УДК 510.5

Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей

А.И. Стукачев

Данная работа посвящена изучению понятия Σ-определимости алгебраических систем в наследственно конечных надстройках, которое позволяет ввести аналоги понятия конструктивности для несчетных моделей. Ю.Л. Ершовым в [1, 2] рассматривалась следующая проблема: охарактеризовать класс теорий, имеющих несчетные модели, Σ-определимые в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками. В [1] получен критерий этого свойства в терминах конструктивизируемости $^*\omega$-спектра теории, а в [2] выдвинута гипотеза о том, что данным свойством обладают все так называемые c-простые теории.

В настоящей работе вводится понятие относительной неразличимости, в терминах которого единым способом получены критерии Σ-определимости несчетной модели c-простой теории в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками и бесконечными моделями пустой сигнатуры (с равенством). В качестве следствия установлено существование c-простой теории (бесконечной сигнатуры), никакая несчетная модель которой не Σ-определима в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками.

Введенное в работе понятие относительной неразличимости основано на рассмотрении пары моделей, основные множества которых имеют непустое пересечение. В теории допустимых множеств рассматриваются также пары моделей как алгебраические системы сигнатуры, полученной объединением (непересекающихся) сигнатур исходных моделей, с добавленными одноместными предикатными символами, выделяющими их основные множества. В качестве носителя такой системы берется объединение носителей исходных моделей, причем не вводится никаких ограничений на их взаимное расположение. Для таким образом определенных пар моделей в работе получен критерий рекурсивной насыщенности. В качестве следствия показано, что пара, образованная моделями c-простых теорий, является рекурсивно насыщенной. Приведен пример теории T с простой моделью $\mathfrak{M}_0$, все модели которой рекурсивно насыщены, но для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M})$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_0$. Полученные результаты позволяют указать пример моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ таких, что $O(\mathfrak{M}) = O(\mathfrak{N}) = \omega$, но $O(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) > \omega$, где

$O(\mathfrak{A})$ обозначает наименьший ординал, не лежащий в допустимом множестве $HYP(\mathfrak{A})$ (см. [3, 5]).

Терминология, а также все используемые в тексте работы обозначения являются стандартными и соответствуют [3, 5, 8, 9]. Рассматриваются алгебраические системы не более чем счетной сигнатуры, причем не уменьшая общности можно считать, что сигнатура содержит только предикатные символы. Запись $\sigma = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$ означает, что P_k — n_k-местный предикатный символ сигнатуры σ, причем если $f(k) = n_k$ — вычислимая функция, то сигнатура σ также называется вычислимой. Если $\mathfrak{A}$ — модель сигнатуры σ, то через $P_k^{\mathfrak{A}}$ обозначается интерпретация предикатного символа P_k в модели $\mathfrak{A}$, основное множество модели $\mathfrak{A}$ обозначается как $|\mathfrak{A}|$. Для произвольного множества M через $M^{<\omega}$ обозначается множество всех конечных наборов из элементов множества M.

1 Σ-определимость над классами моделей c-простых теорий

Напомним понятие Σ-определимости алгебраической системы в допустимом множестве [3], которое является обобщением понятия конструктивизируемости. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество сигнатуры σ_0.

Определение 1. *Система $\mathfrak{M}$ называется* **Σ-определимой в допустимом множестве** *$\mathbb{A}$, если существуют вычислимая последовательность Σ-формул сигнатуры σ_0*

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, x_1, y), \Psi^*(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Phi_0^*(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \ldots, \Phi_k(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \Phi_k^*(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \ldots,$$

такая, что для некоторого параметра $a \in A$ множество $M_0 \rightleftharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a)$ непусто, отношение $\eta \rightleftharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$ есть отношение конгруэнтности на алгебраической системе

$$\mathfrak{M}_0 \rightleftharpoons \langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_k^{\mathfrak{M}_0}, \ldots \rangle,$$

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \rightleftharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k},\ k \in \omega$,

$$\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a),$$

$$\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1})$$

для всех $k \in \omega$ и система $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-системе $\mathfrak{M}_0 / \eta$. В этом случае говорят, что данная последовательность формул (с параметром $a \in A$) **Σ-определяет** *систему $\mathfrak{M}$ в допустимом множестве $\mathbb{A}$.*

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда допустимое множество $\mathbb{A}$ является наследственно конечной надстройкой. Ординалами любой наследственно конечной надстройки являются натуральные числа, и только они, поэтому понятие Σ-определимости в этом случае наиболее близко понятию конструктивизируемости. Для $\mathbb{A} = HF(\varnothing)$ понятия Σ-определимости в $\mathbb{A}$ и конструктивизируемости совпадают. Случай, когда $\mathbb{A} = HF(\mathfrak{M})$, и $\mathfrak{M}$ — бесконечная счетная модель, можно свести к рассмотрению относительной конструктивизируемости, использующей понятие вычислимости с оракулом. Наконец, случай, когда в качестве $\mathbb{A}$ берется наследственно конечная надстройка над несчетной моделью, интересен тем, что позволяет ввести некоторый аналог (относительной) конструктивизируемости и для несчетных систем.

Очевидно, что любая алгебраическая система $\mathfrak{M}$ может быть Σ-определена в подходящей наследственно конечной надстройке (например, тривиальным образом в $HF(\mathfrak{M})$). Поэтому более содержательным является вопрос о Σ-определимости $\mathfrak{M}$ в наследственно конечных надстройках над моделями из некоторого класса K. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ **Σ-определима над классом K**, если $\mathfrak{M}$ Σ-определима в $HF(\mathfrak{A})$ для некоторой модели $\mathfrak{A}$ из класса K. В дальнейшем нас будут интересовать классы вида $Mod(T)$, то есть классы моделей некоторых теорий.

Согласно [3], теория T называется **c-простой**, если она счетно категорична, модельно полна, разрешима и имеет разрешимое множество полных формул. Всюду далее предполагается, что сигнатура c-простой теории вычислима (то есть не обязательно конечна). Всякая c-простая теория имеет вследствие ω-категоричности имеет единственную с точностью до изоморфизма счетную модель, и, более того, имеет разрешимую модель, которая единственна с точностью до вычислимого изоморфизма. **Разрешимой** называется модель, основное множество которой является вычислимым множеством натуральных чисел, все определимые отношения которой также (равномерно) вычислимы. Модель называется **вычислимой**, если ее основное множество также является вычислимым множеством натуральных чисел, но равномерно вычислимы лишь отношения, определимые атомарными формулами. Наряду с этими понятиями будем также использовать понятия конструктивизируемой и сильно конструктивизируемой модели [4].

В терминах разрешимых моделей сформулируем необходимое условие, при котором c-простая теория имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом моделей другой c-простой теории. Для этого введем следующее общее понятие, имеющее смысл для произвольной пары моделей с пересекающимися основными множествами.

Определение 2. *Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — некоторые алгебраические системы, то множество $I \subseteq |\mathfrak{M}| \cap |\mathfrak{N}|$ называется множеством* **$\mathfrak{M}$-неразличимых элементов в $\mathfrak{N}$**, *если для любых*

$i_0, \ldots, i_n, i'_0, \ldots, i'_n \in I$

$$\langle \mathfrak{M}, i_0, \ldots, i_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, i'_0, \ldots, i'_n \rangle \Rightarrow \langle \mathfrak{N}, i_0, \ldots, i_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, i'_0, \ldots, i'_n \rangle.$$

Теорема 1. *Пусть T_1 и T_2 — c-простые теории. Если теория T_2 имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом $Mod(T_1)$, то существуют разрешимые модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ теорий T_1 и T_2 соответственно, такие, что в модели $\mathfrak{N}$ существует бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов, где $\mathfrak{M}^*$ — некоторое обогащение модели $\mathfrak{M}$ конечным числом констант.*

Доказательство. Пусть некоторая несчетная модель теории T_2 Σ-определима в наследственно конечной надстройке над некоторой (несчетной) моделью $\mathfrak{M}'$ теории T_1 посредством набора Σ-формул

$$\Gamma = \langle \Phi, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_k, \Phi_k^*, \ldots \rangle,$$

(где формулы Ψ и Ψ^* определяют отношение равенства), причем не нарушая общности можно считать, что параметром является набор праэлементов $\bar{m}' \in |\mathfrak{M}'|^{<\omega}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — разрешимая модель теории T_1. Так как T_1 — c-простая теория, найдется набор $\bar{m}_0$ элементов $\mathfrak{M}$ такой, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}', \bar{m}' \rangle$. Отсюда, вследствие того, что любая модель c-простой теории является достаточно насыщенной, получаем, что $\langle HF(\mathfrak{M}), \bar{m}_0 \rangle \equiv \langle HF(\mathfrak{M}'), \bar{m}' \rangle$ (напомним, что модель $\mathfrak{M}_0$ называется **достаточно насыщенной** [3], если существует ω-насыщенная модель $\mathfrak{M}_1$ такая, что $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1$ и $HF(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq HF(\mathfrak{M}_1)$). Поэтому набор формул Γ с параметром $\bar{m}_0$ корректно определяет в $HF(\mathfrak{M})$ модель $\mathfrak{N}'$, которая будет моделью теории T_2. Система формул Γ с данным набором параметров не может определять модель с конечным носителем (иначе конечной была бы и модель, определяемая этим набором в $HF(\mathfrak{M}')$), поэтому $\mathfrak{N}'$ будет счетной моделью теории T_2. Кроме того, по всякой сильной конструктивизации модели $\mathfrak{M}$ набор Γ позволяет построить конструктивизацию модели $\mathfrak{N}'$. По способу построения будем использовать для модели $\mathfrak{N}'$ обозначение $\Gamma(HF(\mathfrak{M}), \bar{m}_0)$.

Известно [3], что любой элемент наследственно конечной надстройки $HF(\mathfrak{M})$ может быть представлен в виде значения терма $t_\varkappa(\bar{m})$, где $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ — набор праэлементов, а $\varkappa \in HF(\omega)$. Покажем, что существует такой элемент $\varkappa \in HF(\omega)$, такой набор $\bar{m}_1 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ и такое бесконечное множество $X \subseteq M$, что $HF(\mathfrak{M}) \models \Psi^*(t_\varkappa(m, \bar{m}_1), t_\varkappa(m', \bar{m}_1), \bar{m}_0)$ для любых различных m, m' из множества X. Действительно, если предположить противное, то, вследствие того, что $\mathfrak{M}$ — простая модель теории T_1, набор формул Γ определял бы не более чем счетные модели над любыми моделями теории T_1.

Так как модель $\mathfrak{M}$ разрешима и Ψ^* — Σ-формула, то можно найти бесконечное вычислимое множество $I \subseteq X$. Для этого достаточно взять произвольное $x_0 \in X$, далее найти (эффективно) $x_1 = \mu x(HF(\mathfrak{M}) \models \Psi^*(x_0, x_1, \bar{m}_0))$, и так далее, положив в итоге $I \leftrightharpoons \{x_0, x_1, \ldots\}$.

Важное свойство достаточно насыщенных моделей состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{M}_0$ – достаточно насыщенная модель. Если $a_0, a_1 \in HF(\mathfrak{M}_0)$, то типы элементов a_1 и a_2 в $HF(\mathfrak{M}_0)$ совпадают тогда и только тогда, когда существуют $n \in \omega$, $\varkappa \in HF(n)$, $\bar{m}_0$, $\bar{m}_1 \in M_0^n$ такие, что $a_0 = t_\varkappa(\bar{m}_0)$, $a_1 = t_\varkappa(\bar{m}_1)$ и типы наборов $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_1$ совпадают в $\mathfrak{M}_0$ (доказательство этого утверждения можно найти в [3]). Таким образом, так как $\mathfrak{M}$ достаточно насыщена, то для любых $i_0, \dots, i_n, i'_0, \dots, i'_n \in I$ из того, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}_2, i_0, \dots, i_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_2, i'_0, \dots, i'_n \rangle$, следует, что

$$\langle HF(\mathfrak{M}), t_\varkappa(i_0, \bar{m}_1), \dots, t_\varkappa(i_n, \bar{m}_1) \rangle \equiv \langle HF(\mathfrak{M}), t_\varkappa(i'_0, \bar{m}_1), \dots, t_\varkappa(i'_n, \bar{m}_1) \rangle,$$

где $\bar{m}_2$ — набор, являющийся конкатенацией наборов $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_1$. Поэтому, поскольку модель $\mathfrak{N}'$ определяется в $HF(\mathfrak{M})$ набором Σ-формул, на основе произвольной конструктивизации μ модели $\mathfrak{M}$ можно построить конструктивизацию ν наследственно конечной надстройки $HF(\mathfrak{M})$, для которой $\mu^{-1}(i) = \nu^{-1}(t_\varkappa(i, \bar{m}_0))$ для всех $i \in I$. На основе этой конструктивизации легко получить разрешимую модель $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{N}'$, для которой множество I будет бесконечным вычислимым множеством $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}_2 \rangle$-неразличимых элементов в $\mathfrak{N}$. $\square$

Выделим теперь подкласс класса c-простых теорий, для которых необходимое условие Σ-определимости несчетных систем будет одновременно и достаточным. Для этого введем в рассмотрение релятивизованный вариант функции Рыль-Нардзевского. Для произвольной ω-категоричной модели $\mathfrak{A}$ и для произвольного подмножества $X \subseteq A$ определим функцию $R_X^{\mathfrak{A}} : \omega \to \omega$ следующим образом: для каждого $n \in \omega$ пусть $R_X^{\mathfrak{A}}(n)$ — число n-типов, реализуемых в модели $\mathfrak{A}$ элементами из X. Вместо $R_{|\mathfrak{A}|}^{\mathfrak{A}}$ будем писать просто $R^{\mathfrak{A}}$. Будем говорить, что ω-категоричная теория имеет **широкие модели**, если для (любой) модели $\mathfrak{A}$ этой теории $R_X^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{A}}$ для любого бесконечного подмножества $X \subseteq |\mathfrak{A}|$. Другими словами, любое бесконечное подмножество широкой модели реализует все типы элементарной теории этой модели. Теория T_E бесконечных систем пустой сигнатуры (с равенством) и теория T_{DLO} плотного линейного порядка без концевых элементов могут служить примерами c-простых теорий, все модели которых являются широкими.

Теорема 2. *Пусть T_1 и T_2 — c-простые теории, и пусть теория T_1 имеет широкие модели. В этом случае несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $Mod(T_1)$ тогда и только тогда, когда существуют разрешимые модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ теорий T_1 и T_2, соответственно, такие, что в $\mathfrak{N}$ существует бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов, где $\mathfrak{M}^*$ — обогащение модели $\mathfrak{M}$ конечным числом констант.*

Доказательство. Необходимость показана в теореме 1, поэтому требуется установить только достаточность.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — разрешимые модели теорий T_1 и T_2 соответственно, и пусть модель $\mathfrak{N}$ обладает бесконечным вычислимым множеством $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов $I \subseteq |\mathfrak{N}|$, где $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle$, $\bar{m}_0 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$. Построим конструктивизацию модели $\mathfrak{N}$, взяв в качестве основы скулемовскую оболочку множества $|\mathfrak{M}|$ относительно теории T_2 (для этого множество $|\mathfrak{M}|$ предварительно "проектируется"на множество $I \subseteq |\mathfrak{M}| \cup |\mathfrak{N}|$); в ходе построения непосредственно получается набор Γ Σ-формул, который для подходящей модели $\mathfrak{M}'$ теории T_1 сколь угодно большой мощности определяет в $HF(\mathfrak{M}')$ модель теории T_2 той же мощности, что и $\mathfrak{M}'$. При задании на множестве $|\mathfrak{M}|$ структуры подмодели некоторой модели теории T_2 путем "проектирования"на I требуется, чтобы модель $\mathfrak{M}$ была широкой. Скулемовский терм, соответствующий формуле $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ сигнатуры σ_2, обозначается через $t_\varphi(\bar{x})$; для скулемовских термов существует эффективное представление в любой наследственно конечной надстройке вследствие вычислимости сигнатуры σ_2. При построении новые скулемовкие термы добавляются лишь в том случае, если данная формула не может быть удовлетворена никаким другим элементом, уже попавшим в скулемовскую оболочку к данному шагу.

Приступим к описанию конструкции. Для каждого шага t будут эффективно определены множество S_t как часть скулемовского замыкания множества $|\mathfrak{M}|$ относительно теории T_2, функция $p_t : S_t^{<\omega} \to (S_t \restriction I)^{<\omega}$, где $S_t \restriction I$ — подмножество S_t, образующее соответствующую часть скулемовского замыкания множества I, и множество F_t, являющееся полной диаграммой множества S_t в сигнатуре σ_2. В дальнейшем будем использовать следующее понятие. С произвольной моделью $\mathfrak{A}$ свяжем модель $\mathfrak{A}^{<\omega}$, носителем которой является множество $|\mathfrak{A}|^{<\omega}$, а сигнатура состоит из бинарного отношения $\sim$ и двуместной функции $\hat{}$, определенных следующим образом: $\bar{a}_1 \sim \bar{a}_2$ тогда и только тогда, когда наборы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ имеют одинаковую длину и $\langle \mathfrak{A}, \bar{a}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \bar{a}_2 \rangle$, а функция $\hat{}$ по паре наборов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ дает набор $\bar{a}_1\hat{}\bar{a}_2$, являющийся их конкатенацией. Если $\mathfrak{A}$ — счетная модель c-простой теории, то очевидно, что модель $\mathfrak{A}^{<\omega}$ конструктивизируема.

Зафиксируем некоторую конструктивизацию μ модели $\mathfrak{M}^{<\omega}$, конструктивизацию ν модели $\mathfrak{N}^{<\omega}$, а также некоторую вычислимую геделевскую нумерацию $\{\varphi_n(\bar{x}) | n \in \omega\}$ формул сигнатуры σ_2.

Шаг 0. Полагаем $S_0 \leftrightharpoons |\mathfrak{M}|$ и определяем функцию p_0 следующим образом: для любого набора $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ пусть $p_0(\bar{m}) \leftrightharpoons \bar{n}$, где $\bar{n}$ — набор элементов из I с наименьшим возможным номером в нумерации μ, имеющий в $\mathfrak{M}^*$ тот же тип, что и набор $\bar{m}$ (то есть удовлетворяющий эффективно проверяемому условию $\bar{m}_0\hat{}\bar{m} \sim \bar{m}_0\hat{}\bar{n}$). Теперь (эффективно) определяем множество F_0 так:

$$F_0 \leftrightharpoons \{\varphi(\bar{m}) \,|\, \bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}, \varphi \text{ — формула сигнатуры } \sigma_2, \mathfrak{N} \models \varphi(p_0(\bar{m}))\}.$$

Шаг t+1. Пусть уже построены множества S_t, F_t и функция p_t. Определим для наборов элементов из S_t понятие эквивалентности относительно $\mathfrak{M}^*$ следующим образом: если $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in S_t^{<\omega}$, то называем наборы $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ эквивалентными относительно $\mathfrak{M}^*$, если наборы

$\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ имеют одинаковую длину и $p_t(\bar{s}_1) = p_t(\bar{s}_2)$ (для случая $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \in S_0$ наборы $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ эквивалентны относительно $\mathfrak{M}^*$ тогда и только тогда, когда наборы $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ имеют одинаковую длину и $\langle \mathfrak{M}^*, \bar{m}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}^*, \bar{m}_2 \rangle$).

Для каждой формулы $\varphi_n(\bar{x}, y), n < t$, сигнатуры σ_2, вследствие ω-категоричности теории T_1 существует лишь конечное число попарно неэквивалентных относительно $\mathfrak{M}^*$ наборов $\bar{s}$ элементов из S_t, таких, что $\exists y \varphi_k(\bar{s}, y) \in F_t$. Пусть $\{\langle \varphi_{n_k}, \bar{s}_k \rangle | 1 \leq k \leq k_0\}$ — список всех таких формул с соответствующими наборами. Введем промежуточные множества S_t^k, F_t^k и функцию p_t^k для всех $k \leq k_0$, положив вначале $S_t^0 \leftrightharpoons S_t$, $F_t^0 \leftrightharpoons F_t$, $p_t^0 \leftrightharpoons p_t$, и для каждого $k \leq k_0$ выполним

Подшаг k. Полагаем сначала $S_t^k \leftrightharpoons S_t^{k-1}, F_t^k \leftrightharpoons F_t^{k-1}, p_t^k \leftrightharpoons p_t^{k-1}$. Определяем (это можно сделать эффективно), существует ли элемент $c \in S_t^{k-1}$, для которого $\varphi_{n_k}(\bar{s}_k \hat{\ } c) \in F_t^{k-1}$ (эффективность устанавливается индукцией по t; для случая $t = 0$ это верно следующего замечания: так как множество I является множеством $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов в $\mathfrak{N}$, то для проверки нереализуемости данной формулы элементами из I вследствие ω-категоричности модели $\mathfrak{M}^*$ достаточно сделать конечное число проверок, рассмотрев все возможные $\mathfrak{M}^*$-типы потенциальных свидетелей реализуемости формулы в $\mathfrak{N}$). Если такой элемент есть, то ничего не делаем; в противном случае поступаем следующим образом. Добавляем в S_t^k все скулемовские термы, эквивалентные скулемовскому терму $t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s}_k)$ относительно $\mathfrak{M}^*$, то есть все термы вида $t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s})$, для которых $p_t^{k-1}(\bar{s}) = p_t^{k-1}(\bar{s}_k)$. Доопределяем функцию p_t^k на S_t^k, полагая для всех новых термов $p_t^k(t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s})) \leftrightharpoons t_{\varphi_{n_k}}(p_t^{k-1}(\bar{s}))$. Множество F_t^k доопределяется так: для всякого вновь добавленного скулемовского терма $t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s})$ и для всякой полной относительно теории T_2 формулы θ сигнатуры σ_2 от $lh(\bar{s}) + 1$ переменных (здесь $lh(\bar{s})$ обозначает длину набора $\bar{s}$) добавляем в F_t^k формулу $\theta(\bar{s}, t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s}))$, если формула θ имеет наименьший геделевский номер среди полных формул ρ от $lh(\bar{s})+1$ переменных, для которых

$$\exists y(\rho(\bar{s}, y) \wedge \varphi_{n_k}(\bar{s}, y)) \in F_t^{k-1}.$$

Далее, для произвольного набора $\bar{s} \in S_t^k$ добавляем формулу $\theta(\bar{s})$ в F_t^k, если θ — полная относительно T_2 формула сигнатуры σ_2 с наименьшим геделевским номером, для которой $\theta(\bar{s})$ совместна (относительно теории T_2) со всеми формулами из $F_t^k \upharpoonright \bar{s}$, где $F_t^k \upharpoonright \bar{s} \leftrightharpoons \{\varphi(\bar{s}') | \varphi(\bar{s}') \in F_t, \bar{s}' \in (sp(\bar{s}))^{<\omega}\}$, а функция sp определяется индуктивно: для $m \in M$ полагаем $sp(m) \leftrightharpoons \{m\}$, для всех скулемовских термов из S_t полагаем $sp(t_\varphi(\bar{s})) \leftrightharpoons \{t_\varphi(\bar{s})\} \cup sp(\bar{s})$, наконец, для кортежей полагаем $sp(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle) \leftrightharpoons sp(s_1) \cup \ldots \cup sp(s_n)$.

Полученное таким образом множество F_t^k требуется также замкнуть по логической выводимости относительно теории T_2. Как видно из описания, множество F_t^k определяется индуктивно, а стало быть, по теореме Ганди [3, 5], эффективно.

Описание подшага k закончено.

Для завершения шага $t+1$ остается положить $S_{t+1} \leftrightharpoons S_t^{k_0}$, $F_{t+1} \leftrightharpoons F_t^{k_0}$, $p_{t+1} \leftrightharpoons p_t^{k_0}$.

Описание конструкции закончено. Из ее свойств непосредственно следует, что полученная с помощью этой конструкции система с основным множеством $\cup_{t\in\omega} S_t$ и (полной) диаграммой $\cup_{t\in\omega} F_t$ является моделью теории T_2; стало быть, данная конструкция позволяет по конструктивизации модели $\mathfrak{M}^{<\omega}$ построить сильную конструктивизацию модели $\mathfrak{N}$. Очевидно, что это построение может быть описано вычислимым набором Σ-формул сигнатуры $\sigma_1 \cup \{\in, U\}$, который в наследственно конечной надстройке над подходящей моделью $\mathfrak{M}'$ теории T_1 определяет несчетную модель теории T_2. Действительно, если $\theta(x,\bar{y})$ — полная формула теории T_1, для которой множество $I_\theta \leftrightharpoons \{i \in I | \mathfrak{M} \models \theta(i, \bar{m}_0)\}$ бесконечно (такая формула существует вследствие ω-категоричности теории T_1), то возьмем модель $\mathfrak{M}'$ и набор ее элементов $\bar{m}'$ такие, что формула $\theta(x, \bar{m}')$ определяет в $\mathfrak{M}'$ несчетное подмножество. Тогда, если Γ — набор Σ-формул, задаваемый изложенной выше конструкцией, то из свойств этой конструкции вытекает, что $\Gamma(HF(\mathfrak{M}'), \bar{m}')$ — несчетная модель теории T_2. Таким образом, несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $Mod(T_1)$. $\square$

На самом деле, можно несколько расширить область применения предыдущей теоремы. Например, никакой плотный линейный порядок с концевыми элементами не может быть широкой моделью, хотя легко убедиться, что утверждения о Σ-определимости несчетной модели c-простой теории над плотными линейными порядками с концевыми элементами и без концевых элементов равносильны. Предыдущая теорема останется верной, если в ее формулировке ослабить требования на счетную модель $\mathfrak{M}$ теории T_1 следующим образом. Если множество всех n-типов, реализуемых в модели $\mathfrak{M}$ элементами множества $X \subseteq |\mathfrak{M}|$, обозначить через $S_X^{\mathfrak{M}}(n)$, то достаточно наложить следующие ограничения на $\mathfrak{M}$: для любого бесконечного множества $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ существует (бесконечное) определимое множество $D \subseteq |\mathfrak{M}|$, для которого $S_X^{\mathfrak{M}} = S_D^{\mathfrak{M}}$. Так как условие $S_X^{\mathfrak{M}} = S^{\mathfrak{M}}$ равносильно условию $R_X^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{M}}$, то всякая широкая модель обладает данным свойством. Доказательство в этом более общем случае отличается от предыдущего только тем, что на начальном шаге берется не все множество $|\mathfrak{M}|$, а его определимое подмножество D (напомним, что для любой модели c-простой теории для подмножеств этой модели Σ-определимость в наследственно конечной надстройке равносильна обычной определимости).

Отметим, что из теоремы Рамсея при помощи таких же рассуждений, что и в доказательстве теоремы Эренфойхта – Мостовского, вытекает следующее свойство ω-категоричных моделей: если $\mathfrak{M}$ — ω-категоричная модель, то для любого бесконечного множества $I \subseteq |\mathfrak{M}|$ и любого набора $\bar{m}_0 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ существует бесконечное множество $J \subseteq I$ такое, что для любых наборов $\bar{j}_1, \bar{j}_2$ элементов из J

$$\langle \mathfrak{M}, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, \bar{j}_2 \rangle \Rightarrow \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_2 \rangle,$$

где $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle$.

Эффективизацией этого свойства является следующее понятие: будем говорить, что c-простая теория T допускает **эффективную элиминацию констант**, если для разрешимой модели $\mathfrak{M}$ теории T верно следующее: для любого бесконечного вычислимого множества $I \subseteq |\mathfrak{M}|$ и любого набора $\bar{m}_0 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ существует бесконечное вычислимое множество $J \subseteq I$ такое, что для любых наборов $\bar{j}_1, \bar{j}_2$ элементов из множества J

$$\langle \mathfrak{M}, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, \bar{j}_2 \rangle \Rightarrow \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_2 \rangle,$$

где $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle$, причем множество J находится по множеству I и набору $\bar{m}_0$ эффективно.

Предложение 1. *Теории T_{DLO} и T_E допускают эффективную элиминацию констант.*

Доказательство. Пусть $\langle L, < \rangle$ — разрешимый плотный линейный порядок, и пусть $\bar{l} = \langle l_0, \ldots, l_n \rangle \in L^{<\omega}$. Если k — число попарно различных элементов набора $\bar{l}$, то L разбивается этими элементами на конечное число интервалов $U_0, \ldots, U_k$, поэтому для любого бесконечного множества $I \subseteq L$ найдется интервал $U_i, i \leq k$, для которого множество $J \leftrightharpoons I \cap U_i$. Очевидно, что для любых $\bar{j}_1, \bar{j}_2 \in J^{<\omega}$ из $\langle L, <, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle L, <, \bar{j}_2 \rangle$ следует $\langle L, <, \bar{l}, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle L, <, \bar{l}, \bar{j}_2 \rangle$. Так как J есть пересечение множества I с определимым подмножеством L, из вычислимости I вытекает вычислимость J.

Пусть теперь $\langle S \rangle$ — разрешимая бесконечная модель пустой сигнатуры, $\bar{s} = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle \in S^{<\omega}$, и пусть $I \subseteq S$ — бесконечное вычислимое множество. Достаточно взять $J \leftrightharpoons I \setminus \{s_0, \ldots, s_n\}$. $\square$

Непосредственным следствием двух предыдущих утверждений являются критерии Σ-определимости несчетной модели c-простой теории над классом плотных линейных порядков и над классом бесконечных моделей пустой сигнатуры. Общему понятию $\mathfrak{M}$-неразличимости в данных двух случаях соответствуют хорошо известные в теории моделей понятия упорядоченной неразличимости и тотальной неразличимости [9]. Пусть T_{DLO} обозначает теорию плотного линейного порядка, а T_E — теорию бесконечных систем пустой сигнатуры.

Будем называть подмножество вычислимой модели **вычислимым**, если оно является вычислимым подмножеством натуральных чисел; упорядоченное подмножество будем называть **вычислимым**, если вычислимым является также и отношение порядка.

Теорема 3. *Пусть T — некоторая c-простая теория. Тогда*

1) *теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом $Mod(T_{DLO})$ тогда и только тогда, когда в некоторой вычислимой модели теории T существует бесконечное вычислимое множество упорядоченно неразличимых элементов;*

2) теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом $Mod(T_E)$ тогда и только тогда, когда в некоторой вычислимой модели теории T существует бесконечное вычислимое множество тотально неразличимых элементов.

Доказательство. Данная теорема непосредственно следует из теоремы 2 и предложения 1. □

Ю.Л. Ершовым в [2] была выдвинута гипотеза о том, что любая c-простая теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом $Mod(T_{DLO})$. Однако, основываясь на теореме 3, можно указать пример c-простой теории (бесконечной сигнатуры), для которой это не так. Для этого воспользуемся конструкцией, изложенной в работах [6, 7].

Пусть $\mathcal{T} \subseteq 2^{<\omega}$ — бинарное дерево (здесь $2 = \{0, 1\}$). Через $P(\mathcal{T})$ обозначим множество бесконечных путей в этом дереве. Для модели $\mathfrak{M}$ с носителем ω через $\mathcal{I}(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех конечных последовательностей упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{M}$ (то есть $\mathcal{I}(\mathfrak{M}) \subseteq \omega^{<\omega}$). Будем говорить, что проблема поиска бесконечного пути в дереве $\mathcal{T}$ **эффективно эквивалентна** проблеме поиска бесконечной последовательности упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{M}$, и обозначать это через $P(\mathcal{T}) \approx \mathcal{I}(\mathfrak{M})$, если существуют $e, f \in \omega$, такие, что

(i) если $I \in \mathcal{I}(\mathfrak{M})$, то $\varphi_e^I \in P(\mathcal{T})$,

(ii) если $\pi \in P(\mathcal{T})$, то $\varphi_f^\pi \in \mathcal{I}(\mathfrak{M})$,

(iii) для всех $\pi \in P(\mathcal{T})$, если $\varphi_f^\pi = I$, то $\varphi_e^I = \pi$,

где $\{\varphi_n | n \in \omega\}$ — некоторая вычислимая нумерация всех одноместных частично вычислимых функций с оракулом (см. [8]).

Следующая теорема получена Г.Кирстедом и Дж.Реммелом в [7].

Теорема 4. *Для любого бесконечного вычислимого бинарного дерева $\mathcal{T}$ существует разрешимая, модельно полная ω-категоричная теория T с разрешимым множеством полных формул, такая, что для любой разрешимой модели $\mathfrak{M}$ теории T имеет место $P(\mathcal{T}) \approx \mathcal{I}(\mathfrak{M})$.*

Пусть $\mathcal{T}_0$ — бесконечное рекурсивное бинарное дерево, не имеющее бесконечных рекурсивных ветвей. Тогда построенная по этому дереву теория T_0 обладает следующим свойством: если $\mathfrak{M}_0$ — счетная модель теории T_0, то любое бесконечное множество упорядоченно неразличимых элементов $\mathfrak{M}_0$ невычислимо. Вследствие этого, согласно теореме 3, никакая несчетная модель теории T_0 не может быть Σ-определима над классом $Mod(T_{DLO})$. В то же время из конструкции Кирстеда – Реммела следует, что T_0 — c-простая теория. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Существует c-простая теория T_0, никакая несчетная модель которой не является Σ-определимой над классом $Mod(T_{DLO})$.*

Теория, полученная с использованием конструкции Кирстеда – Реммела, имеет бесконечную сигнатуру. Можно ли построить c-простую теорию конечной сигнатуры, удовлетворяющую условию теоремы 5, автору неизвестно.

В связи с этим представляется интересным следующий вопрос: верно ли, что для любой c-простой теории T (конечной сигнатуры) существует c-простая теория T', такая, что никакая несчетная модель теории T' не является Σ-определимой над классом $Mod(T)$? Отметим в связи с этим вопросом одно следствие из теоремы 1.

Если T_1, T_2 — c-простые теории, и несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $Mod(T_2)$, то из необходимого условия Σ-определимости несчетных моделей следует, что существуют разрешимые модели $\mathfrak{M} \models T_1$ и $\mathfrak{N} \models T_2$ такие, что для некоторого бесконечного вычислимого множества $I \subseteq |\mathfrak{M}| \cap |\mathfrak{N}|$ выполняется неравенство $R_I^{\mathfrak{N}}(n) \leq R_I^{\mathfrak{M}}(n)$ для всех $n \in \omega$.

В заключение приведем еще одно понятие и укажем его связь с рассматриваемыми ранее вопросами. Пусть K_1 — некоторый класс моделей произвольной конечной сигнатуры σ_1, K_2 — некоторый класс моделей вычислимой предикатной сигнатуры $\sigma_2 = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$. Класс K_2 называется **спектрально Σ-определимым над классом** K_1, если существует вычислимая последовательность

$$\Gamma = \langle \Phi, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_k, \Phi_k^*, \ldots \rangle$$

Σ-формул сигнатуры $\sigma_1 \cup \{\in, U\}$ такой, что для любой модели $\mathfrak{M}$ из класса K_1 и любого $a \in HF(\mathfrak{M})$ набор формул Γ с параметром a корректно определяет в $HF(\mathfrak{M})$ модель сигнатуры σ_2, принадлежащую классу K_2, и выполняется условие

$$Sp(\Gamma(K_1)) = Sp(K_2),$$

где $Sp(K)$ обозначает класс мощностей моделей из класса K, а $\Gamma(K)$ обозначает класс всех моделей, Σ-определимых в наследственно конечных надстройках над моделями из K посредством последовательности формул Γ с произвольным параметром.

Предложение 2. *Если T_1 и T_2 — c-простые теории, то класс $Mod(T_2)$ спектрально Σ-определим над классом $Mod(T_1)$ тогда и только тогда, когда некоторая несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $Mod(T_1)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, поэтому требуется установить только достаточность. Пусть для некоторой модели $\mathfrak{M}'$ теории T_1 в $HF(\mathfrak{M})$ при помощи последовательности Σ-формул Γ определима несчетная модель теории T_2, причем можно считать, что параметром формул из Γ является набор праэлементов $\bar{m}' \in |\mathfrak{M}'|^{<\omega}$. Так как теория T_2 является c-простой, у нее существует вычислимая модель $\mathfrak{N}_0$, которая очевидно Σ-определима в любой наследственно конечной надстройке. Вследствие этого можно определить последовательность Σ-формул Γ^* такую, что для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T_2 и любого элемента $a \in HF(\mathfrak{M})$

$$\Gamma^*(HF(\mathfrak{M}), a) \leftrightharpoons \begin{cases} \Gamma(HF(\mathfrak{M}), a), & a = \bar{m} \ \ \langle \mathfrak{M}, \bar{m} \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}', \bar{m}' \rangle, \\ \mathfrak{N}_0, & . \end{cases}$$

Действительно, это условие эффективно проверяется ввиду того, что T_1 также является c-простой теорией. Так как условие $\langle \mathfrak{M}, \bar{m} \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}', \bar{m}' \rangle$ влечет $\langle HF(\mathfrak{M}), \bar{m} \rangle \equiv \langle HF(\mathfrak{M}'), \bar{m}' \rangle$, то последовательность формул Γ^* в наследственно конечной надстройке над любой моделью теории T_1 для любого параметра корректно определяет модель теории T_2. То, что таким образом может быть определена модель произвольной бесконечной мощности, устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 2. $\square$

2 О парах рекурсивно насыщенных систем

Пусть $\sigma_1 = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$ и $\sigma_2 = \langle Q_0^{m_0}, \ldots, Q_l^{m_l}, \ldots \rangle$ — предикатные сигнатуры (можно считать, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$), и пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — модели сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно. Под **парой** $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ будем понимать модель сигнатуры $\sigma \leftrightharpoons \langle M^1, N^1, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots, Q_0^{m_0}, \ldots, Q_l^{m_l}, \ldots \rangle$, в которой основным множеством является объединение $|\mathfrak{M}| \cup |\mathfrak{N}|$, а предикатные символы интерпретируются следующим образом: $M^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = |\mathfrak{M}|$, $N^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = |\mathfrak{N}|$, $P_i^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = P_i^{\mathfrak{M}}$, $i = 1, \ldots, k, \ldots$, $Q_j^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = Q_j^{\mathfrak{N}}$, $j = 1, \ldots, l, \ldots$.

Зафиксировав некоторые геделевские нумерации формул сигнатур σ_1, σ_2 и σ, будем отождествлять произвольные множества формул этих сигнатур с соответствующими множествами их геделевских номеров. В частности, множество формул будем называть рекурсивным, если таковым является множество геделевских номеров этих формул (при условии вычислимости сигнатур σ_1 и σ_2). На протяжении этого параграфа для единства используемой здесь терминологии при описании свойств объектов будем употреблять обозначение "рекурсивный"вместо обозначения "вычислимый".

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ вычислимой сигнатуры σ' называется **рекурсивно насыщенной**, если для любого конечного набора $\bar{a}$ элементов из $|\mathfrak{A}|$ любое локально выполнимое в $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ рекурсивное множество формул (с одним и тем же множеством свободных переменных) сигнатуры $\sigma' \cup \langle \bar{a} \rangle$ выполнимо в $(\mathfrak{A}, \bar{a})$. Релятивизацией данного определения получается понятие X-рекурсивно насыщенной системы для произвольного множества $X \subseteq \omega$ (рассматриваются множества формул, рекурсивные с оракулом X).

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие для рекурсивной насыщенности пары моделей.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *— модели вычислимых сигнатур. Модель* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда*

1) модель $\mathfrak{M}$ $Th(\mathfrak{N}, \bar{n})$*-рекурсивно насыщена для всех* $\bar{n} \in |\mathfrak{N}|^{<\omega}$*;*

2) модель $\mathfrak{N}$ $Th(\mathfrak{M}, \bar{m})$*-рекурсивно насыщена для всех* $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$*.*

Доказательство. Пусть σ_1 и σ_2 — сигнатуры моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно (не нарушая общности, их можно считать предикатными), и пусть для моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выполнены условия 1 и 2 соответственно. Покажем, что модель $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ является рекурсивно насыщенной. Предположим, что $\{\theta^k(\bar{z}) \mid k \in \omega\}$ — рекурсивное множество формул сигнатуры σ, которое локально реализуется в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Не нарушая общности можно считать, что для любого $k \in \omega$ справедлива импликация $\theta^{k+1}(\bar{z}) \to \theta^k(\bar{z})$ (для этого нужно перейти к множеству формул $\theta^k_*(\bar{z}) \leftrightharpoons \theta^0(\bar{z}) \wedge \ldots \wedge \theta^k(\bar{z})$, $k \in \omega$).

Для удобства изложения вместо одноместных предикатов M и N, выделяющих основные множества $|\mathfrak{M}|$ и $|\mathfrak{N}|$, будем рассматривать язык с переменными двух сортов: $\bar{x}$ и $\bar{m}$ — для переменных и констант, соответствующих элементам из $\mathfrak{M}$, $\bar{y}$ и $\bar{n}$ — элементам из $\mathfrak{N}$. Далее будем считать, что рассматриваемое нами множество формул имеет вид $\{\theta^k(\bar{x}, \bar{y}) \mid k \in \omega\}$, причем все связанные переменные в этих формулах также одного из двух возможных сортов. В самом деле, всякая формула $\theta(\ldots, z, \ldots)$ в модели $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ эквивалентна дизъюнкции $(M(z) \wedge \theta) \vee (N(z) \wedge \theta)$, или, в наших обозначениях, $\theta(\ldots, x, \ldots) \vee \theta(\ldots, y, \ldots)$.

По любой формуле $\theta^k(\bar{x}, \bar{y})$ эффективно находится ее пренексная нормальная форма. Ввиду эквивалентностей $P_i(\ldots, z, \ldots) \wedge N(z) \equiv Q_j(\ldots, z, \ldots) \wedge M(z) \equiv \neg(z = z)$, в матрице пренексной нормальной формы каждый дизъюнктивный член $\theta^k_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ эквивалентен конъюнкции $\varphi^k_i(\bar{x}_i) \wedge \psi^k_i(\bar{y}_i)$, где $\varphi^k_i(\bar{x}_i)$ и $\psi^k_i(\bar{y}_i)$ — элементарные конъюнкции, в которые входят только предикаты и переменные, определенные соответственно на $\mathfrak{M}$ и на $\mathfrak{N}$. Опишем теперь процедуру, позволяющую проносить кванторы из кванторной приставки внутрь матрицы, в ходе которой цепочкой эквивалентных преобразований пренексная нормальная форма формулы $\theta^k(\bar{x}, \bar{y})$ переходит в формулу вида $(\varphi^k_1(\bar{x}) \wedge \psi^k_1(\bar{y})) \vee \ldots \vee (\varphi^k_{n_k}(\bar{x}) \wedge \psi^k_{n_k}(\bar{y}))$, где $\varphi^k_i(\bar{x})$ и $\psi^k_i(\bar{y})$ — уже произвольные формулы, все предикаты, а также свободные и связанные переменные которых определены на $\mathfrak{M}$ и на $\mathfrak{N}$ соответственно. Кванторы $\exists x$ и $\exists y$ проносятся внутрь дизъюнкции очевидным образом ввиду эквивалентности

$$\exists y(\theta^k_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \vee \ldots \vee \theta^k_{n_k}(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k})) \equiv$$

$$\equiv (\varphi^k_1(\bar{x}_1) \wedge \exists y \psi^k_1(\bar{y}_1)) \vee \ldots \vee (\varphi^k_{n_k}(\bar{x}_{n_k}) \wedge \exists y \psi^k_{n_k}(\bar{y}_{n_k}))$$

(аналогично для квантора $\exists x$). Кванторы $\forall x$ и $\forall y$ проносятся внутрь дизъюнкции так: имеем

$$\forall y(\theta^k_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \vee \ldots \vee \theta^k_{n_k}(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k})) \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{S\subseteq\{1,\dots n_k\}} (\bigwedge_{s\in S} \varphi_s^k(\bar{x}_s) \wedge (\forall y(\bigvee_{s\in S} \psi_s^k(\bar{y}_s))).$$

В итоге, проделав эту процедуру для всех кванторов из кванторной приставки пренексной нормальной формы формулы $\theta^k(\bar{x},\bar{y})$, получим формулу вида

$$(\varphi_1^k(\bar{x},\bar{m}) \wedge \psi_1^k(\bar{y},\bar{n})) \vee \ldots \vee (\varphi_{n_k}^k(\bar{x},\bar{m}) \wedge \psi_{n_k}^k(\bar{y},\bar{n})),$$

где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — наборы параметров из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно, входящие в формулы $\theta^k(\bar{x},\bar{y})$. Для каждого $k\in\omega$ положим

$$\Psi_k(\bar{y},\bar{n}) \leftrightharpoons \bigvee_{S\in\mathcal{S}_k} \bigwedge_{s\in S} (\psi_s^k(\bar{y},\bar{n}),$$

где по определению $\mathcal{S}_k = \{S \subseteq \{1,\ldots,n_k\} \mid \mathfrak{M} \models \exists\bar{x}(\bigvee_{s\in S} \varphi_s^k(\bar{x},\bar{m}))\}$. Так как исходный тип $\{\theta^k(\bar{x},\bar{y}) \mid k\in\omega\}$ локально реализуется в $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, то $\mathcal{S}_n \neq \varnothing$ для всех $n\in\omega$. Множество формул $\{\Psi_k(\bar{y},\bar{n})|k\in\omega\}$ является $Th(\mathfrak{M},\bar{m})$-рекурсивным, и, по условию, локально реализуется в модели $\mathfrak{N}$. Так как модель $\mathfrak{N}$ является $Th(\mathfrak{M},\bar{m})$-рекурсивно насыщенной, этот тип реализуется в модели $\mathfrak{N}$ некоторым набором элементов $\bar{c}$.

Рассмотрим формулы

$$\Phi_k(\bar{x},\bar{m}) \leftrightharpoons \bigvee_{s\in S_k(\bar{c})} \varphi_s^k(\bar{x},\bar{m}),$$

где $S_k(\bar{c}) = \{l \in \{1,\ldots,n_k\}|\mathfrak{N} \models \psi_l^k(\bar{c},\bar{n})\}$. Множество формул $\{\Phi_k(\bar{x},\bar{m})|k\in\omega\}$ является $Th(\mathfrak{N},\bar{n},\bar{c})$-рекурсивным и локально реализуется в $\mathfrak{M}$ вследствие выбора $\bar{c}$. Так как $\mathfrak{M}$ является $Th(\mathfrak{M},\bar{n},\bar{c})$-рекурсивно насыщенной, существует набор $\bar{a}$ элементов из $\mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_k(\bar{a},\bar{m})$ для всех $k\in\omega$. Таким образом, набор $\langle\bar{a},\bar{c}\rangle$ реализует в $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ тип $\{\theta^k(\bar{x},\bar{y},\bar{m},\bar{n}) \mid k\in\omega\}$, что и требовалось доказать.

Для доказательства в другую сторону предположим, что система $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена. Пусть $\bar{n}$ — произвольный набор элементов из $|\mathfrak{N}|$, и пусть $Q = \gamma(Th(\mathfrak{N},\bar{n}))$, где γ — некоторая геделевская нумерация формул сигнатуры σ_2. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ является Q-рекурсивно насыщенной. Пусть $\{\varphi_k(\bar{x},\bar{m}) \mid k\in\omega\}$ — Q-рекурсивное множество формул (с параметрами $\bar{m}$ из $|\mathfrak{M}|$.) Это множество представимо в виде

$$\{\theta_k(\bar{x},\bar{m}) \mid \exists D_u \subseteq Q\ \langle k,u\rangle \in W_z\}$$

для некоторого z, где $\theta_k = \gamma^{-1}(k)$ (вследствие того, что Q — полный тип, можно опустить квантор $\exists D_v \subseteq N \setminus Q$.) Но тогда (локальная) выполнимость этого множества в модели $\mathfrak{M}$ равносильна (локальной) выполнимости в модели $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ рекурсивного множества

$$\{(\theta_k(\bar{x},\bar{m}) \wedge \psi_u(\bar{n})) \mid \langle k,u\rangle \in W_z\},$$

формул сигнатуры σ, где $\psi_u = \gamma(i_1) \wedge \ldots \wedge \gamma(i_n)$ для $D_u = \{i_1,\ldots,i_n\}$. Так как $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена, то из локальной выполнимости этого множества следует, что данное множество выполнимо в $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, что равносильно выполнимости исходного типа в $\mathfrak{M}$.

Аналогично устанавливается, что модель $\mathfrak{N}$ является P-рекурсивно насыщенной для всех P вида $Th(\mathfrak{M}, \bar{m})$. $\square$

Модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ будем называть **локально разрешимой**, если $Th(\mathfrak{M}, \bar{m})$ разрешима для любого набора $\bar{m}$ элементов из $|\mathfrak{M}|$. В частности, всякая модель c-простой теории является локально разрешимой. Из теоремы 6 вытекает

Следствие 1. *Если модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ локально разрешимы, то $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ рекурсивно насыщены.*

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — рекурсивно насыщенные модели, такие, что $Th(\mathfrak{M}) = Th(\mathfrak{N})$, и модель $\mathfrak{M}$ локально разрешима. Тогда $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}$ локально разрешима.*

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена. Допустим, что модель $\mathfrak{N}$ не является локально разрешимой, то есть существует набор $\bar{n}$ элементов из $|\mathfrak{N}|$, такой, что $Th(\mathfrak{N}, \bar{n})$ не разрешима. Так как $Th(\mathfrak{M}) = Th(\mathfrak{N})$, тип, реализуемый в модели $\mathfrak{N}$ набором $\bar{n}$, является типом и относительно $Th(\mathfrak{M})$, а так как, согласно теореме 1, модель $\mathfrak{M}$ $Th(\mathfrak{N}, \bar{n})$-насыщена, то этот тип должен реализоваться в $\mathfrak{M}$ некоторым набором $\bar{m}$. Таким образом, $Th(\mathfrak{M}, \bar{m}) = Th(\mathfrak{N}, \bar{n})$, что противоречит локальной разрешимости модели $\mathfrak{M}$.

В обратную сторону, пусть $\mathfrak{N}$ локально разрешима. В этом случае $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ будет рекурсивно насыщенной ввиду следствия 1. $\square$

Основываясь на теореме 6, приведем пример пары моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, такой, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются рекурсивно насыщенными моделями, однако модель $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщенной не является. Построенные модели будут, помимо всего прочего, элементарно эквивалентны. Возьмем сигнатуру $\sigma \leftrightharpoons \{P^1_\varepsilon \mid \varepsilon \in E\}$, $E = \{0,1\}^{<\omega}$, состоящую из счетного числа одноместных предикатов, занумерованных конечными последовательностями из 0 и 1. Пусть $D \subseteq E$ — бесконечное рекурсивное бинарное дерево, не имеющее бесконечных рекурсивных ветвей. На основе этого дерева в [3] была построена теория T_D со следующим набором аксиом:

$$
\begin{aligned}
&\forall x P_\Lambda(x),\\
&\forall x(P_{\varepsilon 0}(x) \vee P_{\varepsilon 1}(x) \to P_\varepsilon(x)), \ \ \varepsilon \in E,\\
&\forall x((P_{\varepsilon 0}(x) \to \neg P_{\varepsilon 1}(x)) \wedge (P_{\varepsilon_1}(x) \to \neg P_{\varepsilon_0}(x))), \ \ \varepsilon \in E,\\
&\exists x(P_\varepsilon(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 0}(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 1}(x)), \ \ \varepsilon \in D,\\
&\forall x \neg P_\varepsilon(x), \ \ \varepsilon \in E \setminus D,\\
&\forall x \forall y(P_\varepsilon(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 0}(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 1}(x) \wedge P_\varepsilon(y) \wedge \neg P_{\varepsilon 0}(y) \wedge \neg P_{\varepsilon 1}(y) \to x = y), \ \ \varepsilon \in E.
\end{aligned}
$$

Теория T_D полна и разрешима. Из отсутствия бесконечных рекурсивных ветвей в дереве D следует, что всякая модель теории T_D рекурсивно насыщена. Вследствие этого, также, единственной локально разрешимой моделью теории T_D будет ее простая модель $\mathfrak{M}_0$. Поэтому, если $\mathfrak{M}$ — модель теории T_D, неизоморфная $\mathfrak{M}_0$, то, по предложению 6, $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ не является рекурсивно насыщенной. Таким образом, имеет место

Предложение 4. *Если $\mathfrak{M}_0$ — простая модель теории T_D, то для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T_D модель $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_0)$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_0$.*

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры, тогда определено допустимое множество $HYP(\mathfrak{M})$. Если через $O(\mathfrak{M})$ обозначить наименьший ординал, не лежащий в $HYP(\mathfrak{M})$, то модель $\mathfrak{M}$ будет рекурсивно насыщенной тогда и только тогда, когда $O(\mathfrak{M}) = \omega$ (см. [3, 5]). Известно, что всякая модель имеет рекурсивно насыщенное элементарное расширение, поэтому существуют рекурсивно насыщенные модели со сколь угодно сложной элементарной теорией. Если зафиксировать таким образом полученную модель $\mathfrak{M}$ с достаточно сложной элементарной теорией, то, взяв рекурсивно насыщенную, но не $Th(\mathfrak{M})$-рекурсивно насыщенную модель $\mathfrak{N}$ (о существовании таких моделей см. [11]), и используя теорему 6, можно убедиться, что пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ не является рекурсивно насыщенной. Таким образом, имеет место

Предложение 5. *Существуют модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с конечными сигнатурами, для которых $O(\mathfrak{M}) = O(\mathfrak{N}) = \omega$, но $O(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) > \omega$.*

Обозначим через $pp(HYP(\mathfrak{M}))$ "чистую часть"допустимого множества $HYP(\mathfrak{M})$, то есть множество таких элементов, транзитивное замыкание которых не содержит праэлементов. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная система. В этом случае можно зафиксировать некоторую вычислимую нумерацию $\nu : \omega \to pp(HYP(\mathfrak{M}))$ (все такие нумерации вычислимо эквивалентны). Следующая лемма описывает "чистые"Σ-подмножества $HYP(\mathfrak{M})$ в случае, когда $Th(\mathfrak{M})$ является c-простой теорией.

Лемма 1. *Пусть $T = Th(\mathfrak{M})$ — c-простая теория. Тогда для любого подмножества $P \subseteq pp(HYP(\mathfrak{M}))$ верно следующее: P является Σ-подмножеством в $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\nu^{-1}(P)$ вычислимо перечислимо.*

Доказательство. Пусть $P \subseteq pp(HYP(\mathfrak{M}))$ определяется Σ-формулой $\Phi(x, \bar{c})$ с набором параметров $\bar{c}$. По формуле Φ можно эффективно построить $\exists$-формулу $\Phi^*(x)$ сигнатуры $\langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$ такую, что для любого $x_0 \in pp(HYP(\mathfrak{M}))$

$$HYP(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0, \bar{c}) \iff \mathbb{N} \models \Phi^*(\nu^{-1}(x_0)).$$

Действительно, это следует из того, что, в случае, когда $Th(\mathfrak{M})$ — c-простая теория, $HYP(\mathfrak{M})$ как допустимое множество Σ-определимо в $HF(\mathfrak{M})$ (см. [12, 13]), и соответствующего результата для $HF(\mathfrak{M})$. □

Отметим, что из использованного в доказательстве предыдущей леммы утверждения из [12, 13] следует, что для модели $\mathfrak{M}$ c-простой теории произвольная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $HF(\mathfrak{M})$.

Для произвольного допустимого множества $\mathbb{A}$ в [10] было определено понятие $\Sigma_{\mathbb{A}}$-насыщенности. А именно, модель $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ называется $\Sigma_{\mathbb{A}}$**-насыщенной**, если для каждого множества формул $p(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры σ, являющегося Σ-определимым в $\mathbb{A}$, из того, что каждое $\mathbb{A}$-конечное подмножество $q(\bar{x}, \bar{n})$ реализуемо в $\mathfrak{N}$, следует, что $p(\bar{x}, \bar{n})$ реализуемо в $\mathfrak{N}$ (где $\bar{n} \in |\mathfrak{N}|^{<\omega}$ — набор параметров).

Для произвольных моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ рассмотрим следующие условия:

1) $\mathfrak{N}$ рекурсивно насыщена;

2) $\mathfrak{N}$ $Th(\mathfrak{M}, \bar{m})$-рекурсивно насыщена для всех $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$;

3) $\mathfrak{N}$ $\Sigma_{HYP(\mathfrak{M})}$-насыщена.

Для любых $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют место следования 3) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 1). Однако в общем случае следования в обратную сторону не имеют места. Выделим класс моделей, для которых эти три условия равносильны.

Предложение 6. *Если $Th(\mathfrak{M})$ — c-простая теория, то*

$$1) \iff 2) \iff 3)$$

для любой модели $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Предположим, что для модели $\mathfrak{M}$ выполняются условия утверждения. Так как при таких ограничениях на $Th(\mathfrak{M})$ для любого набора $\bar{a} \in M^{<\omega}$ $Th(\mathfrak{M}, \bar{a})$ разрешима, то имеет место импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Остается показать, что из рекурсивной насыщенности модели $\mathfrak{N}$ следует, что $\mathfrak{N}$ является $\Sigma_{HYP(\mathfrak{M})}$-насыщенной. Но это непосредственно вытекает из того, что всякое "чистое"Σ-подмножество $HYP(\mathfrak{M})$, в случае, когда $Th(\mathfrak{M})$ является c-простой теорией, является вычислимо перечислимым в смысле леммы 1. □

Список литературы

[1] *Ю.Л. Ершов,* Определимость в наследственно конечных надстройках, Доклады РАН, **340**, N 1 (1995), 12 – 14.

[2] *Ю.Л. Ершов,* Σ-definability of algebraic structures, Handbook of Recursive Mathematics, volume 1: Recursive Model Theory, 1998, 235 – 260.

[3] *Ю.Л. Ершов,* Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[4] *Ю.Л. Ершов,* Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

[5] *J. Barwise,* Admissible sets and structures, Berlin, 1975.

[6] *H.A. Kierstead, J.B. Remmel,* Indiscernibles and decidable models, J. Simbolic Logic, **48**, N 1 (1983), 21 – 32.

[7] *H.A. Kierstead, J.B. Remmel,* Degrees of indiscernibles in decidable models, TAMS, **289**, N 1 (1985), 41 – 57.

[8] *Р. Соар,* Вычислимо перечислимые множества и степени, Казань, 2000.

[9] *Дж. Сакс,* Теория насыщенных моделей, М., Мир, 1976.

[10] *J.P. Ressayre,* Models with compactness properties relative to an admissible language, Ann.Math.Logic, **11**, N 1 (1977), 31 – 56.

[11] *A. Macintyre, D. Marker,* Degrees of recursively saturated models, TAMS, **282**, N 2 (1984), 539 – 554.

[12] *А.И. Стукачев,* Σ-допустимые семейства над линейными порядками, Алгебра и логика, **41**, N2 (2001), 228 – 252.

[13] *А.И. Стукачев,* Об определимости в допустимых множествах вида $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$, в сб. трудов 33-й региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики Екатеринбург, 2002, стр. 47 – 50.

СТУКАЧЕВ Алексей Ильич,

РОССИЯ,

630090, Новосибирск,

проспект Коптюга, 4,

Институт Математики СО РАН.

e-mail: aistu@math.nsc.ru

Реферат

УДК 510.5

А.И. Стукачев, Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей.

Рассматривается проблема Σ-определимости несчетной модели c-простой теории в наследственно конечных надстройках над моделями другой c-простой теории. В терминах разрешимых моделей и веденного в работе понятия относительной неразличимости получено одно необходимое условие. Получен критерий Σ-определимости несчетной модели c-простой теории в надстройках над плотными линейными порядками и бесконечными моделями пустой сигнатуры. Установлено существование c-простой теории (бесконечной сигнатуры), никакая несчетная модель которой не является Σ-определимой в надстройках над плотными линейными порядками.

Получен критерий рекурсивной насыщенности для пар моделей.