Σ-определимость несчетных моделей c-простых теорий [1]

А.И. Стукачев

Аннотация

Показано, что всякая c-простая теория с дополнительным условием дискретности имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок. В качестве следствия этот факт установлен для всех c-простых теорий конечной сигнатуры, являющихся подмодельно полными.

1 Введение

В данной работе, продолжающей работу [5], исследуются вопросы эффективной представимости (Σ-определимости) алгебраических систем в наследственно конечных надстройках.

Для произвольного бесконечного кардинала α через $\mathcal{K}_\alpha$ будем обозначать класс систем мощности не больше, чем α, с конечной или вычислимой сигнатурой. Для систем с бесконечной вычислимой сигнатурой предполагается, что зафиксирована некоторая геделевская нумерация формул данной сигнатуры. Для систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, через $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ (см. [1]). Предполагается, что сигнатура надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ содержит предикатный символ Sat^2, интерпретацией которого является предикат истинности атомарных формул системы $\mathfrak{B}$, согласованный с зафиксированной геделевской нумерацией для формул сигнатуры этой системы. В случае систем конечной сигнатуры добавление предиката Sat к сигнатуре надстройки не является существенным.

Предпорядок $\leqslant_\Sigma$ порождает на классе $\mathcal{K}_\alpha$ отношение Σ-эквивалентности: $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$. Классы эквивалентности по отношению $\equiv_\Sigma$ будем называть *степенями Σ-определимости*, или *Σ-степенями*. Σ-степень системы $\mathfrak{A}$ будем обозначать $[\mathfrak{A}]_\Sigma$. Σ-степень будем называть *несчетной*, если она содежит систему некоторой несчетной мощности (легко понять, что все системы такой Σ-степени имеют такую же мощность). Структура

$$\mathcal{S}_\Sigma(\alpha) = \langle \mathcal{K}_\alpha / \equiv_\Sigma, \leqslant_\Sigma \rangle$$

является верхней полурешеткой с наименьшим элементом, которым является степень, состоящая из конструктивизируемых систем. Для любых систем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_\alpha$, $[\mathfrak{A}]_\Sigma \vee [\mathfrak{B}]_\Sigma = [(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]_\Sigma$, где $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — теоретико-модельная пара систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 06-01-04002-ННИОа и 08-01-00442а, Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-335.2008.1

Для системы $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_\alpha$ и бесконечных кардиналов $\beta \leqslant \alpha$ и $\gamma \geqslant \alpha$, множества

$$I_\beta(\mathfrak{A}) = \{[\mathfrak{B}]_\Sigma \mid \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_\beta,\, \mathfrak{B} \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}\}, \ \ F_\gamma(\mathfrak{A}) = \{[\mathfrak{B}]_\Sigma \mid \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_\gamma,\, \mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}\}$$

являются, соответственно, идеалом в полурешетке $\mathcal{S}_\Sigma(\beta)$ (главным при $\beta = \alpha$) и фильтром в полурешетке $\mathcal{S}_\Sigma(\gamma)$ (главным при любом $\gamma \geqslant \alpha$). Множества $F_\gamma(\mathfrak{A})$ в полурешетках $\mathcal{S}_\Sigma(\gamma)$ являются аналогом понятия *спектра* системы $\mathfrak{A}$ — это множества Σ-степеней систем, относительно которых $\mathfrak{A}$ конструктивизируема. Множества $I_\beta(\mathfrak{A})$ в полурешетках $\mathcal{S}_\Sigma(\beta)$ состоят из Σ-степеней систем, конструктивизируемых относительно $\mathfrak{A}$. Данная работа посвящена изучению идеалов $I_\beta(\mathfrak{A})$ в случае, когда β — несчетный кардинал, а $\mathfrak{A}$ — “достаточно простая” система.

Теория первого порядка называется *регулярной* [1], если она модельно полна и разрешима, и *c-простой* [1], если она модельно полна, разрешима, ω-категорична и имеет разрешимое множество полных формул. Алгебраическую систему будем называть регулярной (c-простой), если таковой является ее элементарная теория. Примерами регулярных систем являются поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{C}$ действительных, p-адических и комплексных чисел. Примерами c-простых систем являются плотные линейные порядки и бесконечные системы с пустой сигнатурой.

Система $\mathfrak{A}$ называется *локально конструктивизируемой* [1], если $\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{A}, \bar{a})$ вычислимо перечислимо для любого $\bar{a} \in A^{<\omega}$. Свойство локальной конструктивизируемости сохраняется при Σ-определимости. Известно (см. [1]), что поле $\mathbb{C}$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ для (любого) плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ мощности континуум, однако не Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathbb{S})$ для множеств $\mathbb{S}$ без структуры. Поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{O}_p$ не Σ-определимы над линейными порядками, так как не являются локально конструктивизируемыми.

Известно также, что система $\mathfrak{A}$ локально конструктивизируема тогда и только тогда, когда для любого набора $\bar{a} \in A^{<\omega}$ существует конструктивизируемая система $\mathfrak{B}$ и набор $\bar{b} \in B^{<\omega}$ т.ч. $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_1 (\mathfrak{B}, \bar{b})$ (что равносильно $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_1 \mathbb{HF}(\mathfrak{B}, \bar{b})$). Следующее определение является, таким образом, непосредственным обобщением понятия локальной конструктивизируемости.

Определение 1.1 ([7]). *Система $\mathfrak{A}$ называется* локально конструктивизируемой уровня *α ($0 < \alpha \leqslant \omega$), если для любого набора $\bar{a} \in A^{<\omega}$ существует конструктивизируемая система $\mathfrak{B}$ и набор $\bar{b} \in B^{<\omega}$ т.ч.*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_\alpha \mathbb{HF}(\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Локальная конструктивизируемость любого уровня сохраняется при Σ-определимости: имеет место

Предложение 1.1 ([7]). *Пусть системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$, и система $\mathfrak{B}$ — локально конструктивизируемая уровня α для $0 < \alpha \leqslant \omega$. Тогда система $\mathfrak{A}$ также является локально конструктивизируемой уровня α.*

Всякая c-простая система является локально конструктивизируемой уровня ω, причем соответствующая “конструктивная симуляция” единственна с точностью до вычислимого изоморфизма. В то же время, как уже отмечалось, существуют регулярные системы, не являющиеся локально конструктивизируемыми даже для уровня 1. Наличием хороших свойств локальной конструктивизируемости у c-простых систем обусловлена следующая

Гипотеза 1 (Ю.Л.Ершов [2]). *Всякая c-простая теория имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ для некоторого плотного линейного порядка $\mathbb{L}$.*

Оказывается, что в такой общей формулировке данная гипотеза неверна. Целью настоящей работы является выделение, с помощью одного достаточного условия, довольно широкого подкласса класса c-простых теорий, для которых эта гипотеза справедлива.

2 Дискретные и подмодельно полные c-простые теории

Определение 2.1. *Теория T называется* sc-простой*, если она ω-категорична, подмодельно полна, разрешима и имеет разрешимое множество полных формул.*

Таким образом, определение sc-простой теории отличается от определения c-простой теории тем, что условие модельной полноты заменяется на более сильное условие подмодельной полноты. Будем обозначать через C-SIMPLE, C-SIMPLE$_{fin}$, SC-SIMPLE и SC-SIMPLE$_{fin}$ классы соответствующих теорий (индекс fin означает, что рассматриваются только системы с конечными сигнатурами).

Как оказалось, не все теории с "очень простыми" с точки зрения вычислимости счетными моделями имеют "достаточно простые" несчетные модели: имеет место

Теорема 2.1 ([5]). *Существует sc-простая теория (бесконечной сигнатуры), не имеющая несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок.*

Ниже будет показано, что для класса sc-простых теорий конечной сигнатуры, в отличие от случая теорий с бесконечной сигнатурой, гипотеза 1 верна.

Пусть σ — конечная или вычислимая сигнатура, $V = \{x_i | i \in \omega\}$ — фиксированное множество переменных, и пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ. Для $n \in \omega$, под *n-типом* теории T будем, как обычно, понимать максимальное совместное множество формул сигнатуры σ, все свободные переменные которых находятся среди $x_0, \ldots, x_{n-1}$, замкнутое относительно логической выводимости в T. Аналогичным образом определяется понятие *атомарного n-типа* теории T. Тип p будем называть *подтипом* типа q, если $p \subseteq q$.

Определение 2.2. *Пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ. Под ω-*типом *теории T будем понимать максимальное совместное множество формул* *сигнатуры σ, все свободные переменные которых находятся среди $\{x_n | n \in \omega\}$, замкнутое относительно логической выводимости в T.*

Тип p называется *вырожденным*, если $(x_i = x_j) \in p$ для некоторых $i \neq j$. Для ω-типа p и набора $\bar{n} = \langle n_0, n_1 \ldots \rangle \in \omega^{<\omega} \cup \omega^\omega$, через $p|\bar{n}$ будем обозначать тип $[p(x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots)]^{x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots}_{x_0, x_1, \ldots}$, получающийся заменой переменных $x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots$ на переменные $x_0, x_1, \ldots$, соответственно, в типе $p(x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots) \subseteq p$, состоящем из формул, свободные переменные которых принадлежат множеству $\{x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots\}$.

Будем говорить, что тип p *вкладывается* в тип q (обозн. $p \hookrightarrow q$), если $p = q|\bar{n}$ для некоторого $\bar{n} \in \omega^{<\omega} \cup \omega^\omega$.

Если $\mathfrak{A}$ — вычислимая система, и p — ω-тип, то будем говорить, что p *вычислимо реализуется в* $\mathfrak{A}$, если этот тип реализуется некоторой вычислимой последовательностью элементов системы $\mathfrak{A}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая система, и пусть p — ω-тип. Тогда*

1) *если система $\mathfrak{A}$ разрешима, то всякий вычислимо реализующийся в $\mathfrak{A}$ ω-тип вычислим. В частности, если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *— регулярная теория, то всякий вычислимо реализующийся в $\mathfrak{A}$ ω-тип вычислим;*

2) *если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *— c-простая теория, и p реализуется в $\mathfrak{A}$, то p вычислимо реализуется в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда p вычислим.*

Доказательство. Пункт 1 непосредственно вытекает из определений. В пункте 2, для доказательства вычислимой реализуемости вычислимого ω-типа в системе $\mathfrak{A}$ достаточно воспользоваться однородностью $\mathfrak{A}$ и разрешимостью множества полных формул теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$ для любого $\bar{a} \in A^{<\omega}$. □

Определение 2.3. *Пусть p и q — произвольные ω-типы (возможно, различных сигнатур). Тип q называется p-*неразличимым *(обозн. $q \leqslant_i p$), если для любых наборов $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \omega^{<\omega}$ одинаковой длины,*

$$\text{из } p|\bar{n}_1 = p|\bar{n}_2 \text{ следует, что } q|\bar{n}_1 = q|\bar{n}_2.$$

Очевидно, что отношение $\leqslant_i$ на множестве ω-типов рефлексивно и транзитивно. Будем называть ω-типы p и q *i-эквивалентными* (обозн. $p \equiv_i q$), если $p \leqslant_i q$ и $q \leqslant_i p$, то есть для любых наборов $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \omega^{<\omega}$ одинаковой длины, $p|\bar{n}_1 = p|\bar{n}_2$ тогда и только тогда, когда $q|\bar{n}_1 = q|\bar{n}_2$.

Пусть $f : \omega \to \omega^{<\omega}$ — произвольная функция, и пусть p — произвольный ω-тип. Определим ω-тип p/f следующим образом: для всякого $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle \in \omega^{<\omega}$,

$$(p/f)|\bar{n} = p|f(n_0)\hat{\ }\ldots\hat{\ }f(n_{k-1}).$$

В случае, когда $f(n) = \langle kn, \ldots, kn + k - 1 \rangle$ для некоторого $k > 0$, ω-тип p/f будем обозначать p/k.

Определение 2.4. *Для произвольных систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и некоторого $k > 0$, множество $I \subseteq A^k \cap B$ называется* множеством $\mathfrak{A}$-неразличимых элементов в $\mathfrak{B}$ *(размерности k), если для любых наборов $\bar{i}, \bar{i}' \in I^{<\omega}$ одинаковой длины,*

$$\text{из } \langle \mathfrak{A}, \bar{i} \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \bar{i}' \rangle \text{ следует, что } \langle \mathfrak{B}, \bar{i} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{i}' \rangle.$$

Лемма 2.2. *Для любых c-простых теорий T, T', и $k > 0$, следующие условия эквивалентны:*

1) *существуют вычислимые невырожденные ω-типы p и q теорий T и T', соответственно, такие, что q является p/k-неразличимым;*

2) *существуют вычислимые модели $\mathfrak{A} \models T$ и $\mathfrak{A}' \models T'$, такие, что в $\mathfrak{A}'$ существует бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{A}$-неразличимых элементов размерности k.*

Доказательство. Непосредственно следует из определений и леммы 2.1. □

Определение 2.5. *Для $\alpha \leqslant \omega$, α-тип p называется* упорядоченно неразличимым, *если для любого $k < \alpha$ и любых подмножеств $I, J \subseteq \alpha$ мощности k*

$$p|I = p|J,$$

где для $I = \{i_0 < i_1 < \ldots\}$ через $p|I$ обозначается тип $p|\langle i_0, i_1, \ldots \rangle$.

Из определения очевидно, что ω-тип p является упорядоченно неразличимым тогда и только тогда, когда p является q-неразличимым для ω-типа q последовательности всех натуральных чисел в плотном линейном порядке, содержащем $\langle \omega, \leqslant \rangle$ как подсистему, например, в $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$. Упорядоченная неразличимость p также эквивалентна тому, что множество $\{p|I \mid I \subseteq \omega \text{ конечно}\}$ конечных подтипов p минимально по включению. Отметим также, что любой ω-подтип $p|I$ для бесконечного $I \subseteq \omega$ совпадает с p.

Упорядоченно неразличимые невырожденные ω-типы теории T — это в точности типы бесконечных последовательностей упорядоченно неразличимых элементов в моделях T. По теореме Эренфойхта-Мостовского, любая непротиворечивая теория имеет невырожденные упорядоченно неразличимые ω-типы. Рассмотрим вопрос существования вычислимых невырожденных упорядоченно неразличимых ω-типов у c-простых теорий.

Определение 2.6. *Пусть $n \in \omega$. Теорию T будем называть* n-дискретной, *если любой тип теории T однозначно определяется своими n-подтипами.*

Будем называть теорию *дискретной*, если она n-дискретна для некоторого $n \in \omega$. Если T — n-дискретная теория, число n-типов которой конечно, то T ω-категорична и подмодельно полна в некотором обогащении конечным числом формульно определимых в исходной сигнатуре предикатов. Всякая регулярная n-дискретная теория с конечным числом n-типов является c-простой.

Лемма 2.3. *1) Всякая подмодельно полная теория конечной предикатной сигнатуры является n-дискретной с конечным числом n-типов для некоторого $n \in \omega$.*

2) Всякая ω-категоричная подмодельно полная теория конечной сигнатуры является n-дискретной с конечным числом n-типов для некоторого $n \in \omega$.

Доказательство. Установим пункт 1: пусть T — теория конечной сигнатуры $\sigma = \langle R_0^{n_0}, \ldots, R_{k-1}^{n_{k-1}} \rangle$. Вследствие элиминации кванторов и конечности сигнатуры теории T, любой ее тип p полностью и однозначно определяется совокупностью своих n_*-подтипов, где где $n_* = \max(n_0, \ldots, n_{k-1})$. Каждый n_*-тип $p(x_0, \ldots, x_{n_*-1})$, в свою очередь, определяется конечной конъюнкцией атомарных формул и их отрицаний: рассмотрим для всех $i < k$ множества $\mathcal{F}(n_i)$ всех функций из $\{0, \ldots, n_i - 1\}$ в $\{0, \ldots, n_i - 1\}$. Тип элементов $x_0, \ldots, x_{n_*-1}$ определяется функцией

$$\varepsilon : \{(R_i, f) \,|\, i < k, f \in \mathcal{F}(n_i)\} \to \{0, 1\}$$

следующим образом: $\varepsilon(R_i, f)$=1 тогда и только тогда, когда $R_i(f(\bar{x})) \in p$, где $f(\bar{x}) = \langle x_{f(0)}, \ldots, x_{f(n_i-1)} \rangle$.

Для доказательства пункта 2 достаточно заметить, что в моделях ω-категоричных теорий любая конечно порожденная подсистема конечна, причем ее мощность ограничена функцией, равномерно зависящей от количества порождающих. □

Лемма 2.4. *Пусть T — с-простая дискретная теория.*

1) Все упорядоченно неразличимые невырожденные ω-типы теории T вычислимы. В частности, теория T имеет вычислимые упорядоченно неразличимые невырожденные ω-типы.

2) В любой вычислимой модели теории T вычислимо реализуется хотя бы один упорядоченно неразличимый невырожденный ω-тип.

Доказательство. Пусть, для простоты, T — теория конечной предикатной сигнатуры $\sigma = \langle R_0^{n_0}, \ldots, R_{k-1}^{n_{k-1}} \rangle$. Рассмотрим счетную модель $\mathfrak{M} \models T$. По теореме Рамсея, существует бесконечная последовательность $(I, <)$ упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{M}$. Пусть p — ω-тип этой последовательности. Вследствие дискретности T, ω-тип p однозначно определяется своим невырожденным n_*-подтипом, где $n_* = \max(n_0, \ldots, n_{k-1})$, который, в свою очередь, определяется некоторой бескванторной формулой φ_p. Ввиду разрешимости теории T получаем, что тип p вычислим.

Пусть $\mathfrak{M} \models T$ — вычислимая модель, и пусть p — (вычислимый) упорядоченно неразличимый невырожденный ω-тип, реализующийся в $\mathfrak{A}$. Существует бескванторная формула $\varphi(x, \overline{y})$ сигнатуры σ такая, что для любого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$, реализующего $lh(\bar{m})$-подтип p, и любого $a \in M$, из истинности

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge_{\bar{c} \sqsubseteq \bar{m}} \varphi(a, \bar{c})$$

следует, что $\bar{m}\hat{\ }a$ является $(lh(\bar{m})+1)$-подтипом p (запись $\bar{c} \sqsubseteq \bar{m}$ означает, что $c_i = m_{h(i)}$ для некоторой возрастающей функции h). Действительно, в качестве $\varphi(x,\bar{y})$ можно взять формулу $\varphi_p(\bar{y},x)$.

Всякая модель c-простой теории является однородной, поэтому для любых $\bar{m}_1,\bar{m}_2 \in M^{<\omega}$, из $(\mathfrak{M},\bar{m}_1) \equiv (\mathfrak{M},\bar{m}_2)$ следует $(\mathfrak{M},\bar{m}_1) \cong (\mathfrak{M},\bar{m}_2)$.

Вычислимая бесконечная последовательность элементов системы $\mathfrak{M}$, реализующая ω-тип p, выбирается в ходе пошаговой конструкции следующим образом. На шаге 0 выбираем произвольную последовательность $\bar{m}_0$ из n_* элементов, реализующую n_*-подтип p. Далее, на шаге $s+1$ выбираем элемент $a \in M$ с наименьшим номером такой, что $\mathfrak{A} \models \varphi(a,\bar{c})$ для всех $\bar{c} \sqsubseteq \bar{m}_s$, где $\bar{m}_s$ – последовательность, построенная на шаге s. Такой элемент a существует вследствие реализуемости p и однородности $\mathfrak{M}$. Полагаем $\bar{m}_{s+1} \leftrightharpoons \bar{m}_s\hat{\ }a$. □

Следствие 2.1. *Если T — sc-простая теория конечной сигнатуры, то в (любой) вычислимой модели теории T существует бесконечное вычислимое множество упорядоченно неразличимых элементов.*

3 Σ-степени несчетных моделей c-простых теорий

Возвращаясь к вопросу о Σ-определимости несчетных моделей c-простых теорий, приведем одно (достаточно общее) необходимое условие Σ-определимости, аналогичное введенному в [5].

Предложение 3.1. *Пусть система $\mathfrak{A}$ несчетна, система $\mathfrak{B}$ достаточно насыщена и локально конструктивизирема уровня ω, и пусть $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$. Тогда существуют вычислимые системы $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ такие, что в $\mathfrak{A}'$ существует бесконечное вычислимое множество $(\mathfrak{B}',\bar{b}')$-неразличимых элементов размерности k, для некоторых $k>0$ и $\bar{b}' \in (B')^{<\omega}$.*

Доказательство. Пусть система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ посредством набора Σ-формул
$$\Gamma = \langle \Phi, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_k, \Phi_k^*, \ldots \rangle,$$
(где формулы Ψ и Ψ^* определяют отношения равенства и неравенства соответственно), причем не нарушая общности можно считать, что параметром в этих формулах является набор праэлементов $\bar{b}_0 \in B^{<\omega}$. Пусть $(\mathfrak{B}',\bar{b}')$ — конструктивная симуляция уровня ω для системы $(\mathfrak{B},\bar{b}_0)$.

Набор формул Γ с параметром $\bar{b}'$ корректно определяет в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ некоторую систему $\mathfrak{A}^*$, которая вычислима и элементарно эквивалентна системе $\mathfrak{A}$. Отсюда, в частности, следует, что система $\mathfrak{A}^*$ бесконечна.

Известно [1], что любой элемент наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ представим в виде значения терма $t_\varkappa(\bar{b})$, где $\bar{b} \in (B')^{<\omega}$ — набор праэлементов, $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$. В нашем случае, существуют такие элемент $\varkappa \in \mathrm{HF}(k)$ и бесконечное множество

$X \subseteq (B')^k$, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(t_\varkappa(\bar{b}_1), t_\varkappa(\bar{b}_2))$ для любых различных наборов $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ из множества X. Действительно, в противном случае набор формул Γ определял бы не более чем счетную систему в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$.

Так как система $\mathfrak{B}'$ вычислима и Ψ^* — Σ-формула, можно найти бесконечное вычислимое множество $I \subseteq X$. Для этого достаточно взять произвольное $\bar{b}_0 \in X$, найти (эффективно) $\bar{b}_1 = \mu\bar{b}(\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(t_\varkappa(\bar{b}_0), t_\varkappa(\bar{b}))$ и так далее. В результате получим вычислимое бесконечное множество $I \rightleftharpoons \{\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots\}$.

Так как система $\mathfrak{B}'$, как и $\mathfrak{B}$, является достаточно насыщенной, то, для любых $c_0, c_1 \in \mathrm{HF}(\mathfrak{B}')$, типы элементов c_1 и c_2 в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ совпадают тогда и только тогда, когда существуют $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathrm{HF}(n)$, $\bar{b}_0$, $\bar{b}_1 \in (B')^n$ такие, что $c_0 = t_\varkappa(\bar{b}_0)$, $c_1 = t_\varkappa(\bar{b}_1)$, а элементарные типы наборов $\bar{b}_0$ и $\bar{b}_1$ совпадают в $\mathfrak{B}'$. Таким образом, для любых $i_0, \ldots, i_n, i'_0, \ldots, i'_n \in I$ из $\langle \mathfrak{B}', \bar{b}', i_0, \ldots, i_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}', \bar{b}', i'_0, \ldots, i'_n \rangle$ следует

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}'), \bar{b}', t_\varkappa(i_0), \ldots, t_\varkappa(i_n) \rangle \equiv \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}'), \bar{b}', t_\varkappa(i'_0), \ldots, t_\varkappa(i'_n) \rangle.$$

По произвольной конструктивизации μ системы $\mathfrak{B}'$ можно построить конструктивизацию ν наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$, для которой $\mu^{-1}(i) = \nu^{-1}(t_\varkappa(i))$ при всех $i \in I$. Поскольку система $\mathfrak{A}^*$ определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ набором Σ-формул, на основе этой конструктивизации легко получить вычислимую модель $\mathfrak{A}'$ такую, что I будет бесконечным вычислимым множеством $\langle \mathfrak{B}', \bar{b}' \rangle$-неразличимых элементов в системе $\mathfrak{A}'$. $\square$

В некоторых случаях полученное выше необходимое условие Σ-определимости может быть упрощено. Будем говорить, что теория T обладает свойством *эффективной элиминации констант*, если для любого главного расширения $T \cup p_0(\bar{c})$ теории T конечным числом констант, и любого невырожденного вычислимого ω-типа p теории $T \cup p_0(\bar{c})$, существует невырожденный вычислимый ω-подтип $q \hookrightarrow p$ такой, что для сужения $r \subseteq q$ типа q на сигнатуру теории T выполняется $p \equiv_i r$.

Обозначим через DLO теорию плотного линейного порядка без концевых элементов, а через E — теорию бесконечной моделей пустой сигнатуры. Очевидно, что обе эти теории являются sc-простыми. В [5] было показано, что теории DLO и E обладают свойством эффективной элиминации констант.

Теория T называется *широкой*, если в любой невырожденный ω-тип теории T вкладывается любой конечный тип теории T. Легко проверить, что теории DLO и E являются широкими.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$, система $\mathfrak{A}$ несчетна, и $\mathfrak{B} \models T$, $T \in \{\mathrm{DLO}, \mathrm{E}\}$. Тогда существует вычислимая система $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$, содержащая бесконечное вычислимое множество неразличимых (упорядоченно для $T = \mathrm{DLO}$, тотально для $T = \mathrm{E}$) элементов размерности 1.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}' \models T$ — произвольная вычислимая модель, и пусть система $\mathfrak{A}'$ определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ тем же набором Σ-формул, что и система $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Используя предложение 3.1 и замечание об элиминации констант, можно считать, что существует бесконечное вычислимое множество $I \subseteq A \cap B^k$ $\mathfrak{B}$-неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ размерности k. Пусть, для определенности, первых элементов различных наборов из I бесконечное число. Рассмотрим наборы $b_0\hat{}\bar{b}_0$ и $b_1\hat{}\bar{b}_1$ из $(B')^k$, для которых, в обозначениях доказательства предложения 3.1, $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Phi(\varkappa(b_i\hat{}\bar{b}_i))$, $i = 0, 1$, и $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(\varkappa(b_0\hat{}\bar{b}_0), \varkappa(b_1\hat{}\bar{b}_1))$. Полагаем $I_0 = I_1 = \{b_0\hat{}\bar{b}_0, b_1\hat{}\bar{b}_1\}$. Пусть для $n > 1$ уже построено множество

$$I_{n-1} = \{b_0\hat{}\bar{b}_0, \ldots, b_{n-1}\hat{}\bar{b}_{n-1}\}.$$

Вследствие насыщенности, существует набор $b_n\hat{}\bar{b}_n$ такой, что

$$(\mathfrak{B}', b_m\hat{}\bar{b}_m, b_n\hat{}\bar{b}_n) \equiv (\mathfrak{B}', b_0\hat{}\bar{b}_0, b_1\hat{}\bar{b}_1)$$

для всех $m < n$. В частности, $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Phi(\varkappa(b_n\hat{}\bar{b}_n))$, и для всех $m < n$ $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(\varkappa(b_m\hat{}\bar{b}_m), \varkappa(b_n\hat{}\bar{b}_n))$. Полагаем $I_n = I_{n-1} \cup \{b_n\hat{}\bar{b}_n\}$

Пусть $I = \cup_{n\in\omega} I_n$. Вследствие 2-дискретности теории T, для любых $i_0, \ldots, i_k \in \omega$, элементарный тип набора $b_{i_0}\hat{}\bar{b}_{i_0}\hat{}\ldots\hat{}b_{i_k}\hat{}\bar{b}_{i_k}$ в системе $\mathfrak{B}'$, в случае $T = \mathrm{DLO}$, однозначно определяется упорядочением набора натуральных чисел $\langle i_0, \ldots, i_k\rangle$, который подобен упорядочению элементов набора $\langle b_{i_0}, \ldots b_{i_k}\rangle$ в системе $\mathfrak{B}'$, а значит определяется элементарным типом этого набора. В случае $T = \mathrm{E}$ элементарный тип набора $b_{i_0}\hat{}\bar{b}_{i_0}\hat{}\ldots\hat{}b_{i_k}\hat{}\bar{b}_{i_k}$ в системе $\mathfrak{B}'$ однозначно определяется числом различных элементов в наборе $\langle i_0, \ldots i_k\rangle$. □

В некоторых случаях необходимое условие Σ-определимости несчетных систем, полученное в предложении 3.1, является также и достаточным. Воспользуемся критерием Σ-определимости в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ из [1].

Определим категорию $^*\omega$ следующим образом. Объектами являются множества вида $[\mathbf{n}] \rightleftharpoons \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \in \omega$ ($[\mathbf{0}] \rightleftharpoons \varnothing$), а морфизмами — вложения, сохраняющие порядок. Заметим, что имеется единственный морфизм из $[\mathbf{0}]$ в $[\mathbf{n}]$ для любого $n \in \omega$.

Определение 3.1. $^*\omega$-Спектром *называется любой функтор S из категории $^*\omega$ в категорию Mod^*_σ алгебраических систем (некоторой фиксированной сигнатуры σ), морфизмами которой являются всевозможные вложения.*

Чтобы определить $^*\omega$-спектр S, нужно задать последовательность $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$, $n \in \omega$, алгебраических систем сигнатуры σ, и каждому вложению $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$, сохраняющему порядок, сопоставить вложение $\mu_* : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m$, причем так, что если $\mu_0 : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$, $\mu_1 : [\mathbf{m}] \to [\mathbf{k}]$ – морфизмы категории $^*\omega$, то $(\mu_0\mu_1)_* = \mu_{1*}\mu_{0*}$, и если $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{n}]$ – единственный морфизм ($= \mathrm{id}_{[\mathbf{n}]}$), то $\mu_* = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_n} : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_n$, $n \in \omega$. Если определен $^*\omega$-спектр S, т.е. $\{\mathfrak{M}_n, \mu_* | n \in \omega, \mu \in \mathrm{Mor}\ ^*\omega\}$, то для любого линейно упорядоченного множества L можно определить алгебраическую систему $\mathfrak{M}_L(\mathfrak{M}_L^S)$ как предел $\lim_{\vec{L_0}} \mathfrak{M}'_{L_0}$ прямого спектра

$$\{\mathfrak{M}'_{L_0}, \varphi_{L_0,L_1} \mid L_0 \subseteq L_1 \subseteq L,\ L_1 \text{ конечно}\},$$

где $\mathfrak{M}'_{L_0} \rightleftharpoons \mathfrak{M}_n$, если $L_0 \subseteq L$ конечно и $|L_0| = n$, а вложение $\varphi_{L_0,L_1} : \mathfrak{M}'_{L_0} \to \mathfrak{M}'_{L_1}$ для конечных $L_0 \subseteq L_1 (\subseteq L)$ определено так: если $L_1 = \{l_0 < l_1 < \ldots < l_{m-1}\}$, $L_0 = \{l_{i_0} < l_{i_1} < \ldots < l_{i_{n-1}}\}$ (тогда $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots < i_{n-1} \leqslant m$) и $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ определено как $\mu(j) \rightleftharpoons i_j$, $j < n$, то

$$\varphi_{L_0,L_1} \rightleftharpoons \mu_* : \mathfrak{M}'_{L_0} = \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}'_{L_1}.$$

Если $L \subseteq L'$ — линейно упорядоченные множества, то система $\mathfrak{M}_L$ естественно отождествляется с подсистемой $\mathfrak{M}_{L'}$.

Любой изоморфизм линейно упорядоченных множеств L и L' индуцирует изоморфизм между $\mathfrak{M}_L$ и $\mathfrak{M}_{L'}$. Кроме того, если $L \subseteq L'$ – плотные линейно упорядоченные множества без концевых элементов, то $\mathfrak{M}_L \preccurlyeq \mathfrak{M}_{L'}$. Как следствие, если L и L' — плотные линейно упорядоченные множества без концевых элементов, то $\mathfrak{M}_L \equiv \mathfrak{M}_{L'}$.

Пусть μ_0 и μ_1 — морфизмы из $[\mathbf{1}]$ в $[\mathbf{2}]$ такие, что $\mu_0(0) = 0$ и $\mu_1(0) = 1$, и пусть выполнено условие

$(*)$ $\mu_{0*} \neq \mu_{1*}$.

Условия $(*)$ достаточно, чтобы $|\mathfrak{M}_L^S| \geqslant |L|$ выполнялось для любого линейно упорядоченного множества L.

Определение 3.2. *Система нумераций $\nu_n : \omega \to M_n$, $n \in \omega$, называется* вычислимой последовательностью конструктивизаций

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_n, \nu_n), \ldots, \quad n \in \omega,$$

если выполнены следующие условия (предполагается, что сигнатура σ систем $\mathfrak{M}_i$ конечна и не содержит функциональных символов):

1) *$E \rightleftharpoons \{\langle n, m_0, m_1\rangle | n, m_0, m_1 \in \omega, \nu_n(m_0) = \nu_n(m_1)\}$ — Δ-предикат на ω;*

2) *$N_P \rightleftharpoons \{\bar{n} = \langle n_0, n_1, \ldots, n_k\rangle | \bar{n} \in \omega^{k+1}, \langle \nu_{n_0}(n_1), \ldots, \nu_{n_0}(n_k)\rangle \in P^{\mathfrak{M}_{n_0}}\}$ — Δ-предикат на ω для любого (k-местного) предикатного символа $P \in \sigma$;*

3) *для любого константного символа $c \in \sigma$ существует Σ-функция $f_c : \omega \to \omega$ такая, что $c^{\mathfrak{M}_n} = \nu_n f_c(n)$.*

Каждый морфизм $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ категории ${}^*\omega$ однозначно определяется числом m и подмножеством $\mu([\mathbf{n}]) \subseteq [\mathbf{m}]$. Это замечание позволяет определить взаимно однозначное соответствие $\mu^* : \Delta \to \mathrm{Mor}\ {}^*\omega$ между подмножеством $\Delta \rightleftharpoons \{n | n \in \omega, r(n) < 2^{l(n)}\} \subseteq \omega$ и множеством $\mathrm{Mor}\ {}^*\omega$, считая, что $n \in \Delta$ кодирует морфизм $\mu : [\mathbf{k}] \to [\mathbf{l}]$ такой, что $l = l(n)$, а $r(n)$ — номер подмножества $\mu([\mathbf{k}]) \subseteq [\mathbf{l}] = [\mathbf{l(n)}]$. Очевидно, что Δ есть Δ-подмножество ω.

Определение 3.3. *Пусть* $S = \{\mathfrak{M}_n, \mu_* | n \in \omega, \mu \in \mathrm{Mor}\ {}^*\omega\}$ — ${}^*\omega$*-спектр.* Конструктивизацией S *называется любая вычислимая последовательность конструктивизаций*

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_n, \nu_n), \ldots, \ \ n \in \omega,$$

вместе с Σ*-функцией* $f : \Delta \times \omega \to \omega$ *такой, что для любых* $n, m, k \in \omega$, $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}] \in \mathrm{Mor}\ {}^*\omega$, *если* $n^* \in \Delta$ *такой, что* $\mu^*(n^*) = \mu$, *то* $\mu_* \nu_n(k) = \nu_m f(n^*, k)$.

${}^*\omega$*-Спектр* S *называется конструктивизируемым, если для него существует конструктивизация.*

Теорема 3.1 ([1]). *Теория* T *имеет несчетную модель,* Σ*-определимую в* $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$, *тогда и только тогда, когда существует конструктивизируемый* ${}^*\omega$*-спектр* S, *удовлетворяющий условию* $(*)$ *и такой, что* $\mathfrak{M}_L^S \models T$.

Предложение 3.3. *Для c-простой теории следующие условия эквивалентны:*

1) *существует конструктивизируемый* ${}^*\omega$*-спектр* S, *удовлетворяющий условию* $(*)$ *и такой, что* $\mathfrak{M}_L^S \models T$;

2) *теория* T *имеет вычислимые невырожденные упорядоченно неразличимые* ω*-типы.*

Доказательство. Импликация из 1 в 2 следует из предыдущей теоремы и предложения 3.1. Установим импликацию из 2 в 1. Пусть p — ω-тип теории T, существование которого утверждается в пункте 2 предложения, и пусть $\mathfrak{M}_0 \models T$ — вычислимая модель.

Определим ${}^*\omega$-спектр теории T следующим образом: положим $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_0$ для всех $n \in \omega$. Зафиксируем вычислимую реализацию

$$I = \langle i_0, i_1, \ldots \rangle \subseteq M_0$$

ω-типа p в системе $\mathfrak{M}_0$. Для каждого морфизма $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ категории ${}^*\omega$ определим вложение $\mu_* : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m$ следующим образом: полагаем для всех $k < n$ и $s \geqslant n$

$$\mu_*(i_k) = i_{\mu(k)}, \ \mu_*(i_{n+s}) = i_{m+s}.$$

Далее, пусть $\mathcal{H}(I) \subseteq M_0$ — эффективная скулемовская оболочка множества I в системе $\mathfrak{M}_0$. Она существует вследствие того, что T — c-простая теория, и отсюда же следует, что $\mathcal{H}(I) \simeq \mathfrak{M}_0$. Любое сохраняющее порядок эффективное вложение множества I в себя продолжается до эффективного изоморфного вложения системы $\mathcal{H}(I)$ в себя. Обозначим его за μ_*. Легко понять, что $\mu_* : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m$, причем для различных морфизмов $\mu_0, \mu_1 : [\mathbf{1}] \to [\mathbf{2}]$ морфизмы $(\mu_0)_*$ и $(\mu_1)_*$ также различны, и выполняется условие на композиции морфизмов. Условие $\mathfrak{M}_L^S \models T$ выполняется вследствие модельной полноты T. □

Следствие 3.1. *Пусть T — c-простая теория. Следующие условия эквивалентны:*

1) T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$;

2) T имеет вычислимый невырожденный упорядоченно неразличимый ω-тип.

В работе [5] был установлен следующий критерий существования у c-простой теории несчетной модели с "достаточно простой" Σ-степенью, частным случаем которого является предыдущее следствие (отметим, что приведенное здесь новое доказательство этого факта является более простым).

Теорема 3.1. *Пусть T — c-простая теория, и пусть $\mathfrak{A}$ — (произвольная) вычислимая модель T.*

i) T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$, тогда и только тогда, когда существует бесконечное вычислимое множество упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ размерности 1;

ii) T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{S})$, $\mathbb{S} \models \mathrm{E}$, тогда и только тогда, когда существует бесконечное вычислимое множество тотально неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ размерности 1.

Замечание. Теорема 3.1 не справедлива, если теория T не является c-простой. Действительно, для теории ACF алгебраически замкнутых полей существует вычислимая модель, имеющая бесконечное вычислимое множество тотально неразличимых элементов (см. [4]). В то же время никакая несчетная модель теории ACF не определима в $\mathbb{HF}(\mathbb{S})$, $\mathbb{S} \models \mathrm{E}$ (см. [1]).

Непосредственно из леммы 2.4 и теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Если T — c-простая дискретная теория, то существует несчетная система $\mathfrak{A} \models T$ для которой $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.*

Аналогично, из следствия 2.1 и теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.3. *Если T — sc-простая теория конечной сигнатуры, то существует несчетная система $\mathfrak{A} \models T$, для которой $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.*

Как уже отмечалось, условие конечности сигнатуры теории является существенным. Таким образом, гипотеза 1 верна для класса SC-SIMPLE$_{fin}$, но не является верной для класса SC-SIMPLE.

4 Примеры дискретных c-простых теорий

Для ω-категоричной теории T ее *функцией Рыль-Нардзевского* называется функция $r_T : \omega \to \omega$, такая, что, для всякого $n \in \omega$, $r_T(n)$ равно числу (полных) n-типов теории T.

Лемма 4.1. *Пусть T — ω-категоричная разрешимая теория. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) T имеет вычислимое множество полных формул;

2) T имеет вычислимую функцию Рыль-Нардзевского.

Доказательство. 1) Пусть $n \in \omega$, и пусть $\bar{x} = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$. Вследствие разрешимости, равномерно по n эффективно находятся полные формулы $\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_k(\bar{x})$ теории T (с минимальными геделевскими номерами), для которых

$$T \vdash \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}) \vee \ldots \vee \varphi_k(\bar{x})).$$

Тогда $r_T(n) = k$.

2) Пусть $n \in \omega$, $\bar{x} = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$, и пусть $r_T(n) = k$. Вследствие разрешимости теории T, эффективно находятся формулы $\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_k(\bar{x})$ (с минимальными геделевскими номерами) такие, что $T \vdash \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}) \vee \ldots \vee \varphi_k(\bar{x}))$ и, для всех $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, справедливо

$$T \vdash \neg \exists \bar{x}(\varphi_i(\bar{x}) \wedge \varphi_j(\bar{x})).$$

Тогда $\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_k(\bar{x})$ — полные формулы теории T от переменных $\bar{x}$. □

Замечание. Существуют примеры ω-категоричных разрешимых теорий без вычислимой функции Рыль-Нардзевского. Более того, существуют примеры таких теорий с дополнительным условием подмодельной полноты.

Одним из способов построения ω-категоричных теорий является конструкция Фрессе прямого предела класса конечно порожденнных систем, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям.

Определение 4.1. *Пусть K — класс конечно порожденных систем некоторой фиксированной сигнатуры.*

1) обладает свойством наследственности *($K \models$ HP), если для любых $\mathfrak{A} \in K$ и $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ следует, что $\mathfrak{B} \in K$;*

2) обладает свойством совместной вложимости *($K \models$ JEP), если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ существует $\mathfrak{C} \in K$, для которой $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{C}$;*

3) обладает свойством амальгамируемости *($K \models$ AP), если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in K$, для которых существуют вложения $f_1 : \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ и $f_2 : \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, существует $\mathfrak{D} \in K$ и вложения $g_1 : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ и $g_2 : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ такие, что $f_1 g_1 = f_2 g_2$;*

4) K является равномерно локально конечным *($K \models$ ULF), если существует функция $f : \omega \to \omega$ такая, что для любой $\mathfrak{A} \in K$, если система $\mathfrak{A}$ имеет не более n порождающих, то число элементов в $\mathfrak{A}$ не превосходит $f(n)$.*

Известно, что если класс K конечно порожденных систем обладает свойствами $\mathrm{HP}, \mathrm{JEP}$ и AP, то существует единственная с точностью до изоморфизма подмодельно полная счетная система $\mathfrak{A}$, класс конечно порожоденных систем которой (с точностью до изоморфизма) совпадает с классом K (см, например, [3]). Будем называть такую систему $\mathfrak{A}$ *пределом Фрессе* класса K (обозн. $\mathfrak{A} = \lim_{\mathrm{F}} K$).

Теорема 4.1 ([3]). *Пусть K — счетный класс конечно порожденных систем некоторой конечной сигнатуры, обладающий свойствами* $\mathrm{HP}, \mathrm{JEP}, \mathrm{AP}$ *и* ULF, *и пусть* $\lim_{\mathrm{F}} K$ *— предел Фрессе класса K. Тогда* $\mathrm{Th}(\lim_{\mathrm{F}} K)$ *ω-категорична.*

Определение 4.2. *Класс конечно порожденных систем сигнатуры σ называется* ULF-вычислимым, *если он вычислим, и вычислима функция f из определения свойства* ULF. *Класс K будем называть* ULF-вычислимо представимым, *если существуют* ULF-*вычислимый класс K' и сохраняющее изоморфизм сюръективное отображение $\tau : K \twoheadrightarrow K'$.*

Предложение 4.1. *Пусть K — класс конечно порожденных систем некоторой конечной сигнатуры, который удовлетворяет условиям* $\mathrm{HP}, \mathrm{JEP}, \mathrm{AP}$ *и* ULF. *Тогда* $\mathrm{Th}(\lim_{\mathrm{F}} K) \in$ SC-SIMPLE *тогда и только тогда, когда K имеет* ULF-*вычислимое представление.*

Доказательство. Легко следует из леммы 4.1. □

Приведем некоторые примеры *sc*-простых теорий, получающихся в результате конструкции Фрессе.

Пусть $FinGraph$ — класс всех конечных неупорядоченных графов. Легко убедиться, что этот класс удовлетворяет условиям $\mathrm{HP}, \mathrm{JEP}, \mathrm{AP}$, и имеет ULF-вычислимое представление.

Определение 4.3. *Неупорядоченный граф $\mathfrak{A}$ называется* случайным (random), *если для любых конечных $X, Y \subseteq A$, таких, что $X \cap Y = \emptyset$, существует вершина $v \in A \setminus (X \cup Y)$ такая, что v смежна со всеми вершинами из X, v не смежна ни с одной из вершин из Y.*

Предложение 4.2 ([3]). *Если $\mathfrak{A}$ — предел Фрессе класса $FinGraph$, то $\mathfrak{A}$ – случайный граф. Как следствие,* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in \text{SC-SIMPLE}_{fin}$

Доказательство следующего предложения непосредственно вытекает из определений.

Лемма 4.2. *Если в подмодельно полной теории T предикатной сигнатуры σ все предикаты симметричны, т.е. $T \vdash (R(\overline{x}) \leftrightarrow R(f(\overline{x})))$ для любой перестановки f множества $\{0, \ldots, lh(\overline{x}) - 1\}$, то в любой модели $\mathfrak{M}$ теории T всякое множество упорядоченно неразличимых элементов является множеством тотально неразличимых элементов.*

Таким образом, если $\mathfrak{A}$ — случайный граф, то всякое множество упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ является множеством тотально неразличимых элементов.

Следствие 4.1. *Существует несчетный случайный граф $\mathfrak{A}$, такой, что $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \models \mathrm{E}$.*

Пусть σ — конечная предикатная сигнатура. Класс $Fin(\sigma)$ удовлетворяет условиям $\mathrm{HP}, \mathrm{JEP}, \mathrm{AP}$, и имеет ULF-вычислимое представление.

Определение 4.4. *Пусть σ — конечная сигнатура.* Случайной (random) системой *$Ran(\sigma)$ сигнатуры σ называется предел Фрессе класса $Fin(\sigma)$.*

Следствие 4.2. $\mathrm{Th}(Ran(\sigma)) \in \text{SC-SIMPLE}_{fin}$, *и существует несчетная система $\mathfrak{A} \equiv Ran(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.*

Системой аксиом для $\mathrm{Th}(Ran(\sigma))$ являются предложения $\forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \exists y \in \chi(\bar{x}, y))$, где $\psi(\bar{x})$ и $\chi(\bar{x}, y)$ — произвольные непротиворечивые бескванторные формулы сигнатуры σ.

Список литературы

[1] *Ю. Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[2] *Yu. L. Ershov*, Σ-definability of algebraic structures, in: Y. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode, J. B. Remmel (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, Recursive model theory (Stud. Logic Found. Math., **138**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 235—260.

[3] *W. Hodges*, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[4] *H. A. Kierstead, J. B. Remmel*, Indiscernibles and decidable models, J. Symb. Log., **48**, N 1 (1983), 21—32.

[5] *А. И. Стукачев*, Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей, Алгебра и логика, **43**, N 2 (2004), 459—481.

[6] *А. И. Стукачев*, О степенях представимости моделей. I, Алгебра и логика, **46**, N 6 (2007), 763—788.

[7] *А. И. Стукачев*, О степенях представимости моделей. II, Алгебра и логика, **47**, N 1 (2008), 108—126.

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru