \in T$ *и* $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$ *верны импликации:*

$$\begin{aligned} \varphi \in \Gamma &\quad\Longrightarrow\quad \mu, t \vDash \varphi\,; \\ \varphi \in \Delta &\quad\Longrightarrow\quad \mu, t \nvDash \varphi\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Если $p \in \Gamma$, то $\mu \vDash_t p$ по определению оценки v. Если $p \in \Delta$, то $p \notin \Gamma$, так как таблица t дизъюнктна. Опять по определению оценки v получаем $\mu, t \nvDash p$.

Индукционный переход для немодальных связок легко следует из определения насыщенной таблицы.

Предположим, что заключение леммы верно для $\mathcal{L}^m$-формулы φ и всех таблиц $t \in T$.

Если $\Box\varphi \in \Gamma$, то по условию (HS1) для каждой таблицы $t' = (\Gamma', \Delta') \in T$ из tSt' следует $\varphi \in \Gamma'$. С учетом индукционного предположения это означает, что для любой $t' \in W$ из tRt' вытекает $\mu, t' \vDash \varphi$, т. е. $\mu, t \vDash \Box\varphi$.

Если же $\Box\varphi \in \Delta$, то по условию (HS2) найдётся таблица $t' = (\Gamma', \Delta') \in T$, для которой tSt' и $\varphi \in \Delta'$. Отсюда, в силу индукционного предположения, имеем $t' \in W$ такую, что tRt' и $\mu, t' \nvDash \varphi$, а значит, $\mu, t \nvDash \Box\varphi$. □

Из данной леммы немедленно следует, что таблица t реализуется в мире t' модели μ, где $t' \in T$ и $t \leq t'$. □

Следствие 4.8.5. *Конечная таблица* $t = (\Gamma, \Delta)$ *реализуема в* **K***, если и только если существует система Хинтикки для* t*, содержащая не более* $2^{|\Sigma|}$ *конечных таблиц, где* Σ *— множество всех подформул формул из* t*.*

Доказательство. Пусть таблица t реализуема в мире x_0 модели $\mu = \langle W, R, v\rangle$. Построим систему Хинтикки для t, содержащую не более $2^{|\Sigma|}$ таблиц.

Каждому $x \in W$ сопоставим таблицу $t_x := (\Gamma_x, \Delta_x)$, где

$$\Gamma_x \;:=\; \{\varphi \in \Sigma \mid \mu, x \vDash \varphi\}\,, \quad \Delta_x \;:=\; \{\psi \in \Sigma \mid \mu, x \nvDash \psi\}\,.$$

Очевидно, t_x — дизъюнктная насыщенная таблица.

Рассмотрим пару $\mathcal{H} := (T, S)$, где $T := \{t_x b \mid x \in W\}$, а отношение S задано на T посредством следующей эквивалентности:

$$t_x S t_y \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, \Box\varphi \in \Sigma\,(\Box\varphi \in \Gamma_x \;\Rightarrow\; \varphi \in \Gamma_y)\,.$$

Ясно, что $|T| \leq 2^{|\Sigma|}$ и $t \leq t_{x_0}$. Проверим, что $\mathcal{H} = (T, S)$ — система Хинтикки. Условие (HS1) выполнено по определению отношения S. Проверим условие (HS2).

Пусть $t_x = (\Gamma_x, \Delta_x) \in T$ и $\Box\varphi \in \Delta_x$. Тогда $\mu, x \nvDash \Box\varphi$. Следовательно, найдётся $y \in W$ такой, что xRy и $\mu, y \nvDash \varphi$. Из $\Box\varphi \in \Delta_x$ вытекает $\Box\varphi \in \Sigma$, поэтому $\varphi \in \Sigma$. Значит, $\varphi \in \Delta_y$. Осталось заметить, что xRy влечёт $t_x S t_y$. □

Отметим, что из данного следствия также вытекает разрешимость логики **K**.

4.9. Слабая полнота и отсутствие сильной полноты для GL

Нашей ближайшей целью является доказательство слабой полноты логики **GL** относительно класса конечных строгих порядков. Легко понять, этот класс попросту совпадает с классом всех конечных нётеровых строгих порядков. Сначала мы докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4.9.1. *Пусть модель $\mu = \langle W, R, v\rangle$, мир $x \in W$ и $\mathcal{L}^m$-формула φ таковы, что $\mu \vDash \mathbf{GL}$ и $\mu, x \nvDash \Box\varphi$. Тогда найдётся иррефлексивный мир $y \in W$ такой, что xRy, $\mu, y \nvDash \varphi$ и $\mu, y \vDash \Box\varphi$.*

Доказательство. Поскольку $\mu \vDash \mathbf{GL}$, то выполнено $\mu, x \vDash \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$. Поэтому $\mu, x \nvDash \Box(\Box\varphi \to \varphi)$. Следовательно, существует $y \in W$ такой, что xRy и $\mu, y \nvDash \Box\varphi \to \varphi$, т. е. $\mu, y \vDash \Box\varphi$ и $\mu, y \nvDash \varphi$. Если бы yRy, то имели бы $\mu, y \nvDash \Box\varphi$. Значит, мир y иррефлексивен. □

Заметим, лемма установлена для моделей над произвольными шкалами. Теперь приступим к доказательству теоремы полноты для логики Гёделя – Лёба.

Теорема 4.9.2. *Логика* **GL** *(слабо) полна относительно класса всех конечных строгих порядков.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{GL}$, то по предложению 4.7.1 эта формула истинна на любом нётеровом строгом порядке, в частности, на любом конечном строгом порядке.

Пусть теперь $\mathcal{L}^m$-формула φ не лежит в **GL**. Рассмотрим каноническую **GL**-модель

$$\mu^{\mathbf{GL}} = \langle W^{\mathbf{GL}}, R^{\mathbf{GL}}, v^{\mathbf{GL}}\rangle$$

Из $\mathbf{4} \in \mathbf{GL}$ и теоремы 4.4.1 следует, что отношение $R^{\mathbf{GL}}$ транзитивно.

Формула φ должна опровергаться в некотором мире канонической модели: $\mu^{\mathbf{GL}}, x \nvDash \varphi$. Если мир x рефлексивен, то, очевидно, $\mu^{\mathbf{GL}}, x \nvDash \Box\varphi$. Поэтому, согласно лемме 4.9.1, найдётся иррефлексивная точка x_0 такая, что $xR^{\mathbf{GL}}x_0$, $\mu^{\mathbf{GL}}, x_0 \nvDash \varphi$ и $\mu^{\mathbf{GL}}, x_0 \vDash \Box\varphi$. Точка x_0 — начальная точка конечного строгого порядка $\mathcal{V} = \langle V, S\rangle$, который мы далее будем строить по шагам.

Пусть Σ — множество всех подформул формулы φ. Полагаем

$$V_0 \;:=\; \{x_0\} \quad \text{и} \quad \theta_{x_0} \;:=\; \left\{\Box\psi \in \Sigma \mid \mu^{\mathbf{GL}}, x_0 \nvDash \Box\psi\right\}.$$

Заметим, что если $\theta_{x_0} = \varnothing$, то пара $\langle \{t_{x_0}\}, \varnothing\rangle$, где

$$t_{x_0} \;:=\; \left(\left\{\psi \in \Sigma \mid \mu^{\mathbf{GL}}, x_0 \vDash \psi\right\}, \left\{\chi \in \Sigma \mid \mu^{\mathbf{GL}}, x_0 \nvDash \chi\right\}\right),$$

является системой Хинтикки для таблицы $(\varnothing, \{\varphi\})$. Действительно, таблица t_{x_0} насыщена и дизъюнктна очевидным образом. Условие (HS1) из определения системы Хинтикки (определение 4.8.2) сразу следует из пустоты отношения достижимости. Поскольку $\theta_{x_0} = \varnothing$, множество $\left\{\chi \in \Sigma \mid \mu^{\mathbf{GL}}, x_0 \nvDash \chi\right\}$ не содержит формул вида $\Box\psi$, что тривиальным образом влечет выполнимость условия (HS2). Из доказательства предложения 4.8.3 следует, что φ опровергается на одноэлементном строгом порядке.

В случае, когда $\theta_{x_0} \neq \varnothing$, нам придётся продолжить построение. Пусть к концу шага n уже построено множество $V_n = \{x_1, \ldots, x_m\}$, состоящее из иррефлексивных миров модели $\mu^{\mathbf{GL}}$. Рассмотрим множества

$$\theta_{x_i} \;:=\; \left\{\Box\psi \in \Sigma \mid \mu^{\mathbf{GL}}, x_i \nvDash \Box\psi\right\}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Если каждое из этих множеств пусто, то полагаем

$$V \;:=\; \bigcup_{i=0}^{n} V_i \quad \text{и} \quad S \;:=\; R^{\mathbf{GL}} \cap V^2.$$

В противном случае для каждого x_i такого, что $\theta_{x_i} \neq \varnothing$, и каждой формулы $\Box\psi \in \theta_{x_i}$ выбираем иррефлексивную точку y, удовлетворяющую следующим условиям: x_iRy, $\mu^{GL}, y \nvDash \psi$

и $\mu^{GL}, y \models \Box\psi$ — такой выбор возможен ввиду леммы 4.9.1 и транзитивности отношения $R^{\mathbf{GL}}$. Пусть V_{n+1} состоит из всех таких точек y (по всем x_i). В силу $\mathbf{4} \in \mathbf{GL}$ имеем $|\theta_y| < |\theta_{x_i}|$ при $x_i R y$. Действительно, если $\mu^{GL}, x_i \models \Box\psi$, то $\mu^{GL}, x_i \models \Box\Box\psi$, откуда $\mu^{GL}, y \models \Box\psi$, т. е. $\theta_y \subseteq \theta_{x_i}$. И кроме того, точки y выбирались так, что одна из формул вида $\Box\psi \in \Sigma$, ложная в мире x_i, стала истинной в мире y. Из конечности множества Σ следует, что мы достигнем шага k такого, что $\theta_x = \varnothing$ для всех $x \in V_k$. Полагаем в этом случае

$$V \;:=\; \bigcup_{n=0}^{k} V_n \quad \text{и} \quad S \;:=\; R^{\mathbf{GL}} \cap V^2 .$$

На каждом шаге построения мы выбирали только иррефлексивные точки, поэтому шкала $\mathcal{V} = \langle V, S \rangle$ является строгим порядком (на самом деле, даже строгим деревом).

Для каждого $x \in V$ полагаем $t_x := (\Gamma_x, \Delta_x)$, где

$$\Gamma_x \;:=\; \left\{\psi \in \Sigma \mid \mu^{GL}, x \models \psi\right\} \quad \text{и} \quad \Delta_x \;:=\; \left\{\chi \in \Sigma \mid \mu^{GL}, x \not\models \chi\right\}.$$

Рассмотрим пару $\mathcal{H} := (T, S)$, где

$$T \;:=\; \{t_x \mid x \in V\} \quad \text{и} \quad t_x S t_y \;\Leftrightarrow\; xSy .$$

Это система Хинтикки для таблицы $(\varnothing, \{\varphi\})$. Действительно, условие (HS1) следует из того, что $\theta_y \subseteq \theta_x$ при xSy. Условие (HS2) выполнено по построению. Если $x \in V_n$ и $\Box\psi \in \Delta_x$, то на шаге $n+1$ был добавлен элемент y такой, что $\psi \in \Delta_y$.

Рассуждая, как в доказательстве предложения 4.8.3, получаем, что φ опровергается на строгом порядке $\mathcal{V}$. $\Box$

Следствие 4.9.3. *Логика* **GL** *слабо полна относительно*

1) класса нётеровых строгих порядков;

2) класса конечных строго упорядоченных деревьев.

Далее, из теоремы Харропа имеем

Следствие 4.9.4. *Логика* **GL** *разрешима.*

Отсутствие компактности семантики и сильной полноты

Поскольку **GL** не является канонической, метод канонических моделей (как способ доказательства сильной полноты) оказывается неприменим. Тем не менее это ещё не влечёт отсутствия сильной полноты относительно нётеровых строгих порядков.

В настоящем разделе под логиками мы будем всюду понимать нормальные модальные логики. Говорим, что множество формул Γ *выполнимо в модели* μ, если оно истинно в некотором мире этой модели, и Γ *выполнимо над* $\mathcal{W}$, если оно выполнимо в некой модели над $\mathcal{W}$.

Определение 4.9.5. Пусть L — произвольная логика и $\mathcal{K}$ — фиксированный класс шкал. *Семантическая компактность* L *относительно* $\mathcal{K}$ означает, что $\mathcal{K} \vDash L$ и для всякого множества формул Γ, если любое конечное подмножество Γ выполнимо над некоторой шкалой из $\mathcal{K}$, то и само Γ выполнимо над некоторой шкалой из $\mathcal{K}$.

Покажем, что **GL** не является семантически компактной относительно класса всех нётеровых строгих порядков (для последнего введём обозначение $\mathcal{NSO}$). В качестве контрпримера рассмотрим

$$\Gamma \ := \ \{\Diamond p_0, \Box (p_0 \to \Diamond p_1), \Box (p_1 \to \Diamond p_2), \ldots, \Box (p_n \to \Diamond p_{n+1}), \ldots\}.$$

Тогда всякое конечное $\Delta \subset \Gamma$ содержится в

$$\{\Diamond p_0, \Box (p_0 \to \Diamond p_1), \Box (p_1 \to \Diamond p_2), \ldots, \Box (p_n \to \Diamond p_{n+1})\}$$

для достаточно большого n. Возьмём шкалу $\langle W, R\rangle := \langle \{0, \ldots, n+2\}, <\rangle$ (с естественным строгим порядком) и положим $\mu := \langle W, R, v\rangle$, где $v(p_i) := \{i+1\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ (и определено произвольно на оставшихся p_i). Очевидно, наша шкала представляет собой конечный строгий порядок, а потому лежит в нужном классе. Тогда $\mu, 0 \vDash \Diamond p_0$, $\mu, 0 \vDash \Box (p_0 \to \Diamond p_1)$ (с учётом $\mu, 1 \vDash \Diamond p_1$), и т. д. В итоге имеем $\mu, 0 \vDash \Delta$, т. е. множество формул Γ локально выполнимо.

Теперь предположим, что нашлась модель $\mu' = \langle W', R', v'\rangle$ и мир $x \in W'$ такие, что $\mu', x \vDash \Gamma$, причём $\langle W', R'\rangle$ — нётеров строгий порядок. Поскольку $\mu', x \vDash \Diamond p_0$, то существует x_0 со свойствами $xR'x_0$ и $\mu', x_0 \vDash p_0$. Далее, из $\mu', x \vDash \Box (p_0 \to \Diamond p_1)$ следует $\mu', x_0 \vDash \Diamond p_1$, откуда вытекает существование x_1 со свойствами $x_0R'x_1$ (в силу транзитивности $xR'x_1$) и $\mu', x_1 \vDash p_1$. Продолжая процесс, мы получим бесконечную возрастающую цепь $x_0R'x_1R'x_2R' \ldots$, притом все x_i различны между собой (иначе $\langle W', R'\rangle$ не был бы строгим порядком). Но наличие указанной цепи противоречит нётеровости $\langle W', R'\rangle$.

Отметим как следствие отсутствие сильной полноты относительно нётеровых строгих порядков. Действительно, поскольку любое конечное $\Delta \subset \Gamma$ выполнимо над некоторой подходящей шкалой (и, стало быть, $\Delta \nvdash_{\mathbf{GL}} \bot$), то ввиду конечности вывода имеем $\Gamma \nvdash_{\mathbf{GL}} \bot$. С другой стороны, так как Γ не выполнимо ни над каким нётеровым строгим порядком, то $\Gamma \vDash_{\mathcal{NSO}} \bot$. Приведённое рассуждение, по сути, базируется на более фундаментальном, хоть и просто устанавливаемом факте.

Упражнение 4.9.6. *Логика L слабо полна и семантически компактна относительно класса шкал $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда L сильно полна относительно $\mathcal{K}$.*

В связи с отсутствием сильной полноты **GL** относительно $\mathcal{NSO}$ читателю может показаться правомерным вопрос:

Быть может, мы просто неудачно выбрали класс шкал?

Следующее утверждение, однако, разбивает эти надежды.

Предложение 4.9.7. *Не существует класса шкал $\mathcal{K}$ такого, что* **GL** *сильно полна относительно $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Допустим, такой класс $\mathcal{K}$ нашёлся. Поскольку $\mathcal{K} \vDash \mathbf{GL}$, то, в частности, $\mathcal{K} \vDash \mathbf{W}$, откуда $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{NSO}$. Поэтому множество формул Γ, введённое выше, разумеется, не может быть выполнимо над какой бы то ни было шкалой из $\mathcal{K}$. Ввиду семантической компактности **GL** относительно $\mathcal{K}$ (следующей из упражнения 4.9.6) должно существовать конечное подмножество $\Delta \subset \Gamma$, конъюнкция формул которого (обозначим её за ψ) ложна во всех мирах всех моделей над шкалами из $\mathcal{K}$. Отсюда, в силу полноты **GL** относительно $\mathcal{K}$, имеем $\neg\psi \in \mathbf{GL}$. Вместе с тем по доказанному выше Δ (и, значит, само ψ) выполнимо над некоторым конечным строгим порядком, а потому $\neg\psi$ опровергается в соответствующей шкале и не может лежать в **GL** (см. теорему 4.9.2). Противоречие. $\Box$

4.10. Аксиома МакКинси

Аксиома МакКинси

$$\mathbf{M}: \ \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$$

даёт ещё один интересный пример модальной формулы, класс шкал для которой не является элементарным.

Напомним понятие элементарной подмодели. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ суть модели одной и той же сигнатуры σ. Модель $\mathfrak{M}$ называется *элементарной подмоделью модели* $\mathfrak{N}$, если $|\mathfrak{M}| \subseteq |\mathfrak{N}|$ и для любой σ-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и элементов $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq |\mathfrak{M}|$ верна эквивалентность

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Теорема 4.10.1 (Лёвенгейма – Сколема). *Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая модель счетной сигнатуры σ, $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ и X счётно. Тогда существует счётная модель $\mathfrak{N}$ (той же сигнатуры σ) такая, что $X \subseteq |\mathfrak{N}|$ и $\mathfrak{N}$ — элементарная подмодель в $\mathfrak{M}$.*

Теорема 4.10.2. *Класс шкал, на которых истинна аксиома МакКинси, не аксиоматизируем в логике первого порядка.*

Доказательство. Рассмотрим шкалу $\mathcal{F} := \langle W, R\rangle$, где

$$W := \{w\} \cup \left\{v_n, v_{(n,i)} \mid n \in \omega, i \in \{0,1\}\right\} \cup \{z_f \mid f : \omega \to \{0,1\}\},$$

$$R := \left\{(w, v_n), \left(v_n, v_{(n,i)}\right), \left(v_{(n,i)}, v_{(n,i)}\right) \mid n \in \omega, i \in \{0,1\}\right\} \cup \\ \cup \left\{(w, z_f), \left(z_f, v_{(n,f(n))}\right) \mid n \in \omega, f : \omega \to \{0,1\}\right\}.$$

Проверим, что это модель аксиомы МакКинси, т. е.

$$\mathcal{F} \models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p.$$

Пусть $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ — произвольная модель над $\mathcal{F}$. В дальнейшем с целью сокращения вместо $\mu, x \models \varphi$ пишем просто $x \models \varphi$. Если $v_n \models \Box\Diamond p$, то $v_{(n,i)} \models \Diamond p$ (для всех i). Точки $v_{(n,i)}$ рефлексивны и никакие другие миры из них не достижимы, поэтому $v_{(n,i)} \models p$ и $v_{(n,i)} \models \Box p$. Следовательно $v_n \models \Diamond\Box p$. Из $v_{(n,i)} \models \Box\Diamond p$ аналогичным образом получаем $v_{(n,i)} \models \Diamond\Box p$.

Пусть $z_f \models \Box\Diamond p$. Тогда $v_{(n,f(n))} \models \Diamond p$ для всех $n \in \omega$. Рассуждая, как и выше, получаем $v_{(n,f(n))} \models p$ и $v_{(n,f(n))} \models \Box p$. Следовательно, $z_f \models \Diamond\Box p$.

Осталось рассмотреть мир w. Пусть $w \models \Box\Diamond p$. Значит, $v_n \models \Diamond p$ для всех n. Следовательно, для любого $n \in \omega$ имеем $v_{(n,0)} \models p$ или $v_{(n,1)} \models p$. Пусть фунция $f : \omega \to \{0,1\}$ такова, что $v(n, f(n)) \models p$ для любого $n \in \omega$. Тогда $z_f \models \Box p$, откуда $w \models \Diamond\Box p$.

Согласно теореме Лёвенгейма – Сколема найдётся счётная элементарная подмодель $\mathcal{F}' = \langle W', R'\rangle$ модели $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ такая, что

$$\{w\} \cup \left\{v_n, v_{(n,i)} \mid n \in \omega, i \in \{0,1\}\right\} \subseteq W'.$$

Очевидно, что существует функция $f : \omega \to \{0,1\}$, для которой выполнено $z_f \notin W'$. Пусть $\mu' := \langle \mathcal{F}', v'\rangle$, где $v'(p) := \left\{v_{(n,f(n))} \mid n \in w\right\}$ при всех $p \in Prop$.

Проверим, что $\mu', w \not\models \Diamond\Box p$. Для каждого n, переменная p ложна в мире $v_{(n,0)}$ или в мире $v_{(n,1)}$ модели μ', а потому $\mu', v_n \not\models \Box p$. Пусть теперь $z_g \in W'$. Тогда $g \neq f$, т. е. $g(m) \neq f(m)$ при некотором $m \in \omega$. Для данного m имеем $\mu', v_{(m,g(m))} \not\models p$. Следовательно, $\mu', z_g \not\models \Box p$. Итак, мы доказали $\mu', w \not\models \Diamond\Box p$.

Покажем, что $\mu', w \models \Box\Diamond p$. Несложно проверить, $\mu', v_n \models \Diamond p$ для любого $n \in \omega$. Возьмём теперь $z_g \in W'$. Если $\mu', z_g \not\models \Diamond p$, то $g(n) \neq f(n)$ для всех n. Назовем такое отношение между элементами z_f и z_g отношением *комплиментарности*. Это отношение выразимо в логике первого порядка: элементы z_h и z_k комплиментарны, т. е. $h(n) \neq k(n)$ для любого n, если и только если $\mathcal{F} \models_{\mathrm{FOL}} C(z_h, z_k)$, где

$$\begin{aligned} C(x,y) \ := \ & \exists^{\geq 3} z\,(R(x,z) \wedge R(z,z)) \wedge \exists^{\geq 3} z\,(R(y,z) \wedge R(z,z)) \wedge \\ & \forall z\,(R(z,z) \to (R(x,z) \leftrightarrow \neg R(y,z)))\,. \end{aligned}$$

Если элемент $z_g \in W'$ является комплиментарным к z_f, то $\mathcal{F} \models \exists y\, C(z_g, y)$. Следовательно, $\mathcal{F}' \models \exists y\, C(z_g, y)$, так как $\mathcal{F}'$ — элементарная подмодель $\mathcal{F}$. Однако у каждого элемента есть только один комплиментарный и $z_f \notin \mathcal{F}'$. Полученное противоречие доказывает, что имеет место $z_g \models \Diamond p$ для всех $z_g \in W'$. Значит, $\mu', w \models \Box\Diamond p$.

В результате имеем

$$\mu', w \not\models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p\,.$$

Допустим, что T — множество предложений логики первого порядка сигнатуры $\{R^2\}$, аксиоматизирующее класс всех шкал (рассматриваемых как модели указанной сигнатуры), на которых истинна аксиома $\mathbf{M}$. Тогда $\mathcal{F} \models_{\mathrm{FOL}} T$ и отсюда $\mathcal{F}' \models_{\mathrm{FOL}} T$, поскольку $\mathcal{F}'$ — элементарная подмодель в $\mathcal{F}$. Но $\mathcal{F}' \not\models \mathbf{M}$, и потому такого множества предложений T не существует. $\Box$

Тем не менее аксиома МакКинси выделяет *элементарный подкласс* (см. ниже) в классе всех транзитивных шкал. Попробуем опровергнуть аксиому $\mathbf{M}$ на транзитивной модели $\mu = \langle W, R, v\rangle$. Пусть мир $x_0 \in W$ таков, что

$$\mu, x_0 \models \Box\Diamond p \quad \text{и} \quad \mu, x_0 \not\models \Diamond\Box p\,.$$

Далее, либо x_0 является тупиком, т. е. $\forall y\, \neg(x_0 R y)$, либо найдётся $x_1 \in W$, для которого $x_0 R x_1$. В последнем случае имеем $\mu, x_1 \not\models \Box p$ ввиду $\mu, x_0 \not\models \Diamond\Box p$, но при этом $\mu, x_1 \models \Diamond p$ — в силу $\mu, x_0 \models \Box\Diamond p$. Таким образом, для любого x_1, достижимого (по R) из x_0, существуют два разных мира x_2 и x_3 со следующими свойствами: с одной стороны, $x_1 R x_2$ и $\mu, x_2 \models p$, а с другой — $x_1 R x_3$ и $\mu, x_3 \not\models p$. Значит, отношение R транзитивной шкалы, опровергающей $\mathbf{M}$, должно удовлетворять условию

$$\exists x\, \forall y\, (xRy \to \exists u, v\, (yRu \wedge yRv \wedge u \neq v))\,,$$

которое с учётом транзитивности эквивалентно

$$\exists x\, \forall y\, (xRy \to \exists z\, (yRz \wedge y \neq z))\,.$$

Теперь рассмотрим отрицание полученной первопорядковой формулы, называемое *условием МакКинси*:

$$\forall x\, \exists y\, (xRy \wedge \forall z\, (yRz \to y = z))\,.$$

Предложение 4.10.3. *Пусть $\mathcal{F}$ — счётная транзитивная шкала. Тогда верна эквивалентность:*

$$\mathcal{F} \models \mathbf{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ удовлетворяет условию МакКинси}\,.$$

Доказательство. Выше была доказана обратная импликация (справа налево). Установим справедливость прямой импликации. Пусть $\mathcal{F}$ не удовлетворяет условию МакКинси, т. е. существует мир $x \in W$, который либо является тупиком, либо любой его последователь, в свою очередь, имеет собственного (отличного от него самого) последователя. Случай тупика очевиден. Пусть $X := x\uparrow$. Выберем в X подмножество Y такое, что

$$\forall u \in X\, \exists v \in Y\, \exists w \in X \backslash Y\, (uRv \wedge uRw)\,.$$

Рассмотрим $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$, где $v\,(p) := Y$ при любом $p \in Prop$. Тогда для всякого $u \in X$ имеем $u \models \Diamond p$ и $u \not\models \Box p$. Учитывая равенство $X = x\uparrow$, получаем $x \models \Box\Diamond p$ и $x \not\models \Diamond\Box p$. Тем самым, $\mathcal{F} \not\models \mathbf{M}$. □

На самом деле, эквивалентность из формулировки последнего предложения остаётся верной и в случае транзитивных шкал произвольной мощности. Поэтому аксиома МакКинси выделяет элементарный подкласс в классе всех транзитивных шкал; иными словами, класс шкал, на которых истинны одновременно аксиомы **4** и **M**, элементарен.

4.11. Связь с логиками первого и второго порядков

В первой половине раздела мы определим так называемые *стандартные трансляции* наименьшей нормальной модальной логики **K** во фрагменты логик первого и второго порядков (в специальным образом подобранных сигнатурах).

Рассмотрим язык $\mathscr{L}^1_m$ логики первого порядка сигнатуры $\sigma_m := \{R^2, P^1_1, P^1_2, \dots\}$, в которой каждой пропозициональной переменной p_i модального языка $\mathcal{L}^m$ сопоставлен одноместный предикат P_i и, кроме того, имеется единственный двуместный предикат R, отвечающий, разумеется, отношению достижимости на мирах. Будем предполагать, что в первопорядковые формулы сигнатуры σ_m вместо индивидных переменных можно подставлять любые другие индивидные переменные (других термов у нас попросту нет), при этом связанные переменные автоматически переименовываются подходящим образом (так, чтобы не возникало коллизий).

Зафиксируем индивидные переменные x и y и зададим трансляцию $ST_x : For_{\mathcal{L}^m} \to \mathrm{For}_{\sigma_m}$ следующим образом:

$$\begin{array}{rcl}
ST_x\,(p_i) & := & P_i\,(x)\,; \\
ST_x\,(\neg\varphi) & := & \neg ST_x\,(\varphi)\,; \\
ST_x\,(\varphi \vee \psi) & := & ST_x\,(\varphi) \vee ST_x\,(\psi)\,; \\
ST_x\,(\varphi \wedge \psi) & := & ST_x\,(\varphi) \wedge ST_x\,(\psi)\,; \\
ST_x\,(\varphi \to \psi) & := & ST_x\,(\varphi) \to ST_x\,(\psi)\,; \\
ST_x\,(\Box\varphi) & := & \forall y\,(R\,(x,y) \to ST_y\,(\varphi))\,.
\end{array}$$

Здесь $ST_y\,(\varphi)$ обозначает результат подстановки y вместо x в формулу $ST_x\,(\varphi)$. Несложно заметить, что для любой формулы $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$ её трансляция $ST_x\,(\varphi)$ содержит в точности одну свободную переменную x.

Рассмотрим шкалу Крипке $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ и модель $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ над этой шкалой (всё в языке $\mathcal{L}^m$). Последней поставим в соответствие первопорядковую σ_m-модель

$$\mathfrak{M}^\mu \;:=\; \langle W; R^\mu, P^\mu_1, P^\mu_2, \dots\rangle\,, \;\; \text{где}$$
$$R^\mu \;:=\; R \quad \text{и} \quad P^\mu_i \;:=\; v\,(p_i) \;\; \text{для всех} \;\; i \in \omega\,.$$

Нетрудно понять, отображение $\mu \mapsto \mathfrak{M}^\mu$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между моделями над шкалами Крипке в $\mathcal{L}^m$ и первопорядковыми моделями сигнатуры σ_m. В дальнейшем прообраз σ_m-модели $\mathfrak{M}$ относительно данного соответствия будем обозначать $\mu^{\mathfrak{M}}$.

Предложение 4.11.1. *Пусть $\mu = \langle W, R, v \rangle$ — произвольная модель Крипке, и $\varphi \in For_{\mathcal{L}^m}$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:*

1) для любого мира $w \in W$ и любой интерпретации индивидных переменных γ такой, что $\gamma(x) = w$, верно

$$\mu, w \models \varphi \iff \mathfrak{M}^\mu \models ST_x(\varphi)[\gamma];$$

2) $\mu \models \varphi \iff \mathfrak{M}^\mu \models \forall x\, ST_x(\varphi)$.

Доказательство. Первый пункт данного предложения непосредственно устанавливается индукцией по сложности $\mathcal{L}^m$-формул, а второй немедленно вытекает из первого. □

Теорема 4.11.2. *Стандартная трансляция ST_x точно вкладывает логику **K** в логику первого порядка языка $\mathscr{L}^1_m$.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{K}$, то $\mathcal{L}^m$-формула φ истинна в любом мире w любой модели Крипке $\mu = \langle W, R, v \rangle$. С другой стороны, произвольная σ_m-модель $\mathfrak{M}$ всегда представима в виде $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\mu$, где $\mu := \langle W, R^{\mathfrak{M}}, v \rangle$, W — носитель модели $\mathfrak{M}$, $R^{\mathfrak{M}}$ — интерпретация предиката R в данной модели, а оценка v задана посредством $v(p_i) := P_i^{\mathfrak{M}}$ (для всех $p \in Prop$). Поэтому из предложения 4.11.1 (1) следует, что для любой формулы $\varphi \in \mathbf{K}$ её трансляция $ST_x(\varphi)$ является первопорядковой тавтологией (сигнатуры σ_m).

Из предложения 4.11.1 (2) вытекает, что если $ST_x(\varphi)$ является первопорядковой σ_m-тавтологией, то $\mathcal{L}^m$-формула φ будет истинна во всех моделях Крипке, т. е. $\varphi \in \mathbf{K}$. □

Теперь перейдём к рассмотрению языка логики второго порядка сигнатуры $\{R^2\}$ с множеством одноместных предикатных переменных $P_1, P_2, \ldots$ Для удобства обозначим этот язык (являющийся, по существу, лишь фрагментом языка второго порядка указанной сигнатуры) $\mathscr{L}^2_m$.

Далее, определим трансляцию ST^2_x из модального (пропозиционального) языка $\mathcal{L}^m$ в описанный выше (второпорядковый) язык $\mathscr{L}^2_m$. Для пропозициональных переменных полагаем

$$ST^2_x(p_i) \;:=\; P_i(x).$$

Отметим, хотя графически формула $ST^2_x(p_i)$ выглядит точно так же, как $ST_x(p_i)$, в первом из случаев P_i — это предикатная переменная, а не одноместный предикатный символ из сигнатуры. Затем распространим ST^2_x на более сложные формулы по аналогии с ST_x:

$$\begin{array}{rcl}
ST^2_x(\neg\varphi) & := & \neg ST^2_x(\varphi);\\
ST^2_x(\varphi \vee \psi) & := & ST^2_x(\varphi) \vee ST^2_x(\psi);\\
ST^2_x(\varphi \wedge \psi) & := & ST^2_x(\varphi) \wedge ST^2_x(\psi);\\
ST^2_x(\varphi \to \psi) & := & ST^2_x(\varphi) \to ST^2_x(\psi);\\
ST^2_x(\Box\varphi) & := & \forall y\,\big(R(x,y) \to ST^2_y(\varphi)\big).
\end{array}$$

Очевидно, класс шкал Крипке совпадает с классом моделей сигнатуры $\{R^2\}$, т. е. с классом моделей для языка $\mathscr{L}^2_m$.

Предложение 4.11.3. *Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — произвольная шкала Крипке, $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ — модель над этой шкалой, и $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in For_{\mathcal{L}^m}$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:*

1) *для любого мира $w \in W$ и любой интерпретации переменных γ такой, что имеет место $\gamma(x) = w$ и $\gamma(P_i) = v(p_i)$ при всех $i \in \omega$, верно*

$$\mu, w \models \varphi \iff \mathcal{F} \models ST^2_x(\varphi)[\gamma];$$

2) $\mathcal{F} \models \varphi \iff \mathcal{F} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x\, ST^2_x(\varphi)$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 4.11.1. □

Пользуясь этим предложением, также нетрудно доказать, что

Теорема 4.11.4. *Стандартная трансляция ST^2_x точно вкладывает логику* **K** *в логику второго порядка языка $\mathscr{L}^2_m$.*

Теперь займёмся вопросом о том, какие формулы языка первого порядка логически эквивалентны стандартным трансляциям модальных формул. Важность этого вопроса обусловлена тем, что логика **K** разрешима, в отличие от логики первого порядка (если в сигнатуре последней имеется хотя бы один двуместный предикатный символ).

Определение 4.11.5. Пусть даны модели Крипке $\mu = \langle W, R, v\rangle$ и $\mu' = \langle W', R', v'\rangle$. Отношение $Z \subseteq W \times W'$ называется *бисимуляцией* (*биподобием*) *между μ и μ'*, если $Z \neq \varnothing$ и для любых $w \in W$ и $w' \in W'$ выполнены следующие условия:

1) $wZw' \Rightarrow \forall p \in Prop(w \in v(p) \Leftrightarrow w' \in v'(p))$;

2) wZw' и $wRu \Rightarrow \exists u'(uZu'$ и $w'R'u')$;

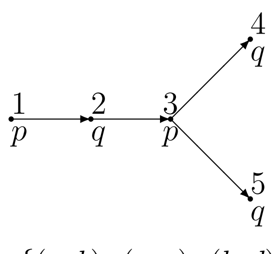
3) wZw' и $w'Ru' \Rightarrow \exists u(uZu'$ и $wRu)$.

Пусть даны две (первопорядковые) модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ_m. Отношение $Z \subseteq |\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{N}|$ называется *бисимуляцией* (*биподобием*) *между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$*, если Z является биподобием между моделями Крипке $\mu^{\mathfrak{M}}$ и $\mu^{\mathfrak{N}}$.

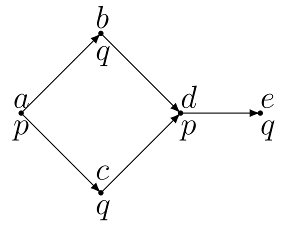
Примеры. 1. Пусть $\mu = \langle W, R, v\rangle$ и $\mu' = \langle W', R', v'\rangle$ — модели Крипке, а $f : W \to W'$ — p-морфизм из μ в μ'. Тогда график функции f будет бисимуляцией между моделями μ и μ'.

2. Пусть μ — порождённая подмодель модели μ'. В таком случае тождественное вложение $\mathrm{id}_W : W \to W'$ является бисимуляцией между моделями μ и μ'.

3. Возьмём модель $\mu := \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}, v\rangle$, где $v(p) := \{1, 3\}$ и $v(q) := \{2, 4, 5\}$.



Кроме того, пусть $\mu' := \langle \{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, e)\}, v\rangle$, где $v(p) := \{a, d\}$ и $v(q) := \{b, c, e\}$.



Непосредственно проверяется, что отношение

$$Z \ := \ \{(1,a), (2,b), (2,c), (3,d), (4,e), (5,e)\}$$

оказывается бисимуляцией между μ и μ'.

Теорема 4.11.6. *Пусть Z — бисимуляция между моделями Крипке $\mu = \langle W, R, v\rangle$ и $\mu' = \langle W', R', v'\rangle$. Тогда для любых миров $w \in W$, $w' \in W'$ и произвольной $\mathcal{L}^m$-формулы φ справедливо соотношение*

$$wZw' \quad \Longrightarrow \quad (\mu, w \vDash \varphi \ \Leftrightarrow \ \mu', w' \vDash \varphi).$$

Доказательство. Это утверждение устанавливается несложной индукцией по сложности $\mathcal{L}^m$-формулы φ. □

Определение 4.11.7. Будем говорить, что первопорядковая σ_m-формула $\alpha(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций*, если для любых σ_m-моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и бисимуляции Z между ними выполнено

$$\forall w \in |\mathfrak{M}| \, \forall v \in |\mathfrak{N}| \, (wZv \ \Rightarrow \ (\mathfrak{M} \vDash \alpha(w) \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{N} \vDash \alpha(v))).$$

Следующая теорема, принадлежащая ван Бентему (J. van Benthem), приводится без доказательства.

Теорема 4.11.8. *Первопорядковая формула $\alpha(x)$ сигнатуры σ_m инвариантна относительно бисимуляций, если и только если она логически эквивалентна стандартной трансляции некоторой модальной формулы.*

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

Известно, что логика первого порядка неразрешима в случае произвольной сигнатуры. Однако в ряде ситуаций разрешимость всё-таки имеет место: например, для логики одноместных предикатов, а также для фрагмента логики первого порядка с двумя индивидными переменными.

Стандартная трансляция модального языка в язык $\mathscr{L}^1_m$ подсказывает, как определить ещё один нетривиальный разрешимый фрагмент логики первого порядка.

Определение 4.11.9. Пусть σ — произвольная предикатная сигнатура. *Охраняемым фрагментом языка первого порядка сигнатуры* σ будем называть наименьшее множество (первопорядковых) σ-формул GF_σ такое, что:

1) все σ-атомы лежат в GF_σ;

2) если φ и ψ лежат в GF_σ, то $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ и $\varphi \to \psi$ также лежат в GF_σ;

3) если ψ есть σ-атом, φ лежит в GF_σ, а набор индивидных переменных $\bar{x}$ удовлетворяет $\bar{x} \subseteq FV(\varphi) \subseteq FV(\psi)$, то $\exists \bar{x}(\psi \wedge \varphi)$ и $\forall \bar{x}(\psi \to \varphi)$ обе лежат в GF_σ.

При этом фигурирующий в третьем пункте атом ψ называется *охранником* (*guard*).

Примеры формул, лежащих в охраняемом фрагменте:

а) $x = y \vee P(x, y, z)$, где $x = y$ и $P(x_1, \dots, p_n)$ суть σ-атомы;

б) $\exists x \, \exists y \, P(x, y, z)$ $(= \exists x \, \exists y \, (P(x, y, z) \wedge P(x, y, z)))$;

в) $\exists x \, \exists y \, (P(x, y, z) \wedge \forall u \, (R(u, z) \to S(u, z)))$.

Примеры формул, не принадлежащих охраняемому фрагменту:

а) $\forall x \, P(x, y, z)$;

б) $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (P(x, y, z) \wedge x = y)$;

в) $\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z))$;

г) $\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \to y = z)$.

Более того, известно, что формулы (c) и (d) не эквивалентны (в FOL) никакой формуле из охраняемого фрагмента соответствующей сигнатуры.

Определение 4.11.10. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая модель сигнатуры σ. Подмножество $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ называется *охраняемым*, если либо X одноэлементно, либо существуют $R \in \sigma$ и $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}}$ такие, что $X = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Интерпретация индивидных переменных $\gamma : Var \to |\mathfrak{M}|$ называется *охраняемой*, если $range(\gamma)$ — охраняемое подмножество в соответствующей модели.

Предложение 4.11.11. *Пусть $\varphi \in \mathrm{GF}_\sigma$. Тогда φ выполнима в некоторой σ-модели, если и только если φ выполнима на какой-нибудь охраняемой интерпретации данной модели.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{GF}_\sigma$, $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ, а γ — интерпретация переменных в $\mathfrak{M}$. Покажем, что найдётся охраняемая интерпретация γ' такая, что

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[\gamma'].$$

Будем доказывать индукцией по сложности σ-формул. Если $\varphi = P(x_1, \dots, p_n)$, то полагаем $\gamma'(x_i) := \gamma(x_i)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, и $\gamma'(y) := \gamma(x_1)$ для остальных переменных. Ясно, что γ — требуемая охраняемая интепретация.

Пусть теперь $\varphi = \neg\psi$ и γ' — охраняемая интерпретация, для которой

$$\mathfrak{M} \models \psi[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \psi[\gamma'].$$

Тогда

$$\mathfrak{M} \models \neg\psi[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \not\models \psi[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \not\models \psi[\gamma'] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \neg\psi[\gamma'].$$

Далее, пусть индукционная гипотеза справедлива для σ-формул φ и ψ. Если γ' и γ'' — требуемые охраняемые интерпретации для φ и ψ соответственно, то верны цепочки эквивалентностей:

$$\begin{gathered}\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[\gamma] \text{ или } \mathfrak{M} \models \psi[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \\ \mathfrak{M} \models \varphi[\gamma'] \text{ или } \mathfrak{M} \models \psi[\gamma''] \quad \Longleftrightarrow \\ \mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi[\gamma'] \text{ или } \mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi[\gamma''];\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{M} \not\models \varphi \wedge \psi\,[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \not\models \varphi\,[\gamma] \text{ или } \mathfrak{M} \not\models \psi\,[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \\ \mathfrak{M} \not\models \varphi\,[\gamma'] \text{ или } \mathfrak{M} \not\models \psi\,[\gamma''] \quad \Longleftrightarrow \\ \mathfrak{M} \not\models \varphi \wedge \psi\,[\gamma'] \text{ или } \mathfrak{M} \not\models \varphi \wedge \psi\,[\gamma''] \,.\end{gathered}$$

Рассмотрим случай формулы $\exists \bar{x}\,(\psi \wedge \varphi)$, где ψ есть σ-атом и $\bar{x} \subseteq FV\,(\varphi) \subseteq FV\,(\psi)$. Допустим, $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x}\,(\psi \wedge \varphi)\,[\gamma]$. Тогда найдётся интерпретация γ'' такая, что $\mathfrak{M} \models \psi \wedge \varphi\,[\gamma'']$. Полагаем $\gamma'\,(x) := \gamma''\,(x)$ для всех $x \in FV\,(\psi)$, и $\gamma'\,(y) := \gamma'\,(x_1)$ для остальных переменных y (здесь x_1 — некая фиксированная переменная из $FV\,(\psi)$). Ясно, что γ' будет охраняемой интерпретацией и $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x}\,(\psi \wedge \varphi)\,[\gamma']$. Если же $\mathfrak{M} \not\models \exists \bar{x}\,(\psi \wedge \varphi)\,[\gamma]$, то просто зададим $\gamma'\,(x) := \gamma\,(x)$ для всех $x \in FV\,(\psi)$, и $\gamma'\,(y) := \gamma'\,(x_1)$ для остальных y (опять фиксируем некоторую $x_1 \in FV\,(\psi)$).

Наконец, случай формулы $\forall \bar{x}\,(\psi \to \varphi)$ сводится к предыдущему, поскольку

$$\mathfrak{M} \models \forall \bar{x}(\psi \to \varphi)\,[\gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \neg \exists \bar{x}\,(\psi \wedge \neg\varphi)\,[\gamma]\,.$$

□

Теорема 4.11.12. *Пусть $\varphi \in \mathrm{GF}_\sigma$. Тогда φ общезначима, если и только если φ истинна в любой σ-модели на всех охраняемых интерпретациях.*

Доказательство. Прямая импликация очевидна. Установим обратную. Пусть φ не общезначима. Отсюда $\mathfrak{M} \not\models \varphi\,[\gamma]$ для некоторых σ-модели $\mathfrak{M}$ и интерпретации переменных γ. Разумеется, в этом случае $\mathfrak{M} \models \neg\varphi\,[\gamma]$. Поскольку $\neg\varphi \in \mathrm{GF}_\sigma$, то предложение 4.11.11 гарантирует существование охраняемой интерпретации γ' такой, что $\mathfrak{M} \models \neg\varphi\,[\gamma']$, т. е. $\mathfrak{M} \not\models \varphi\,[\gamma']$. □

Определение 4.11.13. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — произвольные модели сигнатуры σ. Непустое множество Z конечных частичных изоморфизмов между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называется *охраняемой бисимуляцией*, если для любого $f \in Z$ выполнены следующие условия:

1) для каждого охраняемого подмножества $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ найдётся $g \in Z$, для которого $dom\,(g) = X$ и $g \restriction_{dom(f)\cap X} = f \restriction_{dom(f)\cap X}$;

2) для каждого охраняемого подмножества $X' \subseteq |\mathfrak{N}|$ найдётся $g \in Z$, для которого $range\,(g) = X$ и $g^{-1} \restriction_{range(f)\cap X} = f^{-1} \restriction_{range(f)\cap X}$.

Устойчивость формул относительно охраняемых бисимуляций определяется естественным образом. Приведём без доказательства ещё две теоремы.

Теорема 4.11.14 (H. Andréka, J. van Benthem, I. Németi). *Формула φ сигнатуры σ логически эквивалентна некой формуле из GF_σ, если и только если φ устойчива относительно охраняемых бисимуляций.*

Теорема 4.11.15 (E. Grädel, 1999). *Для любой предикатной сигнатуры σ проблема выполнимости для формул из GF_σ разрешима.*

4.12. Вложение логики Int в нормальную модальную логику S4

Определим так называемую *трансляцию Гёделя – Тарского* из языка интуиционистской логики $\mathcal{L}^{\perp}$ в язык модальной логики $\mathcal{L}^{m}$:

$$\begin{array}{rcl} T(p) & := & \Box p\,; \\ T(\perp) & := & \Box\perp; \\ T(\varphi\wedge\psi) & := & T(\varphi)\wedge T(\psi)\,; \\ T(\varphi\vee\psi) & := & T(\varphi)\vee T(\psi)\,; \\ T(\varphi\to\psi) & := & \Box\,(T(\varphi)\to T(\psi))\,. \end{array}$$

Заметим, что модели логики Int, как и модели нормальной модальной логики **S4**, имеют вид $\langle W,R,v\rangle$, где $\langle W,R\rangle$ — предпорядок. Однако в случае **S4**-моделей оценки v действуют из множества пропозициональных переменных в множество всех подмножеств W, тогда как в случае Int-моделей соответствующие оценки должны сопоставлять пропозициональным переменным конуса предпорядка $\langle W,R\rangle$. Значит, класс Int-моделей уже.

Каждой **S4**-модели $\mu=\langle W,R,v\rangle$ сопоставим Int-модель $\mu^{i}:=\langle W,R,v^{i}\rangle$, где

$$v^{i}(p)\ :=\ \{w\in W\mid \mu,w\vDash\Box p\}\,.$$

Легко понять, μ^{i} действительно является Int-моделью, т. е. $v^{i}(p)$ является конусом в $\langle W,R\rangle$ для любого $p\in Prop$.

Лемма 4.12.1. *Пусть* $\mu=\langle W,R,v\rangle$ *— произвольная* **S4**-*модель,* $w\in W$ *и* $\varphi\in For_{\mathcal{L}^{\perp}}$. *Тогда*

$$\mu^{i},w\vDash\varphi\quad\Longleftrightarrow\quad\mu,w\vDash T(\varphi)\,.$$

В частности,

$$\mu^{i}\vDash\varphi\quad\Longleftrightarrow\quad\mu\vDash T(\varphi)\,.$$

Доказательство. Как обычно, воспользуемся индукцией по сложности формул. Для пропозициональных переменных имеем:

$$\mu^{i},w\vDash p\quad\Longleftrightarrow\quad w\in v^{i}(p)\quad\Longleftrightarrow\quad\mu,w\vDash\Box p\ \ (=T(p))\,.$$

Для $\perp$ эквивалентность тоже легко проверяется. Индукционный переход для $\wedge$ и $\vee$ получается непосредственно. Осталось рассмотреть случай импликации:

$$\begin{array}{c} \mu^{i},w\vDash\varphi\to\psi\quad\Longleftrightarrow\quad\forall u\,\big(wRu\ \Rightarrow\ \big(\mu^{i},u\vDash\varphi\ \Rightarrow\ \mu^{i},u\vDash\psi\big)\big)\quad\overset{\text{инд. гипотеза}}{\Longleftrightarrow} \\ \forall u\,(wRu\ \Rightarrow\ (\mu,u\vDash T(\varphi)\ \Rightarrow\ \mu,u\vDash T(\psi)))\quad\Longleftrightarrow \\ \forall u\,(wRu\ \Rightarrow\ \mu,u\vDash T(\varphi)\to T(\psi))\quad\Longleftrightarrow \\ \mu,w\vDash\Box\,(T(\varphi)\to T(\psi))\ \ (=T(\varphi\to\psi))\,. \end{array}$$

$\Box$

Теорема 4.12.2. *Трансляция T точно вкладывает логику Int в логику* **S4**.

Доказательство. Пусть $\varphi\in Int$. Возьмём произвольную **S4**-модель $\mu=\langle W,R,v\rangle$. Ввиду $\varphi\in Int$ имеем $\mu^{i}\vDash\varphi$. По лемме 4.12.1 получаем $\mu\vDash T(\varphi)$. Модель μ произвольна, поэтому $T(\varphi)\in\mathbf{S4}$.

Теперь предположим $\varphi\notin Int$. Тогда существуют Int-модель $\mu=\langle W,R,v\rangle$ и $w\in W$ такие, что $\mu,w\nvDash\varphi$. Однако μ является также **S4**-моделью, причём $\mu=\mu^{i}$. Таким образом, $\mu^{i},w\nvDash\varphi$, откуда $\mu,w\nvDash T(\varphi)$ ввиду леммы 4.12.1. Следовательно, $T(\varphi)\notin\mathbf{S4}$. $\Box$

Впрочем, логика **S4** не является единственной нормальной модальной логикой, в которую посредством T точно вкладывается интуиционистская.

Рассмотрим *логику Гжегорчика* (A. Grzegorczyk) $\mathbf{Grz} := \mathbf{S4} + \mathrm{grz}$, где

$$\mathrm{grz} \;:=\; \Box\,(\Box\,(p \to \Box p) \to p) \to p\,.$$

Далее мы приведём без доказательства ряд фактов относительно **Grz**.

Шкала $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ (для $\mathcal{L}^m$) называется *слабо нётеровой*, если она не содержит бесконечных возрастающих R-цепочек из попарно различных элементов (таким образом, рефлексивные точки не запрещаются).

Предложение 4.12.3. *Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ — шкала (для $\mathcal{L}^m$). Справедлива эквивалентность:*

$$\mathcal{F} \vDash \mathrm{grz} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{F} \text{ — слабо нётеров частичный порядок}\,.$$

Разумеется, любой конечный частичный порядок является слабо нётеровым. Более того, имеет место

Теорема 4.12.4. *Логика **Grz** слабо полна относительно класса всех конечных частичных порядков.*

На самом деле, доказательство последней теоремы по существу аналогично доказательству теоремы (слабой) полноты для логики Гёделя – Лёба (здесь также используется выборочная фильтрация).

Учитывая, что логика Int также полна относительно класса конечных частичных порядков, получаем следующую теорему.

Теорема 4.12.5. *Трансляция T точно вкладывает логику Int в логику **Grz**.*

Пусть теперь L — произвольная суперинтуиционистская логика. Определим две нормальные модальные логики:

$$\rho L \;:=\; \mathbf{S4} + \{T\,(\varphi) \mid \varphi \in L\} \quad \text{и} \quad \sigma L \;:=\; \rho L + \{grz\}.$$

Таким образом, например, $\mathbf{S4} = \rho Int$ и $\mathbf{Grz} = \sigma Int$.

Теорема 4.12.6. *Пусть L — суперинтуиционистская логика, а L' — нормальная модальная логика. Если $\mathbf{S4} \subseteq L'$, то трансляция T точно вкладывает логику L в логику L', если и только если*

$$\rho L \;\subseteq\; L' \;\subseteq\; \sigma L\,.$$

В частности, если $\mathbf{S4} \subseteq L'$, то трансляция T точно вкладывает логику Int в логику L', если и только если

$$\mathbf{S4} \;\subseteq\; L' \;\subseteq\; \mathbf{Grz}\,.$$

Логики ρL и σL называются соответственно *наименьшим* и *наибольшим модальными напарниками логики* L. В частности, как мы уже поняли, логики **S4** и **Grz** суть наименьший и наибольший модальные напарники для Int.

Интерполяционное свойство Крейга для S4 и *Int*

Пусть $Var\varphi$ обозначает множество пропозициональных переменных, входящих в формулу φ. Для множества формул Γ полагаем $Var\Gamma := \bigcap_{\varphi\in\Gamma} Var\varphi$.

Напомним, что логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга* (CIP), если для любой импликации $\varphi \to \psi \in L$ найдётся формула χ такая, что

$$\{\varphi \to \chi, \chi \to \psi\} \subseteq L \quad \text{и} \quad Var\chi \subseteq Var\varphi \cap Var\psi\,.$$

Теорема 4.12.7. *Логика* **S4** *обладает CIP.*

Доказательство. На протяжении всего доказательства под формулами мы будем понимать формулы в языке логики **S4** (далее упоминание о языке опускается).

Пусть формулы α и β таковы, что для любой γ, удовлетворяющей условию $Var\gamma \subseteq Var\alpha \cap Var\beta$, выполнено либо $\alpha \to \gamma \notin \mathbf{S4}$, либо $\gamma \to \beta \notin \mathbf{S4}$. Покажем, что в этом случае $\alpha \to \beta \notin \mathbf{S4}$.

В ходе доказательства будем рассматривать только таблицы вида $t = (\Gamma, \Delta)$, где $Var\Gamma \subseteq Var\alpha$ и $Var\Delta \subseteq Var\beta$.

Таблица t (вышеуказанного вида) *неотделима* (относительно α и β), если не существует формулы γ такой, что $Var\gamma \subseteq Var\alpha \cap Var\beta$ и

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \to \gamma\,,\ \gamma \to \bigvee_{i=1}^{m} \psi_i\ \in\ \mathbf{S4}$$

для некоторых $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subseteq \Delta$ (здесь $n, m \geq 1$).

Заметим, что таблица $(\{\alpha\}, \{\beta\})$ неотделима в силу нашего предположения.

Таблица t называется *полной* (относительно α и β), если для любых формул φ и ψ, удовлетворяющих условиям $Var\varphi \subseteq Var\alpha$ и $Var\psi \subseteq Var\beta$, одна из формул φ либо $\neg\varphi$ лежит в Γ, и одна из формул ψ либо $\neg\psi$ лежит в Δ.

Лемма 4.12.8. *Каждая неотделимая таблица* $t_0 = (\Gamma_0, \Delta_0)$ *расширяется до полной неотделимой таблицы.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — список всех формул с переменными из множества $Var\alpha$, а $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — список всех формул с переменными из $Var\beta$. По индукции определим таблицы $t'_i = (\Gamma'_i, \Delta'_i)$ и $t_{i+1} = (\Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1})$ для $i \in \omega$ (при этом t'_i, по сути, будут носить вспомогательный характер): если t_n уже определено (начинаем с имеющегося по условию t_0, разумеется), то последовательно полагаем

$$t'_n\ :=\ \begin{cases} (\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, \Delta_n)\,, & \text{если это неотделимая таблица} \\ (\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, \Delta_n)\,, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$t_{n+1}\ :=\ \begin{cases} (\Gamma'_n, \Delta'_n \cup \{\psi_n\})\,, & \text{если это неотделимая таблица} \\ (\Gamma'_n, \Delta'_n \cup \{\neg\psi_n\})\,, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Наконец, зададим $t^* := (\Gamma^*, \Delta^*)$, где $\Gamma^* := \bigcup_{n<\omega} \Gamma_n$ и $\Delta^* := \bigcup_{n<\omega} \Delta_n$. По определению, таблица t^* полна и расширяет t_0.

Установим неотделимость таблицы t^*. Если бы она была отделима, то нашлись бы $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Gamma^*$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq \Delta^*$ и формула γ с переменными из $Var\alpha \cap Var\beta$ такие, что

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \to \gamma\,,\ \gamma \to \bigvee_{i=1}^{m} \beta_i\ \in\ \mathbf{S4}\,.$$

Очевидно, существует $k < \omega$, для которого $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Gamma_k$ и $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq \Delta_k$. Итак, если таблица t^* отделима, то для некоторого k уже таблица t_k отделима.

В свою очередь, чтобы установить неотделимость t_k (по индукции), достаточно показать, что если таблица $t = (\Gamma, \Delta)$ неотделима, $Var\varphi \subseteq Var\alpha$ и $Var\psi \subseteq Var\beta$, то:

1) одна из таблиц $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ или $(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}, \Delta)$ неотделима;

2) одна из таблиц $(\Gamma, \Delta \cup \{\psi\})$ или $(\Gamma, \Delta \cup \{\neg\psi\})$ неотделима.

Докажем только первое утверждение (второе доказывается аналогично). Пусть обе таблицы $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ и $(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}, \Delta)$ отделимы. Тогда найдутся формулы γ_1 и γ_2 с переменными из $Var\alpha \cap Var\beta$ такие, что для некоторых $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subseteq \Delta$ выполнено

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \varphi) \to \gamma_1\,,\ \gamma_1 \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\ \in\ \mathbf{S4}\,;$$
$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi) \to \gamma_2\,,\ \gamma_2 \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\ \in\ \mathbf{S4}\,.$$

Отсюда

$$((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \varphi) \vee (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi)) \to (\gamma_1 \vee \gamma_2)\ \in\ \mathbf{S4}$$
$$\text{и}\quad (\gamma_1 \vee \gamma_2) \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\ \in\ \mathbf{S4}\,.$$

Ввиду того, что

$$((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \varphi) \vee (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi)) \leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)\ \in\ \mathbf{S4}\,,$$

получаем

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to (\gamma_1 \vee \gamma_2)\,,\ (\gamma_1 \vee \gamma_2) \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\ \in\ \mathbf{S4}\,.$$

Поскольку $Var\,(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq Var\alpha \cap Var\beta$, приходим к противоречию с неотделимостью таблицы t. □

Рассмотрим шкалу $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, где W — множество всех полных неотделимых таблиц, а отношение достижимости R определяется следующим образом: для $t_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ и $t_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$ из W полагаем

$$\begin{aligned} t_1 R t_2 \quad \Longleftrightarrow \quad & \forall\varphi\,((Var\varphi \subseteq Var\alpha\ \text{ и }\ \Box\varphi \in \Gamma_1)\ \Rightarrow\ \varphi \in \Gamma_2)\ \text{ и} \\ & \forall\psi\,((Var\psi \subseteq Var\beta\ \text{ и }\ \neg\Box\psi \in \Delta_1)\ \Rightarrow\ \neg\psi \in \Delta_2). \end{aligned}$$

С помощью аксиом $\Box p \to p$ и $\Box p \to \Box\Box p$ логики **S4** легко проверить, что отношение R является предпорядком на W.

Далее, для $p \in Var\,(\alpha \to \beta)$ зададим

$$v\,(p)\ :=\ \{(\Gamma, \Delta) \in W \mid p \in \Gamma\ \text{ или }\ (p \in Var\beta \text{ и } p \notin \Delta)\}$$

(а на остальных p из $Prop$ мы определяем v произвольным образом). Теперь рассмотрим **S4**-модель $\mu = \langle \mathcal{F}, v\rangle$.

Лемма 4.12.9. *Для любой таблицы $t = (\Gamma, \Delta)$ из W и любых формул φ и ψ таких, что $Var\varphi \subseteq Var\alpha$ и $Var\psi \subseteq Var\beta$, верны эквивалентности*

$$\mu, t \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma\,;$$
$$\mu, t \nvDash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \in \Delta\,.$$

Доказательство. Доказываем индукцией по сложности формулы. Рассмотрим базис индукции.

Пусть $p \in Var\alpha$. Если $p \in \Gamma$, то $(\Gamma, \Delta) \in v\,(p)$. Следовательно, $\mu, t \vDash p$.

Предположим теперь $p \notin \Gamma$. Если $p \notin Var\beta$ или $p \in \Delta$, то $(\Gamma, \Delta) \notin v\,(p)$, т. е. $\mu, t \nvDash p$. Допустим, $p \in Var\beta$ и $p \notin \Delta$. Поскольку таблица t полна, имеем $\neg p \in \Gamma \cap \Delta$, при этом

$p \in Var\alpha \cap Var\beta$. Получили противоречие с неотделимостью таблицы t. Стало быть, мы доказали, что $\mu, t \vDash p \;\Leftrightarrow\; p \in \Gamma$.

Пусть $p \in Var\beta$. Если $p \notin \Delta$, то $(\Gamma, \Delta) \in v(p)$ и, тем самым, $\mu, t \vDash p$. Напротив, допустим $p \in \Delta$. Если при этом $p \in \Gamma$, то $p \in Var\alpha \cap Var\beta$ и мы получим противоречие с неотделимостью (Γ, Δ); следовательно, $p \notin \Gamma$, а потому $(\Gamma, \Delta) \notin v(p)$, т. е. $\mu, t \nvDash p$. В итоге $\mu, t \nvDash p \;\Leftrightarrow\; p \in \Delta$.

Индукционный переход для немодальных связок получается непосредственно.

Пусть $\varphi = \Box\varphi_1$, причём $Var\varphi \subseteq Var\alpha$. Если $\mu, t \vDash \Box\varphi_1$, то для любой таблицы $t' = (\Gamma', \Delta')$ такой, что tRt', имеем $\mu, t' \vDash \varphi_1$, откуда $\varphi_1 \in \Gamma'$ в силу индукционного предположения. Допустим, $\Box\varphi_1 \notin \Gamma$, тогда из полноты t получаем $\neg\Box\varphi_1 \in \Gamma$. Рассмотрим таблицу $t_0 = (\Gamma_0, \Delta_0)$, в которой

$$\Gamma_0 \;:=\; \{\neg\varphi_1\} \cup \{\chi \mid \Box\chi \in \Gamma\} \quad \text{и} \quad \Delta_0 \;:=\; \{\neg\chi \mid \neg\Box\chi \in \Delta\}\,.$$

Допустим, нашлась формула γ такая, что $Var\gamma \subseteq Var\alpha \cap Var\beta$, и для некоторых формул $\{\Box\chi_1, \ldots, \Box\chi_n\} \subseteq \Gamma$ и $\{\neg\Box\chi_{n+1}, \ldots, \neg\Box\chi_m\} \subseteq \Delta$ выполнено

$$(\neg\varphi_1 \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \to \gamma\,,\ \gamma \to (\neg\chi_{n+1} \vee \ldots \vee \neg\chi_m) \;\in\; \mathbf{S4}\,.$$

Как несложно убедиться, имеет место

Упражнение 4.12.10.

$$\Box\,((p \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_n) \to r) \to ((\Diamond p \wedge \Box q_1 \wedge \ldots \wedge \Box q_n) \to \Diamond r) \;\in\; \mathbf{K}\,,$$
$$\Box\,(r \to (p_1 \vee \ldots \vee p_k)) \to (\Diamond r \to (\Diamond p_1 \vee \ldots \vee \Diamond p_k)) \;\in\; \mathbf{K}\,.$$

Из упражнения 4.12.10 и правила нормализации получаем

$$(\Diamond\neg\varphi_1 \wedge \Box\chi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\chi_n) \to \Diamond\gamma\,,\ \Diamond\gamma \to (\Diamond\neg\chi_{n+1} \vee \ldots \vee \Diamond\neg\chi_m) \;\in\; \mathbf{S4}\,,$$

откуда, используя эквивалентность $\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box p \in \mathbf{K}$, выводим

$$(\neg\Box\varphi_1 \wedge \Box\chi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\chi_n) \to \Diamond\gamma\,,\ \Diamond\gamma \to (\neg\Box\chi_{n+1} \vee \ldots \vee \neg\Box\chi_m) \;\in\; \mathbf{S4}\,,$$

что противоречит неотделимости таблицы t. Таким образом, таблица t_0 неотделима. Пусть $t^* = (\Gamma^*, \Delta^*)$ — полное неотделимое расширение таблицы t_0 (см. лемму 4.12.8). По определению, tRt^*. Следовательно, $\varphi_1 \in \Gamma^*$, что противоречит $\neg\varphi_1 \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$ и неотделимости таблицы t^*. В результате доказали, что $\mu, t \vDash \Box\varphi_1$ влечёт $\Box\varphi_1 \in \Gamma$.

Пусть $\Box\varphi_1 \in \Gamma$. Тогда для каждой таблицы $t' = (\Gamma', \Delta')$, если tRt', то $\varphi_1 \in \Gamma'$ (по определению R), т. е. $\mu, t' \vDash \varphi_1$ (в силу индукционного предположения). Следовательно, $\mu, t \vDash \Box\varphi_1$.

Случай $\Box\psi_1 \in \Delta$ рассматривается двойственным образом. □

Как мы уже отмечали ранее, таблица $(\{\alpha\}, \{\beta\})$ — неотделима. Пусть t^* — некоторая расширяющая её полная и неотделимая таблица (существующая по лемме 4.12.8). Разумеется, $t^* \in W$, а потому $\mu, t^* \vDash \alpha$ и $\mu, t^* \nvDash \beta$ (по лемме 4.12.9), т. е. $\mu, t^* \nvDash \alpha \to \beta$. Значит, $\alpha \to \beta \notin \mathbf{S4}$ (поскольку $\alpha \to \beta$ опровергается в некой **S4**-модели). □

Аксиомы **T** и **4** (логики **S4** = **KT4**) использовались в последнем доказательстве, по сути, лишь с целью показать, что шкала $\langle W, R\rangle$ является предпорядком. Поэтому, как несложно проверить, аналогичное доказательство проходит и для логик **K**, **T** и **K4**, т. е. имеет место

Следствие 4.12.11. *Логики* **K**, **T** *и* **K4** *обладают CIP.*

Кроме того, наше следующее утверждение позволяет перенести интерполяционное свойство с **S4** на интуиционистскую логику.

Теорема 4.12.12. *Пусть $L \in \mathcal{E}Int$. Если наименьший модальный напарник ρL логики L обладает CIP, то и сама L обладает CIP.*

Доказательство. Фактически, мы приведчм лишь набросок доказательства. Пусть $\alpha \to \beta \in L$. Тогда $\Box(T(\alpha) \to T(\beta)) \in \rho L$. С учётом включения $\mathbf{S4} \subseteq \rho L$ получаем $T(\alpha) \to T(\beta) \in \rho L$. По условию теоремы, найдётся формула γ' такая, что $Var\gamma' \subseteq Var\alpha \cap Var\beta$ и

$$T(\alpha) \to \gamma',\ \gamma' \to T(\beta)\ \in\ \rho L\,.$$

Нетрудно установить следующее

Упражнение 4.12.13. *Для любой $\mathcal{L}^{\perp}$-формулы $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ имеем*

$$T(\varphi) \leftrightarrow \Box T(\varphi)\ \in\ \mathbf{S4}\,,$$
$$T(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) \leftrightarrow T(\varphi(\Box p_1, \ldots, \Box p_n))\ \in\ \mathbf{S4}\,.$$

Возпользовавшись данным упражнением, мы приходим к

$$T(\alpha) \to \Box\gamma^*,\ \Box\gamma^* \to T(\beta)\ \in\ \rho L\,, \tag{$*$}$$

где γ^* получается из γ' заменой каждой переменной p на $\Box p$.

Далее, можно доказать, что для любой $\mathcal{L}^{m}$-формулы $\psi(p_1, \ldots, p_n)$ можно доказать, что существует $\mathcal{L}^{\perp}$-формула $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$, для которой

$$\Box\psi(\Box p_1, \ldots, \Box p_n) \leftrightarrow T(\varphi(p_1, \ldots, p_n))\ \in\ \mathbf{S4}\,.$$

Тогда можно найти $\mathcal{L}^{\perp}$-формулу γ, удовлетворяющую условиям

$$Var\gamma = Var\gamma^* \quad \text{и} \quad \Box\gamma^* \leftrightarrow T(\gamma) \in \mathbf{S4}\,.$$

Последнее вместе с $(*)$ влечёт

$$T(\alpha\ ) \to T(\gamma)\,,\ T(\gamma) \to T(\beta)\ \in\ \rho L\,.$$

Применив правило нормализации, имеем

$$\Box(T(\alpha) \to T(\gamma))\,,\ \Box(T(\gamma) \to T(\beta))\ \in\ \rho L\,.$$

Отсюда (см. теорему 4.12.6) заключаем, что

$$\alpha \to \gamma\,,\ \gamma \to \alpha\ \in\ L\,.$$

□

Поскольку наименьшим модальным напарником для Int является **S4**, то две последние теоремы дают

Следствие 4.12.14. *Логика Int обладает CIP.*

Список литературы

[1] Слинин Я. А., Караваев Э. Ф., Мигунов А. И. и др. Символическая логика. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.

[2] Барвайс Дж. Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1983. Часть 1: теория Моделей.

[3] Барвайс Дж. Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1983. Часть 4: теория доказательств и конструктивная математика.

[4] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Москва, 1994.

[5] Гильберт Д. Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.

[6] Голдблатт Р. Логика времени и вычислимости. М.: ОИЛКРЛ, 1992.

[7] Драгалин А. Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. М.: УРСС, 2003.

[8] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: ФизМатЛит, 2011.

[9] Карри Х. Б. Основания математической логики. М.: Мир, 1969.

[10] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[11] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

[12] Когабаев Н. Т. Лекции по теории алгоритмов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2009.

[13] Колмогоров А. Н. О принципе Tertium non datur // Математический Сборник. 1925. Т. 32, № 4. С. 646–667.

[14] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.

[15] Непейвода Н. Н. Прикладная логика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.

[16] Сидоренко Е. А. Релевантная логика. М.: Изд-во ИФ РАН, 2000.

[17] Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[18] Blackburn P., de Rijke M., Venema Y. Modal logic. Cambrige: CUP, 2001.

[19] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal logic. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[20] Enderton H. B. A mathematical introduction to logic. 2-nd ed. New York: Academic Press, 2001.

[21] Gabbay D. M., Maksimova L. L. Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.

[22] Johansson I. Der minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer formalismus // Compositio Mathematika. 1937. Vol. 4. P. 119–136.

[23] Heyting A. Die formalen regeln der intuitionistischen logik // Sitzungsberichte der Preussische Akademie der Wissenschften. Verlag der Akademie der Wissenschften: Berlin, 1931. P. 42–56.

[24] Hilbert D. Die logischen grundlagen der mathematik // Mathematische Annalen. 1923. Vol. 88. P. 151–165.

[25] Kolmogorov A. Zur deutung der intuitionistischen logik // Mathematische Zeitschrift. 1932. Vol. 35. P. 58–65.

[26] Lewis C. I., Langford C. H. Symbolic logic. New York: Dover, 1951.

[27] Nelson D. Constructible falsity // Journal of Symbolic Logic. 1949. Vol. 14. P. 16–26.

[28] Odintsov S. P. Constructive negations and paraconsistency. Dordrecht: Springer, 2008. Vol. 26: Trends in Logic.

[29] Priest G. An introduction to non-classical logic: from if to is. Cambrige: CUP, 2008.

[30] Rautenberg W. Klassische und nicht-klassische aussagenlogik. Braunschweig: Vieweg, 1979.

[31] Wansing H. Negation // The Blackwell guide to philosophical logic. Oxford: Blackwell, 2001. P. 415–436.