

УДК 510.5

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОРЯДКОВ И ТЕМПОРАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

А. И. Стукачев

Аннотация. Исследуются алгоритмические свойства интервальных расширений плотных линейных порядков, в частности, степени сложности (а именно, $s\Sigma$ -степени) таких расширений. Показано, что непрерывность является необходимым и достаточным условием равенства степеней сложности порядка и его интервального расширения. Темпоральные аппроксимационные пространства над интервальными расширениями рассматриваются как математические модели семантики глаголов в естественных языках. Показано, что непрерывность порядка влечет эффективность проверки истинности Δ_0^{DL} -формул в пространствах над sc -простыми обогащениями. Как следствие получено эффективное описание интервалов, соответствующих различным временам английского глагола.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.415

Ключевые слова: эффективная теория моделей, линейные порядки, интервальные расширения, аппроксимационные пространства, математическая лингвистика.

1. Введение

В работе рассматриваются вопросы эффективной теории моделей и ее приложений. Во-первых, получен ряд положительных результатов, относящихся к обобщенной проблеме Ю. Л. Ершова [1–3] о строении Σ -степеней плотных линейных порядков. В частности, получены критерии Σ -определимости (эффективной интерпретируемости) в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками для интервальных расширений и интервальных булевых алгебр, порожденных этими порядками. Интервальные расширения и булевы алгебры в отличие от морлизаций и скулемизаций в случае плотных линейных порядков устроены нетривиально и оказываются полезными во многих случаях.

Во-вторых, определены так называемые темпоральные аппроксимационные пространства на линейных порядках, позволяющие с помощью формул динамической логики естественным образом анализировать свойства темпоральных процессов. В качестве структуры «конечных элементов» при этом используются именно интервальные расширения. Получены естественные примеры использования динамической логики для определения отношений на «бесконечных» элементах через их аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, договор 075–15–2019–1613 с Министерством науки и высшего образования РФ.

В-третьих, найдены приложения полученных результатов в математической лингвистике, в частности, в задачах анализа семантики глагольных форм в естественных языках (например, в английском и русском). Для анализа текстовой информации, выражаемой предложениями естественных языков, одной из центральных является задача определения семантических значений глаголов, образующих рассматриваемые предложения. В работе обсуждаются вопросы алгоритмической сложности такого типа задач в рамках формальной семантики естественных языков, предложенной Монтегю. Полученные результаты позволяют анализировать семантику предложений естественных языков (в частности, английского), содержащих глаголы в произвольном времени, с использованием равномерных и конструктивных (алгоритмически реализуемых) методов. Алгоритмические аспекты интервальной семантики, насколько известно автору, ранее не исследовались специалистами в этой области. Полученные результаты можно считать примером применения методов обобщенной вычислимости в формальной семантике естественных языков.

2. Плотные линейные порядки и обобщенная конструктивизируемость

Понятие Σ -определимости, или эффективной интерпретируемости, является одним из центральных в эффективной теории моделей [4]. В данной работе используются модификации приведенного ниже определения из [1, 2], позволяющие рассматривать случай структур с бесконечными вычислимыми сигнатурами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k} \rangle$ и $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Структура $\mathfrak{M}$ называется Σ -определимой в $\mathbb{A}$, если существуют Σ -формулы

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, x_1, y), \Psi^*(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \dots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Phi_0^*(x_0, \dots, x_{n_0-1}, y), \dots, \Phi_k(x_0, \dots, x_{n_k-1}, y), \Phi_k^*(x_0, \dots, x_{n_k-1}, y)$$

сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и $a \in A$ такие, что для $M_0 \Leftarrow \Phi_{\mathbb{A}}(x_0, a)$ и $\eta \Leftarrow \Psi_{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$ справедливо следующее: $M_0 \neq \emptyset$, η является отношением конгруэнтности на структуре

$$\mathfrak{M}_0 \Leftarrow \langle M_0; P_0^{m_0}, \dots, P_k^{m_0} \rangle,$$

где $P_k^{m_0} \Leftarrow \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \dots, x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k}$ для всех k , $\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a)$, $\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0, \dots, x_{n_k-1}, a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \dots, x_{n_k-1})$ для всех k и структура $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-структуре $\mathfrak{M}_0/\eta$.

В случае, когда структура $\mathfrak{M}$ имеет бесконечную вычислимую сигнатуру, будем отождествлять ее со структурой $(\mathbb{HIF}(\mathfrak{M}), \text{Sat}_{\mathfrak{M}})$, где $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$ — наименьшее допустимое множество над $\mathfrak{M}$, а $\text{Sat}_{\mathfrak{M}} \subseteq \omega \times M^{<\omega}$ — интерпретация сигнатурных символов с учетом выбранной нумерации.

Для структур $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ через $\mathfrak{A} \leq_{\Sigma} \mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что структура $\mathfrak{A}$ Σ -определима в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{B})$. Будем обозначать через $\mathfrak{A} \equiv_{\Sigma} \mathfrak{B}$ тот факт, что $\mathfrak{A} \leq_{\Sigma} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leq_{\Sigma} \mathfrak{A}$ (структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в этом случае называются Σ -эквивалентными). Возникающие таким образом полурешетки Σ -степеней структур (см. [4]) позволяют получить представление об относительной конструктивной сложности структур произвольной мощности.

Для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ действительных и комплексных чисел известно, что

$$\mathbb{C} \leq_{\Sigma} \mathbb{R}.$$

Существенным и нетривиальным усилением данного факта является следующий результат [1].

Теорема 2.1 (Ю. Л. Ершов, 1985). $\mathcal{C} \leq_{\Sigma} \mathbb{L}$ для любого плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ мощности континуум.

Данная теорема мотивирует проблему описания Σ -степеней (несчетных) плотных линейных порядков. В частности, для плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ важно найти примеры систем $\mathfrak{M}$, для которых

- 1) $\mathfrak{M} \leq_{\Sigma} \mathbb{L}$, при этом $\mathbb{L}$ используется «существенно»;
- 2) $\mathfrak{M}$ является «простой» и в то же время естественной и полезной для приложений.

Возможность для приложений возникает, в частности, когда $\mathbb{L}$ рассматривается как ось (шкала) времени. В данной работе приводятся примеры таких приложений в математической лингвистике. Как показано ниже, в отличие от результата Ю. Л. Ершова о поле комплексных чисел в этом случае возникает зависимость от типа плотного линейного порядка.

Необходимо упомянуть следующие понятия, гипотезы и результаты, возникающие при исследовании конструктивных свойств плотных линейных порядков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (Ю. Л. Ершов). Пусть T — теория первого порядка.

- 1) T называется *регулярной*, если она разрешима и модельно полна;
- 2) T называется *c-простой* (*конструктивно простой*), если она разрешима, модельно полна, ω -категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

Гипотеза 2.1 (Ю. Л. Ершов, 1998). Предположим, что теория первого порядка T имеет несчетную модель, Σ -определимую в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$, для некоторой системы $\mathfrak{M}$, имеющей *c-простую* теорию. Тогда T имеет несчетную модель, Σ -определимую в $\mathbb{HIF}(\mathbb{L})$ для некоторого $\mathbb{L} \models \text{DLO}$.

Формальным следствием этой гипотезы является

Гипотеза 2.2. Всякая *c-простая* теория имеет несчетную модель, Σ -определимую в $\mathbb{HIF}(\mathbb{L})$ для некоторого $\mathbb{L} \models \text{DLO}$.

Усилением требований, накладываемых на теорию, получается

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Теория первого порядка T называется *sc-простой*, если она разрешима, подмодельно полна, ω -категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

В [5] установлена

Теорема 2.2. Пусть T — *sc-простая* теория конечной сигнатуры. Тогда существует несчетная модель $\mathfrak{M}$ теории T , Σ -определимая в $\mathbb{HIF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \text{DLO}$.

Оказывается (см., например, [6]), что ослабление этих условий дает теории, не имеющие несчетных моделей, Σ -определимых в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками.

3. Интервальные расширения плотных линейных порядков

Теоретико-модельные обогащения и расширения структур (обогащение Морли, обогащение Скулема, расширение Маркера и т. д.) играют важную роль как в классической теории моделей, так и в обобщенной теории вычислимости над

структурами [4]. Еще один естественный пример расширения дают следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathbb{L} = (L, \leq)$ — плотный линейный порядок. Непустое множество $i \subseteq L$ называется *интервалом* в $\mathbb{L}$, если для любых $l_1, l_2, l_3 \in L$ таких, что $l_1, l_3 \in i$ и $l_1 \leq l_3$, из $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ следует, что $l_2 \in i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathbb{L} = (L, \leq)$ — плотный линейный порядок. *Интервальным расширением* $\mathbb{L}$ называется структура

$$\mathcal{I}(\mathbb{L}) = (I(L), \leq, \subseteq),$$

где $I(L)$ — множество всех интервалов в $\mathbb{L}$, отношение $\subseteq$ на $I(L)$ интерпретируется как стандартное теоретико-множественное отношение включения, а отношение частичного порядка $\leq$ на множестве $I(L)$ индуцировано отношением $\leq$ структуры $\mathbb{L}$: для $i_1, i_2 \in I(L)$ полагаем $i_1 \leq i_2$ тогда и только тогда, когда для любых $l_1 \in i_1$ и $l_2 \in i_2$ выполняется условие $l_1 \leq l_2$. Аналогично для $i_1, i_2 \in I(L)$ полагаем $i_1 < i_2$ тогда и только тогда, когда для любых $l_1 \in i_1$ и $l_2 \in i_2$ выполняется условие $l_1 < l_2$.

Элементы L будем отождествлять с интервалами вида $[l; l]$, $l \in L$. Таким образом, $L \subseteq I(L)$, а значит, интервальное расширение линейного порядка можно считать его расширением в теоретико-модельном смысле.

Следующие понятия стандартны и часто используются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $i_1, i_2 \in I(L)$ — произвольные элементы (т. е. интервалы) интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$.

- 1) i_1 называется *подынтервалом* i_2 , если $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2)$;
- 2) i_1 называется *собственным подынтервалом* i_2 , если $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge (i_1 \neq i_2)$;
- 3) i_1 называется *начальным подынтервалом* i_2 , если $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge \neg \exists i_3 ((i_3 \subseteq i_2) \wedge (i_3 < i_1))$;
- 4) i_1 называется *финальным подынтервалом* i_2 , если $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge \neg \exists i_3 ((i_3 \subseteq i_2) \wedge (i_1 < i_3))$;
- 5) i_1 называется *точечным интервалом*, если $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models \forall i_0 ((i_0 \subseteq i_1) \rightarrow (i_0 = i_1))$.

Отметим, что не всегда интервал, определяемый указанным выше образом (т. е. фактически формулой логики второго порядка), является определимым в логике первого порядка с параметрами. В качестве примера достаточно рассмотреть интервал $(1, \sqrt{2})$ в порядках $(\mathbb{Q}, \leq)$ и $(\mathbb{R}, \leq)$ соответственно. В первом случае этот интервал не является определимым, а во втором вследствие насыщенности $\mathbb{R}$ он определим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Линейный порядок $\mathbb{L}$ называется *непрерывным* (или *полным по Дедекинду*), если для любых $A, B \subset L$ таких, что $A \cup B = L$, и для любых $a \in A$ и $b \in B$ верно $a < b$, либо A имеет наибольший элемент, либо B имеет наименьший элемент.

Известно, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с естественным порядком непрерывно, а множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел — нет.

Отметим, что свойство непрерывности, не выразимое предложением логики первого порядка в $\mathbb{L}$, выразимо в интервальном расширении $\mathcal{I}(\mathbb{L})$. А именно, пусть $At(i)$ — формула, означающая, что i — точечный (атомарный) интервал, $Left(i_1, i_2)$ — формула, означающая, что i_1 — начальный подынтервал i_2 , а $Right(i_1, i_2)$ — формула, означающая, что i_1 — финальный подынтервал i_2 .

Тогда непрерывность $\mathbb{L}$ выражается в $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ следующим предложением, которое будем обозначать через Cont:

$$\begin{aligned} \forall i_1 \forall i_2 ((\neg \exists i (At(i) \wedge (i \subseteq i_1) \wedge (i \subseteq i_2)) \wedge \forall i (At(i) \rightarrow ((i \subseteq i_1) \vee (i \subseteq i_2)))) \\ \rightarrow \exists i (At(i) \wedge (Right(i, i_1) \vee Left(i, i_2)))). \end{aligned}$$

Определимым интервальным расширением плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ будем называть структуру

$$\mathcal{I}_d(\mathbb{L}) = (I_d(L), \leq, \subseteq),$$

где $I_d(L)$ есть множество интервалов, определенных (с параметрами) в $(\mathbb{L}, \leq)$ (т. е. учитывая свойство элиминации кванторов для плотных линейных порядков, с помощью их граничных точек).

Как легко убедиться, свойство определимости интервала выразимо в $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ формулой первого порядка. Будем обозначать через Def предложение, утверждающее, что все интервалы в $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ определимы.

В следующей лемме показано, что Def является следствием Cont и аксиом плотного линейного порядка.

Лемма 3.1. *Если $\mathbb{L}$ — непрерывный плотный линейный порядок, то $\mathcal{I}(\mathbb{L}) = \mathcal{I}_d(\mathbb{L})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $I_d(L) \subseteq I(L)$ имеет место для любого плотного линейного порядка L , поэтому достаточно показать включение в обратную сторону.

Пусть $i \in I(L)$. Рассмотрим, например, случай, когда i ограничен как справа, так и слева, т. е. существуют такие $a, b \in L$, что $a \leq i \leq b$. Рассмотрим множества $A(i) = \{a \in L \mid a \leq i\}$, $B(i) = \{b \in L \mid i \leq b\}$. Легко убедиться, что $A(i)$ и $B(i)$ являются интервалами, неограниченными слева и справа соответственно. Вследствие непрерывности $\mathbb{L}$ существует $a(i) \in L$, который является либо наибольшим элементом множества $A(i)$, либо наименьшим элементом множества $L \setminus A(i)$. Аналогично существует $b(i) \in L$, который является либо наименьшим элементом множества $B(i)$, либо наибольшим элементом множества $L \setminus B(i)$. В зависимости от этого получаем четыре возможные конфигурации для i : $(a(i); b(i))$, $[a(i); b(i))$, $(a(i); b(i)]$ или $[a(i); b(i)]$.

Случаи, когда i ограничен только слева или только справа, рассматриваются аналогично. В этих случаях будем использовать (неформальные) записи $b(i) = +\infty$ и $a(i) = -\infty$ соответственно. $\square$

Несложно убедиться, что справедлива

Лемма 3.2. *Для произвольного плотного линейного порядка $\mathbb{L}_1$ и непрерывного плотного линейного порядка $\mathbb{L}_2$*

$$\mathcal{I}_d(\mathbb{L}_1) \equiv \mathcal{I}(\mathbb{L}_2)$$

(здесь и далее символ $\equiv$ обозначает элементарную эквивалентность).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.1 непосредственно следует, что $\mathcal{I}(\mathbb{L}_2) = \mathcal{I}_d(\mathbb{L}_2)$, поэтому достаточно установить, что интервальные расширения $\mathcal{I}_d(\mathbb{L})$ и $\mathcal{I}_d(\mathbb{L}')$ элементарно эквивалентны для любых плотных линейных порядков $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$. Последнее вытекает из полноты теории плотно упорядоченных множеств (без концевых элементов) и интерпретируемости определимого интервального расширения в исходном порядке. $\square$

Таким образом, $\mathcal{I}(\mathbb{R}) = \mathcal{I}_d(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{I}_d(\mathbb{Q})$, однако, как следует из приведенных выше рассуждений, $\mathcal{I}(\mathbb{Q}) \not\equiv \mathcal{I}_d(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{I}(\mathbb{Q}) \not\equiv \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Следствием леммы 3.2 является

Лемма 3.3. Если $\mathbb{L}$ — непрерывный плотный линейный порядок, то элементарная теория интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ sc -простая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из счетной категоричности и подмодельной полноты (свойства элиминации кванторов) элементарной теории плотного линейного порядка без конечных элементов, а также интерпретируемости определимого (а значит, и обычного) интервального расширения в исходном порядке. $\square$

Интервальные расширения над непрерывными плотными линейными порядками являются примерами структур с sc -простой теорией, которые интересны не с точки зрения их мощности, а вследствие использования в качестве базисных структур для аппроксимационных пространств, применяемых в приложениях.

Помимо интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ будем также рассматривать порожденную этим расширением *интервальную булеву алгебру* $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ — наименьшую булеву алгебру (относительно стандартных теоретико-множественных операций), содержащую $\mathcal{I}(\mathbb{L})$. Частичный порядок $\leq$ естественным образом расширяется на элементы $\mathcal{B}(\mathbb{L})$.

В работах автора [7–10] (в [7–9] неявно) существенным образом было использовано понятие $s\Sigma$ -сводимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные системы. Система $\mathfrak{A}$ называется $s\Sigma$ -определимой в $\mathbf{HF}(\mathfrak{B})$ (обозначается через $\mathfrak{A} \leq_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если $A \subseteq \mathbf{HF}(B)$ является Σ -определимым подмножеством $\mathbf{HF}(\mathfrak{B})$ и все сигнатурные отношения и функции системы $\mathfrak{A}$ Δ -определимы в $\mathbf{HF}(\mathfrak{B})$.

Понятие $s\Sigma$ -сводимости относится к структурам, а не к их типам изоморфизма и является существенно более сильным, чем отношение Σ -сводимости. Еще одна серия примеров использования этой сводимости получена в данной работе. Важно отметить, что в случае, когда в определении $s\Sigma$ -сводимости в качестве $\mathfrak{A}$ рассматривается некоторое расширение $\mathfrak{B}$, носитель $B \subseteq A$ образует множество праэлементов в $\mathbf{HF}(\mathfrak{B})$.

Для произвольной системы $\mathfrak{A}$ через $\mathfrak{A}_{\text{Morley}}$ будем обозначать *морлизацию* системы $\mathfrak{A}$, т. е. обогащение $\mathfrak{A}$ предикатами для всех определимых (без параметров) отношений (сигнатура такого отношения предполагается вычислимой и позволяющей по номеру предиката получить геделевский номер соответствующей формулы).

Теорема 3.1. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок.

1. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то $\mathcal{I}(\mathbb{L})_{\text{Morley}} \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$.
2. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то $\mathcal{B}(\mathbb{L}) \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на установленных выше леммах. Из того, что $\mathcal{I}(\mathbb{L}) = \mathcal{I}_d(\mathbb{L})$, а также из того, что $\text{Th}(\mathbb{L})$ sc -простая, непосредственно вытекает, что

$$\mathcal{I}_d(\mathbb{L})_{\text{Morley}} \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}.$$

Действительно, (непустые) интервалы, не являющиеся элементами L , естественным образом представляются в $\mathbf{HF}(L)$ наборами вида $\langle b_1, l_1, l_2, b_2 \rangle$, $\langle b, l \rangle$ и $\langle l, b \rangle$, где $l, l_1, l_2 \in L$, $l_1 < l_2$, используются как границы односторонних и двусторонних интервалов соответственно, а $b, b_1, b_2 \in \{0, 1\}$ — как указатели на принадлежность граничной точки интервалу.

Для доказательства п. 2 достаточно заметить, что каждый элемент булевой алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ является объединением конечного числа интервалов. $\square$

В случае, когда плотный линейный порядок $\mathbb{L}$ не обладает свойством непрерывности, Σ -степень интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ может быть строго выше Σ -степени $\mathbb{L}$ в полурешетке Σ -степеней. В качестве простейшего примера можно рассмотреть множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с отношением естественного порядка: легко убедиться, что интервальное расширение $\mathcal{I}(\mathbb{Q})$ несчетно.

С другой стороны, в качестве примера плотного линейного порядка, не являющегося непрерывным, для которого интервальное обогащение имеет такую же Σ -степень, можно рассмотреть порядок, образованный суммой двух непрерывных порядков типа $\mathbb{R}$.

Что касается $s\Sigma$ -степеней интервальных расширений, то справедливо

Предложение 3.1. *Если плотный линейный порядок $\mathbb{L}$ не является непрерывным, то $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \not\equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \not\leq_{s\Sigma} \mathbb{L}$. Пусть существуют $A, B \subseteq L$, образующие «неопределимое» сечение в $\mathbb{L}$ (т. е. ни A , ни B не определимы в $\mathbb{L}$ формулами логики первого порядка с параметрами). Если бы $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \leq_{s\Sigma} \mathbb{L}$, то множество A , состоящее из элементов $l \in L$ таких, что $l < B$, было бы Σ -подмножеством в $\text{HIF}(\mathbb{L})$. Но это невозможно, так как Σ -определимые в $\text{HIF}(\mathbb{L})$ (с параметрами) подмножества L исчерпываются объединениями конечного числа определимых в $\mathbb{L}$ интервалов. $\square$

Свойства интервальных расширений плотных линейных порядков, не являющихся непрерывными, нуждаются в дополнительном анализе. Хотя в большинстве задач математической лингвистики предполагается, что шкалой времени является ось действительных чисел (т. е. непрерывный плотный линейный порядок), изучение таких «нестандартных» моделей времени представляет как минимум теоретический интерес. Следующий результат является одним из предварительных в этом направлении. Из него вытекает, что элементарные теории таких систем могут быть сколь угодно сложными.

Теорема 3.2. *Пусть $A \subseteq \omega$ — бесконечное множество. Существует плотный линейный порядок $\mathbb{L}_A \models \neg \text{Cont}$, для которого*

$$A \leq_m \text{Th}(\mathcal{I}(\mathbb{L}_A))$$

(здесь $\leq_m$ обозначает отношение m -сводимости из классической теории вычислимости на натуральных числах).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плотный линейный порядок

$$\mathbb{L}_A \Leftarrow \mathbb{Q} + \sum_{n \in A} (n\mathbb{R} + \mathbb{Q}),$$

в котором элементы множества A порождают соответствующие блоки указанной выше суммы в порядке возрастания.

Легко убедиться, что блоки типа $\mathbb{Q}$ и $n\mathbb{R}$ определимы в $\mathcal{I}(\mathbb{L}_A)$. Например, интервал типа $\mathbb{Q}$ определяется формулой $\Psi(i)$ вида

$$\forall j((j \subseteq i) \rightarrow (At(j) \vee \exists j_1 \exists j_2((j = j_1 \cup j_2) \wedge (j_1 < j_2) \wedge \neg \exists l(Left(l, j_2) \vee Right(l, j_1)))))$$

(здесь для удобства используется определимая в исходной сигнатуре операция объединения $\cup$). Интервал типа $\mathbb{R}$ определяется формулой $\Theta_1(i)$ вида $\text{Cont}(i)$, означающей, что на i справедливо предложение Cont . Интервал вида $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ определяется формулой $\Theta_2(i)$ вида

$$\exists j_1 \exists j_2(\text{Cont}(j_1) \wedge \text{Cont}(j_2) \wedge (i = j_1 \cup j_2) \wedge (j_1 < j_2) \wedge \neg \exists l(Left(l, j_2) \vee Right(l, j_1))),$$

и т. д. Индукцией по $n \geq 1$ эффективно определяется формула $\Theta_n(i)$, означающая, что i имеет тип $n\mathbb{R}$.

По определению $\mathbb{L}_A$ для любого $n \in \omega$

$$n \in A \iff \mathcal{I}(\mathbb{L}_A) \models \exists i \Phi_n(i),$$

где $\Phi_n(i) \iff \exists j \exists j_1 \exists j_2 ((i = j_1 \cup j \cup j_2) \wedge (j_1 < j) \wedge (j < j_2) \wedge \Theta_n(j) \wedge \Psi(j_1) \wedge \Psi(j_2))$. $\square$

В частности, если множество A не вычислимо, то не является вычислимым и множество геделевских номеров предложений из $\text{Th}(\mathcal{I}(\mathbb{L}_A))$. Таким образом, получаем

Следствие 3.1. *Существует плотный линейный порядок $\mathbb{L} \models \neg \text{Cont}$, для которого интервальное расширение $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ имеет неразрешимую теорию.*

Для произвольного интервала $i \in I(L)$ определим множество $\text{Gar}(i)$ «точек разрыва» i как множество

$$\{(j_1, j_2) \mid (i = j_1 \cup j_2) \wedge (j_1 < j_2) \wedge \neg \exists l (\text{Left}(l, j_2) \vee \text{Right}(l, j_1))\}$$

дедекиндовых сечений интервала i , не соответствующих точкам исходного порядка. На множестве $\text{Gar}(i)$ определим отношение линейного порядка $\leq$: $(j_1, j_2) \leq (j'_1, j'_2)$, если $j_1 \subseteq j'_1$.

Интервалы $i_1, i_2 \in I(L)$ называются *гомеоморфными* (обозначается через $i_1 \simeq i_2$), если $(\text{Gar}(i_1), \leq) \cong (\text{Gar}(i_2), \leq)$.

Можно считать, что в непрерывных плотных линейных порядках любые два интервала гомеоморфны, поскольку $\text{Gar}(i) = \emptyset$ для любого интервала i .

Через $(\mathcal{I}(\mathbb{L}), \simeq)$ будем обозначать систему, являющуюся обогащением интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ отношением гомеоморфности $\simeq$.

Предложение 3.2. *Если $\text{Gar}(i)$ конечно для любого $i \in I(L)$, то*

$$(I(\mathbb{L}), \simeq) \equiv_{s\Sigma} \mathcal{I}(\mathbb{L}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для интервалов $i_1, i_2 \in I(L)$ соотношение $i_1 \simeq i_2$ выполнено тогда и только тогда, когда $|\text{Gar}(i_1)| = |\text{Gar}(i_2)|$, что выразимо Σ -формулой в $\mathbb{HFF}(\mathcal{I}(\mathbb{L}))$. Аналогично $i_1 \not\simeq i_2$ тогда и только тогда, когда $|\text{Gar}(i_1)| \neq |\text{Gar}(i_2)|$, что также выразимо Σ -формулой в $\mathbb{HFF}(\mathcal{I}(\mathbb{L}))$. $\square$

4. Аппроксимационные пространства темпоральных процессов

Еще один важный способ определения на интервальном расширении дополнительной структуры заключается в задании на исходном порядке семейства подмножеств. Тот факт, что конкретный интервал $i \in I(L)$ является частью выбранного подмножества $P \subseteq L$, можно интерпретировать как наличие у i свойства P . В данной работе для анализа и использования таких структур используются аппроксимационные пространства.

Понятие аппроксимационного пространства [11, 12] позволяет формализовать процесс аппроксимации «сложных» объектов более «простыми». В данной работе рассматривается класс пространств, порожденных интервальными расширениями. При этом интервалы играют роль «конечных» объектов. Однако в таких пространствах не выполняются некоторые из ограничений, присутствующих в определениях из [11, 12]. Это обстоятельство вынуждает использовать класс аппроксимационных пространств максимально общего вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Аппроксимационным пространством* называется упорядоченная тройка

$$\mathcal{X} = \langle X, F, \leq \rangle,$$

где X — топологическое T_0 -пространство с топологией, соответствующей порядку специализации $\leq$ на X , а $F \subseteq X$ — базисное подпространство *конечных элементов*.

Так же, как в [11, 12], обозначение $a \prec x$ подразумевает, что $a \leq x$ и $a \in F$.

В дальнейшем будут рассматриваться так называемые *структурированные* аппроксимационные пространства [13], т. е. предполагается, что множество F является носителем некоторой структуры $\mathcal{F}$.

Одним из примеров структурированного аппроксимационного пространства является определяемое ниже аппроксимационное пространство темпоральных процессов над интервальным расширением. Элементы этого расширения (т. е. интервалы) соответствуют «конечным» элементам, аппроксимирующим темпоральные «процессы», понимаемые в самом широком смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок без конечных элементов. *Пространством темпоральных процессов* над $\mathbb{L}$ называется аппроксимационное пространство $\mathcal{T}(\mathbb{L}) = (P(\mathbb{L}) \setminus \{\emptyset\}, \mathcal{I}(\mathbb{L}), \subseteq)$, где $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ — интервальное расширение $\mathbb{L}$, $P(\mathbb{L})$ — множество всех подмножеств L , а $\subseteq$ — стандартное отношение теоретико-множественного включения на $P(L)$.

Отметим, что исключение пустого множества (формально необходимого в классическом определении топологического пространства) мотивировано соображениями удобства: во всех дальнейших рассуждениях случай пустого множества пришлось бы рассматривать отдельно.

В качестве плотного линейного порядка $\mathbb{L}$, порождающего пространство темпоральных процессов, рассматривается произвольный плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего элементов. В формальной семантике для естественных языков множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, понимаемое как ось (шкала) времени, рассматривается как абстрактный непрерывный плотный линейный порядок, при этом его мощность не является существенной для рассуждений.

В приложениях, как правило, достаточно ограничиться рассмотрением «конечно порожденных» темпоральных пространств, когда определение на интервальном расширении дополнительной структуры заключается в выборе на исходном порядке конечного числа подмножеств. Как отмечалось, тот факт, что конкретный интервал $i \in \mathcal{I}(L)$ является частью выбранного подмножества $P \subseteq L$, можно интерпретировать как наличие у i свойства P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок без конечных элементов. Для непустых множеств $P_1, \dots, P_n \subseteq L$ ($n \geq 1$) через $\mathcal{T}(P_1, \dots, P_n)$ будем обозначать аппроксимационное пространство $(\{P_1, \dots, P_n\} \cup \mathcal{I}(\mathbb{L}), \mathcal{I}(\mathbb{L}), \subseteq)$.

Одним из результатов данной работы является Σ -определимость отношения выполнимости для Δ_0^{DL} -формул над таким пространством в наследственно конечной надстройке над морлизацией структуры $(\mathbb{L}, P_1, \dots, P_n)$, где $P_1, \dots, P_n \subseteq L$. Формулы динамической логики DL с ограниченными модальностями используются в дальнейшем для описания свойств процессов (или состояний), в частности, выражаемых глаголами в естественных языках.

Пусть σ — конечная предикатная сигнатура, содержащая помимо прочего бинарный предикатный символ $\subseteq$. Определим множество формул динамической логики DL_σ (с модальными скобками, как в [14], и в отличие от [15]) следующим образом. Формулы логики DL_σ имеют переменные двух типов — для конечных объектов и для произвольных потенциально бесконечных объектов, доступ к которым возможен только с помощью их конечных фрагментов. Будем обозначать эти множества через FV и SV соответственно. Для формулы θ множества ее свободных переменных этих двух типов будем обозначать соответственно через $FV(\theta)$ и $SV(\theta)$. Если θ — формула логики первого порядка, то все ее переменные, в том числе свободные, считаются конечными. Переменные, обозначаемые прописными буквами ($S, P, \dots$), по умолчанию считаются переменными типа SV .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Множество Δ_0^{DL} -формул логики DL_σ определяется как наименьшее множество R такое, что

1) если θ — формула логики первого порядка сигнатуры σ , то $\theta \in R$ (при этом полагаем $SV(\theta) \rightleftharpoons \emptyset$, $FV(\theta)$ — множество всех свободных переменных формулы θ);

2) если $\theta \in R$, $S \in SV$, $a \in FV$, то

$$[a|S]\theta \in R, \langle a|S \rangle \theta \in R$$

(при этом полагаем $SV([a|S]\theta) \rightleftharpoons SV(\theta) \cup \{S\}$, $FV([a|S]\theta) \rightleftharpoons FV(\theta) \setminus \{a\}$), аналогично для формулы $\langle a|S \rangle \theta$;

3) если $\theta \in R$, $a, s \in FV$, то

$$[a|s]\theta \in R, \langle a|s \rangle \theta \in R$$

(при этом полагаем $SV([a|s]\theta) \rightleftharpoons SV(\theta)$, $FV([a|s]\theta) \rightleftharpoons (FV(\theta) \setminus \{a\}) \cup \{s\}$), аналогично для формулы $\langle a|s \rangle \theta$;

4) если $\theta_0, \theta_1 \in R$, то $\neg\theta_0 \in R$, $(\theta_0 \wedge \theta_1) \in R$, $(\theta_0 \vee \theta_1) \in R$ и $(\theta_0 \rightarrow \theta_1) \in R$.

Выражения $[a|S]$, $\langle a|S \rangle$, $[a|s]$ и $\langle a|s \rangle$ будем называть *модальными скобками*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пусть $\mathcal{X} = (X, F, \leq)$ — структурированное аппроксимационное пространство над структурой $\mathcal{F} = (F, \sigma^{\mathcal{F}})$ сигнатуры σ . Истинность на $\mathcal{X}$ Δ_0^{DL} -формулы φ логики DL_σ при означивании $\gamma : SV(\varphi) \cup FV(\varphi) \rightarrow X$ с условием $\gamma(x) \in F$ для любого $x \in FV(\varphi)$, обозначаемая через

$$\mathcal{X} \models \varphi \upharpoonright \gamma,$$

определяется индукцией по сложности φ . Пусть для $x \in FV$ и $a \in F$

$$\gamma_a^x \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{x\} \times F)) \cup \{\langle x, a \rangle\},$$

аналогично для $S \in SV$ и $S_0 \in X$

$$\gamma_{S_0}^S \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{S\} \times X)) \cup \{\langle S, S_0 \rangle\}.$$

Полагаем

- 1) $\mathcal{X} \models [x|S]\theta(x) \upharpoonright \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(S)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \upharpoonright \gamma_a^x$;
- 2) $\mathcal{X} \models \langle x|S \rangle \theta(x) \upharpoonright \gamma$, если существует $a \prec \gamma(S)$ такое, что $\mathcal{X} \models \theta \upharpoonright \gamma_a^x$;
- 3) $\mathcal{X} \models [x|s]\theta(x) \upharpoonright \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(s)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \upharpoonright \gamma_a^x$;
- 4) $\mathcal{X} \models \langle x|s \rangle \theta(x) \upharpoonright \gamma$, если существует $a \prec \gamma(s)$ такое, что $\mathcal{X} \models \theta \upharpoonright \gamma_a^x$;
- 5) $\mathcal{X} \models (\forall x)\theta(x) \upharpoonright \gamma$, если для всех $a \in F$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \upharpoonright \gamma_a^x$,

и т. д. (считаем, что предикатный символ $\leq$ интерпретируется в X стандартным образом).

Для удобства переменные из множества FV будем разделять на три типа: переменные для обозначения произвольных непустых интервалов $(i, i', \dots, i_0, i_1, \dots)$, переменные для обозначения точечных интервалов $(l, l', \dots, l_0, l_1, \dots)$ и переменные для произвольных элементов из F $(a, b, c, \dots, x, y, z)$. В аппроксимационных пространствах темпоральных процессов ограниченные модальности вида $[i|P]$ и $\langle i|P \rangle$ вместе с неограниченными модальностями вида $[i] = [i|L]$ и $\langle i \rangle = \langle i|L \rangle$ позволяют формулировать суждения о «возможных мирах», понимаемых как интервалы выбранного процесса (остальные процессы на данном интервале могут вести себя сколь угодно сложно, но «доступ» к ним, в свою очередь, возможен только посредством их подынтервалов). Атомарные интервалы (т. е. интервалы вида $\{l\}$) дают точную и полную информацию обо всех процессах, происходящих в данный момент. Из этих соображений, а также для интерпретации определимости Δ_0^{DL} -формулами посредством определимости формулами логики первого порядка рассмотрим следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок без концевых элементов. Атомарным пространством темпоральных процессов над $\mathbb{L}$ называется аппроксимационное пространство $\mathcal{T}_0(\mathbb{L}) = (P(\mathbb{L}) \setminus \{\emptyset\}, \mathbb{L}, \subseteq)$, где $P(\mathbb{L})$ — множество всех подмножеств $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}$ отождествляется с множеством точечных интервалов, а $\subseteq$ — стандартное теоретико-множественное отношение включения на $P(\mathbb{L})$.

Одним из основных результатов данной работы является использование алгоритмических свойств (а именно разрешимости) элементарной теории плотных линейных порядков в задачах, связанных с интервальными моделями темпоральной логики Аллена и интервальной семантикой Монтегю глаголов в естественных языках. Понятие аппроксимационного пространства может быть использовано для точного описания таких задач. Напомним определение из [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Аппроксимационное пространство $\mathcal{X}_1$ эффективно DL -сводится к аппроксимационному пространству $\mathcal{X}_2$ ($\mathcal{X}_1 \leq_c^{DL} \mathcal{X}_2$), если $\mathcal{X}_1$ как структура Δ_0^{DL} -определимая (в другой терминологии, Δ_0^{DL} -интерпретируемая) в аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}_2$ и

1) структура конечных элементов $\mathcal{F}_1$ Δ_0^{DL} -определима (Δ_0^{DL} -интерпретируема) в $\mathcal{X}_2$ внутри $\mathcal{F}_2$ (т. е. множество, являющееся интерпретацией для F_1 , является подмножеством F_2),

2) существует эффективная процедура, сопоставляющая каждой Δ_0^{DL} -формуле пространства $\mathcal{X}_1$ Δ_0^{DL} -формулу пространства $\mathcal{X}_2$, определяющую соответствующий предикат в данном представлении пространства $\mathcal{X}_1$ в пространстве $\mathcal{X}_2$.

Теорема 4.1. Если $\mathbb{L}$ — непрерывный плотный линейный порядок, то аппроксимационные пространства $\mathcal{T}(\mathbb{L})$ и $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$ эффективно DL -эквивалентны:

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \equiv_c^{DL} \mathcal{T}_0(\mathbb{L}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по сложности Δ_0^{DL} -формулы Φ построим Δ_0^{DL} -формулу Φ' , для которой

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \models \Phi \iff \mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models \Phi'.$$

Случай, когда Φ является атомарной формулой, вытекает из следующего замечания: для произвольных $P_1, P_2 \subseteq L$ отношение $P_1 \subseteq P_2$ определимо в $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$ формулой $[l_1|P_1]\langle l_2|P_2 \rangle(l_1 = l_2)$, а отношение $P_1 \leq P_2$ — формулой $[l_1|P_1][l_2|P_2](l_1 \leq l_2)$.

Единственный нуждающийся в анализе тип формул — это формулы, образованные с использованием ограниченных модальностей. Произвольный интервал $i \in \mathcal{I}(\mathbb{L})$ ($= \mathcal{I}_d(\mathbb{L})$) вследствие непрерывности $\mathbb{L}$ может иметь одну из следующих девяти конфигураций: $[l_1; l_2]$, $(l_1; l_2)$, $[l_1; l_2)$, $(l_1; l_2]$, $[l_1; +\infty)$, $(l_1; +\infty)$, $(-\infty; l_2]$, $(-\infty; l_2)$ и $(-\infty; +\infty)$, для некоторых $l_1, l_2 \in L$. Поэтому

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \models [i|P]\Theta(i, P) \iff \mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models [l_1|P][l_2|P](\Theta_{[]}(l_1, l_2, P) \wedge \Theta_{()}(l_1, l_2, P) \wedge \dots),$$

где $\Theta_{[]} (l_1, l_2, P) = (([l_1; l_2] \subseteq P) \rightarrow \Theta_{[l_1; l_2]}^i)$, $\Theta_{()} (l_1, l_2, P) = (((l_1; l_2) \subseteq P) \rightarrow \Theta_{(l_1; l_2)}^i)$ и т. д.

Аналогично

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \models \langle i|P \rangle \Theta(i, P) \iff \mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models \langle l_1|P \rangle \langle l_2|P \rangle (\Theta'_{[]} (l_1, l_2, P) \vee \Theta'_{()} (l_1, l_2, P) \vee \dots),$$

где $\Theta'_{[]} (l_1, l_2, P) = (([l_1; l_2] \subseteq P) \wedge \Theta_{[l_1; l_2]}^i)$, $\Theta'_{()} (l_1, l_2, P) = (((l_1; l_2) \subseteq P) \wedge \Theta_{(l_1; l_2)}^i)$ и т. д.

Здесь, как обычно, $\Theta_{[l_1; l_2]}^i$ обозначает результат подстановки $[l_1; l_2]$ вместо всех вхождений i в Θ с учетом того, что отношения $\subseteq$ и $\leq$ для определимых интервалов сводятся к комбинациям отношений $\leq$ для их граничных точек. Запись вида $([l_1; l_2] \subseteq P)$ служит сокращением для формулы $[l]((l_1 \leq l \leq l_2) \rightarrow \langle l'|P \rangle (l = l'))$ и т. д.

Заметим также, что тип интервала определяется Δ_0^{DL} -формулами в $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$: например, $i \subseteq L$ является замкнутым интервалом вида $[l_1; l_2]$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models [l|i](l_1 \leq l \leq l_2) \wedge [l]((l_1 \leq l \leq l_2) \rightarrow \langle l'|i \rangle (l = l')).$$

Интервалы других типов (открытые и т. д.) могут быть определены аналогичным образом. $\square$

Непосредственно из теоремы 4.1 (точнее, ее доказательства) вытекает

Предложение 4.1. Пусть $\mathbb{L}$ — непрерывный плотный линейный порядок. Для любого $n \geq 1$ и любых $P_1, \dots, P_n \subseteq L$

$$\mathcal{T}(P_1, \dots, P_n)_{\Delta_0^{DL}} \equiv_{s\Sigma} (\mathbb{L}, P_1, \dots, P_n)_{\text{Morley}},$$

где $(\mathbb{L}, P_1, \dots, P_n)_{\text{Morley}}$ — морлизация структуры $(\mathbb{L}, P_1, \dots, P_n)$, т. е. обогащение, полученное добавлением к сигнатуре символов для всех определимых формулами логики первого порядка отношений, а $\mathcal{T}(P_1, \dots, P_n)_{\Delta_0^{DL}}$ — обогащение, полученное добавлением к сигнатуре символов для всех отношений, определенных Δ_0^{DL} -формулами.

Следствие 4.1. Если элементарная теория структуры $(\mathbb{L}, P_1, \dots, P_n)$ простая, то существует эффективная равномерная процедура для проверки истинности Δ_0^{DL} -формулы в $\mathcal{T}(P_1, \dots, P_n)$.

В частности, если все процессы $P_1, \dots, P_n$ являются элементами интервальной булевой алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ (т. е. каждый элемент есть объединение конечного числа интервалов), то условие из предыдущего следствия выполнено. Как правило, только этот частный случай и рассматривается в математической лингвистике для анализа глаголов.

Неформально язык динамической логики над темпоральными аппроксимационными пространствами является удобным языком «высокого уровня» для

работы с моделями темпоральной логики и анализа интервальной семантики естественных языков. Этот язык эффективно интерпретируется в языке логики первого порядка над соответствующим линейным порядком, обогащенном одноместными предикатами для обозначения процессов. Получающиеся при этом формулы в отличие от формул динамической логики сложны для анализа и носят исключительно технический характер.

5. Приложения в темпоральной логике и формальной семантике естественных языков

Темпоральная логика Аллена [16] возникла как средство для анализа отношений между вычислительными процессами, возникающими при исполнении программ. Атомарные отношения этой логики формализуются в динамической логике следующим образом: для произвольных интервалов $P_1, P_2 \subseteq L$

P_1 **before** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1][i_2|P_2](i_1 \leq i_2)$;

P_1 **after** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1][i_2|P_2](i_2 \leq i_1)$;

P_1 **while** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1]\langle i_2|P_2\rangle(i_1 = i_2)$;

P_1 **overlaps** P_2 соответствует отношению $\langle i_1|P_1\rangle\langle i_2|P_2\rangle(i_1 = i_2)$

(в другой версии, отношению $\langle i_1|P_1\rangle\langle i_2|P_2\rangle((\langle i_1 - \text{финальный подынтервал } P_1 \rangle) \wedge (\langle i_2 - \text{начальный подынтервал } P_2 \rangle \wedge (i_1 = i_2)))$, где « i — начальный подынтервал P » есть сокращение для формулы $[i'|P]((i \subseteq i') \vee \langle i''|i\rangle(i'' < i'))$) и т. д.

Остальные атомарные отношения логики Аллена (**starts**, **finishes**, **meets** и т. п.) формализуются аналогичным образом. Отметим, что темпоральную связку **when** («когда») можно считать частным случаем связки **while**, учитывая при этом, что в данном случае имеется в виду точечный интервал.

Из интерпретируемости темпоральной логики Аллена в динамической логике и полученных в данной работе результатов о темпоральных аппроксимационных пространствах следует существование разрешающего алгоритма для данной логики в случае, когда в качестве временной шкалы выбирается непрерывный плотный линейный порядок. Обзор результатов, посвященных выразительным возможностям и разрешимости (или неразрешимости) различных вариантов интервальных темпоральных логик, можно найти в [17].

Темпоральные союзы в естественных языках, соответствующие атомарным отношениям логики Аллена, имеют аналогичную семантику и аналогичную формализацию в динамической логике. Важной особенностью, определяющей семантику сложных предложений естественных языков, является согласование времен глаголов.

В качестве примера приложения пространств темпоральных процессов и их конструктивных представлений рассмотрим раздел математической лингвистики, посвященный интервальной семантике глаголов в естественных языках.

Полученные выше результаты (в частности, следствие 4.1) позволяют рассматривать семантику предложений естественных языков (в частности, английского), содержащих глаголы в произвольном времени, с использованием равномерных и конструктивных (алгоритмически реализуемых) методов. Алгоритмические аспекты интервальной семантики, насколько известно автору, ранее не исследовались специалистами в этой области. Полученные результаты можно считать примером применения методов обобщенной вычислимости в формальной семантике естественных языков.

В работах Монтегю [18–21], американского специалиста по математической логике, возникло новое направление лингвистики, позднее получившее название

«формальная семантика». Оно объединяет понятия и методы логики и философии языка с целью построения единой теории формальной семантики естественных языков. Более точно, выделяются фрагменты естественных языков, допускающие такую формализацию и остающиеся достаточно выразительными. Одним из основных методов формальной семантики является анализ грамматических категорий времени и вида. В рамках этого подхода Монтегю формализовал семантические значения глаголов в английском языке. Рассмотрим несколько примеров такой формализации. Вот как выглядит его семантический анализ для времени *Present Progressive*.

Предложение (т. е. состояние) **John is walking** истинно в течение времени p тогда и только тогда, когда существует открытый интервал i такой, что p является подынтервалом i и для всех $t \in i$ состояние **John walks** истинно в момент времени t .

Интервальные расширения впервые были существенным образом использованы в работах американских лингвистов Беннетта и Пати [22]. В качестве примера рассмотрим данное ими описание времени *Past Simple* (ниже приводятся буквальные цитаты с сохранением обозначений).

Предложение (т. е. состояние) **John ate the fish** ($= \alpha$) истинно на интервале i , если i является точечным интервалом, α относится к интервалу i' и существует интервал $i'' < i'$ такой, что $i'' < i$ и состояние **John eats the fish** истинно на интервале i'' .

В качестве еще одного примера рассмотрим формальное описание времени *Present Perfect*.

Предложение (т. е. состояние) **John has eaten the fish** ($= \alpha$) истинно на интервале i , если i является точечным интервалом, α относится к интервалу i' , i является подынтервалом интервала i' и существует интервал $i'' < i'$ такой, что либо i является правой границей интервала i'' , либо $i'' < i$ и состояние **John eats the fish** истинно на интервале i'' .

В приведенных выше примерах рассматриваются состояния **John walks**, **John is walking**, **John eats the fish**, **John ate the fish** и **John has eaten the fish** вместе с точечным интервалом, понимаемым как «данный момент». Фактически, в этих примерах указаны определения сложных времен по времени *Present Simple*.

Легко построить Δ_0^{DL} -формулы сигнатуры $\langle \leq, \subseteq \rangle$, описывающие соответствующие отношения между этими процессами (точнее, состояниями) в пространстве темпоральных процессов $\mathcal{T}$. А именно, используя обозначения

- 1) « i — открытый интервал» для формулы

$$[i'|i](((i' \text{ — точечный интервал}) \rightarrow \langle i_1|i \rangle \langle i_2|i \rangle (i_1 < i' < i_2));$$

- 2) « i — ограниченный интервал» для формулы

$$\langle i_1 \rangle \langle i_2 \rangle [i'|i] (i_1 \leq i \leq i_2);$$

- 3) « i_1 — левая граничная точка i_2 » для формулы

$$(i_1 \leq i_2) \wedge \neg \langle i \rangle (i_1 < i < i_2);$$

- 4) « i_1 — правая граничная точка i_2 » для формулы

$$(i_1 \leq i_2) \wedge (i_1 \subseteq i_2) \wedge ([i|i_1](i = i_1))$$

и т. д., получим формулы

$$\begin{aligned} p \subseteq \text{“John is walking”} &\iff \langle i \mid \text{“John walks”} \rangle ((p \subseteq i) \wedge (\langle i - \text{открытый интервал} \rangle)), \\ p \subseteq \text{“John ate the fish”} &\iff [i \mid \text{“John eats the fish”}] (i < p), \\ p \subseteq \text{“John has eaten the fish”} &\iff [i \mid \text{“John eats the fish”}] (i \leq p). \end{aligned}$$

Подобная формализация особенно полезна для анализа предложений, содержащих два и более глаголов, соответствующих процессам и состояниям, связанным темпоральными союзами (“before”, “after”, “while” и т. п.), соответствующими аналогичным связкам логики Аллена.

Стоит также отметить, что определения сложных времен через настоящее простое время дают примеры определения элементов аппроксимационного пространства темпоральных процессов, являющихся элементами X , а не только элементами F . Это отличает такой способ использования формул динамической логики в аппроксимационных пространствах от способов, целью которых является определимость подмножеств множества F (такие подмножества являются основным объектом исследования классической и обобщенной гиперарифметической вычислимости, см., например, [13]).

В русском языке глагольная система устроена принципиально иначе, так как отсутствует аналог английского времени *Present Simple*. Продемонстрируем пример использования динамической логики и интервальной семантики для предложений русского языка, содержащих темпоральные связки. Рассмотрим предложения

- (1) Ваня делал домашнюю работу, когда Петя пришел.
- (2) Ваня сделал домашнюю работу, когда Петя пришел.

Отметим, что синтаксическое различие между этими предложениями минимально (одна буква), а семантическое различие между ними весьма существенно. Формализация их темпоральных аспектов в динамической логике выглядит следующим образом. Первому предложению соответствует формула

$$\begin{aligned} &\langle i_1 \mid \text{«Ваня делает д.р.»} \rangle \langle i_2 \mid \text{«Петя приходит»} \rangle ((i_2 \subseteq i_1) \wedge \\ &\wedge (\langle i_1 - \text{открытый инт.»} \rangle)) \wedge [i_1 \mid \text{«Ваня делает д.р.»}] \\ &[i_2 \mid \text{«Петя приходит»}] ((i_1 < t_{\text{наст}}) \wedge (i_2 < t_{\text{наст}})) \end{aligned}$$

(здесь $t_{\text{наст}}$ обозначает момент речи). Второму предложению соответствует формула

$$\begin{aligned} &\langle i_1 \mid \text{«Ваня делает д.р.»} \rangle [i_2 \mid \text{«Ваня делает д.р.»}] \\ &((i_2 \leq i_1) \wedge \langle i_3 \mid \text{«Петя приходит»} \rangle (i_1 \leq i_3)) \wedge \\ &\wedge [i_1 \mid \text{«Ваня делает д.р.»}] [i_2 \mid \text{«Петя приходит»}] \\ &((i_1 < t_{\text{наст}}) \wedge (i_2 < t_{\text{наст}})). \end{aligned}$$

Такая интерпретация обусловлена тем, что глагол «делать» в первом предложении употреблен в несовершенном виде, а во втором — в совершенном. В русском языке несовершенный вид, как правило, указывает на интервал, а совершенный — на точку, являющуюся границей интервала.

6. Интервальная семантика для глаголов русского языка

Реализация понятий времени и вида в русском языке существенно отличается от реализации этих понятий в английском языке. В русском языке есть три времени (*настоящее*, *прошедшее* и *будущее*) и два вида (*совершенный* и

несовершенный). Основная сложность для семантического анализа глаголов русского языка заключается в том, что эти две категории вида *независимы*, т. е. не делятся на основную и производную. Не удастся, в частности, воспользоваться следующей примитивной математической моделью. Пусть P и I — множества инфинитивов русских глаголов совершенного и несовершенного вида соответственно, а A — действующая из P в I функция, которая инфинитиву глагола совершенного вида ставит в соответствие инфинитив парного ему глагола несовершенного: $A(\text{разбить}) = \text{разбивать}$, $A(\text{насыпать}) = \text{насыпать}$ и т. д. Оказывается, что с одной стороны, для значительного числа элементов из P , соответствующих одновидовым глаголам совершенного вида (*закричать*, *притопывать* и т. п.), функция не будет давать результата, с другой — все элементы I , соответствующие одновидовым лексемам несовершенного вида (*жить*, *любить* и т. п.), не будут иметь прообраза в P . Такие «неприкаянные» глаголы не удастся адекватно разделить на небольшое число крупных групп, основываясь на семантических критериях.

7. Заключение

Полученные в данной работе результаты показывают, что в плотных линейных порядках со свойством непрерывности эффективно интерпретируются достаточно важные с точки зрения возможных приложений структуры: интервальные расширения, интервальные булевы алгебры и т. п., что с единой точки зрения соответствует определмости в темпоральных аппроксимационных пространствах с помощью формул динамической логики. В случае, когда соответствующий плотный линейный порядок понимается как шкала (ось) времени, эти результаты в совокупности с разрешимостью и свойством элиминации кванторов можно использовать для алгоритмического анализа семантики предложений в естественных языках.

По аналогии с результатом Ю. Л. Ершова [1] об обобщенной конструктивизируемости поля комплексных чисел естественным вопросом для дальнейшего исследования является рассмотрение упорядоченного поля действительных чисел в качестве (масштабированной) временной шкалы. В этом случае появляется возможность конструктивной интерпретации синтаксических конструкций вида «завтра», «вчера», «два дня назад» и т. п. Несмотря на то, что элементарная теория поля действительных чисел регулярна (т. е. модельно полная и разрешимая), такого сорта рассуждения требуют использования (выделения) множества натуральных чисел, что делает неразрешимой элементарную теорию полученной структуры.

Некоторые из результатов работы анонсированы в краткой публикации [23].

Благодарности. Автор выражает признательность рецензентам за замечания и предложения, позволившие существенно улучшить текст статьи. Автор выражает признательность профессору Русанке Лукановой за помощь и внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л. Σ -определимость в допустимых множествах // Докл. АН СССР. 1985. № 4. С. 792–795.
2. Ершов Ю. Л. Определмость и вычислимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
3. Ershov Yu. L. Σ -definability of algebraic structures // Yu. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode, J. B. Remmel, eds. Handbook of recursive mathematics. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1998. V. 1. P. 235–260. (Stud. Logic Found. Math.; V. 138).

4. Stukachev A. I. Effective model theory via the Σ -definability approach // Lecture Notes in Logic. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. V. 41. P. 164–197.
5. Стукачев А. И. Σ -определимость несчетных моделей c -простых теорий // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 649–661.
6. Стукачев А. И. Σ -определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 4. С. 459–481.
7. Stukachev A. I. Uniformization property in hereditary finite superstructures // Sib. Adv. Math. 1997. V. 7, N 1. P. 123–132.
8. Стукачев А. И. Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ -степеней // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 182–190.
9. Stukachev A. I. A jump inversion theorem for the semilattices of Sigma-degrees of structures // Sib. Adv. Math. 2010. V. 20, N 1. P. 68–74.
10. Стукачев А. И. О свойствах $s\Sigma$ -сводимости // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 625–642.
11. Ершов Ю. Л. Теория А-пространств // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 4. С. 369–416.
12. Ershov Yu. L. Theory of domains and nearby // Lecture Notes in Computer Science. 1993. V. 735. P. 1–7.
13. Стукачев А. И. Обобщенно гиперарифметическая вычислимость над структурами // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 6. С. 769–799.
14. Harel D. First-order dynamic logic // Lecture Notes in Computer Science. 1979. V. 68. P. 1–135.
15. Ершов Ю. Л. Динамическая логика над допустимыми множествами // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1045–1048.
16. Allen J. F. Maintaining knowledge about temporal intervals // Commun. ACM. 1983. V. 26. P. 832–843.
17. Della Monica D., Goranko V., Montanari A., Sciavicco G. Interval temporal logics: A journey // Bull. Europ. Assoc. Theoretical Comput. Sci. (BEATCS). 2011. N 105. P. 73–99.
18. Montague R. The proper treatment of quantification in ordinary English // J. Hintikka, J. Moravcsik, P. Suppes, eds. Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp., 1973. P. 221–242. (Approaches to Natural Language).
19. Montague R. English as a formal language // B. Visentini, ed. Milano: Linguaggi nella Società e nella Tecnica, Edizioni di Comunità, 1970. P. 189–222.
20. Formal philosophy: Selected papers of Richard Montague. New Haven: Yale Univ. Press, 1974.
21. Dowty D. R. et al. Introduction to Montague semantics. Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp., 1989.
22. Bennett M., Partee B. Toward the logic of tense and aspect in English // Compositionality in formal semantics: selected papers by Barbara H. Partee. Cornwall, UK: Blackwell Publ. Ltd., 2004. P. 59–109.
23. Stukachev A. I. Approximation spaces of temporal processes and effectiveness of interval semantics // Adv. Intelligent Systems and Computing. 2021. V. 1242. P. 53–61.

Поступила в редакцию 23 сентября 2020 г.

После доработки 11 марта 2021 г.

Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Стукачев Алексей Ильич (ORCID 0000-0002-4530-1961)
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
 Новосибирский государственный университет
 ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
 aistu@math.nsc.ru