Программа курса "Определимость и вычислимость".

I. Введение в теорию допустимых множеств.

1. Система аксиом Крипке-Платека.
2. Допустимые ординалы и допустимые множества.
3. Сигма-рекурсия и теорема Ганди.
4. Бесконечные логики и теорема компактности Барвайса.
5. Допустимые множества вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$.

II. HF-вычислимость.

1. Теорема об униформизации и универсальная Σ-функция.
2. Внутренняя конструктивизируемость HF-надстроек.
3. Σ-определимость несчетных систем.
4. Полурешетки Σ-степеней.
5. Вычислимость на BSS-машинах.

Литература

1. J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer-Verlag, 1975.
2. Ю.Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Научная книга, 1996; второе издание в 2000 г.
3. C.J. Ash, J.F. Knight, *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy*, Elsevier, 2000.

1 Теория KPU.

Пусть σ – произвольная сигнатура, содержащая символ равенства. Теория KPU определяется в сигнатуре $\sigma^* = \sigma \cup \{\in, \ldots\}$, которая получается добавлением к сигнатуре σ символа принадлежности $\in$, а также, возможно, других предикатных, функциональных или константных символов. Вместо того, чтобы определять σ^* точно, опишем класс алгебраических систем этой сигнатуры, оставляя читателю возможность формального определения σ^*.

Определение 1. *Алгебраическая система* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}; A, E, \ldots)$ *сигнатуры* σ^* *состоит из*

(i) алгебраической системы $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *сигнатуры* σ*, причем возможен случай* $M = \emptyset$ *(элементы множества* M *называются праэлементами* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*);*

(ii) непустого множества A*, не пересекающегося с* M *(элементы множества* A *называются множествами* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*);*

(iii) отношения $E \subseteq (M \cup A) \times A$ *(которое интерпретирует отношение принадлежности* $\in$*);*

(iv) других отношений, функций и констант на множестве $A \cup M$*, интерпретирующие остальные символы из* $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$ *(список которых обозначен многоточием).*

Символ равенства сигнатуры σ^* всегда интерпретируется обычным отношением равенства.

Для обозначений переменных введем следующее соглашение: в алгебраической системе $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}; A, E, \ldots)$ переменные

$p, q, p_1, \ldots$ принимают значения из M (праэлементы),

$a, b, c, d, f, r, a_1, \ldots$ принимают значения из A (множества),

$x, y, z, \ldots$ принимают значения из $M \cup A$.

Подобный способ обозначения позволяет легко формулировать утверждения, относящиеся к множествам или праэлементам. Например, формула $\forall p \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow x = p)$ означает, что множество $\{p\}$ существует для всякого праэлемента p, тогда как формула $\forall p \exists a \forall q (q \in a \leftrightarrow q = p)$ означает, что существует множество a, пересекающееся с классом праэлементов только по p.

В дальнейшем символы u, v, w будут использоваться для обозначения переменных, значениями которых могут быть как праэлементы, так и множества.

Аксиомы теории KPU можно разделить на три класса. Аксиомы экстенсиональности и фундированности выражают основные свойства множеств. Аксиомы пары, объединения Δ_0-выделения определяют возможные способы конструирования множеств. Наиболее важная аксиома – Δ_0-органиченности – гарантирует достаточное число возможных шагов конструирования. Для того, чтобы сформулировать две последние аксиомы, необходимо определить понятие Δ_0-формулы сигнатуры $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$ (Леви, 1965).

Определение 2. *Множество* **Δ_0-формул** *сигнатуры $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$ – это наименьшее множество Y, содержащее все атомарные формулы сигнатуры $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$, для которого*

(i) если $\varphi \in Y$, то $\neg\varphi \in Y$;

(ii) если $\varphi, \psi \in Y$, то $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi) \in Y$;

(iii) если $\varphi \in Y$, то $\forall u \in v\, \varphi \in Y$ и $\exists u \in v\, \varphi \in Y$ для всех переменных u, v.

Важность Δ_0-формул следует из метаматематического факта, состоящего в том, что всякий предикат, определенный с помощью Δ_0-формулы, является абсолютным (см. далее), и эмпирического факта (который будет установлен в дальнейшем), состоящего в том, что многие широко используемые предикаты могут быть определены с помощью Δ_0-формул (см. таблицу 1).

Определение 3. Аксиомы теории KPU *(для сигнатуры $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$) – это универсальные замыкания следующих формул:*

Экстенсиональность: $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \to a = b$;

Фундированность: $\exists x \varphi(x) \to \exists x[\varphi(x) \wedge \forall y \in x \neg\varphi(y)]$ для всех формул $\varphi(x)$, не содержащих свободных вхождений переменной y;

Существование пары: $\exists a(x \in a \wedge y \in a)$;

Объединение: $\exists b \forall y \in a \forall x \in y(x \in b)$;

Δ_0-выделение: $\exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$ для всех Δ_0-формул, не содержащих свободных вхождений переменной b;

Δ_0-ограниченность: $\forall x \in a \exists y\, \varphi(x, y) \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, \varphi(x, y)$ для всех Δ_0-формул, не содержащих свободных вхождений переменной b.

Отметим, что формулы $\varphi(x)$ и $\varphi(x, y)$ могут иметь свободные переменные, отличные от x и y.

Определение 4. Аксиомы теории KPU^+ *– это аксиомы теории* KPU*, и аксиома*

$$\exists a \forall x [x \in a \leftrightarrow \exists p (x = p)],$$

утверждающая, что существует множество всех праэлементов.

Определение 5. Аксиомы теории KP *– это аксиомы теории* KPU*, и аксиома*

$$\forall x \exists a (x = a),$$

утверждающая, что всякий элемент является множеством, то есть отсутствуют праэлементы.

Замечание 1. *Некоторые из аксиом вытекают из определения алгебраических систем сигнатуры $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$. Следующие формулы в явном виде формулируют некоторые из этих утверждений (все их следует считать аксиомами теории* KPU*):*

$$\forall p \forall a (p \neq a),$$

$$\exists a (a = a),$$

$$\forall p \forall x (x \notin p).$$

Предложение 1. *(i) Существует единственное множество* 0*, не содержащее элементов.*

(ii) Для любого a существует единственное множество $b = \cup a$, для которого $x \in b \iff \exists y \in a (x \in y)$.

(iii) Для любых a, b существует единственное множество $c = a \cup b$, для которого $x \in c \iff x \in a$ или $x \in b$.

(iv) Для любых a, b существует единственное множество $c = a \cap b$, для которого $x \in c \iff x \in a$ и $x \in b$.

Как обычно, упорядоченная пара элементов x и y – это множество

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Легко доказать, что $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = z$ и $y = w$.

Предложение 2. *Для любых a, b существует множество $c = a \times b$ (декартово произведение a и b), такое, что*

$$c = \{\langle x, y\rangle | x \in a \text{ и } y \in b\}.$$

Доказательство. Согласно таблице 1, условие на a, b, u вида

$$u = \langle x, y\rangle \wedge x \in a \wedge y \in b$$

определяется Δ_0-формулой, поэтому можно воспользоваться аксиомой Δ_0-выделения при наличии множества c такого, что $\langle x, y\rangle \in c$ для всех $x \in a, y \in b$. Существование такого множества c вытекает из аксиомы Δ_0-ограниченности следующим образом. Для всякого $x \in a$ сушествует w_x такое, что $\langle x, y\rangle \in w_x$ для всех $y \in b$. Действительно, для данного $y \in b$ существует множество $d = \langle x, y\rangle$, поэтому по аксиоме Δ_0-ограниченности существует множество w_x такое, что $\langle x, y\rangle \in w_x$ для всех $y \in b$. Воспользуемся аксиомой Δ_0-ограниченности еще раз. Имеем

$$\forall x \in a \exists w \underbrace{\forall y \in b \exists d \in w(d = \langle x, y\rangle)}_{\Delta_0}$$

поэтому существует множество c_1 такое, что для всех $x \in a, y \in b$ $\langle x, y\rangle \in w$ для некоторого $w \in c_1$. Для множества $c = \cup c_1$ имеем $\langle x, y\rangle \in c$ для всех $x \in a, y, \in b$. $\square$

Как обычно, индукцией по n определяются упорядоченные n-ки для $n > 2$:

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle\rangle,$$

и, аналогично,

$$a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 \times (a_2 \times \ldots \times a_n).$$

Таким образом, $a_1 \times \ldots \times a_n$ это множество n-ок $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, где $x_i \in a_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

С помощью понятий упорядоченной пары и упорядоченного набора можно, как обычно, определить понятия отношения, функции и т.п., используя для этого только Δ_0-формулы (см. таблицу 1).

Множество a называется **транзитивным** (обозн. $\mathrm{Tran}(a)$), если

$$\forall x \in a \forall z \in x(z \in a),$$

таким образом, $\mathrm{Tran}(a)$ – Δ_0-формула. Праэлементы по определению не являются транзитивными. Всякое множество праэлементов является транзитивным. Пустое множество 0 также является транзитивным.

Определение 6. *Обозначим* $\mathcal{P}(a) = a \cup \{a\}$.

Упражнение 1. *Докажите (методом индукции), что для любого* n

$$\mathrm{KPU} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists a (a = \{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Упражнение 2. *Докажите, что если* a *– множество транзитивных элементов, то* $\cup a$ *– транзитивное множество. Докажите, что если множество* a *транзитивно, и* $b \subseteq a$, *то множество* $a \cup \{b\}$ *также транзитивно. В частности, если* a *транзитивно, то транзитивно и* $\mathcal{P}(a)$.

Определение 7. Ординалом *называется транзитивное множество, каждый элемент которого также является транзитивным. Формально,*

$$\mathrm{Ord}(a) \iff \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall x \in a \mathrm{Tran}(x).$$

Ординалы будем обозначать символами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Запись $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha \in \beta$. Ординал α называется **натуральным числом**, если для всех $\beta \leqslant \alpha$ при $\beta \neq 0$ имеем $\beta = \mathcal{P}(\gamma)$ для некоторого γ. Для обозначения натуральных чисел будем использовать символы $n, m, \ldots$.

Упражнение 3. *Докажите в* KPU:

(i) 0 *является ординалом;*

(ii) если α *– ординал, то* $\mathcal{P}(\alpha)$ *– также ординал, который обозначается* $\alpha + 1$;

(iii) если $\alpha \neq \beta$, *то* $\alpha < \beta$ *или* $\beta < \alpha$ *(используйте аксиому фундированности);*

(iv) для всех α *верно* $\alpha \not< \alpha$;

(v) если a *– множество ординалов, то* $\beta = \cup a$ *также является ординалом, причем* $\alpha \leqslant \beta$ *для всех* $\alpha \in a$ *и* $\exists \alpha \in a (\gamma \leqslant \alpha)$ *для всех* $\gamma < \beta$ *(то есть* $\beta = \sup(a)$ *– супремум множества* a*);*

(vi) если $\alpha < \beta$, *то* $\alpha + 1 \leqslant \beta$;

(vii) любое непустое множество ординалов имеет наименьший элемент.

Определение 8. *Множество* a *называется* **конечным**, *если существует биекция* f, *для которой* $\mathrm{dom}(f) = a$, *а множеством значений является некоторое натуральное число* n. *Множество* a *называется* **счетным**, *если существует биекция* f, *для которой* $\mathrm{dom}(f) = a$, *а множеством значений является некоторое множество натуральных чисел.*

Упражнение 4. *(i) Докажите, что всякий элемент ординала является ординалом.*

(ii) Докажите, что множество является ординалом тогда и только тогда, когда оно транзитивно, а его элементы линейно упорядочены отношением $\in$.

(iii) Докажите, что ординал конечен тогда и только тогда, когда он является натуральным числом.

Таблица 1. Некоторые Δ_0-предикаты.

обозначение	Δ_0-определение
$x \subseteq y$	$\forall z \in x(z \in y)$
$a = \{x, y\}$	$(x \in a) \wedge (y \in a) \wedge \forall z \in a((z = x) \vee (z = y))$
$a = \langle x, y\rangle$	$\exists b \in a \exists c \in a((b = \{x\}) \wedge (c = \{x, y\}) \wedge (a = \{b, c\}))$
$\mathrm{Pair}(a)$	$\exists c \in a \exists x \in c \exists y \in c(a = \langle x, y\rangle)$
$pr_1(a) = x$	$\exists c \in a \exists y \in c(a = \langle x, y\rangle)$
$pr_2(a) = y$	$\exists c \in a \exists x \in c(a = \langle x, y\rangle)$
$\mathrm{Reln}(a)$	$\forall x \in a \mathrm{Pair}(x)$
$\mathrm{Fun}(f)$	$\mathrm{Reln}(f) \wedge \forall a \in f \forall b \in f((pr_1(a) = pr_1(b)) \to (pr_2(a) = pr_2(b)))$
$a = \mathrm{dom}(r)$	$\mathrm{Reln}(r) \wedge \forall b \in r(pr_1(b) \in a) \wedge \forall x \in a \exists b \in r(pr_1(b) = x)$
$a = \mathrm{rng}(r)$	$\mathrm{Reln}(r) \wedge \forall b \in r(pr_2(b) \in a) \wedge \forall x \in a \exists b \in r(pr_2(b) = x)$
$y = f(x)$	$\mathrm{Fun}(f) \wedge (\langle x, y\rangle \in f)$
$a = \cup b$	$\forall x \in b \forall y \in x(y \in a) \wedge \forall y \in a \exists x \in b(y \in x)$

Конечные и счетные множества – первые примеры понятий, которые нельзя определить с помощью Δ_0-формул. Данные определения формально записываются в виде

$$\exists f \varphi(f, a),$$

где φ – Δ_0-формула. Формулы вида $\exists u \varphi(u)$, где φ – Δ_0-формула, называются Σ_1**-формулами**. Оказывается, что существует широкий класс формул, эквивалентных Σ_1-формулам, которые можно использовать в принципах выделения, ограниченности и замещения.

Определение 9. *Класс* **Σ-формул** *– это наименьший класс Y, содержащий все Δ_0-формулы, замкнутый относительно конъюнкции, дизъюнкции, ограниченной квантификации, и удовлетворяющий условию*

(i) если $\varphi \in Y$, то $\exists u\varphi \in Y$ для всех переменных u.
Класс Π-**формул** *– это наименьший класс Y', содержащий все Δ_0-формулы, замкнутый относительно конъюнкции, дизъюнкции, ограниченной квантификации, и удовлетворяющий условию*
(ii) если $\varphi \in Y$, то $\forall u\varphi \in Y$ для всех переменных u.

Например, формулы

$$\forall b \in a[b \text{ счетно}] \text{ и } \forall x \in a \exists b[\mathrm{Tran}(b) \wedge x \in b]$$

– Σ-формулы, но не Σ_1-формулы. Очевидно, что отрицание Σ-формулы логически эквивалентно Π-формуле, и наоборот. В качестве следствия к теореме 1 мы покажем, что для любой Σ-формулы φ существует Σ_1-формула φ' такая, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'.$$

Если φ – произвольная формула, w – переменная, не встречающаяся в этой формуле, то через $\varphi^{(w)}$ обозначается результат ограничения всех неограниченных кванторов в φ переменной w, то есть в формуле φ все кванторы вида $\exists u$ заменяются на $\exists u \in w$, а все кванторы вида $\forall u$ – на $\forall u \in w$. Таким образом, $\varphi^{(w)}$ – Δ_0-формула. Если φ – Δ_0-формула, то очевидно $\varphi^{(w)} = \varphi$. Всюду далее запись $\varphi^{(w)}$ подразумевает, что w не встречается в формуле φ.

Лемма 1. *Для любой Σ-формулы φ следующие утверждения общезначимы (то есть истинны во всех системах вида $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$):*
(i) $(\varphi^{(u)} \wedge u \subseteq v) \to \varphi^{(v)}$,
(ii) $\varphi^{(u)} \to \varphi$,
где $u \subseteq v$ есть сокращение для формулы $\forall x[x \in u \to x \in v]$. (На самом делее, точнее говорить об общезначимости универсальных замыканий формул (i) и (ii)).

Доказательство. Ограничимся доказательством только утверждения (i). Доказательство проводится индукцией по построению Σ-формулы φ. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, E, \ldots)$, $x, y \in A \cup M$, и $x \subseteq y$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$. Если φ – Δ_0-формула, то очевидно $\varphi^{(x)} = \varphi^{(y)} = \varphi$. Если φ имеет вид $\varphi_1 * \varphi_2$, $* \in \{\wedge, \vee\}$, то по индукции из $\varphi_i^{(x)}$ следует $\varphi^{(y)}$ (i=1,2), поэтому из $\varphi^{(x)}$ следует $\varphi^{(y)}$. Аналогично для ограниченных кванторов.

Пусть теперь φ имеет вид $\exists w\varphi_1(w)$, и пусть $\varphi^{(x)}$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$, то есть существует $w \in x$, для которого $\varphi_1(w)^{(x)}$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$. По индукции $\varphi_1(w)^{(y)}$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$, а так как $x \subseteq y$, то верно и $\exists w \in y(\varphi_1(w)^{(y)})$, то есть $\varphi^{(y)}$. $\square$

Теорема 1. *(принцип Σ-рефлексии) Для любой Σ-формулы φ*

$$\mathrm{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists a \varphi^{(a)}.$$

В частности, в теории KPU*любая Σ-формула эквивалентна Σ_1-формуле.*

Доказательство. По предыдущей лемме, формула $\exists a \varphi^{(a)} \to \varphi$ общезначима, поэтому аксимы KPU нужны лишь для доказательства $\varphi \to \exists a \varphi^{(a)}$. Доказательство проводится индукцией по построению φ, причем случай, когда φ – Δ_0-формула, тривиален. Рассмотрим три наиболее интересных случая, оставляя два других в качестве упражнения.

Случай 1. Формула φ имеет вид $\psi \wedge \theta$. По индукции можно считать, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \psi \leftrightarrow \exists a \psi^{(a)} \text{ и}$$

$$\mathrm{KPU} \vdash \theta \leftrightarrow \exists a \theta^{(a)}.$$

Покажем, что

$$\mathrm{KPU} \vdash (\psi \wedge \theta) \to \exists a [\psi \wedge \theta]^{(a)}.$$

Пусть имеет место $\psi \wedge \theta$. По индукции существуют a_1 и a_2 такие, что $\psi^{(a_1)}$ и $\theta^{(a_2)}$. Если теперь взять $a = a_1 \cup a_2$, то $\psi^{(a)}$ и $\theta^{(a)}$ имеют место по предыдущей лемме.

Случай 2. Формула φ имеет вид $\forall u \in v \psi(u)$. По индукции можно считать, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \psi \leftrightarrow \exists a \psi^{(a)}.$$

Пусть имеет место $\forall u \in v \psi(u)$. Покажем, что $\exists a \forall u \in v \psi(u)^{(a)}$. Для каждого $u \in v$ существует b такое, что $\psi(u)^{(b)}$, поэтому по принципу Δ_0-ограниченности существует a_0 такое, что $\forall u \in v \exists b \in a_0 \psi(u)^{(b)}$. Положим $a = \cup a_0$. Тогда для любого $u \in v$ имеем $\exists b \subseteq a \psi(u)^{(b)}$, поэтому $\forall u \in v \psi(u)^{(a)}$ по предыдущей лемме.

Случай 3. Формула φ имеет вид $\exists u \psi(u)$. По индукции можно считать, что $\psi(u) \leftrightarrow \exists b \psi(u)^{(b)}$. Пусть имеет место $\exists u \psi(u)$. Нужно показать, что существует a, для которого $\exists u \in a \psi(u)^{(a)}$. Пусть имеет место $\psi(u)$; возьмем b, для которого имеет место $\psi(u)^{(b)}$, и положим $a = b \cup \{u\}$. Тогда $u \in a$ и $\psi(u)^{(a)}$ по предыдущей лемме.

□

В первоначальном определении допустимого множества, данном Платеком, принцип Σ-рефлексии постулируется в качестве аксиомы. Роль этого принципа очень велика, как мы увидим далее. Однако принцип Δ_0-ограниченности, во-первых, легче проверяется в конкретных системах, во-вторых, он больше похож на привычную аксиому замены из ZF.

Теорема 2. *(принцип Σ-ограниченности). Для каждой Σ-формулы φ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y)$, то существует множество b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$ и $\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x, y)$.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y)$. По принципу Σ-рефлексии существует множество c такое, что

$$(1) \qquad \forall x \in a \exists y \in c \varphi^{(c)}(x, y).$$

Пусть

$$(2) \qquad b = \{y \in c | \exists x \in a \varphi^{(c)}(x, y)\},$$

это множество существует по принципу Δ_0-выделения. Так как по доказанной ранее лемме $\varphi^{(c)}(x, y) \to \varphi(x, y)$, из (1) следует, что

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y),$$

а из (2) следует, что

$$\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x, y).$$

□

Теорема 3. *(признак Δ-выделения). Для любой Σ-формулы $\varphi(x)$ и любой Π-формулы $\psi(x)$ следующее утверждение является теоремой KPU: если $\forall x \in a(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$, то существует множество $b = \{x \in a | \varphi(x)\}$.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in a(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$. Тогда $\forall x \in a(\varphi(x) \vee \neg\psi(x))$. Так как последняя формула эквивалентна Σ-формуле, существует c такое, что $\forall x \in a(\varphi^{(c)}(x) \vee \neg\psi^{(c)}(x))$. По принципу Δ_0-выделения, существует множество $b = \{x \in a | \varphi^{(c)}(x)\}$. Ясно, что для всякого $x \in b$ верно $\varphi(x)$. Если $x \in a$ и $\varphi(x)$, то $\psi(x)$, а значит и $\psi^{(c)}(x)$ (так как $\psi(x) \to \psi^{(c)}(x)$), поэтому $\varphi^{(c)}(x)$. Таким образом, $x \in b$. □

Теорема 4. *(принцип Σ-замещения). Для любой Σ-формулы $\varphi(x, y)$ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если $\forall x \in a \exists! y \varphi(x, y)$, то существует функция f, для которой $\mathrm{dom}(f) = a$ и $\forall x \in a \varphi(x, f(x))$.*

Доказательство. По принципу Σ-ограниченности существует множество b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$. По принципу Δ-выделения существует множество f такое, что

$$f = \{\langle x, y\rangle \in a \times b | \varphi(x, y)\} =$$

$$= \{\langle x, y\rangle \in a \times b | \neg \exists z (\varphi(x, z) \wedge y \neq z)\}.$$

□

Предыдущее утверждение на практике трудно использовать из-за квантора $\exists !$ в посылке. Часто бывает полезней

Теорема 5. *(принцип сильного Σ-замещения). Для каждой Σ-формулы $\varphi(x, y)$ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y)$, то существует функция f такая, что* $\mathrm{dom}(f) = a$ *и*

(i) $\forall x \in a\ f(x) \neq 0$*;*

(ii) $\forall x \in a \forall y \in f(x)\ \varphi(x, y)$.

Доказательство. По принципу Σ-ограниченности существует множество b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$ и $\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x, y)$. По принципу Σ-рефлексии существует w такое, что

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi^{(w)}(x, y) \text{ и } \forall y \in b \exists x \in a \varphi^{(w)}(x, y).$$

Для каждого конкретного $x \in a$ вследствие аксиом Δ_0-выделения и экстенсиональности существует единственное множество c_x такое, что

$$c_x = \{y \in b | \varphi^{(w)}(x, y)\}.$$

По принципу Σ-замещения существует функция f, для которой $\mathrm{dom}(f) = a$ и $f(x) = c_x$ для всех $x \in a$. □

Определение 10. *Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – Σ-формула сигнатуры σ^*, а $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ – Π-формула сигнатуры σ^*, такие, что*

$$\mathrm{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Пусть R – новый n-местный предикатный символ, определяемый предложением

$$\text{(R)} \qquad \forall x_1 \dots \forall x_n [\mathrm{R}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)].$$

Тогда R называется символом **Δ-отношения** *в* KPU.

Лемма 2. *Пусть теория* KPU*рассматривается в сигнатуре* σ^*, *и пусть R – символ Δ-отношения в* KPU. *Через* KPU$'$ *обозначим теорию* KPU*для сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$ *вместе с аксиомой (R).*

(i) Для любой формулы $\theta(\bar{x})$ *сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$ *существует формула* $\theta_0(\bar{x})$ *сигнатуры* σ^* *такая, что в* KPU+*(R) выводима*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}).$$

Кроме того, если θ – Σ*-формула сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$, *то* θ_0 – Σ*-формула сигнатуры* σ^*.

(ii) Для любой Δ_0*-формулы* $\theta(\bar{x})$ *сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$ *существуют* Σ*- и* Π*-формулы* $\theta_0(\bar{x})$ *и* $\theta_1(\bar{x})$ *сигнатуры* σ^* *такие, что в* KPU+*(R) выводимы*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}) \text{ и } \theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_1(\bar{x}).$$

(iii) KPU$'$ *является консервативным расширением* KPU, *то есть для любого предложения* θ *сигнатуры* σ^*

$$\mathrm{KPU}' \vdash \theta \iff \mathrm{KPU} \vdash \theta.$$

Определение 11. *Пусть* $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ – Σ*-формула сигнатуры* σ^*, *для которой*

$$\mathrm{KPU} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y \varphi(x_1, \dots, x_n, y).$$

Пусть F – новый n-местный функциональный символ, определяемый предложением

$$\text{(F)} \qquad \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y [\mathrm{F}(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, y)].$$

Тогда F называется символом **Σ-функции** *в* KPU.

Лемма 3. *Пусть теория* KPU*рассматривается в сигнатуре* σ^*, *и пусть F – символ* Σ*-функции в* KPU. *Через* KPU$'$ *обозначим теорию* KPU*для сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{F})$ *вместе с аксиомой (F).*

(i) Для любой формулы $\theta(\bar{x})$ сигнатуры $\sigma^*(\mathrm{F})$ существует формула $\theta_0(\bar{x})$ сигнатуры σ^* такая, что в KPU*+(F) выводима*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}).$$

Кроме того, если θ – Σ-формула сигнатуры $\sigma^*(\mathrm{F})$, то θ_0 – Σ-формула сигнатуры σ^*.

(ii) Для любой Δ_0-формулы $\theta(\bar{x})$ сигнатуры $\sigma^*(\mathrm{F})$ существуют Σ- и Π-формулы $\theta_0(\bar{x})$ и $\theta_1(\bar{x})$ сигнатуры σ^* такие, что в KPU*+(F) выводимы*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}) \text{ и } \theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_1(\bar{x}).$$

(iii) KPU$'$ *является консервативным расширением* KPU.

2 Σ-рекурсия.

Теорема 6. *(Существование транзитивного замыкания). В* KPU*можно определить символ Σ-функции* TC *так, что следующие утверждения являются теоремами* KPU*: для любого x $\mathrm{TC}(x)$ – транзитивное множество, $x \subseteq \mathrm{TC}(x)$, и для любого транзитивного множества a из $x \subseteq a$ следует $\mathrm{TC}(x) \subseteq a$.*

Доказательство. Доказательство проводится *индукцией относительно* $\in$: для любой формулы φ аксиому фундированности можно записать так:

$$\forall x(\forall y \in x\varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x\varphi(x).$$

Поэтому для того, чтобы установить $\forall x\varphi(x)$, достаточно показать, что для любого x $\varphi(x)$ вытекает из справедливости $\varphi(y)$ для всех $y \in x$.

Если бы существование ординала ω можно было доказать в KPU, с его помощью можно было бы определить

$$\mathrm{TC}(a) = a \cup (\cup a) \cup (\cup \cup a) \cup \ldots.$$

Для понимания доказательства данное замечание следует иметь в виду. Определим предикат $Q(x, a)$ как

$$x \subseteq a \wedge \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall b(x \subseteq b \wedge \mathrm{Tran}(b) \to a \subseteq b).$$

Предикат Q определяется П-формулой, и $Q(x, a)$ означает, что a – наименьшее транзитивное множество, содержащее x. Ясно, что $Q(x, a) \wedge Q(x, a') \rightarrow a = a'$.

Далее, пусть $P(x, a)$ – Σ-предикат, определяемый как

$$x \text{ – праэлемент } \wedge a = 0, \text{ или}$$

$$x \text{ – множество, } x \subseteq a, \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall z \in a \exists f[\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f)$$

$$\text{– натуральное число } n+1 = \{0, \ldots, n\} \wedge z = f(0) \in f(1) \in \ldots \in f(n) \in x.$$

(Многоточие ... легко формализуемо, поэтому данное определение не содержит "скрытой"рекурсии.) Простой индукцией по натуральным числам можно показать, что $P(x, a) \rightarrow Q(x, a)$. Отсюда, в частности, $P(x, a) \wedge P(x, a') \rightarrow a = a'$.

Если бы для каждого x существовало множество a такое, что $P(x, a)$, то Σ-функция TC определялась бы условием

$$\mathrm{TC}(x) = a \iff P(x, a)$$

и $\mathrm{TC}(x)$ действительно было бы транзитивным замыканием x. Итак, нужно установить, что $\forall x \exists a P(x, a)$. Если x – праэлемент, то $a = 0$, поэтому установим $\forall b \exists a P(b, a)$ индукцией относительно $\in$. Для данного b будем считать, что

$$\forall x \in b \exists c P(x, c),$$

а значит и

$$\forall x \in b \exists ! c P(x, c).$$

По принципу Σ-замещения существует функция g, для которой $\mathrm{dom}(g) = b$ и $P(x, g(x))$ для всех $x \in b$. Положим

$$a = b \cup (\cup \mathrm{rng}(g)) = b \cup (\cup_{x \in b} g(x)).$$

Ясно, что $b \subseteq a$, и, кроме того, нетрудно убедиться, что a транзитивно. Проверим последнее условие в определении $P(b, a)$. Пусть $z \in a$. Если $z \in b$, положим $f = \{\langle 0, z \rangle\}$. Пусть теперь $z \in \cup \mathrm{rng}(g)$, то есть $z \in g(x)$ для некоторого $x \in b$. Тогда существует функция h, для которой $\mathrm{dom}(h) = n + 1$, $h(0) = z$, $h(i) \in h(i + 1)$, и $h(n) \in x$ (так как $P(x, g(x))$). Положим $f = h \cup \{\langle n + 1, x \rangle\}$. Тогда $f(0) = z \in f(1) \in f(2) \in \ldots \in f(n + 1) = x \in b$, а значит $P(a, b)$. $\square$

Следующая теорема позволяет усилить метод доказательства индукцией относительно $\in$.

Теорема 7. *(Доказательство индукцией по TC.) Для любой формулы $\varphi(x)$ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если для любого x из $\forall y \in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)$ следует $\varphi(x)$, то $\forall x\varphi(x)$.*

Доказательство. Покажем, что из данной посылки следует, что $\forall x \forall y \in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)$. В этом случае верно и $\forall x\varphi(x)$, так как $x \in \mathrm{TC}(\{x\})$. Можно предположить, что для всех $z \in x$

$$(1) \qquad \forall y \in \mathrm{TC}(z)\varphi(y),$$

доказывая индукцией по $\in$, что $\forall y \in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)$. Отсюда ввиду посылки следует, что $\varphi(z)$, то есть имеет место $\varphi(y)$ для всех $y \in x \cup (\cup\{\mathrm{TC}(z) | z \in x\}) = \mathrm{TC}(x)$. □

Следующая теорема играет центральную роль в дальнейшем изложении.

Теорема 8. *(Определение с помощью Σ-рекурсии.) Пусть G – символ $n+2$-местной Σ-функции, $n \geqslant 0$. Можно определить новый символ Σ-функции F, для которого следующее утверждение будет теоремой* $\mathrm{KPU} + (F)$ *(где (F) – аксиома, определяющая F): для всех $x_1, \dots, x_n, y$*

$$(i) \qquad F(x_1, \dots, x_n, y) = G(x_1, \dots, x_n, y, \{\langle z, F(x_1, \dots, x_n, z)\rangle | z \in \mathrm{TC}(y)\}).$$

Прежде чем переходить к довольно длинному доказательству теоремы 8, приведем несколько полезных следствий. Например, (i) можно заменить на

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = G(x_1, \dots, x_n, y, \{\langle z, F(x_1, \dots, x_n, z)\rangle | z \in y\}).$$

(Возьмем $G'(\bar{x}, y, f) = G(\bar{x}, y, f \restriction y)$ и применим теорему 8.) Можно также по двум функциям G и H определить

$$F(x_1, \dots, x_n, p) = H(x_1, \dots, x_n, p),$$

$$F(x_1, \dots, x_n, a) = G(x_1, \dots, x_n, a, \{\langle z, F(x_1, \dots, x_n, z)\rangle | z \in \mathrm{TC}(a)\}).$$

Обычно именно в таком виде определения с помощью Σ-рекурсии будут даваться в дальнейшем.

Доказательство. Допустив, что функция F уже определена, нужно установить, что для всех $x_1, \ldots, x_n, y$ существует f такое, что

$$(1) \qquad f \text{ – функция } \wedge \operatorname{dom}(f) = \mathrm{TC}(y),$$

$$(2) \qquad \forall w \in \operatorname{dom}(f)\ (f(w) = F(x_1, \ldots, x_n, w)), \text{ и}$$

$$(3) \qquad F(x_1, \ldots, x_n, y) = G(x_1, \ldots, x_n, y, f).$$

Эти замечания дают идею нужного определения F. Для удобства обозначений будем считать, что $n = 1$. Пусть $P(x, y, z, f)$ – Σ-предикат, означающий, что

$$f \text{ – функция } \wedge \operatorname{dom}(f) = \mathrm{TC}(y)$$
$$\wedge \forall w \in \mathrm{TC}(y)\ (f(w) = G(x, w, f \restriction \mathrm{TC}(w)))$$
$$\wedge z = G(x, y, f).$$

Мы докажем, что

$$(4) \qquad \forall x \forall y \exists! z \exists f P(x, y, z, f);$$

и ввиду этого сможем определить символ Σ-функции f так:

$$(5) \qquad F(x, y) = z \iff \exists f P(x, y, z, f)$$

(ясно, что правая часть (5) является Σ-формулой). Для доказательства (4) достаточно установить, что

$$(6) \qquad P(x, y, z, f) \wedge P(x, y, z', f') \to z = z' \wedge f = f', \text{ и}$$

$$(7) \qquad \forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f).$$

Докажем (6) и (7) индукцией по $\mathrm{TC}(y)$. Будем использовать при доказательстве свойства (8) и (9), вытекающие из определения P:

$$(8) \qquad P(x, y, z, f) \to z = G(x, y, f);$$

$$(9) \qquad P(x, y, z, f) \wedge w \in \mathrm{TC}(y) \to P(x, w, f(w), f \restriction \mathrm{TC}(w)).$$

Итак, докажем (6) индукцией по $\mathrm{TC}(y)$. Предположим, что для $w \in \mathrm{TC}(y)$ существует не более одного u и не более одного g, для которых $P(x, w, u, g)$, и покажем, что $P(x, y, z, f) \wedge P(x, y, z', f') \to z = z' \wedge f = f'$.

Так как $z = G(x, y, f)$ и $z' = G(x, y, f')$, достаточно показать, что $f = f'$. Но f и f' – функции с одинаковой областью определения $\mathrm{TC}(y)$, поэтому достаточно показать, что $f(w) = f'(w)$ для всех $w \in \mathrm{TC}(y)$. Но по (9) имеют место $P(x, w, f(w), f \upharpoonright \mathrm{TC}(w))$ и $P(x, w, f'(w), f' \upharpoonright \mathrm{TC}(w))$, поэтому $f(w) = f'(w)$ по индукционному предположению. Осталось установить (7), и здесь как раз используется Δ_0-ограниченность в форме принципа Σ-замещения. Покажем, что $\exists z \exists f P(x, y, z, f)$, предполагая, индукцией относительно TC, что $\forall w \in \mathrm{TC}(y) \exists u \exists g P(x, w, u, g)$, а значит, вследствие (6), существуют единственные u_w, g_w, для которых $P(x, w, u_w, g_w)$. По принципу Σ-замещения существует функция

$$f = \{\langle w, u_w \rangle | w \in \mathrm{TC}(y)\}.$$

Для доказательства (7) достаточно установить, что $P(x, y, G(x, y, f), f)$, а это в свою очередь следует из того, что $\forall z \in \mathrm{TC}(y)(f(z) = G(x, z, f \upharpoonright \mathrm{TC}(z)))$. Так как $P(x, z, u_z, g_z)$, то $f(z) = u_z = G(x, y, g_z)$. Поэтому остается только показать, что $f \upharpoonright \mathrm{TC}(z) = g_z$. Для $w \in \mathrm{dom}(g_z) = \mathrm{TC}(z)$ из (9) следует, что $P(x, w, g_z(w), g_z \upharpoonright \mathrm{TC}(w))$. Отсюда по (6) получаем, что $g_z(w) = u_w = f(w)$, а значит $g_z = f \upharpoonright \mathrm{TC}(z)$, что и требовалось. Таким образом, (7) доказано. Теперь можно определить F с помощью (5) и приступить к доказательству соотношения (i) из формулировки теоремы. Согласно (5),

$$F(x, y) = G(x, y, f), \text{ если } P(x, y, G(x, y, f), f),$$

поэтому остается показать, что

$$f = \{\langle z, F(x, z) \rangle | z \in \mathrm{TC}(y)\}.$$

Для $z \in \mathrm{TC}(y)$ из (9) следует, что $P(x, z, f(z), f \upharpoonright \mathrm{TC}(z))$, поэтому из (5) получаем $F(x, z) = f(z)$, что и требовалось. □

Упражнение 5. *Покажите, что если функции F_1, F_2 обе удовлетворяют условию (i) теоремы 8 при всех $x_1, \ldots, x_n, y$, то $F_1(x_1, \ldots, x_n, y) = F_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ при всех $x_1, \ldots, x_n, y$.*

Для применений теоремы 8 обычно нет необходимости в явном виде определять функции G и H.

Следствие 1. *(Δ-предикаты, определенные с помощью рекурсии). Пусть P и Q – соответственно $n+1$- и $n+2$-местные Δ-предикаты, $n \geqslant 0$.*

Тогда можно определить Δ*-предикат* R *так, что следующие утверждения доказуемы в соответствующем расширении* KPU*:*

$$(i) \quad \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n, p) \leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n, p);$$

$$(ii) \quad \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n, a) \leftrightarrow Q(x_1, \ldots, x_n, a, \{b \in \mathrm{TC}(a) | \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n, b)\}).$$

Доказательство. Пусть G и H – характеристические функции предикатов P и Q соответственно. Используя Σ-рекурсию, определим F – характеристическую функцию для R, тогда

$$\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n, y) = 1$$

$$\leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0,$$

поэтому R будет Δ-предикатом. □

Примеры Σ-функций, определяемых с помощью Σ-рекурсии:
1) функция rnk, сопоставляющая произвольному элементу KPU-модели ординал, который называется *рангом* этого элемента:

$\mathrm{rnk}(p) = 0$,

$\mathrm{rnk}(a) = \sup\{\mathrm{rnk}(x) + 1 \,|\, x \in a\}$;

2) функция sp, сопоставляющая произвольному элементу KPU-модели множество праэлементов, которое называется *носителем* этого элемента:

$\mathrm{sp}(p) = \{p\}$,

$\mathrm{sp}(a) = \cup\{\mathrm{sp}(x) \,|\, x \in a\}$;

3) функции $+$ и $\cdot$, сопоставляющие произвольной паре ординалов KPU-модели ординалы, которые называются, соответственно, их *суммой* и *произведением*:

$\alpha + \beta = \alpha \cup \sup\{(\alpha + \gamma) + 1 \,|\, \gamma < \beta\}$,

$\alpha \cdot \beta = \sup\{(\alpha \cdot \gamma) + \alpha \,|\, \gamma < \beta\}$.

3 Устойчивые и абсолютные предикаты.

В этом параграфе обсуждаются причины, по которым аксиомы выделения и ограниченности в теории KPU постулируются только для Δ_0-формул. Обоснование такого выбора использует одно из центральных понятий данного курса – понятие абсолютности.

Напомним процесс задания теоретико-множественого универсума $\mathbb{V}_M$ (см. начало следующего параграфа). Множества добавляются в $\mathbb{V}_M$ по шагам, и принцип выделения регламентирует возможности для построения множеств на каждом шаге. Суть принципа Δ_0-выделения состоит в том, что множество $b = \{x \in a | \varphi(x, y)\}$ может быть образовано на шаге α только в том случае, когда уже построены a и y, и значение $\varphi(x, y)$ полностью (абсолютно) определяется только с использованием множеств, построенных до шага α. Другими словами, на более позднем шаге β множество $\{x \in a | \varphi(x, y)\}$ должно совпадать с b, несмотря на то, что теперь имеется больше множеств, которые могли бы изменить значение $\varphi(x, y)$, будь там неограниченные кванторы.

Аналогичные рассуждения и в случае принципа ограниченности. Предположим, что в процессе построения $\mathbb{V}_M$ оказалось, что $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y)$. Нужно, чтобы на следующем щаге можно было построить множество b, для которого $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$ было справедливо на этом и всех последующих шагах. Но что если уже появление самого множества b приведет к нарушению $\varphi(x, y)$ для некоторого $x \in a$? Такое может случиться, если φ содержит неограниченные кванторы. Исходя из этих соображений, принцип ограниченности должен применяться только для формул $\varphi(x, y)$, которые не могут менять значения при добавлении новых элементов в универсум множеств. Иными словами, формула $\varphi(x, y)$ должна быть абсолютной.

Определение 12. *Пусть $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, E, \ldots)$ – алгебраическая система сигнатуры σ^*. Для любого $a \in A$ пусть*

$$a_E = \{y \in M \cup A | yEa\}.$$

Отметим, что значение a_E зависит как от a, так и от $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$. Грубо говоря, a_E – множество, которым a "видится"из $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$.

Стандартное понятие подсистемы естественным образом переносится и на системы сигнатуры σ^*. Будем говорить, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ – **подсистема** $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$, и обозначать $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, E, \ldots)$, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{N}, B, E', \ldots)$, если $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$ (как системы сигнатуры σ), $A \subseteq B$, и интерпретации $E, \ldots$ являются ограничениями на $M \cup A$ соответствующих интерпретаций $E', \ldots$.

Однако данное определение нельзя считать естественным при изучении моделей теории множеств. Действительно, пусть $a \in A$. Проблема в том, что множество a как элемент $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ и как элемент $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ может "раздвоиться". Условие $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ гарантирует лишь, что $a_E \subseteq a_{E'}$, не исключая возможности, что для некоторого $x \in B \setminus A$ верно $x \in a_{E'} \setminus a_E$. Безусловно, такую ситуацию нельзя считать нормальной (поскольку множество должно полностью определяться своими элементами), поэтому мы введем более сильное понятие подсистемы, отвечающее требованиям теории множеств.

Определение 13. *Пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, E, \dots)$ *и* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{N}, B, E', \dots)$ *– алгебраические системы сигнатуры* σ^**. Система* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ *называется* **концевой подсистемой** *системы* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *(обозн.* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*), если* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *и* $a_E = a_{E'}$ *для всех* $a \in A$.

Если A – транзитивное множество, $B \supseteq A$, $E =\in \cap A^2$ и $E' =\in \cap B^2$, то

$$(\mathfrak{M}, A, E) \leqslant_{end} (\mathfrak{M}, B, E'),$$

так как для любого $a \in A$ имеем $a_E = a_{E'} = a$. Если же A не является транзитивным, то это, вообще говоря, не верно.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *– алгебраические системы сигнатуры* σ^**, и пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*. Если* φ *–* Σ*-формула сигнатуры* σ^**, то для любых* $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ *из* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *следует* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Определение 14. *Формула* $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ *сигнатуры* σ^* *называется* **устойчивой** *относительно теории* T *сигнатуры* σ^**, если для любых моделей* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*,* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *теории* T *с условием* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*, и для любых* $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} \models \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Формула φ *называется* **абсолютной** *относительно теории* T*, если для любых* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*,* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*,* $x_1, \dots, x_n$ *с теми же условиями*

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} \models \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Следствие 2. *Любая* Σ*-формула является устойчивой, и любая* Δ_0*-формула является абсолютной (относительно любой теории).*

Доказательство. По предыдущей лемме любая Σ-формула является устойчивой, поэтому любая Δ_0-формула также является устойчивой. Кроме того, класс Δ_0-формул замкнут относительно отрицания, и произвольная формула φ абсолютна тогда и только тогда, когда φ и $\neg\varphi$ устойчивы. □

Теорема 9. *Для любой теории* T *сигнатуры* σ^* *верно следующее: если* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *– устойчивая относительно теории* T *формула, то для некоторой* Σ*-формулы* $\psi(x_1, \dots, x_n)$

$$T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n [\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)].$$

Как следствие, если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ – абсолютная относительно теории T формула, то для некоторой Σ-формулы $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ и некоторой Π-формулы $\theta(x_1,\ldots,x_n)$

$$T \vdash \forall x_1\ldots\forall x_n[(\varphi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n))\wedge(\varphi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\theta(x_1,\ldots,x_n))].$$

4 Допустимые ординалы и допустимые множества.

Для удобства зафиксируем максимально большой универсум множеств над произвольным семейством праэлементов M. Определим по рекурсии

$$V_M(0)=0,$$

$$V_M(\alpha+1)=P(M\cup V_M(\alpha)),$$

$$V_M(\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}V_M(\alpha),\ \text{если } \lambda \text{ предельный},$$

$$\mathbb{V}_M=\bigcup_{\alpha}V_M(\alpha),$$

где последнее объединение проводится по всем ординалам α. (В этом определении на первом шаге $V_M(0)=0$, а не $V_M(0)=M$ из тех соображений, что $\mathbb{V}_M$ должно быть семейством *множеств* над M). Будем использовать символ $\in_M$ для отношения принадлежности на $\mathbb{V}_M$, опуская нижний индекс в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям. Если $\mathfrak{M}=\langle M,\ldots,\rangle$, для $\mathbb{V}_M$ будем также использовать обозначение $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Если M пусто, будем $V_M(\alpha)$ обозначать через $V(\alpha)$, а $\mathbb{V}_M$ – через $\mathbb{V}$.

Определение 15. *Пусть $\sigma^*=\sigma\cup\{\in,\ldots\}$, и пусть $\mathfrak{M}$ – алгебраическая система сигнатуры σ.* **Допустимым множеством над $\mathfrak{M}$** *называется модель* KPU $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ *вида*

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}=(\mathfrak{M},A,\in,\ldots),$$

где $M\cup A$ транзитивно в $\mathbb{V}_M$, а $\in$ – ограничение $\in_M$ на $M\cup A$. Допустимое множество $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ называется **допустимым с $\mathfrak{M}$**, *если $M\in A$, то есть $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}\models \mathrm{KPU}^+$.*

Для обозначения допустимых множеств будем использовать обозначения $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$. Если необходимо использовать систему $\mathfrak{M}$, лежащую в основе допустимого множества, будем использовать обозначение $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$.

Итак, допустимые множества – это модели KPU, носители которых являются транзитивными частями $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, а символ принадлежности интерпретируется стандартным образом как $\in_M$. Отметим, что хотя интерпретация символа принадлежности должна быть стандартной, предыдущее определение не требует этого для остальных символов из ... в $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$. Например, если $\sigma^* = \sigma \cup \{\in, \mathrm{P}\}$ и в допустимом множестве $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in, P)$ выполнена аксиома Power, то вовсе не обязательно, что $P(a)$ на самом деле является множеством-степенью для a, оно вполне может быть некоторой маленькой частью настоящего множества-степени для a.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in_M, \ldots)$, $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{N}, B, \in_N, \ldots)$ *– допустимые множества, и* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathbb{B}_{\mathfrak{N}}$. *Тогда* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathbb{B}_{\mathfrak{N}}$.

Доказательство. Если $a \in A$, то $a_{\in_M} = a = a_{\in_N}$, так как $M \cup A$ транзитивно в $\mathbb{V}_M$. □

Данная лемма верна и для случая $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}} = \mathbb{V}_{\mathfrak{N}}$, хотя $\mathbb{V}_{\mathfrak{N}}$ и не является алгебраической системой. Эта очевидная лемма имеет очень важное значение: вместе с результатами предыдущего раздела она гарантирует, что Δ-предикаты и Σ-функции KPU имеют тот же смысл, какой они имеют в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$.

Пример. Рассмотрим Σ-функции TC и P (множество-степень), и в допустимом множестве $\mathbb{A} = (\mathfrak{M}, A, \in, P)$ выполнена аксиома Power: $\forall x \forall y [x \in \mathrm{P}(y) \leftrightarrow (S(x) \wedge x \subseteq y)]$. Для каждого $a \in A$ для значений $\mathrm{TC}(a)$ и $\mathrm{P}(a)$ возможны две различные интерпретации. Для TC пусть b_0 и b_1 – множества, для которых

$$\mathbb{A} \models \mathrm{TC}(a) = b_0 \text{ и } \mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \models \mathrm{TC}(a) = b_1.$$

Для P пусть c_0 и c_1 – множества, для которых

$$\mathbb{A} \models \mathrm{P}(a) = c_0 \text{ и } \mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \models \mathrm{P}(a) = c_1.$$

Так как $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ и TC – Σ-функция в KPU, то $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \models \mathrm{TC}(a) = b_0$, и значит $b_0 = b_1$. Поэтому b_0 действительно будет транзитивным замыканием a, то есть

$$b_0 = \bigcap \{b | b \text{ транзитивно, } b \subseteq a\}.$$

Для P, однако, это не так. Поскольку $x \subseteq y$ – Δ_0-отношение, то $c_0 \subseteq c_1$, и это все, что можно утверждать. Как правило, c_0 будет собственным подмножеством c_1 – настоящего множества-степени для a.

Определение 16. *Множество $a \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ называется* **чистым множеством***, если его носитель пуст, то есть* $\mathrm{TC}(a) \cap M = 0$. *(Например, все ординалы являются чистыми множествами.) Допустимое множество называется* **чистым допустимым множеством***, если оно не содержит праэлементов, то есть является моделью теории KP. Чистые допустимые множества будут обозначаться $\mathbb{A} = (A, \in, \ldots)$, если при этом $\sigma^* = \{\in\}$, то вместо $\mathbb{A} = (A, \in)$ будем просто писать A.*

Теорема 10. *Пусть $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in)$ – допустимое множество, и пусть $A_0 = \{a \in A | a$ - чистое множество$\}$. Тогда A_0 – чистое допустимое множество, которое называется* **чистой частью** $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. По лемме 5 имеем $A_0 \leqslant_{end} \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Вследствие абсолютности, $sp(a)$ имеет одинаковое значение в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ и $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Проверим истинность аксиом Δ_0-ограниченности, оставив проверку остальных аксиом KPU в качестве упражнения. Пусть $a, b \in A_0$, и пусть в A_0 выполнена формула $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y, b)$, где φ – Δ_0-формула. Если формула $\varphi(x, y, b)$ истинна в A_0, то она истинна и в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ вследствие абсолютности, поэтому в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ истинна формула

$$\forall x \in a \exists y [sp(y) = 0 \land \varphi(x, y, b)].$$

По принципу Σ-ограниченности, в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ существует множество c, для которого

$$(1) \quad \forall x \in a \exists y \in c [sp(y) = 0 \land \varphi(x, y, b)] \text{ и}$$
$$(2) \quad \forall y \in c \exists x \in a [sp(y) = 0 \land \varphi(x, y, b)].$$

Из (2) следует, что $sp(c) = 0$, так как $sp(c) = \cup\{sp(y) | y \in c\}$, поэтому $c \in A_0$. Но тогда (1) – Δ_0-формула с параметрами из A_0, которая истинна в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. Вследствие абсолютности, (1) истинно и в A_0. $\square$

Определение 17. Ординалом $o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ *допустимого множества $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ называется наименьший ординал, не лежащий в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, или, что то же самое, порядковый тип ординалов из $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. Ординал α называется* **допустимым***, если $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ для некторой системы $\mathfrak{M}$ и некоторого допустимого множества $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. Ординал α называется* **$\mathfrak{M}$-допустимым***, если $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ для некоторого допустимого множества $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ с условием $M \in A$.*

Следствие 3. *Ординал α является допустимым, если $\alpha = o(A)$ для некоторого чистого допустимого множества A.*

Доказательство. Если $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ и $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ – допустимое множество, то $\alpha = o(A_0)$, где A_0 – чистая часть $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. □

Какие ординалы являются допустимыми? Далее будет показано, что ω – допустимый ординал. Из того, что арифметические операции над ординалами определяются с помощью Σ-рекурсии, следует, что любой допустимый ординал α должен быть замкнут отностельно операций взятия последователя, сложения, умножения и возведения в степень. Поэтому наименьший допустимый ординал $\alpha > \omega$ должен быть больше, чем

$$\omega + \omega, \omega \cdot \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \epsilon_0, \ldots$$

(операции здесь рассматриваются для ординальной (а не кардинальной) арифметики). Далее будет показано, что каждый бесконечный кардинал κ является допустимым, и что для любого $\beta < \kappa$ существует κ допустимых ординалов между β и κ (и значит κ является пределом допустимых ординалов).

Определение 18. *Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in, \ldots)$. В дальнейшем часто будет использоваться следующие терминология и обозначения. Объект x называется* **элементом** $\mathbb{A}$ *(обозн. $x \in \mathbb{A}$), если $x \in A \cup M$.* **Отношением на** $\mathbb{A}$ *будем называть отношение на $A \cup M$. n-местное отношение S на $\mathbb{A}$ называтся* Σ_1**-отношением на** $\mathbb{A}$*, если для некоторой Σ_1-формулы φ, возможно, с параметрами из $\mathbb{A}$*

$$(1) \qquad S(x_1, \ldots, x_n) \iff \mathbb{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A}$. Отношение S называется Π_1**-отношением на** $\mathbb{A}$*, если (1) справедливо для некоторой Π_1-формулы φ, и* Δ_1**-отношением на** $\mathbb{A}$*, если S является одновременно Σ_1- и Π_1-отношением на $\mathbb{A}$. Функция F называется* **функцией на** $\mathbb{A}$*, если ее область определения является подмножеством $(M \cup A)^n$ для некоторого n, а областью значений – подмножество $M \cup A$. Если при этом график F является Σ_1-отношением на $\mathbb{A}$, то F называется* Σ_1**-функцией на** $\mathbb{A}$.

Предложение 3. *Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество.*

(i) Если $a \in \mathbb{A}$, то a – Δ_1-отношение на $\mathbb{A}$.

(ii) Если $x \in \mathbb{A}$, то $\{x\}$ – Δ_1-отношение на $\mathbb{A}$.

(iii) Класс Σ_1-отношений на $\mathbb{A}$ замкнут относительно $\wedge, \vee, \exists x \in a, \forall x \in a, \exists x$.

Множество $a \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ называется **наследственно конечным**, если $TC(a)$ – конечное множество. Пусть $\mathbb{HF}(M)$ – множество наследственно конечных множеств из $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Можно определить это множество более конструктивно следующим образом:

$$HF_0(M) = P_{fin}(M);$$

$$HF_{n+1}(M) = P_{fin}(HF_n(M) \cup M) \cup HF_n(M);$$

$$\mathbb{HF}(M) = \bigcup_{n \in \omega} HF_n(M),$$

где $P_{fin}(X)$ – семейство всех конечных подмножеств множества X.

Теорема 11. $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *является наименьшим допустимым множеством над* $\mathfrak{M}$. *Более строго, пусть* $\sigma^* = \sigma \cup \{\in, \ldots\}$, *и пусть* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, \mathbb{HF}(M), \in, \ldots)$ *– алгебраическая система сигнатуры* σ^*. *Тогда*

(i) $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *– допустимое множество.*

(ii) Если $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in, \ldots)$ *– допустимое множество, то* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$.

Символом $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ будет обозначаться как множество так и соответствующая алгебраическая система, однако из контекста всегда ясно, что именно имеется в виду.

Доказательство. Пункт (ii) очевиден, так как A должно быть замкнуто относительно взятия пары и объединения, а значит индукцией можно показать, что для всех n $HF_n(M) \subseteq A$. Покажем, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ – допустимое множество. Так как $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ транзитивно в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ верны аксиомы экстенсиональности и фундированности. Отметим, что для любого n $HF_n(M)$ также является транзитивным. Если $x, y \in HF_n(M)$, то $\{x, y\} \in HF_{n+1}(M)$, а значит, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ выполняется также аксиома пары. Если $a \in HF_n(M)$, то $\cup a$ – конечное подмножество $HF_n(M)$, а значит, является элементом $HF_{n+1}(M)$, поэтому в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлива аксиома объединения. Если $a \subseteq b \in HF_n(M)$, то $a \in HF_n(M)$, поскольку любое подмножество конечного множества конечно, поэтому в

$\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлив принцип (полного) выделения, а значит верна и аксима Δ_0-выделения. Аналогично, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлив принцип (полной) ограниченности, так как если $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ имеет, например, k элементов $x_1, \ldots, x_k$, и для каждого x_i существует y_i такое, что $\varphi(x_i, y_i)$, то все элементы $y_1, \ldots, y_k$ содержатся в некотором $HF_n(M)$, а значит $\{y_1, \ldots, y_k\} \in HF_{n+1}(M)$. □

Следствие 4. *Наименьшим допустимым множеством является*

$$\mathbb{HF} = \{a \in \mathbb{V} | a \text{ - чистое наследственно конечное множество}\}.$$

Наименьшим допустимым ординалом является ω.

Доказательство. $\mathbb{HF}$ – чистая часть для любого $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, и $o(\mathbb{HF}) = \omega$. □

Именно с $\mathbb{HF}$ начинается исследование допустимых множеств. Теория допустимых множеств возникла из попыток обобщения теории рекурсии на натуральных числах, и, как мы сейчас покажем, теория рекурсии на натуральных числах эквивалентна изучению Σ_1- и Δ_1-определимости в $\mathbb{HF}$.

Теорема 12. *Пусть S – отношение на множестве натуральных чисел.*
(i) S р.п. $\iff$ S – Σ_1-отношение на $\mathbb{HF}$.
(ii) S рекурсивно $\iff$ S – Δ_1-отношение на $\mathbb{HF}$.

Возможны релятивизованные версии этой теоремы (которые доказываются аналогично): например, S рекурсивно относительно f тогда и только тогда, когда S – Δ_1-отношение на $(\mathbb{HF}, \in, f)$ (последнее является допустимым множеством по теореме 11)

Доказательство. Предполагается, что читатель знаком с основами классической теории рекурсии.

($\Rightarrow$). Заметим, что из (i) следует (ii), так как S рекурсивно тогда и только тогда, когда S и $\neg S$ рекурсивно перечислимы. Тем не менее, докажем сначала импликацию ($\Rightarrow$) из (ii), чтобы затем воспользоваться этим при доказательстве соответствующей импликации в (i). Очевидно, достаточно доказать, что любая общерекурсивная функция f (на натуральных числах) продолжается до Σ_1-функции $\hat{f}$ на $\mathbb{HF}$ с помощью определения

$$\hat{f}(x) = f(x), \text{ если } x \in \omega$$

$$= 0, \text{ если } x \notin \omega.$$

Для этого рассмотрим одно из эквивалентных определений класса рекурсивных функций, в котором функции образуются, начиная с базисных, при помощи некоторых операторов (переводящих всюду определенные функции во всюду определенные). Возьмем определение из монографии Дж. Шенфилда "Математическая логика"(хотя выбор определения практически не влияет на сложность доказательства). Итак, класс (всюду определенных) рекурсивных функций – это наименьший класс, содержащий $+, \cdot, \chi_<$ (характеристическую функцию отношения $<$), $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$(проектирующие функции), замкнутый относительно композиции и относительно μ-оператора (если G – рекурсивная функция, такая, что $\forall \bar{n} \exists m[G(\bar{n}, m) = 0]$, и для всех $\bar{n}$

$$F(\bar{n}) = \mu m[G(\bar{n}, m) = 0] \text{ – наименьшее } m, \text{ для которого } G(\bar{n}, m) = 0,$$

то F – также рекурсивная функция.)

Нами уже определены на множестве ординалов Σ_1-функции $+$ и $\cdot$ и Δ_0-отношение $<$. Композиция всюду определенных Σ_1-функций снова является всюду определенной Σ_1-функцией, поэтому остается проверить замкнутость класса всюду определенных Σ_1-функций относительно операции минимизации. Пусть $\forall \bar{n} \exists m(G(\bar{n}, m) = 0)$, G – рекурсивная функция, а значит $\hat{G}$ – Σ_1-функция в $\mathbb{HF}$ по индуктивному предположению, и пусть $F(\bar{n}) = \mu m[G(\bar{n}, m) = 0]$. Тогда $\hat{F}(\bar{x}) = y$ равносильно тому, что

$$((\text{для некоторого } i \ x_i \text{ не является натуральным числом}) \wedge (y = 0)) \vee$$
$$((\text{все } x_i \text{ и } y \text{ – натуральные числа})$$
$$\wedge (G(\bar{x}, y) = 0) \wedge (\forall z < y \exists n[n \neq 0 \wedge G(\bar{x}, z) = n])).$$

Это условие записывается Σ-формулой (так как G – Σ_1-функция), а значит, и Σ_1-формулой. Таким образом, всякая рекурсивная функция и всякий рекурсивный предикат на ω являются соответственно Δ_1-функцией и Δ_1-предикатом в $\mathbb{HF}$. Но всякий рекурсивно перечислимый предикат $S(\bar{x})$ представляется в виде $\exists n R(\bar{x}, n)$, где R – рекурсивный предикат, поэтому всякое рекурсивно перечислимое отношение на ω является Σ_1-отношением в $\mathbb{HF}$.

Для доказательства в обратную сторону нам понадобится

Лемма 6. *Существует функция $e : \omega \to \mathbb{HF}$ такая, что*

(i) e – биекция;

(ii) e – Σ_1-функция в $\langle \mathbb{HF} \in \rangle$;

(iii) $n = e(m)$ – рекурсивное отношение на ω;

(iv) для всякой Δ_0-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ отношение $\{\langle n_1, \ldots, n_k\rangle | \langle \mathbb{HF}, \in\rangle \models \varphi(e(n_1), \ldots, e(n_k))\}$ рекурсивно.

Доказательство. Определим функцию e рекурсивно:

$e(0) = 0$;

$e(1) = \{e(0)\} = \{0\}$;

$e(2) = \{e(1)\}$;

$\vdots$

$e(5) = \{e(2), e(0)\}$;

$\vdots$

$e(2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}) = \{e(n_1), \ldots, e(n_k)\}$ $(n_1 > n_2 > \ldots > n_k)$.

Функция e всюду определена, причем определяется Σ-рекурсией. Поэтому по теореме 8 e является Σ_1-функцией. Индукцией легко показать, что e – биекция. Для доказательства (iii) заметим, что если $e(k)$ – натуральное число n, то $e(k + 2^k) = n + 1$. Для доказательства (iv) заметим, что $e(n) \in e(m)$ тогда и только тогда, когда n является степенью в разложении m в виде $2^{k_1} + \ldots + 2^{k_l}$. Доказательство для остальных Δ_0-формул легко получается индукцией по сложности. □

Приступим к доказательству импликации ($\Leftarrow$) теоремы. Пусть S – Σ_1-отношение на $\mathbb{HF}$, то есть $S(n)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{HF} \models \exists y \varphi(n, y)$, где φ – Δ_0-формула (для простоты считаем, что S – одноместное отношение). Имеем $S(n)$ тогда и только тогда, когда $\exists k \exists m[e(k) = n \wedge \varphi(e(k), e(m))]$. Отношение в скобках является рекурсивным по пунктам (iii) и (iv) леммы, поэтому S – рекурсивно перечислимое отношение. □

Существует еще один подход к представлению классической теории рекурсии. Будем рассматривать натуральные числа не как конечные ординалы, а как некие базисные объекты (праэлементы) с заданными на них арифметическими операциями:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle.$$

Имеет место (доказываемая аналогично предыдущей)

Теорема 13. *Пусть S – отношение на системе $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$.*

(i) S в.п. $\iff$ S – Σ_1-отношение на $\mathbb{HF}_{\mathfrak{N}}$.

(ii) S вычислимо $\iff$ S – Δ_1-отношение на $\mathbb{HF}_{\mathfrak{N}}$.

5 Σ-операторы и теорема Ганди

В этом и следующем параграфах сигнатура KPU-модели $\mathbb{A}$ обозначается символом $\sigma_{\mathbb{A}}$, а ее основное множество и множество элементов не являющихся праэлементами (множество “множеств”) — символами A и A^*, соответственно.

Пусть $\mathbb{A}$ – модель KPU, $P(A)$ – множество всех подмножеств множества A.

Определение 19. *Отображение $F : P(A)^n \to P(A)$ $(n \in \omega)$ называется Σ-оператором, если существует Σ-формула $\Phi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ такая, что для всех $S_0, \ldots, S_{n-1} \in P(A)$*

$$F(S_0, \ldots, S_{n-1}) = \{a \mid \exists a_0 \ldots \exists a_{n-1}(\bigwedge_{i<n} a_i \subseteq S_i \wedge \mathbb{A} \models \Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, a))\}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что всякий Σ-оператор обладает свойством *монотонности*: если $F : P(A)^n \to P(A)$ – Σ-опрератор, $S_0, \ldots, S_{n-1}, S'_0, \ldots, S'_{n-1} \in P(A)$, то

из $S_0 \subseteq S'_0, \ldots, S_{n-1} \subseteq S'_{n-1}$ следует, что $F(S_0, \ldots, S_{n-1}) \subseteq F(S_0, \ldots, S_{n-1})$.

Пусть $F : P(A) \to P(A)$ – одноместный Σ-оператор. Ввиду монотонности оператор F обладает наименьшей (по включению) неподвижной точкой, которая может быть описана следующим образом.

Для каждого ординала α (внешнего, не обязательно из $\mathbb{A}$) определим подмножество $\Gamma_\alpha \subseteq A$ так:

$$\Gamma_0 = \varnothing,\ \Gamma_{\alpha+1} = F(\Gamma_\alpha),\ \Gamma_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \Gamma_\beta$$

для произвольного предельного β. Легко устанавливается, что $\alpha \leqslant \beta$ влечет $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta$, а ввиду "мощностных"соображений существует ординал α такой, что $\Gamma_{\alpha+1} = F(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$. Нетрудно также показать, что для $M \subseteq A$ такого, что $F(M) \subseteq M$ (в частности, для $F(M) = M$)), справедливо включение $\Gamma_\alpha \subseteq M$ для всех ординалов α. Следовательно, если $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$, то Γ_α – наименьшая неподвижная точка F. Пусть α_* – наименьший ординал такой, что $\Gamma_{\alpha_*+1} = \Gamma_{\alpha_*}$.

Теорема 14. *(Ганди) Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество, $F : P(A) \to P(A)$ – Σ-оператор. Тогда наименьшая неподвижная точка Γ_* оператора F является Σ-подмножеством A, а наименьший ординал α_*, такой, что $\Gamma_* = \Gamma_{\alpha_*}$, не превосходит ординала $o(\mathbb{A})$.*

Доказательство. Введем следующее семейство A-конечных функций:

$$B = \{f \mid \begin{array}{l} f \,-\, A-\text{конечная функция, } \mathrm{dom}(f) \,-\, \text{ординал, } f(0) = \varnothing, \\ f \text{ монотонна, т.е. } \alpha \leqslant \beta < \mathrm{dom}(f) \text{ влечет } f(\alpha) \subseteq f(\beta), \\ \text{и для любого } \alpha \in \mathrm{dom}(f) \text{ верно } f(\alpha) \subseteq \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F(f(\beta))\}. \end{array}$$

Из определения семейства B и определения Σ-оператора видно, что семейство B является Σ-подмножеством множества A. Ясно, что множество

$$C = \{ \bigcup_{\alpha \in \mathrm{dom}(f)} f(\alpha) | f \in B\}$$

также является Σ-подмножеством A.

Пусть

$$\Delta = \cup\{c | c \in C\},\ \Delta \in \Sigma(A).$$

Покажем, что множество Δ обладает следующими свойствами.

(1) Если $a \in A^*$ и $a \subseteq \Delta$, то существует элемент $c \in C$ такой, что $a \subseteq c (\subseteq \Delta)$.

Из определения Δ и условия $a \subseteq \Delta$ следует соотношение

$$\mathbb{A} \models \forall b \in a \exists f(f \in B \wedge \exists \alpha \in \mathrm{dom}(f)(b \in f(\alpha)))).$$

Используя принцип Σ-ограниченности, найдем элемент $g \in A^*$ такой, что

$$\mathbb{A} \models \forall b \in a \exists f \in g(f \in B \wedge \exists \alpha \in \mathrm{dom}(f)(b \in f(\alpha))) \wedge (\forall f \in g(f \in B)).$$

По A-конечному подмножеству $g \subseteq B$ определим функцию f_0 следующим образом:

$$\mathrm{dom}(f_0) = \cup\{\mathrm{dom}(f) | f \in g\},$$

$$f_0(\alpha) = \cup\{f(\gamma) | f \in g, \gamma \in \mathrm{dom}(f), \gamma \leqslant \alpha\},\ \alpha \in \mathrm{dom}(f_0).$$

Нетрудно проверить, что f_0 является A-конечной функцией. Более того, $f_0 \in B$. Очевидно, что $f_0(0) = \varnothing$ и f_0 монотонна. Проверим, что выполняется равенство

$$f_0(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F(f_0(\beta)),\ \alpha \in \mathrm{dom}(f_0).$$

Если $a \in f_0(\alpha)$, то существуют $f \in g$, $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$, $\gamma \leqslant \alpha$ такие, что $a \in f(\gamma)$. Так как $f \in g \subseteq B$, то

$$a \in f(\gamma) \subseteq \bigcup_{\delta<\gamma} F(f_0(\delta)) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F(f_0(\beta)).$$

Таким образом, $f_0 \in B$. Положим

$$c_0 = \cup\{f_0(\alpha) | \alpha \in \mathrm{dom}(f_0)\}.$$

Тогда $c_0 \in C$ и $a \subseteq c_0$ по выбору семейства g и определению f_0.

(2) $F(\Delta) \subseteq \Delta$.

Пусть $b \in F(\Delta)$. По определению Σ-оператора, существует элемент $a \in A^*$ такой, что $a \subseteq \Delta$ и $b \in F(a)$. Для этого элемента a найдем, по пункту (1), функцию $f_0 \in B$ такую, что

$$a \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)\ (\subseteq \Delta).$$

Положим

$$f_1 = f_0 \cup \{\langle \mathrm{dom} f_0, \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)\rangle\} \cup \{\langle s(\mathrm{dom}(f_0)), (\bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)) \cup \{b\}\rangle\}.$$

Ясно, что f_1 – A-конечная функция, $\mathrm{dom}(f_1) = s(s(\mathrm{dom}(f_0)))$,

$$f_1(\mathrm{dom}(f_0)) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} F(f_0(\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} F(f_1(\alpha)).$$

Так как $a \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)$ и $b \in F(\alpha)$, то

$$f_1(s(\mathrm{dom}(f_0))) \subseteq \bigcup_{\alpha\leqslant\mathrm{dom}(f_0)} F(f_1(\alpha)).$$

Следовательно,

$$f_1 \in B, b \in c_1 = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{dom}(f_1)} f_1(\alpha) \subseteq \Delta.$$

Таким образом, $F(\Delta) \subseteq \Delta$.

(3) $\Delta \subseteq \Gamma_{o(\mathbb{A})}$.

Достаточно показать, что для любой функции $f \in B$

$$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{dom}(f)} f(\alpha) \subseteq \Gamma_{\mathrm{dom}(f)}.$$

Для этого индукцией по $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ установим, что $f(\alpha) \subseteq \Gamma(\alpha)$. Имеем $f(0) = \varnothing \subseteq \Gamma_0$. Если $f(\alpha) \subseteq \Gamma_\alpha$, то

$$f(\alpha+1) \subseteq F(f(\alpha)) \subseteq F(\Gamma_\alpha) = \Gamma_{\alpha+1}.$$

Если ординал α предельный и $f(\beta) \subseteq \Gamma_\beta$ для всех $\beta < \alpha$, то

$$f(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F(f(\beta)) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha.$$

Из установленных соотношений $F(\Delta) \subseteq \Delta$ и $\Delta \subseteq \Gamma_{o(\mathbb{A})}$ следует, что $\Delta = \Gamma_{o(\mathbb{A})}$, Δ – наименьшая неподвижная точка и $\alpha_* \leqslant o(\mathbb{A})$. Теорема доказана. □

6 Универсальный Σ-предикат

Пусть σ – произвольная сигнатура, P – символ одноместного предиката, не входящий в σ. Множество *P-позитивных формул* сигнатуры $\sigma(P)$ определяется индуктивно:

– всякая формула сигнатуры σ является P-позитивной;

– формула $P(x)$ является P-позитивной;

– если Φ и Ψ – P-позитивные формулы, то формулы $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $Qx\Phi$, $(Qx \in y)\Phi$ $(Q \in \{\exists, \forall\})$ являются P-позитивными;

– других P-позитивных формул нет.

Тот факт, что формула Φ сигнатуры $\sigma(P)$ со свободными переменными среди $\bar{x}$ является P-позитивной, будем обозначать указанием $\Phi = \Phi(\bar{x}, P^+)$.

Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество, $\Phi(x, P^+)$ – P-позитивная формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}(P)$ с параметрами из A. Оператор $\Gamma_\Phi : P(A) \to P(A)$ определяется следующим образом: для любого $S \in P(A)$

$$\Gamma_\Phi(S) = \{a \in A | \langle \mathbb{A}, S \rangle \models \Phi(a)\}.$$

Предложение 4. *Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество, $\Phi(x, P^+)$ – P-позитивная Σ-формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}(P)$ с параметрами из A. Тогда существует Σ-оператор $F_\Phi : P(A) \to P(A)$ такой, что для всякого Σ-множества $S \subseteq A$*

$$\Gamma_\Phi(S) = F_\Phi(S).$$

Доказательство. Определим Σ-оператор F_Φ следующим образом: пусть для любого $S \in P(A)$

$$F_\Phi(S) = \{a \in A | \exists \pi \in A((\pi \subseteq S) \wedge \Phi(a, \pi))\},$$

где Σ-формула $\Phi(x, \pi)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ получается из $\Phi(x, P^+)$ заменой всех атомарных подфомул вида $P(t)$ на $t \in \pi$.

Пусть $S \subseteq A$ – Σ-множество, которое определяется в $\mathbb{A}$ Σ-формулой $\Psi(x)$ (с параметрами), и пусть $a \in A$. Индукцией по сложности формулы $\Phi(x, P^+)$ покажем, что $\mathbb{A} \models \Phi^P_\Psi(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \exists \pi((\pi \subseteq \Psi^{\mathbb{A}}) \wedge \Phi^P_\pi(a))$. Заметим, что в доказательстве нуждается только импликация слева направо, поскольку импликация в обратную сторону очевидно следует из монотонности формулы Φ относительно P.

1) если Φ – формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$, или $\Phi = P(x)$, то это очевидно;

2) если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \exists y \Phi_0(x, y, P^+)$, или $\Phi = (\exists y \in z)\Phi_0(x, y, P^+)$, то это непосредственно следует из индукционного предположения;

3) Если $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$, то по индукционному предположению существуют $\pi_1, \pi_2 \subseteq \Psi^{\mathbb{A}}$, подтверждающие истинность утверждения для формул Φ_1 и Φ_2 соответственно. Вследствие монотонности для формулы Φ можно взять $\pi_1 \cup \pi_2$.

4) если $\Phi = (\forall y \in a)\Phi_0(x, y, P^+)$, то по индукциоому предположению имеем $(\forall y \in a)(\exists \pi \subseteq P)\Phi_0(x, y, \pi) \Leftrightarrow (\forall y \in a)\exists\pi((\forall z \in \pi)\Psi(z) \wedge \Phi_0(x, y, \pi)))$, откуда по принципу Δ_0-ограниченности получаем, что $\exists\rho(\forall y \in a)(\exists \pi \in \rho)((\forall z \in \pi)\Psi(z) \wedge \Phi_0(x, \pi)) \wedge (\forall \pi \in \rho)(\exists y \in a)((\forall z \in \pi)\Psi(z) \wedge \Phi_0(x, \pi))$. Поэтому для элемента $\pi_0 = \cup\rho$ имеем $(\pi_0 \subseteq S) \wedge (\forall y \in a)\Phi_0(x, y, \pi_0)$.

$\square$

Следствие 5. *Если Φ – P-позитивная Σ-формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}(P)$, то наименьшая неподвижная точка оператора Γ_Φ является Σ-множеством в $\mathbb{A}$ и может быть получена как элемент последовательности $\Gamma_0 = \varnothing$, $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\Phi(\Gamma_\alpha)$, $\Gamma_\delta = \cup_{\alpha<\delta}\Gamma_\alpha$ для предельных δ, удовлетворяющий условию $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$, причем $\alpha \leqslant o(\mathbb{A})$.*

Пусть σ — конечная сигнатура. Стандарным способом определим геделевскую нумерацию g всех термов и RQ-формул (то есть формул, допускающих ограниченные кванторы вида $\forall x \in y$ и $\exists x \in y$) сигнатуры σ_*, предполагая, что множество V всех переменных языка есть множество $\{x_0, x_1, \ldots\}$. К примеру, для простейшей сигнатуры $\sigma_* = \langle U^1, \in^2\rangle$ можно определить с помощью Σ-рекурсии

$g(x_i) = c(0, i),\ \ i \in \omega,$
$g(x_i = x_j) = c(1, c(i, j)),\ \ i, j \in \omega,$
$g(x_i \in x_j) = c(2, (c(i, j)),\ \ i, j \in \omega,$
$g(U(x_i)) = c(3, i),\ \ i \in \omega,$
$g(\Phi_0 \wedge \Phi_1) = c(4, c(g(\Phi_0), g(\Phi_1))),\ \ \Phi_0, \Phi_1 \in RQF(\sigma_*),$
$g(\Phi_0 \vee \Phi_1) = c(5, c(g(\Phi_0), g(\Phi_1))),\ \ \Phi_0, \Phi_1 \in RQF(\sigma_*),$
$g(\Phi_0 \to \Phi_1) = c(6, c(g(\Phi_0), g(\Phi_1))),\ \ \Phi_0, \Phi_1 \in RQF(\sigma_*),$
$g(\neg\Phi) = c(7, g(\Phi)),\ \ \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\exists x_i \in x_j \Phi) = c(8, c(c(i, j), g(\Phi))),\ \ i, j \in \omega,\ \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\forall x_i \in x_j \Phi) = c(9, c(c(i, j), g(\Phi))),\ \ i, j \in \omega,\ \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\exists x_i \Phi) = c(10, c(i, g(\Phi)),\ \ i \in \omega,\ \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\forall x_i \Phi) = c(11, c(i, g(\Phi)),\ \ i \in \omega,\ \Phi \in RQF(\sigma_*),$

где $c : \omega^2 \to \omega$ – канторовская нумерация пар, а $RQF(\sigma_*)$ – класс всех RQ-формул сигнатуры σ_*.

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Легко показать, что существуют частичные Σ-функции F_0 и F_Σ такие, что $\mathrm{dom}(F_0) = \mathrm{dom}(F_\Sigma) = \mathrm{Nat}(\mathbb{A}) = \omega$ и для $a \in \omega$

$$F_0(a) = \begin{cases} 1, \text{ если существует } \Delta_0 - \text{формула } \Phi \text{ такая, что } g(\Phi) = a, \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$F_\Sigma(a) = \begin{cases} 1, \text{ если существует } \Sigma - \text{формула } \Phi \text{ такая, что } g(\Phi) = a, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

С каждым элементом $a \in A$ свяжем интерпретацию $\gamma_a : V \to A$, определенную следующим образом:

$$\gamma_a(x_i) = \begin{cases} b, \text{ если } \langle i, b\rangle \in a \text{ и для любого } c \in A \text{ из } \langle i, c\rangle \in a \text{ следует } b = c, \\ \varnothing, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Определим отображение $\bar{\gamma} : A \times \omega \to A$ так:

$$\bar{\gamma}(a, 0) = \varnothing, \ \ \bar{\gamma}(a, i+1) = \gamma_a(x_i).$$

Очевидно, что $\bar{\gamma}$ является частичной Σ-функции на $\mathbb{A}$ с областью определения $A \times \omega$.

Предложение 5. *Существует двуместная частичная Σ-функция T_0 на $\mathbb{A}$ такая, что $\mathrm{dom}(T_0) = \omega \times A$ и для $a \in \omega$, $b \in A$ справедливо*

$$T_0(a, b) = \begin{cases} 1, \textit{ если } F_0(a) = 1, \textit{ и если } \Phi - \Delta_0 - \textit{формула такая, что} \\ \quad g(\Phi) = a, \textit{ то } \mathbb{A} \models \Phi[\gamma_b], \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Можно определить Σ-формулу $\Phi_0(x_0, x_1, x_2, P^+)$ сигнатуры $\sigma_* \cup \langle F_0, l, r, \bar{\gamma}, P\rangle$, которая бы “кодировала” индуктивное оределение истинности (ложности) Δ_0-формулы. Действительно, положим

$$\begin{aligned} \Phi_0(x_0, x_1, x_2, P^+) \quad &= [F_0(x_0) = 0 \wedge x_2 = 0] \vee [F_0(x_0) = 1 \wedge (\Phi_U(x_0, x_1, x_2, P^+) \\ &\vee \Phi_=(x_0, x_1, x_2, P^+) \vee \Phi_\in(x_0, x_1, x_2, P^+) \vee \Phi_\wedge(x_0, x_1, x_2, P^+) \\ &\vee \Phi_\vee(x_0, x_1, x_2, P^+) \vee \Phi_\to(x_0, x_1, x_2, P^+) \vee \Phi_\neg(x_0, x_1, x_2, P^+) \\ &\vee \Phi_{\exists x \in y}(x_0, x_1, x_2, P^+) \vee \Phi_{\forall x \in y}(x_0, x_1, x_2, P^+) \\ &\vee \Phi_{\exists x}(x_0, x_1, x_2, P^+) \vee \Phi_{\forall x}(x_0, x_1, x_2, P^+))], \end{aligned}$$

где, например, $\Phi_{\exists x \in y}(x_0, x_1, x_2, P^+)$ имеет вид $[(l(x_0) = 8 \wedge \exists x_3 \exists x_4 \in \bar{\gamma}(x_1, rlr(x_0))(x_3 = (x_1 \setminus \{llr(x_0)\} \times A) \cup \{\langle llr(x_0), x_4 \rangle\} \wedge P(rr(x_0), x_3, 1)) \wedge x_2 = 1)) \vee (\forall x_4 \in \bar{\gamma}(x_1, rlr(x_0)) \exists x_3 (x_3 = (x_1 \setminus \{llr(x_0)\} \times A) \cup \{\langle llr(x_0), x_4 \rangle\} \wedge P(rr(x_0), x_3, 0)) \wedge x_2 = 0))]$. Отметим, что функции l и r, "обратные" к функции c, как и сама функция c, в любом допустимом множестве $\mathbb{A}$ естественным образом определяются как частичные Σ-функции с областью определения ω.

Предположим, что n – номер Δ_0-формулы Ψ, $Q \subseteq A^3$ и для всех $m \in \omega, m < n$, верно следующее утверждение: если m – номер Δ_0-формулы Ψ', то для любого $a \in A$ имеем $\langle m, a, 1 \rangle \in Q$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \Psi'[\gamma_a]$, а $\langle m, a, 0 \rangle \in Q$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \neg\Psi'[\gamma_a]$. Легко убедиться, что в этом случае

$$\langle \mathbb{A}, Q \rangle \models \Phi_0(n, a, 1) \iff \mathbb{A} \models \Psi[\gamma_a],$$

$$\langle \mathbb{A}, Q \rangle \models \Phi_0(n, a, 0) \iff \mathbb{A} \models \neg\Psi[\gamma_a].$$

Таким образом, если $Q \in P(A^3)$ – наименьшая неподвижная точка оператора $\Gamma_{\Phi_0} : P(A^3) \to P(A^3)$, то Q есть (график) T_0. $\square$

Аналогичным образом доказывается

Теорема 15. *(Σ-определимость истинности Σ-формул) Существует двуместных Σ-предикат T_Σ на $\mathbb{A}$ такой, что для любых $n \in \omega$, $a \in A$ $\langle n, a \rangle \in T_\Sigma$ тогда и только тогда, когда n является геделевым номером Σ-формулы Φ и $\mathbb{A} \models \Phi[\gamma_a]$.*

Непосредственным следствием предыдущего утверждения является

Теорема 16. *(существование универсального Σ-предиката) Существует Σ-формула Σ-$Sat(x_0, x_1)$ без параметров такая, что для любого допустимого множества $\mathbb{A}$ и любой Σ-формулы $\Phi(x_0)$ (быть может, с параметрами из A) существует элемент $a \in A$ такой, что*

$$\Phi^{\mathbb{A}}(x_0) = \Sigma\text{-}Sat^{\mathbb{A}}(x_0, a).$$

Применяя классический метод диагонализации, легко получить

Следствие 6. *Существует Σ-формула $\Phi_*(x_0)$ без параметрос такая, что для любой* KPU*-модели $\mathbb{A}$ Σ-множество $\Phi_*^{\mathbb{A}}(x_0)$ не является Δ-множеством в $\mathbb{A}$.*

7 Теорема компактности Барвайса

На протяжении этой главы нашей метатеорией является теория KPU в сигнатуре, содержащей одноместные предикатные символы R, F, C и V, выделяющие элементы, которые служат обозначениями для предикатных, функциональных, константных символов и символов переменных соответственно, а также одноместные функциональные символы v и $\#$. Элементы, удовлетворяющие предикату R, будем обозначать символами $r, r_1, \ldots$, а символы $h, h_1, \ldots$ и $c, c_1, d, d_1 \ldots$ будут соответствовать элементам, удовлетворяющим предикатам F и C соответственно. Будем также считать, что в сигнатуре нашей метатеории присутствуют константные символы $\neg, \vee, \wedge, \forall$ и $\exists$. Наша метатеория содержат следующие *аксиомы синтаксиса*:

(1) аксиома, утверждающая, что классы (обозначений для) предикатных, функциональных, константных символов и символов переменных попарно не пересекаются, а значения всех пяти констант различны и не лежат ни в одном из этих классов;

(2) аксиома для (обозначений) переменных, утверждающая, что $(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge \mathrm{Ord}(\beta) \wedge \alpha \neq \beta \to v(\alpha) \neq v(\beta))$ и $V(x) \leftrightarrow \exists\alpha(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x = v(\alpha))$ (в дальнейшем вместо $v(\alpha)$ будем использовать обозначение v_α);

(3) аксиома для функции “местности” $\#$, утверждающая, что если x – обозначение для предикатного или функционального символа, то $\#(x)$ – положительное натуральное число (местность соответствующего предиката или функции).

Множество L называется *языком*, если L является множеством предикатных, функциональных и константных символов.

Определение 20. *Элемент t называется термом языка L, если t является переменной или константным символом языка L, или имеет вид $\langle h, y\rangle$, где h – функциональный символ языка L, $y = \langle y_1, \ldots, y_{\#(h)}\rangle$, и все y_i являются термами языка L.*

Определение 21. *Атомарная формула языка L – это множество одного из следующих видов:*

(i) $\langle =, t_1, t_2\rangle$, где t_1, t_2 – термы языка L (обозначаем $(t_1 = t_2)$);

(ii) $\langle r, t_1, \ldots, t_n\rangle$, где r – предикатный символ языка L, $n = \#(r)$, и $t_1, \ldots, t_n$ – термы языка L (обозначаем $r(t_1, \ldots, t_n)$).

Определение 22. *Множество φ называется конечной формулой языка L, если*

φ – атомарная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle \neg, \psi\rangle$, где ψ – конечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle \wedge, \{\varphi, \psi\}\rangle$ или $\langle \vee, \{\varphi, \psi\}\rangle$, где φ, ψ – конечные формулы языка L, либо

φ имеет вид $\langle \exists, v, \psi\rangle$ или $\langle \forall, v, \psi\rangle$, где v – переменная, ψ – конечная формула языка L.

Будем обозначать эти формулы стандартным образом: $\neg\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\wedge\psi$, $\exists v\psi$ и $\forall v\psi$ соответственно. Кроме того, будем использовать сокращение $\varphi \to \psi$ для формулы $(\neg\varphi \vee \psi)$.

Предложение 6. *Если выполнятся аксиома бесконечности, то для любого языка L существует множество*

$$L_{\omega\omega} = \{\varphi | \varphi \text{ – конечная формула языка } L, \text{ с переменными вида } v_n, n < \omega\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что существует множество

$$Terms = \{t | t \text{ – терм языка } L, \text{ содержащий переменные вида } v_n,\ n \in \omega\}.$$

Определим индукцией по n множества

$$Terms(0) = \{c \in L | c \text{ – константный символ}\} \cup \{v_n | n \in \omega\},$$

$$\begin{aligned} Terms(n+1) = \{ \quad & \langle h, t_1, \ldots, t_k \rangle | h \in L,\ h \text{ – функциональный символ}, \\ & k = \#(h),\ t_1, \ldots, t_k \in Terms(n)\} \cup Terms(n). \end{aligned}$$

Эти множества существуют, если существует ω. По этой же причине существует множество

$$Terms = \cup_{n \in \omega} Terms(n).$$

Существование множества $L_{\omega\omega}$ доказывается аналогично. □

Определение 23. *Множество φ называется бесконечной формулой, если*

φ – конечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle \neg, \psi \rangle$, где ψ – бесконечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle \exists, v, \psi \rangle$ или $\langle \forall, v, \psi \rangle$, где v – переменная, ψ – бесконечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle \wedge, \Phi \rangle$ или $\langle \vee, \Phi \rangle$, где Φ – непустое множество бесконечных формул языка L.

Понятие бесконечной формулы языка L определяется аналогично. Будем использовать обозначения $\wedge\Phi$ и $\vee\Phi$ для формул $\langle \wedge, \Phi \rangle$ и $\langle \vee, \Phi \rangle$ соответственно. Формула $\wedge\Phi$ называется *конъюнкцией* множества формул Φ, а формула $\vee\Phi$ – *дизъюнкцией* множества формул Φ.

Для бесконечных формул естественным образом определяются их свободные и связанные переменные, а также результат подстановки терма вместо свободной переменной (определяется рекурсией по транзитивному замыканию формулы). Будем обозначать результат подстановки в формулу φ терма t вместо переменной v через φ^v_t. Как обычно, *предложением* называется формула без свободных переменных.

Для формулы φ определим множество $\mathrm{sub}(\varphi)$ ее *подформул* рекурсией по транзитивному замыканию следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\}, & \text{если } \varphi \text{ – атомарная формула}, \\ \mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi), & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \neg\psi, \exists v\psi, \text{ или } \forall v\psi, \\ \mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \bigcup\limits_{\psi \in \Phi} \mathrm{sub}(\psi), & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \wedge\Phi \text{ или } \vee\Phi. \end{array}$$

Лемма 7. *Если формула φ имеет конечное число свободных переменных, то любая ее подформула также имеет конечное число свободных переменных. В частности, если φ – подформула некоторого предложения, то φ имеет конечное число свободных переменных.*

Эта лемма (легко доказываемая индукцией по сложности формул) мотивирует следующее определение.

Определение 24. *Бесконечная формула называется регулярной, если она имеет конечное число свободных переменных. Символом $L_{\infty\omega}$ обозначается класс всех регулярных бесконечных формул языка L.*

Все рассматриваемые в дальнейшем бесконечные формулы будут регулярными, поэтому условимся опускать прилагательное "регулярная"для краткости.

Для бесконечной формулы φ определим бесконечную формулу $\sim \varphi$ следующим образом:

$\sim \varphi$ есть $\neg\varphi$, если φ – атомная формула;

$\sim (\neg\varphi)$ есть φ;

$\sim (\wedge\Phi)$ есть $\vee\{\neg\varphi|\varphi \in \Phi\}$;

$\sim (\vee\Phi)$ есть $\wedge\{\neg\varphi|\varphi \in \Phi\}$;

$\sim (\exists v\varphi)$ есть $\forall v\neg\varphi$;

$\sim (\forall v\varphi)$ есть $\exists v\neg\varphi$.

Определение 25. *Пусть L – язык. Фрагментом $L_{\infty\omega}$ называется любое множество L_A бесконечных формул и переменных, такое, что*

(i) всякая конечная формула $L_{\omega\omega}$ является элементом L_A;

(ii) если $\varphi \in L_A$, то всякая подформула и переменная формулы φ является элементом L_A;

(iii) если $\varphi(v) \in L_A$ и t – терм L, все переменные которого принадлежат L_A, то $\varphi(t)$ является элементом L_A;

(iv) если $\varphi, \psi, v \in L_A$, то

$$\neg\varphi, \sim \varphi, \exists v\varphi, \forall v\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi$$

являются элементами L_A.

Пусть K – язык, $C = \{c_n|n < \omega\}$ – счетное множество константных символов, не встречающихся в K. Обозначим $L = K \cup C$.

Если K_A – фрагмент $K_{\infty\omega}$, то с ним естественным образом связывается фрагмент $L_A = K_A(C)$ языка $L_{\infty\omega}$: это множество всех формул вида $\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$, получающихся заменой конечного числа свободных переменных константами из C. Зафиксируем эти обозначения.

Терм t фрагмента L_A называется *базисным*, если он яляется элементом C или имеет вид $h(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$, где $h \in K$, $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n} \in C$.

Определение 26. *Механизмом совместности для L_A называется множество S такое, что всякое $s \in S$ есть множество предложений фрагмента L_A, и для всякого $s \in S$ выполняется следующее:*

(C0) (правило тривиальности) $\varnothing \in S$; если $s \subseteq s' \in S$, то $s \cup \{\varphi\} \in S$ для любого $\varphi \in s'$;

(C1) (правило совместности) если $\varphi \in s$, то $\neg\varphi \notin s$;

(C2) ($\neg$-правило) если $\neg\varphi \in s$, то $s \cup \{\sim \varphi\} \in S$;

(C3) ($\wedge$-правило) если $\wedge\Phi \in s$, то $s \cup \{\varphi\} \in S$ для всех $\varphi \in \Phi$;

(C4) ($\forall$-правило) если $(\forall v \varphi(v)) \in s$, то $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$ для всех $c \in C$;

(C5) ($\vee$-правило) если $\vee\Phi \in s$, то $s \cup \{\varphi\} \in S$ для некоторого $\varphi \in \Phi$;

(C6) ($\exists$-правило) если $(\exists v \varphi(v)) \in s$, то $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$ для некоторого $c \in C$;

(C7) (правило равенства) Пусть t – базисный терм L_A и $c, d \in C$, тогда

(i) если $(c = d) \in s$, то $s \cup \{(d = c)\} \in S$;
(ii) если $\varphi(t), (c = t) \in s$, то $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$;
(iii) $s \cup \{e = t\} \in S$ для некоторого $e \in C$.

Лемма 8. *Если множество S удовлетворяет всем условиям из предыдущего определения за исключением условия (C0), то существует наименьший по включению механизм совместности $S' \supseteq S$.*

Доказательство. Определим функцию f на ω следующим образом:

$$f(0) = S \cup \{\varnothing\},$$

$$f(n+1) = f(n) \cup \{s \cup \{\varphi\} | s \in f(n) \wedge \exists s' \in f(n)[s \subseteq s' \wedge \varphi \in s']\}.$$

Легко показать, что $S' = \cup_{n\in\omega} f(n)$ является механизмом совместности. Кроме того, если для некоторого механизма совместности S'' имеет место включение $S \subseteq S''$, то $f(n) \subseteq S''$ для всех $n \in \omega$. $\square$

Лемма 9. *Пусть S – механизм совместности, $s \in S$. Тогда*

(i) если $\varphi, (\varphi \to \psi) \in s$, то $s \cup \{\psi\} \in S$;

(ii) если $c \in C$, то $s \cup \{c = c\} \in S$;

(iii) если $c, d, e \in C$, $(c = d) \in s$, $(d = e) \in s$, то $s \cup \{c = e\} \in S$.

Доказательство. Пусть $\varphi, \varphi \to \psi \in s$. Так как $\varphi \to \psi$ есть сокращение для формулы $\neg\varphi \vee \psi$, по свойству $(C5)$ получаем, что $s \cup \{\neg\varphi\} \in S$ или $s \cup \{\psi\} \in S$. Первый случай невозможен по свойству $(C1)$.

Предположим теперь, что выполняются условия пункта (iii). По свойству $(C7i)$ имеем $s' = s \cup \{e = d\} \in S$. По свойству $(C7ii)$ имеем $s' \cup \{c = e\} \in S$, поэтому по свойству $(C0)$ получаем $s \cup \{c = e\} \in S$.

Наконец, докажем пункт (ii). Пусть $c \in C$. По свойству $(C7iii)$ существует $e \in C$, для которого $s \cup \{c = e\} \in S$. По свойству $(C7i)$ имеем $s \cup \{c = e, e = c\} \in S$. Применяя пункт (iii), получим, что $s \cup \{c = e, e = c, c = c\} \in S$, откуда по свойству $(C0)$ $s \cup \{c = c\} \in S$. □

Теорема 17. *(Теорема о существовании модели) Пусть L_A – счетный фрагмент, S – механизм совместности для L_A. Для всех $s \in S$ существует каноническая система $\mathfrak{M}$ языка L, являющаяся моделью для s, то есть $\mathfrak{M} \models \varphi$ для всех $\varphi \in s$.*

Доказательство. Поскольку L_A является счетным фрагментом, можно занумеровать все его термы $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ и формулы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ натуральными числами. Будем строить последовательность

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq \ldots \subseteq s_n \subseteq \ldots$$

элементов из S следующим образом. Положим $s_0 = s$ (из условия теоремы). Далее, для каждого $n \in \omega$ множество s_{n+1} получается из s_n добавлением одного, двух, или трех предложений из L_A.

Шаг 1. Найдем первый константный символ $c \in C$ в списке термов, для которого $s_n \cup \{c = t_n\} \in S$, и положим $s'_n = s_n \cup \{c = t_n\}$.

Шаг 2. Если $s'_n \cup \{\varphi_n\} \notin S$, положим $s_{n+1} = s'_n$. Если же $s'_n \cup \{\varphi_n\} \in S$, положим $s''_n = s'_n \cup \{\varphi_n\}$. Далее возможны три различных случая, в зависимости от вида формулы φ_n.

Шаг 3. Если φ_n не начинается с $\exists$ или $\vee$, положим $s_{n+1} = s''_n$.

Шаг 4. Если φ_n имеет вид $\exists v\psi$, то найдем первый константный символ $c \in C$ в списке термов, для которого $s''_n \cup \{\psi^v_c\} \in S$ (он существует по свойству $(C6)$), и положим $s_{n+1} = s''_n \cup \{\psi^v_c\}$.

Шаг 5. Если φ_n имеет вид $\vee\Phi$, то найдем первую формулу $\psi \in \Phi$ в списке формул, для которой $s''_n \cup \{\psi\} \in S$ (она существует по свойству $(C5)$), и положим $s_{n+1} = s''_n \cup \{\psi\}$.

Итак, пусть $s_\omega = \cup_{n\in\omega} s_n$. Дальнейшие рассуждения являются стандартными. Определим на C отношение эквивалентности $\approx$ так: $c \approx d$ тогда и только тогда, когда $(c = d) \in s_\omega$. Пусть $M = \{c/\approx | c \in C\}$. По свойству $(C7)$, если $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \in s_\omega$ и $c_i \approx d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\varphi(d_1, \ldots, d_n) \in s_\omega$. Поэтому корректно следующее определение интерпретаций предикатных и функциональных символов языка L в модели $\mathfrak{M}$ с носителем M:

$$\langle c_1/\approx, \ldots, c_n/\approx\rangle \in r^{\mathfrak{M}} \iff r(c_1, \ldots, c_n) \in s_\omega,$$

$$h^{\mathfrak{M}}(c_1/\approx, \ldots, c_n/\approx) = d/\approx \iff (h(c_1, \ldots, c_n) = d) \in s_\omega.$$

Индукцией по сложности формул из L_a легко убедиться, что $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой формулы $\varphi \in s_\omega$ (используя свойства $(C0)$ – $(C7)$). $\square$

Теорема 18. *(Расширенная теорема о существовании модели) Пусть L_A – счетный фрагмент, S – механизм совместности для L_A. Если T – множество предложений L_A такое, что для любого $s \in S$ из $\varphi \in T$ следует $s \cup \{\varphi\} \in S$, то для любого $s \in S$ $T \cup s$ имеет каноническую модель.*

Доказательство. Пусть $S' = \{T \cup s | s \in S\}$. Множество S' почти является механизмом совместности: оно удовлетворяет условиям (C1) – (C7). Применив лемму 8, получим механизм совместности $S'' \supseteq S'$. Теперь применим теорему о существовании модели для $(T \cup s) \in S''$. $\square$

Пусть L_A – фрагмент $L_{\infty\omega}$. Предложение φ фрагмента L_A называется *общезначимым* (обозначаем $\models \varphi$), если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой системы $\mathfrak{M}$ фрагмента L_A.

Определение 27. *Пусть L_A – фрагмент L. Множество Γ формул фрагмента L_A называется механизмом общезначимости для L_A, если Γ содержит частные случаи схем аксиом (A1) – (A7) для любого $\varphi \in L_A$, не содержит $\varphi \wedge \neg\varphi$, и замкнуто относительно правил вывода (R1) – (R3):*

(A1) подстановки в тавтологии конечной пропозициональной логики;

(A2) $\neg\varphi \leftrightarrow \sim \varphi$*;*

(A3) $\wedge\Phi \to \varphi$ *для любой* $\varphi \in \Phi$*;*

(A4) $v_\alpha = v_\alpha$*;*

(A5) $v_\alpha = v_\beta \to v_\beta = v_\alpha$*;*

(A6) $\forall v\varphi(v) \to \varphi(t)$ *для любого терма* t*, свободного для* v *в* $\varphi(v)$*;*

(A7) $\varphi(v) \wedge (v = t) \to \varphi(t)$ *для любого терма* t*, свободного для* v *в* $\varphi(v)$*;*

(R1) (Modus Ponens) если $\varphi, (\varphi \to \psi) \in \Gamma$*, то* $\psi \in \Gamma$*;*

(R2) (Генерализация) если $(\varphi \to \psi(v)) \in \Gamma$ *и* v *не входит свободно в* φ*, то* $(\varphi \to \forall v\psi(v))$*;*

(R3) (Конъюнкция) если $\wedge\Phi \in L_A$ *и* $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ *для всех* $\varphi \in \Phi$*, то* $(\psi \to \wedge\Phi) \in \Gamma$*.*

Подчеркнем, что все рассматриваемые выше формулы являются элементами L_A.

Упражнение 6. *(i) Пусть* $\mathfrak{M}$ *– система языка* L *и пусть* $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ *– множество формул* $\varphi(v_1, \ldots, v_n) \in L_A$*, для которых*

$$\mathfrak{M} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n).$$

$\Gamma_{\mathfrak{M}}$ *является множеством по принципу* Δ*-выделения. Легко убедиться, что* $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ *является механизмом общезначимости.*

(ii) Если $\mathcal{X}$ *– множество механизмов общезначимости, то*

$$\cap\mathcal{X} = \cap\{\Gamma | \Gamma \in \mathcal{X}\}$$

является механизмом общезначимости.

Зафиксируем фрагмент L_A, множество $C = \{c_n | n \in \omega\}$ новых константных символов, и пусть $K = L \cup C$, и $K_A = L_A(C)$ – фрагмент $K_{\infty\omega}$, естественным образом связанный с L_A: $\varphi \in K_A$, если для некоторого $\psi \in L_A$ φ получается из ψ заменой символов некоторых свободных переменных на константные символы:

$$\varphi = \psi^{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_k}}_{c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}}.$$

Будем говорить, что φ – результат *свободной подстановки* в ψ.

Предложение 7. *Пусть Γ_0 – механизм общезначимости для фрагмента L_A, и пусть Γ – множество всех результатов свободных подстановок в формулы из Γ_0. Определим*

$$S = \{s|s \text{ – конечное множество } K_A\text{-предложений, } (\neg \wedge s) \notin \Gamma\}.$$

Тогда

(i) S является механизмом совместности для K_A;

(ii) если $\varphi \in \Gamma$, $s \in S$, то $s \cup \{\varphi\} \in S$.

Доказательство. Заметим сначала, что Γ – механизм общезначимости для K_A. Ограничимся доказательством двух пунктов.

(A7) Рассмотрим предложение фрагмента K_A вида

$$\varphi(c_1, \ldots, c_n, v) \wedge v = t \to \varphi(c_1, \ldots, c_n, t),$$

где терм t также может содержать $c_1, \ldots, c_n$. Это предложение является результатом свободной подстановки в формулу вида

$$\varphi(w_1, \ldots, w_n, v) \wedge v = t' \to \varphi(w_1, \ldots, w_n, t'),$$

где $t' = t^{c_1, \ldots, c_n}_{w_1, \ldots, w_n}$. По схеме аксиом $(A7)$ для Γ_0 эта формула принадлежит Γ_0, а значит первоначальная формула принадлежит Γ.

(R3) Пусть $(\psi \to \wedge\Phi) \in K_A$, и пусть $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ для всех $\varphi \in \Phi$. Нужно показать, что $(\psi \to \wedge\Phi) \in \Gamma$. Эта формула является результатом свободной подстановки некоторой формулы из L_A, имеющей, к примеру, вид

$$\psi^{v_1}_{c_1} \to \wedge\{\varphi^{v_1}_{c_1} | \varphi(v_1) \in \Phi_0\}.$$

Так как $(\psi(c_1) \to \varphi(c_1)) \in \Gamma$,последняя формула является результатом свободной подстановки, к примеру, формулы

$$\psi^{v_\beta}_{c_1} \to \varphi^{v_\beta}_{c_1},$$

где $\psi(v_\beta) \to \varphi(v_\beta) \in \Gamma_0$. Но тогда, используя (R1), (R2) и (A6) для Γ_0, получаем, что $(\psi(v_1) \to \varphi(v_1)) \in \Gamma_0$ для всех $\varphi(v_1) \in \Phi_0$. По правилу (R3) для Γ_0, $\psi(v_1) \to \wedge\{\varphi(v_1) | \varphi(v_1) \in \Phi_0\}$ принадлежит Γ_0, а значит $\psi \to \wedge\Phi$ принадлежит Γ. Проверка остальных пунктов оставляется читателю в качестве упражнения. Итак, Γ является механизмом общезначимости для K_A. Проверка свойства (ii) является рутинной: предположим, что $\varphi \in \Gamma$, $s \in S$, но $s \cup \{\varphi\} \notin \Gamma$. Тогда $\neg(\wedge s \wedge \varphi) \in \Gamma$, откуда по (A1) и

(R1) $(\varphi \to \neg \wedge s) \in \Gamma$. Но тогда по (R1) $\neg \wedge s \in \Gamma$, поэтому $s \notin S$ – противоречие. Остальные пункты, подтверждающие, что S – механизм совместности, рассматриваются аналогично, за исключением небольшой тонкости для (C6). Предположим, что $\exists v\varphi(v) \in s \in S$, но для всех $c \in C$ $s \cup \{\varphi(c)\} \notin S$. Тогда $\wedge s \to \neg\varphi(c) \in \Gamma$ для всех $c \in C$ и, в частности, для некоторого c, не встречающегося в S. Вследствие этого

$$\wedge s \to \neg\varphi(v)$$

также является результатом свободной подстановки некоторой формулы из Γ_0, а значит принадлежит Γ. Поэтому Γ принадлежат и формулы

$$\wedge s \to \forall v\neg\varphi(v) \ \ (\text{по (R2)}),$$

$$\wedge s \to \neg\exists v\varphi(v) \ \ (\text{по (R1),(A1),(A2)}),$$

$$\neg \wedge s \ \ (\text{по (A1),(R1)}),$$

что противоречит условию $s \in S$. □

Определение 28. *Предложение $\varphi \in L_A$ называется теоремой фрагмента L_A, если $\varphi \in \Gamma$ для любого механизма общезначимости Γ фрагмента L_A.*

Замечание: предикат "φ – теорема L_A" является в KPU Π_1-предикатом, но, вообще говоря, не является Δ_1-предикатом. Поэтому нельзя утверждать (в рамках KPU), что существует множество всех теорем фрагмента L_A.

Теорема 19. *(слабая теорема о полноте для счетных фрагментов) Пусть L_A – счетный фрагмент. Предложение $\varphi \in L_A$ общезначимо тогда и только тогда, когда φ – теорема L_A.*

Доказательство. Пусть φ – теорема L_A. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная система, $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ определено так же, как в примере 6 (i). $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ является механизмом общезначимости фрагмента L_A, поэтому $\varphi \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$, то есть $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Пусть теперь φ не является теоремой L_A. Это означает, что $\varphi \notin \Gamma_0$ для некоторого механизма общезначимости Γ_0. Пусть $\Gamma \supseteq \Gamma_0$ и S определены как в предложении 7. Тогда $\{\neg\varphi\} \in S$ по пункту (ii) этого предложения, а так как S является механизмом совместности, то $\neg\varphi$ имеет модель по теореме о существовании модели. □

Предыдущая теорема является “слабой” в том смысле, что одно Π_1-условие ($\models \varphi$) заменяется на другое Π_1-условие (φ – теорема L_A). Нашей дальнейшей целью будет получение “сильной” теоремы о полноте вида

$$\models \varphi \iff \exists P\,[P \text{ – доказательство } \varphi],$$

причем понятие доказательства должно быть Δ_1-определимым, и, грубо говоря, иметь такой же “размер”, как и элементы L_A. Таким образом, будет установлена эквивалентность $\models \varphi$ некоторому Σ_1-условию.

Определение 29. *Упорядоченная пара P называется бесконечным доказательством, если выпролняется одно из следующих условий:*

(A1)– (A7) $P = \langle n, \varphi\rangle$, где $1 \leqslant n \leqslant 7$ и φ – частный случай аксиомы An из определения 27;

(R1) $P = \langle f, \psi\rangle$, где f – функция, $\mathrm{dom}(f) = \{0,1\}$*, $f(0)$ – бесконечное доказательство P_0, причем* $\mathrm{pr}_2(P_0)$ *имеет вид $(\varphi \to \psi)$, $f(1)$ – бесконечное доказательство P_1, причем* $\mathrm{pr}_2(P_1) = \varphi$*;*

(R2) $P = \langle P_0, (\varphi \to \forall v_\alpha \psi(v_\alpha))\rangle$, где P_0 – бесконечное доказательство, для которого $\mathrm{pr}_2(P_0)$ *имеет вид $(\varphi \to \psi(v_\alpha))$, причем v_α не входит свободно в φ;*

(R3) $P = \langle f, (\psi \to \wedge\Phi)\rangle$, где f – функция, $\mathrm{dom}(f) = \Phi$*, для любой $\varphi \in \Phi$ $f(\varphi)$ – непустое множество бесконечных доказательств и для каждого $P_0 \in f(\varphi)$* $\mathrm{pr}_2(P_0) = (\psi \to \varphi)$*.*

Если P – бесконечное доказательство и $\varphi = \mathrm{pr}_2(P)$, то P называется *доказательством формулы φ.*

Определение 29 может быть строго сформулировано в KPU рекурсией по $\mathrm{TC}(P)$, причем в итоге получается Δ_1-предикат. Таким образом,

$$\exists P(P \text{ – бесконечное доказательство } \varphi)$$

является Σ_1-предикатом относительно φ.

Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ – допустимое множество с константами $\wedge, \vee, \neg, \exists, \forall, =$, предикатными символами R, F, C, V и функциональными символами $v, \#$, для которых справедливы определенные в начале главы аксиомы синтаксиса. Все предыдущие определения и результаты могут быть проинтерпретированы как в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, так и в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, причем для Δ_1-определений вследствие абсолютности результаты в обоих случаях эквивалентны. Например, для $\varphi \in \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ утверждение "φ – бесконечная формула"истинно в

$\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда когда оно истинно (в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$). Аналогично, если $\mathfrak{N}, P \in \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, то утверждения "$\mathfrak{N} \models \varphi$"и "$P$ – бесконечное доказательство φ"истинны в $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда они истинны (в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$).

Определение 30. *(i) Если $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}; A, \in, \ldots)$ – допустимое множество и L – язык, являющийся Δ_1-множеством в $\mathbb{A}$, то*

$$L_{\mathbb{A}} = \{\varphi \in \mathbb{A} | \varphi \textit{ – бесконечная формула } L_{\infty\omega}\}$$

$$= \{\varphi \in \mathbb{A} | \mathbb{A} \models \text{"}\varphi \textit{ – бесконечная формула } L_{\infty\omega}\text{"}\}$$

называется допустимым фрагментом $L_{\infty\omega}$, соответствующим $\mathbb{A}$.

(ii) Если $P \in \mathbb{A}$ и P – бесконечное доказательство, то P называется $L_{\mathbb{A}}$-доказательством.

Тривиальная проверка показывает, что допустимый фрагмент $L_{\mathbb{A}}$ действительно является фрагментом в смысле определения 25.

Теорема 20. *Пусть $L_{\mathbb{A}}$ – допустимый фрагмент $L_{\infty\omega}$, и пусть φ – предложение $L_{\mathbb{A}}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\exists P$ (P – $L_{\mathbb{A}}$-доказательство φ);

(ii) $\exists P$ (P – бесконечное доказательство φ);

(iii) φ – теорема $L_{\mathbb{A}}$, то есть содержится во всех механизмах общезначимости для $L_{\mathbb{A}}$.

Замечание: этот список, вообще говоря, нельзя продолжить условием (iv), утверждающим, что φ содержится во всех механизмах общезначимости, являющихся элементами $\mathbb{A}$. Условие (iv), как правило, существенно слабее условия (iii).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидно.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть Γ – механизм общезначимости для $L_{\mathbb{A}}$. Рутинное доказательство индукцией по $\mathrm{TC}(P)$ показывает, что если P – доказательство φ, то $\varphi \in \Gamma$ (так как Γ содержит аксиомы (A1) – (A7) и замкнуто относительно правил (R1) – (R3)).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Достаточно показать, что множество

$$\Gamma = \{\psi \in L_{\mathbb{A}} | \exists P \in \mathbb{A}(P \text{ – доказательство } \varphi)\}$$

является механизмом общезначимости для $L_{\mathbb{A}}$, так как в этом случае $\varphi \in \Gamma$, поскольку φ содержится во всех механизмах общезначимости.

Итак, нужно показать, что Γ содержит аксиомы (A1) – (A7) и замкнуто относительно правил (R1) – (R3). Первое очевидно, проверим замкнутость относительно (R1) и (R3) (для (R2) доказательство аналогично).

(R1) Пусть $\varphi, (\psi \to \varphi) \in \Gamma$. Тогда существуют $P_0, P_1 \in \mathbb{A}$ такие, что $\mathrm{pr}_2(P_0) = (\varphi \to \psi)$, $\mathrm{pr}_2(P_1) = \varphi$. Пусть $f(0) = P_0$, $f(1) = P_1$. Тогда $P = \langle f, \psi \rangle \in \mathbb{A}$ и P является доказательством ψ, поэтому $\psi \in \Gamma$.

(R3) Именно в этом случае используются свойства допустимых множеств и самого понятия доказательства. Пусть $(\psi \to \wedge\Phi) \in L_{\mathbb{A}}$ и $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ для всех $\varphi \in \Phi$. Тогда для каждого $\varphi \in \Phi$ существует $P \in \mathbb{A}$, являющееся доказательством для $(\psi \to \varphi)$. По принципу сильного Σ-замещения для $\mathbb{A}$ существует функция $f \in \mathbb{A}$ такая, что $\mathrm{dom}(f) = \Phi$, и для каждого $\varphi \in \Phi$ $f(\varphi) \neq \varnothing$ и всякое $P \in f(\varphi)$ является доказательством $(\psi \to \varphi)$. Тогда $\langle f, (\psi \to \wedge\Phi) \rangle \in \mathbb{A}$ является доказательством для $(\psi \to \wedge\Phi)$, поэтому $(\psi \to \wedge\Phi) \in \Gamma$. □

Следствие 7. *Если $L_{\mathbb{A}}$ – допустимый фрагмент, то множество теорем фрагмента $L_{\mathbb{A}}$ является Σ_1-подмножеством в $\mathbb{A}$. Более того, соответствующая Σ_1-формула не содержит параметров и не зависит от $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Искомая Σ_1-формула – это $\exists P(P$ – доказательство $\varphi)$. □

Через $\vdash \varphi$ обозначим Σ_1-формулу $\exists P[P$ – доказательство формулы $\varphi]$. Используя теорему 20 и слабую теорему о полноте, получаем следующий важный результат.

Теорема 21. *(Теорема Барвайса о полноте) Пусть $L_{\mathbb{A}}$ – счетный допустимый фрагмент. Для любой формулы $\varphi \in L_{\mathbb{A}}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\models \varphi$,

(ii) $\vdash \varphi$,

(iii) в $\mathbb{A}$ верно $\vdash \varphi$.

Таким образом, множество всех общезначимых предложений фрагмента $L_{\mathbb{A}}$ является Σ_1-множеством в $\mathbb{A}$.

Отметим, что здесь не утверждается истинность предложения "$\models \varphi \leftrightarrow \vdash \varphi$" в допустимом множестве $\mathbb{A}$. Если бы это было так, то для $\varphi \in L_{\mathbb{A}}$ из того, что φ имеет модель, следовало бы, что φ имеет модель $\mathfrak{N} \in \mathbb{A}$. Однако это в большинстве случаев не так.

Важнейшим приложением теоремы о полноте является

Теорема 22. *(Теорема Барвайса о компактности) Пусть $L_{\mathbb{A}}$ – счетный допустимый фрагмент $L_{\infty\omega}$, и пусть T – множество предложений фрагмента $L_{\mathbb{A}}$, являющееся Σ_1-множеством в $\mathbb{A}$. Если всякое $T_0 \subseteq T$, являющееся элементом $\mathbb{A}$, имеет модель, то T также имеет модель.*

Доказательство. Обогатим, как обычно, язык L до языка $K = L \cup \{c_n | n < \omega\}$, но позаботимся чтобы K остался Δ_1-множеством в $\mathbb{A}$. Пусть $K_{\mathbb{A}} = L_{\mathbb{A}}(C)$ – фрагмент $L_{\mathbb{A}}$, стандартным образом ассоциированный с K. Таким образом, $K_{\mathbb{A}}$ есть множество всех предложений $K_{\infty\omega}$, которые являются элементами $\mathbb{A}$ и содержат только конечное количество констант из C. Воспользуемся теоремой о существовании модели для $K_{\mathbb{A}}$.

Пусть S – множество всех конечных множеств s предложений $K_{\mathbb{A}}$, таких, что всякое $T_0 \cup s$, где $T_0 \subseteq T$, $T_0 \in \mathbb{A}$, имеет модель. Заметим, что если $s \in S$ и $\varphi \in T$, то $s \cup \{\varphi\} \in S$, поэтому при построении модели для T можно воспользоваться расширенной теоремой о существовании модели, нужно лишь предварительно установить, что S является механизмом совместности. Проверим свойство $(C5)$ – наиболее трудный случай. Итак, предположим, что $\vee\Phi \in s \in S$, но $s \cup \{\varphi\} \notin S$ для всех $\varphi \in \Phi$. Это значит, что для каждого $\varphi \in \Phi$ существует $T_0 \subseteq T$, $T_0 \in \mathbb{A}$ такое, что $T_0 \cup s \cup \{\varphi\}$ не имеет модели. Пусть $\theta(x)$ – Σ_1-формула, орпеделяющая T в $\mathbb{A}$. По теореме о полноте для $K_{\mathbb{A}}$ в $\mathbb{A}$ справедливо Σ-предложение

$$\forall \varphi \in \Phi \exists T_0 \, [(\forall \psi \in T_0 \, \theta(\psi)) \wedge (\vdash (\wedge (T_0 \cup s) \to \neg\varphi))].$$

По принципу Σ-рефлексии существует множество $a \in \mathbb{A}$ такое, что в $\mathbb{A}$ справедлива релятивизация предыдущего предложения на a. Можно также считать, что a транзитивно. Пусть

$$T_1 = \{\psi \in a | \theta^{(a)}(\psi)\}.$$

По принципу Δ_0-выделения $T_1 \in \mathbb{A}$. Кроме того, $T_1 \subseteq T$, и для каждого $\varphi \in \Phi$

$$\models (\wedge (T_1 \cup s) \to \neg\varphi),$$

так как для некоторого $T_0 \subseteq T_1$

$$\models (\wedge (T_0 \cup s) \to \neg\varphi).$$

Но тогда $s \cup T_1$ не может иметь модели ввиду того, что $\vee\Phi \in s$. Это противоречит предположению $s \in S$. $\square$

8 Допустимые множества вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$

Будем предполагать, что задан некоторый набор бинарных Σ-функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$ (в KPU), удовлетворяющих следующим условиям (далее используем обозначение $\mathcal{D}(b) = b \cup \{\mathcal{F}_i(x, y) | x, y \in b, 1 \leqslant i \leqslant N\}$):

i) $\mathcal{F}_1(x, y) = \{x, y\}$;

ii) $\mathcal{F}_2(x, y) = \cup x$;

iii) $\mathrm{KPU} \vdash \mathrm{sp}(\mathcal{F}_i(x, y)) \subseteq \mathrm{sp}(x) \cup \mathrm{sp}(y)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$;

iv) $\mathrm{KPU} \vdash (\mathrm{Tran}(b) \to \mathrm{Tran}(\mathcal{D}(b)))$;

v) для любой Δ_0-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (со свободными переменными среди $x_1, \ldots, x_n$) и для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ существует терм $\mathcal{F}$ от n аргументов, построенный с помощью функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$, такой, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \mathcal{F}(a, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \{x_i \in a | \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Существует много способов для построения функций, удовлетворяющих этим требованиям. В дальнейшем будет указан один из них.

Заметим, что $\mathcal{D}$ является Σ-функцией, поскольку таковыми являются все функции $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$. Определим с помощью Σ-рекурсии в KPU Σ-функцию $L(\cdot, \cdot)$ следующим образом:

$$L(a, 0) = \mathrm{TC}(a),$$

$$L(a, \alpha + 1) = \mathcal{D}(L(a, \alpha) \cup \{L(a, \alpha)\}), \text{ если } \alpha \text{ – ординал},$$

$$L(a, \lambda) = \cup_{\alpha < \lambda} L(a, \alpha), \text{ если } \lambda \text{ – предельный ординал}.$$

Определение 31. *Элемент x называется конструируемым из a (обозначаем это как $x \in L(a)$), если $x \in L(a, \alpha)$ для некоторого ординала α. Элемент x называется конструируемым (обозначаем это как $x \in L$), если x конструируем из $\varnothing$.*

Лемма 10. *Для любого множества a и любых ординалов α, β, в* KPU *доказуемы следующие утверждения:*

i) если a транзитивно, то $a \in L(a, 1)$;

ii) $L(a,\alpha)$ *транзитивно;*

iii) *если* $\alpha < \beta$*, то* $L(a,\alpha) \subseteq L(a,\beta)$*;*

iv) $L(a,\alpha) \in L(a,\alpha+1)$*;*

v) *если* $x, y \in L(a,\alpha)$*, то* $\mathcal{F}_i(x,y) \in L(a,\alpha+1)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$*;*

vi) *если* α *– ординал, то* $\alpha \in L(a,\beta)$ *для некоторого ординала* β*;*

vii) *если* p *– праэлемент, то* $p \in L(a)$ *тогда и только тогда, когда* $p \in \mathrm{sp}(a)$.

Доказательство. Пункты i),iii),iv) и v) следуют непосредственно из определения $L(a,\alpha)$. Пункт ii) устанавливается индукцией по α, используя пункт iv) предположения. Пункт vii) вытекает из того, что $p \in L(a,\alpha)$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathrm{sp}(a)$ (это доказывается индукцией по α, используя пункт iii) предположения). Остается доказать пункт vi), также индукцией по α. По индукционному предположению, имеем $\forall\gamma < \alpha\exists\delta(\gamma \in L(a,\delta))$. По принципу Σ-рефлексии существует ординал λ такой, что $\forall\gamma < \alpha\exists\delta < \lambda(\gamma \in L(a,\delta))$. Отсюда по пункту iii) получаем, что любой одинал $\gamma < \alpha$ принадлежит $L(a,\lambda)$, то есть $\alpha \subseteq L(a,\lambda)$. Применяя впервые пункт (v) предположения, получаем, что множество $b = \{x \in L(a,\lambda) | \mathrm{Ord}(x)\}$ принадлежит $L(a,\lambda')$ для некоторого $\lambda' \geqslant \lambda$. Поскольку $L(a,\lambda)$ транзитивно, множество b является ординалом β, причем $\alpha \leqslant \beta$. Так как $L(a,\lambda')$ также транзитивно, то $\alpha \in L(a,\lambda')$ (так как $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$). □

Определим релятивизацию $\varphi^{L(a)}$ формулы φ следующим образом:
– если $\varphi = U(x)$, то $\varphi^{L(a)} = (x \in \mathrm{sp}(a))$;
– если φ – атомарная формула, $\varphi \neq U(x)$, то $\varphi^{L(a)} = \varphi$;
– если $\varphi = (\varphi_1 * \varphi_2)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ то $\varphi^{L(a)} = (\varphi_1^{L(a)} * \varphi_2^{L(a)})$;
– если $\varphi = \neg\psi$ то $\varphi^{L(a)} = \neg\psi^{L(a)}$;
– если $\varphi = (Qx \in y)\psi$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ то $\varphi^{L(a)} = (Qx \in y)\varphi^{L(a)}$;
– если $\varphi = \exists x\psi$ то $\varphi^{L(a)} = \exists x((x \in L(a)) \wedge \psi^{L(a)})$;
– если $\varphi = \forall x\psi$ то $\varphi^{L(a)} = \forall x((x \in L(a)) \rightarrow \psi^{L(a)})$.

Через KPU^+ будем обозначать теорию, аксиомы которой состоят из аксиом KPU и аксиомы $\exists x\forall y(y \in x \leftrightarrow U(y))$, утверждающей, что существует множество всех праэлементов.

Теорема 23. *Для любой аксиомы φ теории* KPU^+ *верно* $\mathrm{KPU} \vdash \varphi^{L(a)}$.

Доказательство. Релятивизации аксиом экзистенциональности и фундированности следуют из соответствующих нерелятивизованных аксиом. Релятивизации аксиом пары и объединения следуют из определения функций $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Выводимость релятивизаций аксиом Δ_0-выделения следует из пункта v) предположения о функциях $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$.

Рассмотрим схему аксиом Δ_0-ограниченности. Пусть $\varphi(x, y, z)$ – Δ_0-формула. Предположим, что $a_0 \in L(a)$, $z \in L(a)$ и $\forall x \in a_0 \exists y \in L(a) \varphi^{L(a)}(x, y, z)$. Для краткости не будем в дальнейшем упоминать о параметре z. По свойству (*) получаем, что $\forall x \in a_0 \exists \alpha (\exists y \in L(a, \alpha) \varphi(x, y))$. По принципу Σ-ограниченности существует ординал β такой, что

$$\forall x \in a_0 \exists \alpha < \beta (\exists y \in L(a, \alpha) \varphi(x, y)).$$

По пункту iii) леммы 10 имеем $\forall x \in a_0 \exists y \in L(a, \beta) \varphi(x, y))$. Снова используя свойство (*) и полагая $b = L(a, \beta)$, получаем, что

$$(\forall x \in a_0 \exists y \in b \varphi(x, y))^{L(a)},$$

что и требовалось.

Покажем, наконец, что в KPU доказуемо $(\exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow U(x)))^{L(a)}$. По принципу Δ-выделения достаточно установить, что $(\exists b \forall x (U(x) \to x \in b))^{L(a)}$. Возьмем $b = \mathrm{TC}(a) = L(a, 0)$. По определению, $b \in L(a, 1)$, а $U(x)^{L(a)}$ есть $x \in \mathrm{sp}(a)$. Осталось заметить, что $\mathrm{sp}(a) \subseteq b$. □

Определение 32. $L(\mathfrak{M}, \alpha) = (\mathfrak{M}; L(M, \alpha) \cup \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}, \in)$.

$L(\mathfrak{M}, \alpha)$ является алгебраической системой сигнатуры $\sigma^* = \sigma_{\mathfrak{M}}(\in)$, но не обязательно является допустимым множеством (пересечение с $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ необходимо для удаления праэлементов). Будем называть допустимое множество $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ допустимым множеством *над* $\mathfrak{M}$, если $M \in A$.

Теорема 24. *Если существует допустимое множество $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ над $\mathfrak{M}$, для которого $o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}) = \alpha$, то $L(\mathfrak{M}, \alpha)$ является наименьшим допустимым множеством с такими свойствами. Иными словами, $L(\mathfrak{M}, \alpha)$ – допустимое множество, $L(\mathfrak{M}, \alpha) \subseteq \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, $M \in L(\mathfrak{M}, \alpha)$ и $0(L(\mathfrak{M}, \alpha)) = \alpha$.*

Доказательство. Для всех ординалов $\beta < \alpha$, вследствие абсолютности, $L(M, \beta)$ обозначает одно и то же множество в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ и в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. ПОэтому, в частности, $L(\mathfrak{M},\alpha)\subseteq\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. По теореме 23 $L(\mathfrak{M},\alpha)$ является допустимым множеством, причем $M\in L(\mathfrak{M},\alpha)$. Из пункта vi) леммы 10 следует, что $o(L(\mathfrak{M},\alpha))=\alpha$. $\square$

Определим класс доустимых множеств, являющийся обобщением наследственно конечных надстроек. Пусть κ – бесконечный кардинал. Определим

$$H_\kappa(M)=\{a\in\mathbb{V}_M|\text{ мощность } \mathrm{TC}(a) \text{ меньше } \kappa\}.$$

В частности, $H_\omega(M)=HF(M)$. Для системы $\mathfrak{M}$ определим систему $H_\kappa(\mathfrak{M})=(\mathfrak{M};H_\kappa(M),\in)$. Так же, как и для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, легко доказать следующий результат.

Теорема 25. *Для любого регулярного кардинала κ $H_\kappa(\mathfrak{M})$ является допустимым множеством. В частности, оно будет допустимым над $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\kappa>\mathrm{card}(M)$.*

Отметим, что для сингулярных кардиналов утверждение теоремы также верно, однако доказательство для этого случая не является тривиальным.

Следующее определение является одним из важнейших в теории допустимых множеств. Подобно тому, как $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ есть наименьшее допустимое множество $\mathbb{A}$ с условием $M\subseteq A$, $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ определяется как наименьшее допустимое множество $\mathbb{A}$ с условием $M\in A$.

Определение 33. *(следующее допустимое множество)*

(i) $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})=(\mathfrak{M};A,\in)$, где $A=\bigcap\{B|(\mathfrak{M};B,\in)$ – допустимое множество над $\mathfrak{M}\}$.

(ii) $O(\mathfrak{M})=o(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}))$.

Теорема 26. *Имеет место*

(i) $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ – наименьшее допустимое множество над $\mathfrak{M}$;

(ii) $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})=L(\mathfrak{M},\alpha)$, где $\alpha=O(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Нужно лишь показать, что $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ действительно является допустимым множеством, поскольку оно очевидно будет подмножеством во всех допустимых множествах, содержащих M как элемент. Рассмотрим допустимые множества $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ с условием $M\in A$ (такие множества существуют по теореме 25). Пусть α – наименьший ординал вида $o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$, где $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ – допустимое множество над $\mathfrak{M}$. Применим теорему 24 для $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. $\square$

Следствие 8. *Ординал α является допустимым тогда и только тогда, когда $L(\alpha)$ – (чистое) допустимое множество.*

Следующий результат, который приводится здесь без доказательства, объясняет смысл обозначения $\mathbb{H}\mathrm{YP}(\mathfrak{M})$.

Теорема 27. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная система конечной сигнатуры, и пусть $S \subseteq M^n$ – n-местное отношение на M. Тогда*

i) $S \in \mathbb{H}\mathrm{YP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда S – Δ_1^1-отношение на $\mathfrak{M}$;

ii) S – Σ_1-множество в $\mathbb{H}\mathrm{YP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда S – Π_1^1-отношение на $\mathfrak{M}$.

Отметим, также без доказательства, еще один интересный результат. Система $\mathfrak{M}$ вычислимой сигнатуры σ называется *рекурсивно насыщенной*, если для всякого рекурсивного множества $\Phi(x, v_1, \ldots, v_n)$ формул сигнатуры σ, со свободными переменными среди $x, v_1, \ldots, v_n$, и любых $m_1, \ldots, m_n \in M$ из локальной совместности множества $\Phi(x, m_1, \ldots, m_n)$ в $\mathfrak{M}$ следует его совместность.

Теорема 28. *Пусть $\mathfrak{M}$ – система конечной сигнатуры. $O(\mathfrak{M}) = \omega$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена.*

Приступим теперь к задаче определения функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$. Наиболее сильным требованием для этих функций является требование v): для любой Δ_0-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ существует терм $\mathcal{F}$ от n аргументов, построенный с помощью функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$, такой, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \mathcal{F}(a, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \{x_i \in a | \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Будем в первую очередь заботиться о выполнении этого требования.

По определению,

$$\mathcal{F}_1(x, y) = \{x, y\},$$

$$\mathcal{F}_2(x, y) = \cup x.$$

Из этих функций с помощью композиции получаются следующие функции:

$$\{x\} = \mathcal{F}_1(x, x),$$

$$x \cup y = \cup\{x, y\} = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(x, y), y),$$
$$s(x) = x \cup \{x\}$$
$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$
$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots x_n\rangle\rangle.$$

Функция $\mathcal{F}_2$ соответствует связке $\vee$ в Δ_0-формулах. Для отрицания необходимо ввести функцию

$$\mathcal{F}_3(x, y) = x \setminus y.$$

Из нее с помощью композиции получается функция $x \cap y = x \setminus (x \setminus y) = \mathcal{F}_3(x, \mathcal{F}_3(x, y))$, соответствующая связке $\wedge$ в Δ_0-формулах.

Наличие в Δ_0-формулах кванторов приводит нас к необходимости ввести следующие, более сложные функции:

$$\mathcal{F}_4(x, y) = x \times y,$$

$$\mathcal{F}_5(x, y) = \mathrm{dom}(x) = \{\mathrm{pr}_1(z) | z \in x, z \text{ – упорядоченная пара}\},$$
$$\mathcal{F}_6(x, y) = \mathrm{rng}(x) = \{\mathrm{pr}_2(z) | z \in x, z \text{ – упорядоченная пара}\},$$
$$\mathcal{F}_7(x, y) = \{\langle u, v, w\rangle | \langle u, v\rangle \in x, w \in y\},$$
$$\mathcal{F}_8(x, y) = \{\langle u, w, v\rangle | \langle u, v\rangle \in x, w \in y\}.$$

Осталось только ввести функции, соответствующие атомарным формулам:

$$\mathcal{F}_U(x, y) = \{z \in x | x \text{ – праэлемент}\},$$
$$\mathcal{F}_=(x, y) = \{\langle v, u\rangle \in y \times x | u = v\},$$
$$\mathcal{F}_\in(x, y) = \{\langle v, u\rangle \in y \times x | u \in v\},$$
$$\mathcal{F}_R(x, y) = \{\langle p_n, \ldots, p_1, v\rangle | \langle p_n, \ldots, p_1\rangle \in x, R(p_1, \ldots, p_n), v \in y\}$$

для всех предикатных символов $R(x_1, \ldots, x_n)$ нашей сигнатуры.

Имея построенные таким образом функции $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_K$, можно установить следующий результат, более общий чем требование v).

Лемма 11. *Для всякой Δ_0-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, все свободные переменные которой находятся среди $x_1, \ldots, x_n$, существует терм $\mathcal{F}_\varphi$, составленный из функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_K$, для которого*

$$\mathrm{KPU} \vdash \mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \{\langle x_n, \ldots, x_1\rangle \in a_n \times \ldots \times a_1 | \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Доказательство. Пусть $\sigma^* = \sigma \cup \{U, \in\}$, где $\sigma = \{R_1, \ldots, R_l\}$ – конечная предикатная сигнатура, а переменные, используемые в формулах, принадлежат множеству $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Запись $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ всюду далее означает, что все свободные переменные этой формулы содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$. Формулу φ сигнатуры σ^* будем называть *упорядоченной*, если для всякого вхождения в φ квантора $Qx_i \in x_j$ индекс i является наибольшим среди индексов свободных переменных в области действия этого квантора. С помощью переименования связанных переменных легко показать, что

(a) всякая Δ_0-формула сигнатуры σ^* логически эквивалентна упорядоченной Δ_0-формуле с теми же свободными переменными.

Будем называть формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ термальной, или *t-формулой*, если существует терм $\mathcal{F}_\varphi$, для которого выполняется утверждение леммы. Строго говоря, это определение должно зависеть также и от n, однако далее будет показано, что данная формулировка корректна. Наша цель – индукцией по сложности показать, что всякая Δ_0-формула является t-формулой.

(b) Если KPU $\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Это утверждение очевидно. Из него следует, что можно ограничиться рассмотрением только упорядоченных Δ_0-формул.

(c) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Действительно, $\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_n \times \mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

(d) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Заметим, что $\{\varnothing\} = \{\mathcal{F}_3(a_1, a_1)\} = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_3(a_1, a_1), \mathcal{F}_3(a_1, a_1))$, поэтому можно использовать $\{\varnothing\}$ в термах. Имеем

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{rng}(\mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_n, \{\varnothing\})).$$

(e) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Действительно, при $n > m$ это следует из (c) индукцией по $n - m$, при $m > n$ – из (d) индукцией по $m - n$. При $n = m$ доказывать нечего.

(f) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – t-формула, то $\neg\varphi$ – также t-формула.

Имеем $\mathcal{F}_{\neg\varphi}(a_1, \ldots, a_n) = (a_n \times \ldots \times a_1) \setminus \mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

(g) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ – t-формулы, то $\varphi \wedge \psi$ – также t-формула.

Имеем $\mathcal{F}_{\varphi\wedge\psi}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) \cap \mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_n)$.

(h) Множество t-формул замкнуто относительно логических связок.

Это следует из (b),(e),(f) и (g).

(i) Если $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ – t-формула, и $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть $[\psi]^{x_n}_{x_{n+1}}$, то φ – также t-формула.

Если $n = 1$, определим $\mathcal{F}_\varphi(a_1, a_2) = \mathcal{F}_\psi(a_2) \times a_1$. Если $n > 1$, определим

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \mathcal{F}_8(\mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}), a_n)$$

$$= \{\langle x_{n+1}, \ldots, x_1\rangle | x_n \in a_n \text{ и } \langle x_{n+1}, x_{n-1}, \ldots, x_1\rangle \in \mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1})\}.$$

(j) Если $\psi(x_1, x_2)$ – t-формула и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $[\psi]^{x_1,x_2}_{x_{n-1},x_n}$, то φ – также t-формула.

Это утверждение имеет смысл только при $n \geqslant 2$ и нуждается в доказательстве только при $n > 2$. В этом случае определим

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{F}_7(\mathcal{F}_\psi(a_{n-1}, a_n), a_{n-2} \times \ldots \times a_1)$$

$$= \{\langle x_n, \ldots, x_1\rangle \in a_n \times \ldots \times a_1 | \langle x_n, x_{n-1}\rangle \in \mathcal{F}_\psi(a_{n-1}, a_n)\}.$$

Из утверждений (k) – (v) будет следовать, что все атомарные формулы являются t-формулами.

(k) Для всякого n, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $U(x_n)$, то φ является t-формулой.

Действительно, $\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{F}_U(a_n, a_n) \times a_{n-1} \times \ldots \times a_1$.

(l) $(x_1 = x_2)$ является t-формулой (по определению функции $\mathcal{F}_=$).

(m) $(x_n = x_{n+1})$ является t-формулой (по пунктам (l) и (j)).

(n) $(x_n = x_m)$ является t-формулой для всех $m > n$.

Это легко показать индукцией по m, используя (m) как базу индукции и (i) как индукционный переход.

(p) $(x_n = x_m)$ является t-формулой для всех n, m.

Для $n < m$ это утверждение (n), для $n = m$ возьмем $\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_n \times \ldots \times a_1$, для $n > m$ заметим, что $(x_n = x_m)$ тогда и только тогда, когда $(x_m = x_n)$, и воспользуемся пунктами (b) и (n).

(q) $(x_1 \in x_2)$ является t-формулой (по определению функции $\mathcal{F}_\in$).

(r) $(x_{n+1} \in x_{n+2})$ является t-формулой (по пунктам (q) и (j)).

(s) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $(x_i \in x_j)$, то φ является t-формулой.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_{n+2})$ есть формула $((x_i = x_{n+1}) \wedge (x_j = x_{n+2}) \wedge (x_{n+1} \in x_{n+2}))$. Она является t-формулой по пунктам (p),(r),(e) и (q). Поэтому можно определить

$$\mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_n, a_i, a_j)$$
$$= \{\langle x_{n+1}, \ldots, x_1\rangle \in a_j \times a_i \times a_n \times \ldots \times a_1 | (x_i = x_{n+1}), (x_j = x_{n+2}), (x_i \in x_j)\}.$$

Теперь воспользуемся функцией $\mathcal{F}_6$:

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{rng}(\mathrm{rng}(\mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_n, a_i, a_j))).$$

(t) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_{k+m})$ есть $R(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$, где R – m-местный предикатный символ сигнатуры σ, $k > 1$, то φ является t-формулой.

Действительно, $\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_{k+m}) = \mathcal{F}_R(a_{k+m} \times \ldots \times a_{k+1}, a_k \times \ldots \times a_1)$.

(u) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, где R – m-местный предикатный символ сигнатуры σ, то φ является t-формулой.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ есть формула $(R(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \wedge (x_{i_1} = x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge (x_{i_m} = x_{n+m}))$. Она является t-формулой по пунктам (t), (p), (e) и (g). Определим

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{rng}^n(\mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_n, a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})).$$

(v) Все атомарные формулы сигнатуры σ^* являются t-формулами.

Это следует из предыдущих утверждений. Кроме того, ранее было показано, что множество t-формул замнкнуто отоносительно логических связок. Осталось разобрать случай ограниченных кванторов.

(w) Если $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ – t-формула, и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть формула $\exists x_{n+1} \in x_j \psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, то φ – также t-формула.

Пусть $\theta(x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть $(x_{n+1} \in x_j)$, тогда $\psi \wedge \theta$ – t-формула, обозначим ее $\rho(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Заметим, что

$$\mathcal{F}_\rho(a_1, \ldots, a_n, \cup a_j)$$

$= \{\langle x_{n+1}, \ldots, x_1 \rangle | x_{n+1} \in x_j, x_i \in a_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n,$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})\}$.

Поэтому можно определить $\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{rng}(\mathcal{F}_\rho(a_1, \ldots, a_n, \cup a_j))$.

(x) Если $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ – t-формула, и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\exists x_k \in x_j \psi(x_1, \ldots, x_k)$, где $k > n$, то φ – также t-формула.

Доказательство аналогично предыдущему, за исключением того, что rng применяется $k - n$ раз.

(y) Если $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ – t-формула, и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\forall x_k \in x_j \psi(x_1, \ldots, x_k)$, где $k > n$, то φ – также t-формула.

Действительно, это следует из (b), (f) и (x), поскольку

$$\forall x_k \in x_j \psi \leftrightarrow \neg \exists x_k \in x_j \neg \psi.$$

Таким образом, из (v), (h), (x) и (y) получаем

(z) Все упорядоченные Δ_0-формулы являются t-формулами.

$\square$

Следствие 9. *Функции $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_K$ удовлетворяют требованию v).*

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – Δ_0-формула. Покажем, что существует терм $\mathcal{F}$ такой, что

$$\mathcal{F}(a, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \{x_i \in a | \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Действительно,

$$\mathcal{F}(a, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= \mathrm{dom}(\mathrm{rng}^{n-i}(\mathcal{F}_\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_{i-1}\}, a, \{x_{i+1}\}, \ldots, \{x_n\}))).$$

$\square$

Для того, чтобы удовлетворить требование транзитивности, определим, для всех $n \geqslant 2$, функции $\mathcal{G}_n^1, \mathcal{G}_n^2$, и функции $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ следующим образом:

$$\mathcal{G}_n^1(x,y) = \begin{cases} \langle x_n, \ldots, x_1, y\rangle, & \text{если } x = \langle x_n, \ldots, x_1, y\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_n^2(x,y) = \begin{cases} \{x_n, \langle x_{n-1}, \ldots, x_1, y\rangle\}, & \text{если } x = \langle x_n, \ldots, x_1, y\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_1(x,y) = \langle x, y\rangle;$$

$$\mathcal{H}_2(x,y) = \begin{cases} \langle u, y, v\rangle, & \text{если } x = \langle u, v\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_3(x,y) = \begin{cases} \{u, \langle y, v\rangle\}, & \text{если } x = \langle u, v\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение 34. *Пусть J – максимальная местность предикатов сигнатуры σ. Набор функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$ состоит из функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_K$, функций $\mathcal{G}_n^1, \mathcal{G}_n^2$ для всех $n \leqslant J$, и функций $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$.*

Теорема 29. *Набор функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$ удовлетворяет требованиям* i) – v).

9 Синтаксические критерии наследственно вычислимых свойств моделей

Для бесконечных формул не существует естественным образом определяемой пренексной нормальной формы, вместо него используется другой тип нормальных форм. Формула из $L_{\omega_1\omega}$ находится в *нормальной форме для бесконечных формул*, если она является Σ_α-формулой или Π_α-формулой для некоторого счетного ординала α. Классы Σ_α-формул и Π_α-формул определяются трансфинитной индукцией следующим образом.

Классы Σ_0-формул и Π_0-формул совпадают и состоят из конечных бескванторных формул. Для ординала $\alpha > 0$ класс Σ_α-формул определяется так: формула φ является Σ_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является счетной дизъюнкцией формул вида $\exists u\psi$, где ψ есть Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. Аналогично, формула φ является Π_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является счетной конъюнкцией формул вида $\forall u\psi$, где ψ есть Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$.

Классы *вычислимых* Σ_0-*формул* и Π_0-*формул* совпадают и состоят из конечных бескванторных формул. Для вычислимого ординала $\alpha > 0$ класс *вычислимых* Σ_α-*формул* определяется так: формула $\varphi(\bar{x})$ является *вычислимой* Σ_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является дизъюнкцией в.п. множества формул вида $\exists\bar{u}\psi$, где ψ есть вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$, а $\bar{u}$ содержит все свободные переменные формулы ψ, не входящие в $\bar{x}$ (возможно и некоторые переменные из $\bar{x}$). Аналогично, формула $\varphi(\bar{x})$ является *вычислимой* Π_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является конъюнкцией в.п. множества формул вида $\forall\bar{u}\psi$, где ψ есть вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$, а $\bar{u}$ содержит все свободные переменные формулы ψ, не входящие в $\bar{x}$.

Следующая важная теорема была получена Мэннэсом и Слэмэном, затем Эшем и Найт, и, независимо, Чизхолмом.

Теорема 30. *Для вычислимой системы $\mathfrak{A}$ и отношения R на $\mathfrak{A}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) R определима в $\mathfrak{A}$ с помощью вычислимой Σ_α-формулы;

(2) в любой копии $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ образ отношения R является $\Sigma_\alpha(\mathfrak{B})$-определимым.

Идея доказательства состоит в следующем. Предполагая, что выполнено условие (2), построим "генерическую"копию $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$. По предположению, образ R в $\mathfrak{B}$ является $\Sigma_\alpha(\mathfrak{B})$-определимым. Выражающее этот факт предложение должно быть "вынуждаемым"вследствие генеричности $\mathfrak{B}$, откуда и получается Σ_α-формула для R.

Начнем с детального описания конструкции вынуждения. Пусть σ – сигнатура системы $\mathfrak{A}$, и пусть B – бесконечное вычислимое множество новых константных символов, которое будет носителем системы $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathcal{F}$ – множество конечных разнозначных функций из A в B. Это множество будет множеством *условий вынуждения*. На $\mathcal{F}$ существует естественный частичный порядок – отношение включения $\subseteq$. В дальнейшем будем обозначать элементы из $\mathcal{F}$ символами $p, q, \ldots$. В ходе доказательства будет построена специальная последовательность условий вынуждения, объединение которой будет разнозначной функцией из A на B. Система $\mathfrak{B}$ с носителем B будет определена так, чтобы $\mathfrak{A} \equiv_F \mathfrak{B}$.

Нам необходим особый *язык вынуждения*, позволяющая описывать свойства строящихся генерической копии $\mathfrak{B}$ и обогащения $(\mathfrak{B}, F(R))$. Нужно, например, определять условия вида "$F(R) = W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})}$". Существуют различные варианты задания языка вынуждения. Так, например, можно использовать предикатный язык с сигнатурой, полученной добавлением к σ символа отношения R, функционального символа F для изоморфизма, и константных символов для элементов системы $\mathfrak{A}$. В данном доказательстве будет использоваться пропозициональный язык вынуждения P, в котором пропозициональные символы будут соответствовать атомарным предложениям сигнатуры $\sigma \cup \{R\} \cup B$. Также будем рассматривать подязык P', пропозициональные символы которого соответствуют атомарным предложениям сигнатуры $\sigma \cup B$.

Пусть S – множество вычислимых бесконечных формул языка P, S' – множество вычислимых бесконечных формул языка P'. Покажем, каким образом пропозициональные формулы из S или S' описывают системы $\mathfrak{B}$ и $(\mathfrak{B}, F(R))$. Рассматривая $(\mathfrak{B}, F(R))$ как систему сигнатуры $\sigma \cup \{R\} \cup B$, получим систему $\mathfrak{B}^*$ для языка P, в которой означивания пропозициональных переменных определяются атомарной диаграммой исходной системы. Аналогичным образом получается система для P'. Таким образом, для $\varphi \in P$

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff (\mathfrak{B}, F(R)) \models \varphi,$$

где в левой части φ понимается как пропозициональная формула, а в правой как формула исчисления предикатов подходящей сигнатуры.

Рассмотрим некоторые наиболее важные формулы. Для любых $n, e \in \omega$ существует вычислимая Σ_1-формула $\varphi \in S'$ такая, что

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff n \in W_e^{\mathfrak{B}}.$$

Более того, для любых $n, e \in \omega$ и любого вычислимого ординала α (отождествляемого с некоторым обозначением в некотором пути в дереве O) существует вычислимая Σ_α-формула из S', соответствующая утверждению

$$n \in W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})}.$$

Будем использовать для этой формулы обозначение $n \in W_e^{D_\alpha}$. Аналогично, существует вычислимая $\Pi_{\alpha+1}$-формула, соответствующая утверждению

$$W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})} = F(R).$$

Будем использовать для этой формулы обозначение $W_e^{D_\alpha} = F(R)$.

Итак приступим к определению механизма вынуждения. Определим отношение "p вынуждает φобозначаемое через $p \Vdash \varphi$, для $\varphi \in S$ и $p \in \mathcal{F}$ индукцией по сложности формулы φ. Хотя φ и является пропозициональной формулой, мы учитываем, что ее пропозициональные переменные соответствуют атомарным предложениям с констентами из $\mathfrak{B}$, поэтому имеет смысл говорить о "константах"формулы φ.

(1) Если φ – конечная формула, то $p \Vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда все константы формулы φ принадлежат $\mathrm{dom}(p)$ и при отображении p формула φ истинна в $(\mathfrak{A}, R)$ (отметим, что для формул, содержащих отрицание, данное определение отличается от стандартного определения отношения вынуждения),

(2) $p \Vdash \bigvee_i \varphi_i$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \varphi_i$ для некоторого $i \in \omega$,

(3) $p \Vdash \bigwedge_i \varphi_i$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in \omega$ и любого $q \supseteq p$ существует $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash \varphi_i$.

В следующих далее леммах формулируются осеновные свойства вынуждения. Для вычислимой $\Sigma_\alpha(\Pi_\alpha)$-формулы φ через $\sim \varphi$ будем обозначать вычислимую $\Pi_\alpha(\Sigma_\alpha)$-формулу, логически эквивалентную $\neg\varphi$, которая получается стандартным способом – занесением в $\neg\varphi$ отрицания вглубь формулы. Будем говорить, что *p решает φ*, если либо $p \Vdash \varphi$, либо $p \Vdash \sim \varphi$.

Лемма 12. *Для любого $p \in \mathcal{F}$ и любой $\varphi \in S$ существует $q \supseteq p$ такое, что q решает φ.*

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Если φ – конечная формула, то она содержит лишь конечное число пропозициональных переменных, каждая из которых, понимаемая как предложение исличления предикатов, содержит лишь конечное число констант из B. Если $q \supseteq p$ таково, что $\mathrm{dom}(q)$ содержит все эти константы, то q решает φ.

(2) Пусть φ – вычислимая Σ_α-формула, то есть

$$\varphi = \bigvee_i \varphi_i,$$

где для любого $i \in \omega$ φ_i – вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. По индукционному предположению, утверждение леммы верно для всех φ_i. Имеем $\sim \varphi = \bigwedge_i \sim \varphi_i$. Если никакое расширение p не вынуждает φ, то, по определению вынуждения, для всех $i \in \omega$ и всех $q \supseteq p$ верно $q \nVdash \varphi_i$. По индукционному предположению, существует $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash\sim \varphi_i$. По определению, это означает, что $p \Vdash\sim \varphi$.

(3) Пусть φ – вычислимая Π_α-формула, то есть

$$\varphi = \bigwedge_i \varphi_i,$$

где для любого $i \in \omega$ φ_i – вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. По индукционному предположению, утверждение леммы верно для всех φ_i. Имеем $\sim \varphi = \bigvee_i \sim \varphi_i$. Если p не вынуждает φ, то, по определению вынуждения, для некоторого $i \in \omega$ и некоторого $q \supseteq p$ не существует $r \supseteq q$ такого, что $r \Vdash \varphi_i$. По индукционному предположению, для этих i и q существует $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash\sim \varphi_i$. По определению, это означает, что $r \Vdash\sim \varphi$. □

Лемма 13. *Если $p \Vdash \varphi$ и $q \supseteq p$, то $q \Vdash \varphi$.*

Доказательство. Легко провести индукцией по сложности формулы φ. □

Лемма 14. *Для любой формулы $\varphi \in S$ и любого условия p невозможно, чтобы одновременно $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash\sim \varphi$.*

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Если φ – конечная формула, то утверждение очевидно.

(2) Пусть

$$\varphi = \bigvee_i \varphi_i,$$

и утверждение леммы верно для всех φ_i. Если $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash\sim \varphi$, то, по определению и по предыдущей лемме, существуют $i \in \omega$ и $q \supseteq p$ такие, что $q \Vdash \varphi_i$, что противоречит индукционному предположению.

(3) Пусть

$$\varphi = \bigwedge_i \varphi_i,$$

и утверждение леммы верно для всех φ_i. Если $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash\sim \varphi$, то, по определению и по предыдущей лемме, существуют $i \in \omega$ и $q \supseteq p$ такие, что $q \Vdash \varphi_i$, что противоречит индукционному предположению. □

Множество условий $D \subseteq \mathcal{F}$ называется *плотным*, если для всякого $p \in \mathcal{F}$ найдется $q \supseteq p$ такое, что $q \in D$. Например, плотными являются следующие множества:

$$D_\varphi = \{p \,|\, p \text{ решает } \varphi\},\ \varphi \in S,$$

$$D'_a = \{p \,|\, a \in \mathrm{rng}(p)\},\ a \in A.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – семейство всех плотных множеств такого вида. *Полной последовательностью вынуждения* (сокращенно *п.п.в.*) называется последовательность $(p_n)_{n\in\omega}$ условий вынуждения, такая, что $p_n \subseteq p_{n+1}$ для любого $n \in \omega$, и для любого $D \in \mathcal{D}$ существует $n \in \omega$ такое, что $p_n \in D$. Так как $\mathcal{D}$ счетно, легко убедиться, что такие последовательности существуют.

Зафиксируем произвольную п.п.в. $(p_n)_{n\in\omega}$, и покажем как на ее основе получить генерическую копию системы $\mathfrak{A}$.

Предложение 8. *Объединение $\cup_n p_n$ является взаимно однозначным отображением из B на A.*

Доказательство. Так как каждое p_n является разнозначной функцией, то $\cup_n p_n$ является разнозначной функцией из некоторого подмножества B в A. Так как $\mathcal{D}$ содержит все множества вида D'_a, то множеством значений функции $\cup_n p_n$ является все множество A. Так как $\mathcal{D}$ содержит все множества вида $D_{b=b}$, то областью определения функции $\cup_n p_n$ является все множество B. $\square$

Пусть F – функция, обратная к $\cup_n p_n$, тогда F есть биекция из A на B. Рассмотрим систему $\mathfrak{B}$, которая определяется из условия $\mathfrak{A} \cong_F \mathfrak{B}$ – генерическую копию системы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим также обогащение $(\mathfrak{B}, F(R))$, по которому образуем пропозициональную систему $\mathfrak{B}^*$ (состоящую из атомарных предложений, истинных в $(\mathfrak{B}, F(R))$, точнее таких $\varphi \in P$, что $(\mathfrak{B}, F(R)) \models \varphi$). Отметим, что конечная формула $\varphi \in S$ является одновременно бескванторным предложением сигнатуры $\sigma \cup \{R\} \cup B$, поэтому

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff (\mathfrak{B}, F(R)) \models \varphi.$$

Лемма 15. *(истинность и вынуждение) Для любой формулы $\varphi \in S$*

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff \exists n\, p_n \Vdash \varphi.$$

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Пусть φ – конечная формула. Имеем $\mathfrak{B}^* \models \varphi$ тогда и только тогда, когда для всех $n \in \omega$ таких, что $\mathrm{dom}(p_n)$ содержит все константы, входящие в φ, выполняется $p_n \Vdash \varphi$.

(2) Пусть $\varphi = \bigvee_i \varphi_i$, и условие леммы выполняется для всех формул φ_i. Имеем $\mathfrak{B}^* \models \varphi \Leftrightarrow \exists i \mathfrak{B}^* \models \varphi_i \Leftrightarrow \exists i \exists n\, p_n \Vdash \varphi_i \Leftrightarrow \exists n\, p_n \Vdash \varphi$.

(3) Пусть $\varphi = \bigwedge_i \varphi_i$, и условие леммы выполняется для всех формул φ_i. Предположим, что $\mathfrak{B}^* \models \varphi$. Тогда $\mathfrak{B}^* \models \varphi_i$ для всех $i \in \omega$. Выберем $n \in \omega$ так, чтобы p_n решало φ. Если $p_n \Vdash\sim \varphi$, то для некоторого $i \in \omega$ имеем $p_n \Vdash\sim \varphi_i$. Но, по индукционному предположению, существует $m \in \omega$ такое, что $p_m \Vdash \varphi_i$. Вследствие монотонности можно считать, что $m = n$ (взяв наибольшее из этих чисел). Получили противоречие с леммой 14. Если же $p_n \Vdash \varphi$, то для любого $i \in \omega$ существует $m \geqslant n$ такое, что p_m решает φ_i. Так как $p_n \Vdash \varphi$, то существует $q \supseteq p_m$ такое, что $q \Vdash \varphi_i$, а значит $p_m \Vdash \varphi_i$. По индукционному предположению получаем, что $\mathfrak{B}^* \models \varphi_i$. Поскольку это справедливо для всех $i \in \omega$, получаем, что $\mathfrak{B}^* \models \varphi$. □

До сих пор мы нигде не использовали S' – подмножество S, состоящее из формул, пропозициональные символы которых (элементы множества P') соответствуют атомарным предложениям, не содержащим R. Следующая лемма говорит о том, что для формул из S' вынуждение определимо в $\mathfrak{A}$.

Лемма 16. *(определимость вынуждения) Для любой формулы $\varphi \in S'$ и любого набора $\bar{b}$ элементов из $\mathfrak{A}$ существует вычислимая бесконечная формула $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ сигнатуры σ такая, что $\mathfrak{A} \models Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{a})$ тогда и только тогда, когда для условия вынуждения p, переводящего $\bar{b}$ в $\bar{a}$, справедливо $p \Vdash \varphi$. Кроме того, если φ – вычислимая $\Sigma_\alpha(\Pi_\alpha)$-формула, то такой же будет и формула $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$.*

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Пусть φ – конечная формула. Если $\bar{b}$ содержит все константы из B, входящие в φ, то $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ есть конечная конъюнкция базисных формул сигнатуры σ (то есть атомарных формул и их отрицаний), утверждающая, что подстановка $\bar{b}$ вместо $\bar{x}$ делает формулу φ истинной. В противном случае возьмем $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ тождественно ложной.

(2) Пусть φ – вычислимая Σ_α-формула, то есть $\varphi = \bigvee_i \varphi_i$, и для любого i φ_i есть вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. Формулы

$Force_{\bar{b},\varphi_i}(\bar{x})$ определены для любого $i \in \omega$. Имеем

$$Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x}) = \bigvee_i Force_{\bar{b},\varphi_i}(\bar{x}).$$

(3) Пусть φ – вычислимая Π_α-формула, то есть $\varphi = \bigwedge_i \varphi_i$, и для любого i φ_i есть вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. Формулы $Force_{\bar{b},\bar{d},\varphi_i}(\bar{x})$ определены для любого $i \in \omega$ и любого набора $\bar{d}$. Тогда $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ есть конъюнкция по всем i и $\bar{b}_1$ формул вида

$$\forall u_1 \bigvee_{\bar{b}_2} \exists \bar{u}_2 Force_{\bar{b},\bar{b}_1,\bar{b}_2,\varphi_i}(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2).$$

Здесь длины наборов переменнных $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ совпадают с длинами наборов $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ соответственно. $\square$

Приступим к доказательству теоремы. Зафиксируем полную последовательность вынуждения $(p_n)_{n\in\omega}$, и пусть F и $\mathfrak{B}$ есть соответственно изоморфизм и копия $\mathfrak{A}$, построенные по этой последовательности описанным выше способом. Нам нужно найти вычислимую Σ_α-формулу, определяющую отношение R в $\mathfrak{A}$, используя тот факт, что $F(R)$ является $\Sigma_\alpha(\mathfrak{B})$-определимым. Итак, $F(R) = W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})}$ для некоторого $e \in \omega$. По лемме 15 существует $n \in \omega$ такое, что

$$p_n \Vdash W_e^{D_\alpha} = F(R).$$

Пусть p_n – функция переводящая набор $\bar{d}$ в набор $\bar{c}$. Из определения вынуждения следует, что $a \in R$ тогда и только тогда, когда существуют $q \supseteq p_n$ и $b \in B$ такие, что $q(b) = a$ и $q \Vdash b \in W_e^{D_\alpha}$.

По лемме 16, для любых b и $\bar{b}_1$ из B существует вычислимая Σ_α-формула $Force_{\bar{d},b,\bar{b}_1,b\in W_e^{D_\alpha}}(\bar{c}, x, \bar{u})$ сигнатуры σ такая, что

$$\mathfrak{A} \models Force_{\bar{d},b,\bar{b}_1,b\in W_e^{D_\alpha}}(\bar{c}, a, \bar{a}_1)$$

тогда и только тогда, когда для условия q, переводящего $\bar{d}, b, \bar{b}_1$ в $\bar{c}, a, \bar{a}_1$, выполняется $q \Vdash b \in W_e^{D_\alpha}$. Пусть $\varphi(\bar{c}, x)$ – дизъюнкция по всем $b, \bar{b}_1$ из B формул вида

$$\exists \bar{u} Force_{\bar{d},b,\bar{b}_1,b\in W_e^{D_\alpha}}(\bar{c}, x, \bar{u}).$$

Тогда формула $\varphi(\bar{c}, x)$ определяет R в $\mathfrak{A}$, причем легко привести ее к искомому виду вычислимой Σ_α-формулы. Теорема доказана.