

О внутренней конструктивизируемости функциональных структур

А. С. Бурнистов, А. И. Стукачев

1 Введение

В обзорной работе Р. Монтегю [1] исследовалась определимость в языках высших порядков, в которых тип переменных определяет ранг допустимых значений этих переменных. В частности, было показано (точнее, анонсировано без доказательства), что логики произвольного конечного порядка интерпретируются в логике 3-го порядка.

В свою очередь, в работах [2, 3] были предложены конструктивные аналоги результатов Р. Монтегю: было введено понятие ранга внутренней конструктивизируемости допустимых множеств и показано, что верхняя граница ранга внутренней конструктивизируемости наследственно конечных надстроек (над бесконечными структурами) равна 2. Кроме того, было показано, что наследственно конечная надстройка над полем действительных чисел имеет ранг внутренней конструктивизируемости 1.

Известно достаточно много примеров структур, наследственно конечные надстройки над которыми имеют ранг внутренней конструктивизируемости 2 (например, структуры пустой сигнатуры). Более интересным вопросом является построение структур ранга 1 или 0.

В настоящей работе строятся и исследуются примеры (функциональных) структур, наследственно конечные надстройки над которыми имеют ранг внутренней конструктивизируемости 0.

2 Описание структур $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_{rec}$ и их базовые свойства

Пусть $c(= c^2) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ – функция Кантора, нумерующая пары натуральных чисел. Как обычно, по индукции определяются функции $c^{n+1} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \geq 1$, нумерующие конечные последовательности натуральных чисел: $c^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = c(x_1, c^n(x_2, \dots, x_{n+1}))$. Будем обозначать номер последовательности $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ как $[x_1, \dots, x_n]$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – частичная n -местная функция на $\mathbb{N}$, $n \geq 1$. С ней естественным образом связывается одноместная частичная функция $h_f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, определенная так, что для всех $x_1, \dots, x_n$ выполнено

$$h_f([x_1, \dots, x_n]) = f(x_1, \dots, x_n).$$

В дальнейшем будут рассматриваться одноместные функции на $\mathbb{N}$, а m -местные функции будут интерпретироваться указанным выше образом. Натуральные числа, в частности, являются одноместными (постоянными) функциями.

Пусть F_0 – множество всех частичных функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Зафиксируем сигнатуру

$$\sigma_0 = \langle S^2, PR^2, M^1, I^2, \circ^2, *^2, \pi^2; O, s, \uparrow \rangle$$

и рассмотрим структуру

$$\mathcal{F}_0 = \langle F_0; S^{\mathcal{F}_0}, PR^{\mathcal{F}_0}, M^{\mathcal{F}_0}, I^{\mathcal{F}_0}, \circ^{\mathcal{F}_0}, *^{\mathcal{F}_0}, \pi^{\mathcal{F}_0}; O^{\mathcal{F}_0}, s^{\mathcal{F}_0}, \uparrow^{\mathcal{F}_0} \rangle$$

сигнатуры σ_0 , носителем которой является множество F_0 , а интерпретации сигнатурных символов по порядку соответствуют следующим объектам:

1. Функции $S^{\mathcal{F}_0} : F_0^2 \rightarrow F_0$, интерпретирующей оператор суперпозиции, которая определяется так, что

$$S(h, g)(x) = h(g(x)).$$

2. Функции $PR^{\mathcal{F}_0} : F_0^2 \rightarrow F_0$, интерпретирующей оператор примитивной рекурсии, которая определяется так, что

$$\begin{cases} PR(g, h)([0, x]) = g(x) \\ PR(g, h)([y + 1, x]) = h([y, x, PR(g, h)([y, x])]), \end{cases}$$

3. Функции $I^{\mathcal{F}_0} : F_0^2 \rightarrow F_0$, которая определяется так, что

$$I(n, m)([x_1, \dots, x_n]) = x_m,$$

если n, m – натуральные числа и $n \geq m \geq 1$, и

$$I(n, m) = \uparrow, \text{ иначе.}$$

4. Функции $M^{\mathcal{F}_0} : F_0 \rightarrow F_0$, интерпретирующей оператор минимизации, которая определяется так, что

$$M(g)(x) = \begin{cases} y & , \text{ если } g([0, x]), \dots, g([y - 1, x]) \text{ определены} \\ & \text{и не равны } 0, \text{ а } g([y, x]) = 0 \\ \uparrow & , \text{ иначе} \end{cases}$$

5. Операции аппликации $\circ^{\mathcal{F}_0} : F_0^2 \rightarrow F_0$, которая определяется так, что

$$(f \circ x)(y) = f([x, y]), \text{ если } x \text{ является натуральным числом,}$$

$$f \circ x = \uparrow, \text{ иначе.}$$

6. Функции $*^{\mathcal{F}_0} : F_0^2 \rightarrow F_0$ такой, что

$$f * x = f(x), \text{ если } x \text{ является натуральным числом и } f(x) \text{ определено,}$$

$$f * x = \uparrow, \text{ иначе.}$$

7. Функции $\pi^{\mathcal{F}_0} : F_0^2 \rightarrow F_0$ такой, что

$$(f_1 \pi f_2)(x) = [f_1(x), f_2(x)], \text{ если } f_1(x) \text{ и } f_2(x) \text{ определены,}$$

и $(f_1\pi f_2)(x) = \uparrow$, иначе.

Заметим, что если f_1, f_2 – частично рекурсивные функции, то $f_1\pi f_2$ также частично рекурсивная.

8. Константы $O^{\mathcal{F}_0}, s^{\mathcal{F}_0}$ интерпретируют простейшие функции, а константа $\uparrow^{\mathcal{F}_0}$ – функция с пустой областью определения – интерпретирует неопределенность функции.

Через $S(h, g_1, \dots, g_m)$ будем обозначать терм

$$S(h, g_1\pi(g_2\pi(\dots(g_{m-1}\pi g_m)\dots)).)$$

Также в дальнейшем будем рассматривать подструктуру $\mathcal{F}_{rec} \subseteq \mathcal{F}_0$, носителем которой является множество F_{rec} всех одноместных частично рекурсивных функций (далее ч.р.ф.).

Натуральные числа – частный случай функций – определены в $\mathcal{F}_0$ как значения следующих термов сигнатуры σ_0 :

1. $\underline{0} = O$;
2. $\underline{n+1} = s * \underline{n}$.

В силу специфики определения операции $*$ их можно выделить в $\mathcal{F}_0$ следующей (бескванторной) формулой:

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow I(1, 1) * x = x \ \& \ x \neq \uparrow.$$

Кроме того, на натуральных числах операции $+$ и $\cdot$ определяются примитивной рекурсией по константе s и функции I , а отношение порядка $\leq$ определяется через усеченную разность. Действительно:

1. обозначим $f_+ \Leftarrow PR(I(1, 1), S(s, I(3, 3)))$, тогда

$$x + y = z \Leftrightarrow z = (f_+ \circ y) * x;$$

2. обозначим $f \Leftarrow PR(O, S(f_+, I(3, 2), I(3, 3)))$, тогда

$$x \cdot y = z \Leftrightarrow z = (f \circ y) * x;$$

3. обозначим $sgn \Leftarrow PR(O, S(s, S(O, I(3, 1))))$, $f_{\div 1} \Leftarrow PR(O, I(3, 1))$,
 $f_{\div} \Leftarrow PR(I(1, 1), S(f_{\div 1}, I(3, 3), I(3, 1)))$, тогда

$$x \leq y \Leftrightarrow ((S(sgn, f_{\div}, I(2, 1)) \circ y) * x) = 0$$

(так как функции sgn и $f_{\div 1}$ одноместные, а оператор примитивной рекурсии определяется с использованием номеров пар натуральных чисел, то необходимо добавлять «фиктивный» второй аргумент: например, $x \div 1 \Leftarrow (f_{\div 1} \circ x) * y$ для произвольного y).

Таким образом, в $\mathcal{F}_0$ есть эффективная интерпретация стандартной модели арифметики.

Пусть $\Phi \Leftarrow \exists f_0 \exists f_1 \dots \exists f_n \Phi_1$, где Φ_1 – бескванторная формула. Так как в $\mathcal{F}_0$ лежит функция f такая, что $f \circ 0 = f_0$, $f \circ 1 = f_1, \dots, f \circ n = f_n$, то существует формула $\exists f \Phi_1^*$, эквивалентная (над $\mathcal{F}_0$) формуле Φ .

Укажем теперь некоторую связь $\mathcal{F}_0$ с арифметикой второго порядка $\mathbf{Z}_2$ (то есть структуры, носителем которой является множество натуральных чисел, а язык расширяет язык арифметики первого порядка добавлением предикатных и (или) функциональных переменных). Известно (см. [4]), что в $\mathbf{Z}_2$ подмножество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ определимо с использованием связанных переменных по множествам тогда и только тогда, когда оно определимо с использованием связанных переменных по функциям. Поэтому далее будем использовать квантификацию по переменным для функций.

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Если множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $k \geq 1$, определимо в $\mathcal{F}_0$ $\exists$ -формулой, то оно определимо в арифметике второго порядка Σ_1^1 -формулой.
2. Если множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $k \geq 1$, определимо в арифметике второго порядка $\exists$ -формулой, то оно определимо в $\mathcal{F}_0$ $\exists$ -формулой.

Доказательство. Рассмотрим, для простоты, случай $k = 1$. Для случая $k \geq 1$ рассуждения аналогичны.

1. Пусть множество $A \subseteq N$ определимо в $\mathcal{F}_0$ $\exists$ -формулой. С учетом теоремы о пренексной нормальной форме для формул логики предикатов над $\mathcal{F}_0$, а также замечания перед доказываемым утверждением, можно считать, что эта формула имеет вид $\exists f \Phi(x, f)$, где Φ – бескванторная. Без ограничения общности можно считать, что переменная f принимает значения только из множества $F_0 \setminus \mathbb{N}$. Так как переменная x принимает значения из $\mathbb{N}$, то можно считать, что формула Φ не содержит вхождений термов $x \circ t$, $PR(t, x)$, $S(x, t)$ (или $S(t, x)$) и $M(x)$ для произвольного терма t . Кроме того, можно считать, что Φ не содержит тождественно ложных подформул, получающихся при применении функции к функции (отличной от натурального числа) с помощью аппликации или операции $*$, и формул вида $x = s$, $x = \uparrow$ и т.д.

В арифметике второго порядка используется квантификация по всюду определенным функциям. Будем считать, что число 0 соответствует $\uparrow$, а число $n + 1$ соответствует числу n . Так как частичные функции представимы с помощью переменных по множествам и, как уже было сказано, множество натуральных чисел определимо с использованием связанных переменных по множествам тогда и только тогда, когда оно определимо с использованием связанных переменных по функциям, то в структуре с выделенным нулем определимы все те же самые множества натуральных чисел.

Известно (см. [5]), что операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации, а также любая ч.р.ф. определимы в арифметике второго порядка с использованием только переменных первого порядка.

Укажем трансляцию λ формул вида $\exists f \Phi(x, f)$ в формулы арифметики второго порядка. Пусть $\Phi_{c^n}(x_1, \dots, x_n, z)$ – формула, определяющая канторовскую функцию c^n в арифметике второго порядка. Укажем сначала

трансляцию термов:

- (a) $\lambda(x) = x$, $\lambda(f) \rightleftharpoons f$, $\lambda(O) = 1$, $\lambda(s) \rightleftharpoons s$, $\lambda(\uparrow) \rightleftharpoons 0$;
- (b) $\lambda(I(n, m)) \rightleftharpoons I_m^n$, где I_m^n – функциональная переменная, определяющаяся так, что

$$\mathbf{Z}_2 \models \forall x \forall y [I_m^n(x) = y \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n (\Psi(x_1, \dots, x_n, y) \& \Phi_{c^n}(x_1, \dots, x_n, x))],$$

где Ψ – формула, определяющая функцию I_m^n в $\mathbf{Z}_2$;

- (c) $\lambda(M(t)) \rightleftharpoons M^*(t)$, где t – произвольный терм, $M^*(t)$ – функциональная переменная, определенная так, что

$$\mathbf{Z}_2 \models \forall x \forall y [M^*(t)(x) = y \leftrightarrow \Psi(x, y)],$$

где Ψ – формула, определяющая функцию $M(t)$ в $\mathbf{Z}_2$ (операторы S и PR переводятся аналогично);

- (d) $\lambda(t_1 \circ t_2) \rightleftharpoons g$, где t_1, t_2 – произвольные термы, а функциональная переменная g определена так, что

$$\mathbf{Z}_2 \models \forall x \forall y [g(x) = y \leftrightarrow (\Phi_c^2(\lambda(t_2), x, z) \& y = \lambda(t_1)(z))].$$

- (e) $\lambda(t_1(t_2)) \rightleftharpoons \lambda(t_1)(t_2)$, где t_1, t_2 – произвольные термы;
- (f) $\lambda(t_1 \pi t_2) \rightleftharpoons g$, где t_1, t_2 – произвольные термы, а функциональная переменная g определена так, что

$$\mathbf{Z}_2 \models \forall x \forall y [g(x) = y \leftrightarrow \Psi_{c^2}(\lambda(t_1)(x), \lambda(t_2)(x), y)].$$

Теперь укажем трансляцию подформул:

- (a) $\lambda(t_1 = t_2) \rightleftharpoons \lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, где t_1, t_2 – произвольные термы;
- (b) $\lambda(\Phi_1 \text{ c } \Phi_2) \rightleftharpoons \lambda(\Phi_1) \text{ c } \lambda(\Phi_2)$, $c \in \{\&, \vee, \rightarrow\}$;
- (c) $\lambda(\neg \Phi_1) \rightleftharpoons \neg \lambda(\Phi_1)$.

Наконец, $\lambda(\exists f \Phi(x, f)) \Leftrightarrow \exists f \lambda(\Phi(x, f))$.

После приведения формулы $\exists f \lambda(\Phi(x, f))$ к нормальной форме Клини получим Σ_1^1 -формулу, определяющую множество $A \subseteq \mathbb{N}$ в арифметике второго порядка.

2. Пусть множество $A \subseteq N$ определимо в арифметике второго порядка некоторой $\exists$ -формулой. С учетом теоремы Клини о нормальной форме можем считать, что эта формула имеет вид $\exists f \Phi(x, f)$, где Φ – бескванторная формула. Как было показано выше, функции $+$ и $\cdot$ и отношение $\leq$ определены бескванторными формулами в $\mathcal{F}_0$. Терм вида $f(x_1, \dots, x_n)$ определяется в $\mathcal{F}_0$ термом вида $(g \circ x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}) * x_n$ для некоторой переменной g . Используя эту определимость, индукцией по сложности формулы Φ в $\mathcal{F}_0$ можно построить формулу $\exists g \Phi^*(x, g)$, которая будет определять множество A .

□

Следующее утверждение говорит о том, что структура $\mathcal{F}_0$ является “жесткой”, то есть все ее автоморфизмы тождественные.

Предложение 2. Если $\varphi : F_0 \rightarrow F_0$ – автоморфизм $\mathcal{F}_0$, то $\varphi = id$.

Доказательство. Пусть $\varphi : F_0 \rightarrow F_0$ – автоморфизм $\mathcal{F}_0$. По определению $\varphi(O) = O$, $\varphi(s) = s$, поэтому натуральные числа под действием φ переходят в себя.

Пусть $f \in F_0$. Покажем, что для всех $x \in \mathbb{N}$ выполнено $\varphi(f) * x = f * x$. Тогда $\varphi(f) = f$. Действительно,

$$\varphi(f) * x = \varphi(f) * \varphi(x) = \varphi(f * x) = f * x,$$

так как $f * x \in \mathbb{N}$, либо $f * x = \uparrow$. Поэтому $\varphi(f) = f$ для всех $f \in F_0$. □

3 Наследственно конечные надстройки над $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_{rec}$

Перейдем к построению примеров структур с наследственно конечными надстройками ранга 0. Следующие понятия были введены Я.Московакисом при анализе надстроек над структурами, интерпретируемых внутри исходной структуры.

Определение 1 ([6]). *Схема кодирования $\mathcal{C}$ структуры $\mathfrak{M}$ состоит из множества $N^{\mathcal{C}} \subseteq M$ и порядка $\leq^{\mathcal{C}}$ на $N^{\mathcal{C}}$ таких, что $\langle N^{\mathcal{C}}, \leq^{\mathcal{C}} \rangle \simeq \langle \omega, \leq \rangle$, и инъективного отображения $\psi^{\mathcal{C}} : M^{<\omega} \rightarrow M$.*

Для схемы кодирования $\mathcal{C}$ через $\dot{0}, \dot{1}, \dots$ обозначаются соответствующие элементы $N^{\mathcal{C}}$ относительно порядка $\leq^{\mathcal{C}}$. Кроме того, со схемой кодирования $\mathcal{C}$ связываются предикат $Seq^{\mathcal{C}}(x)$, истинный, если $x = \psi(\emptyset)$ или $x = \psi(\langle m_0, \dots, m_k \rangle)$ для некоторых $m_0, \dots, m_k \in M$, и функции $lh^{\mathcal{C}}(x)$ и $pr^{\mathcal{C}}(x, \dot{m})$, выдающие соответственно длину и m -ый элемент последовательности набора, представленного элементом x , и $\dot{0}$ в случае несоответствия аргументов.

Определение 2 ([6]). Структура $\mathfrak{M}$ называется *приемлемой*, если для нее существует схема кодирования $\mathcal{C}$ такая, что $N^{\mathcal{C}}, \leq^{\mathcal{C}}, Seq^{\mathcal{C}}, lh^{\mathcal{C}}$ и $pr^{\mathcal{C}}$ формульно определимы в $\mathfrak{M}$.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Существуют многозначные схемы кодирования для структур $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_{rec}$, причем соответствующие отношения и функции определимы $\exists$ -формулами.*

Доказательство. Приведем (многозначные) схемы кодирования $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ для структур $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_{rec}$ соответственно. Пусть $\langle f_0, \dots, f_k \rangle$ – последовательность функций из F_0 (или из F_{rec}). Тогда множеством кодов этой последовательности будет множество функций g таких, что

$$g \circ 0 = k + 1, \quad g \circ 1 = f_0, \quad g \circ 2 = f_1, \dots, \quad g \circ (k + 1) = f_k, \quad g \circ (k + 2) = \uparrow$$

(в случае F_{rec} найдутся частично рекурсивные функции такого вида, так как их можно кусочно задать с помощью $f_0, \dots, f_k$). Множество натуральных чисел вместе с порядком $\leq$ на нем и указанные кодировки образуют многозначные схемы кодирования $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$.

Докажем, что $\mathcal{F}_0$ является приемлемой. Для $\mathcal{F}_{rec}$ доказательство аналогично.

Множество $N^{\mathcal{C}_1}$ и порядок $\leq^{\mathcal{C}_1}$ на нем определимы бескванторными формулами. Предикат $Seq^{\mathcal{C}_1}(x)$, истинный, если x кодирует некоторую последовательность, и функции $lh^{\mathcal{C}_1}(x)$ и $pr^{\mathcal{C}_1}(x, m)$, выдающие соответственно длину и m -ый элемент последовательности, представленной элементом x (и 0 в случае несоответствия аргументов), определяются так:

$$x \in Seq^{\mathcal{C}_1} \Leftrightarrow \exists k (k \in \mathbb{N} \ \& \ x \circ 0 = (k + 1) \ \& \ x \circ (k + 2) = \uparrow);$$

$$x \notin Seq^{\mathcal{C}_1} \Leftrightarrow \exists k (k \in \mathbb{N} \ \& \ x \circ 0 = (k + 1) \ \& \ x \circ (k + 2) \neq \uparrow) \ \vee \ (x \circ 0 \notin \mathbb{N});$$

$$lh^{\mathcal{C}_1}(x) = k \Leftrightarrow (x \in Seq^{\mathcal{C}_1} \ \& \ x \circ 0 = k) \vee (x \notin Seq^{\mathcal{C}_1} \ \& \ k = 0);$$

$$pr^{\mathcal{C}_1}(x, m) = y \Leftrightarrow (x \in Seq^{\mathcal{C}_1} \ \& \ m \leq lh_1^{\mathcal{C}_1}(x) \ \& \ y = x \circ (m + 1)) \vee$$

$$\vee ((x \notin Seq_1^{\mathcal{C}_1} \ \vee \ lh_1^{\mathcal{C}_1}(x) < m) \ \& \ y = 0).$$

□

Напомним определение ранга внутренней конструктивизируемости и некоторые связанные определения. Они используют понятия Δ_0 -, Σ -формул и

допустимого множества, которые можно найти в [5, 7]. Носитель допустимого множества $\mathbb{A}$ обозначается через A .

Определение 3. Пусть Θ – Σ -формула сигнатуры σ . Для произвольной Σ -формулы Φ сигнатуры σ ее *релятивизация* Φ^Θ с помощью формулы Θ определяется так:

- если Φ атомарная формула, то Φ^Θ есть Φ ;
- если Φ имеет вид $\neg\Psi$, то Φ^Θ есть $\neg(\Psi^\Theta)$;
- если Φ имеет вид $\Psi_1 * \Psi_2$, $*$ $\in \{\vee, \&, \rightarrow\}$, то Φ^Θ есть $\Psi_1^\Theta * \Psi_2^\Theta$;
- если Φ имеет вид $(Qx \in y)\Psi$, $Q \in \{\exists, \forall\}$, то Φ^Θ есть $(Qx \in y)\Psi^\Theta$;
- если Φ имеет вид $\exists x\Psi$, то Φ^Θ есть $\exists x(\Theta(x) \& \Psi^\Theta)$.

Следующее определение является модификацией понятия Σ -определенности и эквивалентного ему понятия конструктивизируемости структуры в допустимом множестве, предложенных Ю.Л.Ершовым (см. [5]).

Определение 4 ([2]). Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество сигнатуры $\sigma = \langle \emptyset, \in^2, P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k} \rangle$, $B \subseteq A$ – транзитивное Σ -подмножество, определяемое в $\mathbb{A}$ Σ -формулой Θ с параметрами только из B . $\mathbb{A}$ называется *конструктивизируемой внутри B* , если существует последовательность Σ -формул

$$\begin{aligned} &\Psi(\bar{x}_0, \bar{y}), \Phi_{=}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}), \Phi_{=}^*(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}), \Phi_{\in}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}), \Phi_{\in}^*(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y}), \\ &\Phi_{P_0}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n_0-1}, \bar{y}), \Phi_{P_0}^*(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n_0-1}, \bar{y}), \dots, \Phi_{P_k}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n_k-1}, \bar{y}), \\ &\Phi_{P_k}^*(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n_k-1}, \bar{y}) \end{aligned}$$

(наборы $\bar{x}_i$ имеют одинаковую длину k , которая называется размерностью конструктивизации, набор $\bar{y}$ имеет длину l) и набор параметров $\bar{b} \in B^l$ такие, что $\{a \in A : \mathbb{A}^k \models \Psi^\Theta(a, \bar{b})\} \subseteq B^k$ и последовательность релятивизированных формул

$$\Psi^\Theta, \Phi_{=}^\Theta, (\Phi_{=}^*)^\Theta, \Phi_{\in}^\Theta, (\Phi_{\in}^*)^\Theta, \Phi_{P_0}^\Theta, (\Phi_{P_0}^*)^\Theta, \dots, (\Phi_{P_k})^\Theta, (\Phi_{P_k}^*)^\Theta$$

с параметрами $\bar{b}$ Σ -определяют допустимое множество $\mathbb{A}$ в $\mathbb{A}$.

Для произвольного подмножества $B \subseteq A$ ранг $rnk(B)$ определяется следующим образом:

$$rnk(B) = \sup \{rnk(b) : b \in B\},$$

где, как обычно, ранг элемента из A определяется так: если p – праэлемент, то $rnk(p) = 0$; если a – множество, то $rnk(a) = \sup\{rnk(x) + 1 : x \in a\}$.

Определение 5 ([2]). Рангом внутренней конструктивизируемости допустимого множества $\mathbb{A}$ называется ординал

$$cr(\mathbb{A}) = \inf\{rnk(B) : \mathbb{A} \text{ конструктивизируемо внутри } B\}.$$

Также напомним определение простейшего класса допустимых множеств, используемых в дальнейшем изложении. Пусть

$$HF_0(M) = P_{fin}(A),$$

$$HF_{n+1} = P_{fin}(HF_n(A)) \cup HF_n(A), \quad n \in \omega$$

(здесь $P_{fin}(M)$ – множество всех конечных подмножеств множества M).

Пусть $HF(M) = \bigcup_{n \in \omega} HF_n(M)$.

Определение 6 ([5, 7]). Наследственно конечной надстройкой над $\mathfrak{M}$ называется структура

$$\mathbb{HIF}(\mathfrak{M}) = \langle HF(M) \cup M, \emptyset^{\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})}, \in^{\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})}, \dots \rangle$$

(многообразием обозначены интерпретации остальных символов сигнатуры $\sigma = \sigma' \cup \sigma_1$) такая, что $(\mathbb{HIF}(\mathfrak{M}) \upharpoonright \sigma') \upharpoonright M = \mathfrak{M}$.

В следующей теореме строятся континуальный и счетный примеры структур, наследственно конечные надстройки над которыми имеют ранг внут-

ренной конструктивизируемости 0. Континуальная структура является обогащением структуры $\mathcal{F}_0$, а счетная структура является аналогичным обогащением некоторого расширения структуры $\mathcal{F}_{rec}$.

Теорема 1.

1. Существует обогащение $\mathcal{F}'_0$ структуры $\mathcal{F}_0$ такое, что $cr(\mathbb{HIF}(\mathcal{F}'_0)) = 0$.
2. Существует счетное расширение $\mathcal{G}$ структуры $\mathcal{F}_{rec}$, для обогащения (аналогичного п. 1)) $\mathcal{G}'$ которого верно $cr(\mathbb{HIF}(\mathcal{G}')) = 0$.

Доказательство. 1. Прежде укажем, как можно интерпретировать ограниченные кванторы в $\mathcal{F}_0$. Пусть $\Phi(k, n)$ – формула, определяющая некоторое подмножество $A \subseteq \mathbb{N}^2$, тогда в $\mathcal{F}_0$ существует характеристическая функция χ_A этого множества. Определим по функции g такой, что

$$g([k, n]) = \chi_A([k, n]) \cdot |(k - (n + 1))|$$

минимизацией функцию $f = M(g)$ (это соответствует минимальному k такому, что $\neg\Phi(k, n) \vee k = n + 1$) и получим, что

$$f * n = n + 1 \Leftrightarrow (\forall k \leq n) \Phi(k, n).$$

Аналогично, если

$$g([k, n]) = (1 - \chi_A([k, n])) \cdot (k - (n + 1)) \text{ и } f = M(g),$$

то

$$f * n \leq n \Leftrightarrow (\exists k \leq n) \Phi(k, n).$$

Таким образом, можно считать, что в $\mathcal{F}_0$ к формулам, выделяющим некоторые подмножества натуральных чисел, применимы ограниченные кванторы (по натуральным числам).

Сопоставим $\nu^{-1}(n)$ значение терма $\underline{n}$ в F_0 . Ясно, что нумерация ν является конструктивизацией стандартной модели арифметики в $\mathbb{HIF}(\mathcal{F}_0)$ внутри F_0 .

Далее, используя Σ -определимое внутри F_0 кодирование конечных последовательностей функций, описанное в лемме 1, и некоторую конструктивизацию $\gamma : \omega \rightarrow HF(\omega)$ допустимого множества $\mathbb{HIF}(\omega)$, укажем нумерацию ν_* для $\mathbb{HIF}(\mathcal{F}_0)$ внутри $\mathcal{F}_0$.

Пусть $a \in HF(F_0)$, а $\varkappa \in HF(\omega)$, $f_0, \dots, f_k \in F_0$ и $a_\varkappa \in \mathbb{N} (\subseteq F_0)$ таковы, что $\varkappa(f_0, \dots, f_k) = a$ и $\gamma^{-1}(\varkappa) = \nu(a_\varkappa)$. Тогда положим $\nu_*^{-1}(a)$ множеству всех функций h таких, что

$$h \circ 0 = a_\varkappa, \quad h \circ 1 = g,$$

где функция g кодирует последовательность $\langle f_0, \dots, f_k \rangle$ как в лемме 1. Ясно, что носитель такой нумерации (обозначим за ν_*^{-1}) и его дополнение определимы $\exists$ -формулами внутри F_0 .

Отношения равенства и принадлежности в $\mathbb{HIF}(\mathcal{F}_0)$ определяются совместной рекурсией:

- (a) $\varkappa_1(\bar{f}_1) \in \varkappa_2(\bar{f}_2) \Leftrightarrow (\exists \varkappa' \in \varkappa_2)(\varkappa_1(\bar{f}_1) = \varkappa'(\bar{f}_2));$
- (b) $\varkappa_1(\bar{f}_1) \subseteq \varkappa_2(\bar{f}_2) \Leftrightarrow (\forall \varkappa' \in \varkappa_1)(\exists \varkappa'' \in \varkappa_2)(\varkappa'(\bar{f}_1) = \varkappa''(\bar{f}_2));$
- (c) $\varkappa_1(\bar{f}_1) = \varkappa_2(\bar{f}_2) \Leftrightarrow (\varkappa_1(\bar{f}_1) \subseteq \varkappa_2(\bar{f}_2)) \& (\varkappa_2(\bar{f}_2) \subseteq \varkappa_1(\bar{f}_1)).$

Обозначим за $P_\in$ и $P_=$ отношения принадлежности и равенства для указанной нумерации, а за $P'_\in$ – отношение принадлежности для конструктивизации γ . Так как γ – конструктивизация допустимого множества $\mathbb{HIF}(\omega)$ в классическом смысле (натуральными числами), то отношение $P'_\in$ является рекурсивным.

Определим отношение $P_=$. Дадим сначала его “неформальное” определение:

$$P_=(f_0, f_1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f_0 \in \nu_*^{-1} \ \& \ f_1 \in \nu_*^{-1} \ \& \text{ «}\mathfrak{x} \text{ с номером } f_0 \circ 0 \text{ и } \mathfrak{x} \text{ с номером } f_1 \circ 0 \text{ имеют}$
одинаковую теоретико-множественную структуру и их ранги совпадают» } \&
 $\& [(\forall n \leq lh^c(f_0 \circ 1))((\forall m \leq lh^c(f_1 \circ 1))(pr^c(f_0 \circ 1, n) \neq pr^c(f_1 \circ 1, m)) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{ «}\mathfrak{x} \text{ с номером } f_0 \circ 0 \text{ не содержит вхождения } n\text{»}) \&$
 $\& (\forall n \leq lh^c(f_1 \circ 1))((\forall m \leq lh^c(f_0 \circ 1))(pr^c(f_1 \circ 1, n) \neq pr^c(f_0 \circ 1, m)) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{ «}\mathfrak{x} \text{ с номером } f_1 \circ 0 \text{ не содержит вхождения } n\text{»}) \&$
 $\& (\forall n \leq lh^c(f_1 \circ 1))(\text{«если } \langle n_0, \dots, n_k \rangle \text{ – список всех номеров таких, что}$
 $pr^c(f_1 \circ 1, n) = pr^c(f_0 \circ 1, n_i), \text{ то } \mathfrak{x} \text{ с номером } f_0 \circ 0 \text{ отличается от } \mathfrak{x}$
с номером } f_1 \circ 0 \text{ как минимум тем, что все вхождения } n \text{ заменены}
на вхождения любого элемента из } \langle n_0, \dots, n_k \rangle\text{»})].

Далее в качестве конструктивизации допустимого множества $\mathbb{H}\mathbb{F}(\omega)$ бу-
дет использоваться отображение $\gamma : \omega \rightarrow HF(\omega)$, определенное так (см.
[8]):

$$\gamma(n) = \begin{cases} n_1 & , \text{ если } n = c(0, n_1) \\ \{\gamma(n_1)\} & , \text{ если } n = c(1, n_1) \\ \gamma(n_1) \cup \gamma(n_2) & , \text{ если } n = c(2, c(n_1, n_2)) \text{ и } n_1 \leq n_2 \\ \emptyset & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Чтобы дать полную формулу для $P_=_$, определим дополнительно несколь-
ко функций на натуральных числах. Все эти функции определяются воз-
вратной рекурсией, поэтому являются ч.р.ф. и могут быть определены бес-
кванторными формулами в $\mathcal{F}_0$.

Определим функцию $\chi_1(n, m)$ такую, что

$$\chi_1(n, m) = 1 \Leftrightarrow \text{«}\mathfrak{x} \text{ с номером } n \text{ не содержит вхождения } m\text{»}.$$

$$\chi_1(n, m) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } (\exists n_1 \leq n)(n = c(0, n_1) \ \& \ n_1 \neq m) \\ 1 & , \text{ если } (\exists n_1 \leq n)(n = c(1, n_1) \ \& \ \chi_1(n_1, m) = 1) \\ 1 & , \text{ если } (\exists n_1 \leq n)(\exists n_2 \leq n)(n = c(2, c(n_1, n_2)) \ \& \\ & \ \& \ \chi_1(n_1, m) \cdot \chi_1(n_2, m) = 1) \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Далее при определении функций для краткости будем опускать кванторы существования (они всегда ограничены одним из аргументов).

Определим функцию $\chi_2(n, m)$ такую, что

$$\chi_2(n, m) = 1 \Leftrightarrow \text{«}\mathfrak{N} \text{ с номером } n \text{ и } \mathfrak{N} \text{ с номером } m \text{ имеют одинаковую}$$

теоретико-множественную структуру и их ранги совпадают».

$$\chi_2(n, m) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } n = c(0, n_1) \ \& \ m = c(0, m_1) \\ 1 & , \text{ если } n = c(1, n_1) \ \& \ m = c(1, m_1) \ \& \ \chi_2(n_1, m_1) = 1 \\ 1 & , \text{ если } n = c(2, c(n_1, n_2)) \ \& \ m = c(2, c(m_1, m_2)) \ \& \\ & \ \& \ (\chi_2(n_1, m_1) \cdot \chi_2(n_2, m_2) = 1 \ \vee \ \chi_2(n_1, m_2) \cdot \chi_2(n_2, m_1) = 1) \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{aligned} & \Phi(f_0, f_1, i, x) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\forall n \leq lh^c(f_1))[(pr^c(f_0, i) = pr^c(f_1, n)) \rightarrow ex(n, x) = 1] \ \& \\ & \ \& \ ((pr^c(f_0, i) \neq pr^c(f_1, n)) \rightarrow ex(n, x) = 0)]. \end{aligned}$$

Функция $ex(x, y)$, выдающая показатель x -го простого числа в разложении y на простые множители, является ч.р.ф. и определима бескванторной формулой. Если f_0, f_1 кодируют некоторые последовательности функций, $n \leq lh^c(f_1)$, $i \leq lh^c(f_0)$ и выполняется $\Phi(f_0, f_1, i, x)$, то

$$ex(n, x) = 1 \Leftrightarrow pr^c(f_0, i) = pr^c(f_1, n).$$

Определим функцию $\chi_3(n, m, i, x, y)$ такую, что если выполняется $\Phi(f_0, f_1, i, x)$, то

$$\chi_3(n, m, i, x, lh^c(f_1)) = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ « $\varkappa$ с номером m отличается от $\varkappa$ с номером n как минимум тем, что все вхождения i заменены на вхождения любого j такого, что $j \leq lh^c(f_1)$ и

$$ex(j, x) = 1 \text{»}.$$

$$\chi_3(n, m, i, x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } n = c(0, i) \ \& \ m = c(0, m_1), \text{ где } m_1 \leq y \text{ и} \\ & ex(m_1, x) = 1 \\ 1 & , \text{ если } n = c(1, n_1) \ \& \ m = c(1, m_1) \ \& \ \chi_3(n_1, m_1, i, x, y) = 1 \\ 1 & , \text{ если } n = c(2, c(n_1, n_2)) \ \& \ m = c(2, c(m_1, m_2)) \ \& \\ & \ \& \ (\chi_3(n_1, m_1, i, x, y) \cdot \chi_3(n_2, m_2, i, x, y) = 1 \vee \\ & \vee \chi_3(n_1, m_2, i, x, y) \cdot \chi_3(n_2, m_1, i, x, y) = 1) \\ 1 & , \text{ если } x = 0 \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Полная запись формулы для $P_ =$ выглядит так:

$$P_=(f_0, f_1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow f_0 \in \nu_*^{-1} \ \& \ f_1 \in \nu_*^{-1} \ \& \ \chi_2(f_0 \circ 0, f_1 \circ 0) = 1 \ \& \\ & \ \& \ [(\forall n \leq lh^c(f_0 \circ 1))((\forall m \leq lh^c(f_1 \circ 1))(pr^c(f_0 \circ 1, n) \neq pr^c(f_1 \circ 1, m)) \rightarrow \\ & \rightarrow \chi_1(f_0 \circ 0, n) = 1) \ \& \ (\forall n \leq lh^c(f_1 \circ 1))((\forall m \leq lh^c(f_0 \circ 1))(pr^c(f_1 \circ 1, n) \neq \\ & \neq pr^c(f_0 \circ 1, m)) \rightarrow \chi_1(f_1 \circ 0, n) = 1) \ \& \ \exists x(x = p_0 \cdot \dots \cdot p_{lh^c(f_0 \circ 1)}) \ \& \\ & \ \& \ (\forall n \leq lh^c(f_1 \circ 1))(\forall y \leq x)(\Phi(f_1 \circ 1, f_0 \circ 1, n, y) \rightarrow \\ & \rightarrow \chi_3(f_1 \circ 0, f_0 \circ 0, n, y, lh^c(f_0 \circ 1)) = 1))] \end{aligned}$$

(здесь p_i – i -ое простое число, а соответствующее произведение определяется рекурсивной функцией).

Рассмотрим детальнее ее подформулы

$$\begin{aligned} \Phi_0(f_0, f_1) \Leftrightarrow (\forall n \leq lh^C(f_0 \circ 1))((\forall m \leq lh^C(f_1 \circ 1))(pr^C(f_0 \circ 1, n) \neq \\ \neq pr^C(f_1 \circ 1, m)) \rightarrow \chi_2(f_0 \circ 0, n) = 1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Phi_1(f_0, f_1) \Leftrightarrow \exists x(x = p_0 \cdot \dots \cdot p_{lh^C(f_0 \circ 1)} \& \\ \& (\forall n \leq lh^C(f_1 \circ 1))(\forall y \leq x)(\Phi(f_1 \circ 1, f_0 \circ 0, n, y) \rightarrow \\ \rightarrow \chi_3(f_1 \circ 0, f_0 \circ 1, n, y, lh^C(f_0 \circ 1)) = 1)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_=(f_0, f_1) \Leftrightarrow f_0 \in \nu_*^{-1} \& f_1 \in \nu_*^{-1} \& \chi_1(f_0 \circ 0, f_1 \circ 0) = 1 \& \\ \& \Phi_0(f_0, f_1) \& \Phi_0(f_1, f_0) \& \Phi_1(f_0, f_1) \end{aligned}$$

Формула $\Phi_0(f_0, f_1)$ эквивалентна формуле

$$\begin{aligned} (\forall n \leq lh^C(f_0 \circ 1))[(\exists m \leq lh^C(f_1 \circ 1))(pr^C(f_0 \circ 1, n) = pr^C(f_1 \circ 1, m)) \vee \\ \vee \chi_2(f_0 \circ 0, n) = 1]. \end{aligned}$$

Обозначим за $A_0(f_0, f_1)$ множество натуральных чисел, задаваемое формулой

$$\begin{aligned} \Phi'_0(n, f_0, f_1) \Leftrightarrow [(\exists m \leq lh^C(f_1 \circ 1))(pr^C(f_0 \circ 1, n) = pr^C(f_1 \circ 1, m)) \vee \\ \vee \chi_2(f_0 \circ 0, n) = 1] \end{aligned}$$

для фиксированных f_0, f_1 .

Формула $\Phi_1(f_0, f_1)$ эквивалентна формуле

$$\exists x \exists y [x = p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_{lh^C(f_1 \circ 1)} \&$$

$$\begin{aligned}
& \& y = 2^{lh^c(f_1 \circ 1)} \cdot 3^x \& (\forall z \leq y)(ex(0, z) \leq ex(0, y) \& ex(1, z) \leq ex(1, y) \& \\
& \& (\neg \Phi(f_1 \circ 1, f_0 \circ 0, ex(0, z), ex(1, z))) \vee \\
& \vee \chi_3(f_1 \circ 0, f_0 \circ 1, ex(0, z), ex(1, z), lh^c(f_0 \circ 1)) = 1].
\end{aligned}$$

Обозначим за $A_1(f_0, f_1)$ множество натуральных чисел, задаваемое формулой

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(z, f_0, f_1, y) \Leftrightarrow & [ex(0, z) \leq ex(0, y) \& ex(1, z) \leq ex(1, y) \& \\
& \& (\neg \Phi(f_1 \circ 1, f_0 \circ 0, ex(0, z), ex(1, z))) \vee \\
& \vee \chi_3(f_1 \circ 0, f_0 \circ 1, ex(0, z), ex(1, z), lh^c(f_0 \circ 1)) = 1]
\end{aligned}$$

для фиксированных f_0, f_1 (и $y = 2^{lh^c(f_1 \circ 1)} \cdot 3^{p_0 \cdot p_1 \cdots p_{lh^c(f_1 \circ 1)}}$).

Отношение $P_{\in}$ и его дополнение определяются так:

$$\begin{aligned}
& P_{\in}(f_0, f_1) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow f_0 \in \nu_*^{-1} \& f_1 \in \nu_*^{-1} \& (\exists n \leq f_1 \circ 0)(P_{\in}'(n, f_1 \circ 0) \& \exists g(g \in \nu_*^{-1} \& g \circ 0 = n \& \\
& \& g \circ 1 = f_1 \circ 1 \& P_{=}(g, f_0))), \\
& \neg P_{\in}(f_0, f_1) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow f_0 \notin \nu_*^{-1} \vee f_1 \notin \nu_*^{-1} \vee (\forall n \leq f_1 \circ 0)(\neg P_{\in}'(n, f_1 \circ 0) \vee \exists g((g \in \nu_*^{-1} \& g \circ 0 = n \& \\
& \& g \circ 1 = f_1 \circ 1) \rightarrow \neg P_{=}(g, f_0))).
\end{aligned}$$

Обозначим за $A_2(f_0, f_1)$ множество натуральных чисел, задаваемое формулой

$$\begin{aligned}
\Phi_2(n, f_0, f_1) \Leftrightarrow & [(\neg P_{\in}'(n, f_1 \circ 0) \vee \exists g((g \in \nu_*^{-1} \& g \circ 0 = n \& \\
& \& g \circ 1 = f_1 \circ 1) \rightarrow \neg P_{=}(g, f_0)))]
\end{aligned}$$

для фиксированных f_0, f_1 .

Расширим сигнатуру σ_0 функцией $\mathcal{X} : F_0^3 \rightarrow F_0$ такой, что $\mathcal{X}(f_0, f_1, 0) = f_{A_0(f_0, f_1)}$, $\mathcal{X}(f_0, f_1, 1) = f_{A_1(f_0, f_1)}$, $\mathcal{X}(f_0, f_1, 2) = f_{A_2(f_0, f_1)}$ (и $\mathcal{X}(f_0, f_1, f) = \uparrow$, если $f \notin \{0, 1, 2\}$), где $f_{A_i(f_0, f_1)}$ – характеристическая функция множества $A_i(f_0, f_1)$. Получим обогащение $\mathcal{F}'_0$ структуры $\mathcal{F}_0$, в которой, учитывая замечание об ограниченных кванторах в начале доказательства, отношения $P_=_$ и $P_\in$ (и их дополнения) будут определяемы $\exists$ -формулами. Таким образом, $cr(\mathbb{HIF}(\mathcal{F}'_0)) = 0$.

2. Так как $\mathcal{F}_{rec}$ – счетная структура, то число возможных множеств $A_i(f_0, f_1)$ (в зависимости от f_0, f_1), которые были определены в доказательстве п. 1), также счетно. Расширим множество F_{rec} всеми характеристическими функциями множеств $A_i(f_0, f_1)$ для произвольных $f_0, f_1 \in F_{rec}$ и замкнем относительно всех функций сигнатуры σ_0 – получим счетное расширение $\mathcal{G}_1$ структуры $\mathcal{F}_{rec}$. Если $\mathcal{G}_n$ – счетное расширение, полученное на n -ом шаге, то $\mathcal{G}_{n+1}$ аналогично получается из $\mathcal{G}_n$ добавлением всех характеристических функций множеств $A_i(f_0, f_1)$. Возьмем теперь $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{G}_n$. Ясно, что это счетное расширение $\mathcal{F}_{rec}$, являющееся подструктурой $\mathcal{F}_0$, для которого существует аналогичное кодирование конечных последовательностей (так как, в соответствии с леммой 1, для произвольной последовательности $\langle f_0, \dots, f_k \rangle$ кодирующая ее функция может быть получена из $f_0, \dots, f_k$ с использованием сигнатурных операций). Если теперь рассмотреть обогащение $\mathcal{G}'$, аналогичное п. 1), то отношения $P_=_$ и $P_\in$ (и их дополнения) будут определяемы $\exists$ -формулами в $\mathcal{G}'$. Действительно, для множества $A_i(f_0, f_1)$ функции f_0, f_1 были добавлены на некоторых n -ом и m -ом шагах. Тогда характеристическая функция для этого множества была добавлена на шаге $\max\{n, m\}$, поэтому ее можно получить с помощью функции $\mathcal{X}$, добавленной при обогащении. Таким образом, $cr(\mathbb{HIF}(\mathcal{G}')) = 0$.

□

При доказательстве теоремы 1 существенно используются все сигнатурные символы. Для кодирования требуется лишь операция аппликации и символ $\uparrow$, однако, так как для интерпретации стандартной модели арифметики требуются операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и простейшие функции, а для интерпретации ограниченных кванторов требуется оператор минимизации и взятие значения функции, по существу использованы все символы.

Список литературы

- [1] R. Montague, Recursion theory as a branch of model theory, Proceedings of the Third International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Amsterdam, 1967, 63-86.
- [2] А.И. Стукачев, О внутренней конструктивизируемости допустимых множеств, Вестник НГУ, в. 5, N1 (2005), 69 - 76.
- [3] A.I. Stukachev, Effective model theory: an approach via Sigma-definability, Effective Mathematics of the Uncountable, 2013, Cambridge University Press, Lecture Notes in Logic, v. 41, 164-197.
- [4] Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва, Мир, 1972.
- [5] Ю.Л. Ершов, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.
- [6] Y.N. Moschovakis, Elementary induction on abstract structures, Amsterdam, 1974.
- [7] J. Barwise, Admissible Sets and Structures, Springer-Verlag, 1975.

- [8] A.I. Stukachev, Uniformization property in hereditary finite superstructures, Siberian Advances in Mathematics, v.7, N1 (1997), 123 - 132.

Арте́м Серге́евич Бу́рнистов

Новосиби́рский госуда́рственный униве́рситет

ул. Пиро́гова, 1

Новосиби́рск, 630090, Росси́я

e-mail: a.burnistov@g.nsu.ru

Алексе́й Ильи́ч СТУКА́ЧЕВ

Инсти́тут матема́тики им С.Л. Со́болева СО РАН

просп. акад. Ко́птюга, 4

Новосиби́рский госуда́рственный униве́рситет

ул. Пиро́гова, 1

Новосиби́рск, 630090, Росси́я

e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А. С. Бурнистов, А. И. Стукачев, О внутренней конструктивизируемости функциональных структур

Аннотация. Строятся и исследуются примеры функциональных структур, наследственно конечные надстройки над которыми имеют ранг внутренней конструктивизируемости 0.

Ключевые слова: обобщенная вычислимость, допустимые множества, эффективная теория моделей, конструктивизируемость.