УДК 510.5

О c-простых теориях [1]

А.И. СТУКАЧЕВ

1 Введение

В данной работе, продолжающей работы [1, 2], исследуются вопросы эффективной представимости (Σ-определимости) несчетных моделей c-простых теорий в наследственно конечных надстройках. Далее предполагается, что для каждой рассматриваемой в работе сигнатуры зафиксирована некоторая геделевская нумерация ее формул. Следующее определение расширяет определение, данное Ю.Л. Ершовым [3], на случай систем с вычислимой сигнатурой. Для простоты, приведем его для случая предикатной сигнатуры (только такие сигнатуры рассматриваются в данной работе).

Определение 1.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Система $\mathfrak{M}$ называется *Σ-определимой в* $\mathbb{A}$, если существует вычислимая последовательность Σ-формул

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, x_1, y), \Psi^*(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Phi_0^*(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \ldots, \Phi_k(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \Phi_k^*(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \ldots$$

сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и параметр $a \in A$ такие, что для $M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a)$ и $\eta \leftrightharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$ имеет место следующее: $M_0 \neq \varnothing$, η — отношение конгруэнтности на системе

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0; P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_k^{\mathfrak{M}_0}, \ldots \rangle,$$

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 8227), Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты РФФИ 11-01-00688-а, 13-01-91001-АНФ-а), и государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-276.2012.1).

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k}$ для всех $k \in \omega$, $\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0,x_1,a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0,x_1,a)$, $\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1},a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1})$ для всех $k \in \omega$, и система $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-системе $\mathfrak{M}_0 / \eta$.

Для систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, через $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Будем предполагать, что сигнатура надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ содержит предикатный символ Sat^2, интерпретацией которого является предикат истинности атомарных формул системы $\mathfrak{B}$, согласованный с зафиксированной геделевской нумерацией формул сигнатуры этой системы. В случае систем конечной сигнатуры добавление предиката Sat к сигнатуре надстройки не является существенным.

Теория в языке логики предикатов первого порядка называется *регулярной* [3], если она модельно полна и разрешима, и *c-простой* [3], если она регулярна, ω-категорична, и имеет разрешимое множество полных формул.

Гипотеза 1.1. [Ю.Л.Ершов [4]] Если теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ для системы $\mathfrak{M}$ с c-простой теорией, то теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$ для некоторого плотного линейного порядка $\mathfrak{L}$.

Легко убедиться, что формальным следствием данного утверждения является

Гипотеза 1.2. [Ю.Л.Ершов [5]] Всякая c-простая теория имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$ для некоторого плотного линейного порядка $\mathfrak{L}$.

Аналог гипотезы 1.2 справедлив для естественного подкласса класса c-простых теорий. А именно, теория называется *sc-простой* [2], если она c-простая и подмодельно полная. Для sc-простых теорий конечной предикатной сигнатуры в работе [2] была доказана

Теорема 1.1. Любая sc-простая теория конечной предикатной сигнатуры имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок.

Без ограничения на случай конечной сигнатуры данный результат не справедлив: в работе [1] установлена

Теорема 1.2. Существует sc-простая теория (вычислимой предикатной сигнатуры), не имеющая несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок.

Необходимо отметить, что приведенные в [1] и [2] доказательства изложены не вполне корректно и нуждаются в (незначительных) исправлениях. Для доказательства теоремы 1.2 это сделано в [2], а для доказательства теоремы 1.1 – в работе [6].

В данной работе построен пример c-простой теории конечной сигнатуры, не имеющей несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок. Тем самым построен пример, опровергающий гипотезу 1.2, а значит, и гипотезу 1.1. Данные результаты анонсированы в [7, 8].

2 Основные понятия

Пусть σ — конечная или вычислимая сигнатура, $V = \{x_i | i \in \omega\}$ — фиксированное множество переменных, $\mathrm{Form}(\sigma)$ — множество всех формул первого порядка сигнатуры σ со свободными переменными из V, и пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ. Для $n \in \omega$, под *n-типом* (соответственно, *атомарным n-типом*) теории T будем, как обычно, понимать максимальное совместное с T множество формул (соответственно, атомарных формул) сигнатуры σ, все свободные переменные которых находятся среди $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Тип p будем называть *подтипом* типа q, если $p \subseteq q$.

Определение 2.1. Пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ. Под *ω-типом* теории T будем понимать произвольную функцию $p : \omega^{<\omega} \to P(\mathrm{Form}(\sigma))$, такую, что

1) для всякого $\bar{n} \in \omega^{<\omega}$, $p(\bar{n})$ есть максимальное совместное с T множество формул сигнатуры σ, все свободные переменные которых находятся среди $\{x_n | n \in \{n_0, \ldots, n_{k-1}\}\}$, где $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle$;

2) для любых $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle, \bar{m} = \langle m_0, \ldots, m_{l-1} \rangle \in \omega^{<\omega}$, из того, что $\{n_0, \ldots, n_{k-1}\} \subseteq \{m_0, \ldots, m_{l-1}\}$, следует, что $p(\bar{n}) \subseteq p(\bar{m})$.

Тип p называется *вырожденным*, если $(x_i = x_j) \in p$ для некоторых $i \neq j$. Для ω-типа p и набора $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle \in \omega^{<\omega}$, через $p|\bar{n}$ будем обозначать конечный тип

$$\{\varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}) \,|\, \varphi(x_{n_0}, \ldots, x_{n_{k-1}}) \in p(\bar{n})\}.$$

Заметим, что можно отождествить ω-типы теории T с максимальными совместными с T множествами формул сигнатуры σ со свободными переменными из V.

Будем говорить, что тип p *вкладывается* в тип q (обозн. $p \sqsubseteq q$), если $p = q|\bar{n}$ для некоторого $\bar{n} \in \omega^{<\omega}$.

Если $\mathfrak{A}$ — вычислимая система, и p — ω-тип, то будем говорить, что p *вычислимо реализуется в* $\mathfrak{A}$, если этот тип реализуется некоторой вычислимой последовательностью элементов системы $\mathfrak{A}$.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая система, и пусть p — ω-тип. Тогда

1) если система $\mathfrak{A}$ разрешима, то всякий вычислимо реализующийся в $\mathfrak{A}$ ω-тип вычислим. В частности, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ — регулярная теория, то всякий вычислимо реализующийся в $\mathfrak{A}$ ω-тип вычислим;

2) если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ — c-простая теория, и p реализуется в $\mathfrak{A}$, то p вычислимо реализуется в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда p вычислим.

Доказательство. См. работу [2], лемма 2.1. □

Определение 2.2. Пусть $f : \omega \to \omega^{<\omega}$ — произвольная функция, и пусть p — произвольный ω-тип. Определим *ω/f-тип* как функцию $p/f : \omega^{<\omega} \to P(\mathrm{Form}(\sigma))$, положив, для всякого $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle \in \omega^{<\omega}$, значение $(p/f)(\bar{n})$ равным множеству $p(f(n_0)\hat{}\ldots\hat{}f(n_{k-1}))$. Аналогично, для всякого $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle \in \omega^{<\omega}$, $(p/f)|\bar{n}$ определяется как множество формул $p|f(n_0)\hat{}\ldots\hat{}f(n_{k-1})$.

В случае, когда $f(n) = \langle kn, \ldots, kn+k-1\rangle$ для некоторого $k > 0$, ω/f-тип p/f будем обозначать p/k.

Будем называть ω/f-типы *обобщенными* ω-типами. Отметим, что всякий ω-тип p соответствует обобщенному ω-типу p/id.

Определение 2.3. Пусть p и q — произвольные обобщенные ω-типы (возможно, различных сигнатур). Тип q называется *p-неразличимым* (обозначаем $q \leqslant_i p$), если для любых наборов $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \omega^{<\omega}$ одинаковой длины,

$$\text{из } p|\bar{n}_1 = p|\bar{n}_2 \text{ следует, что } q|\bar{n}_1 = q|\bar{n}_2.$$

Очевидно, что отношение $\leqslant_i$ на множестве ω-типов рефлексивно и транзитивно. Будем называть ω-типы p и q *i-эквивалентными* (обозначаем $p \equiv_i q$), если $p \leqslant_i q$ и $q \leqslant_i p$, то есть для любых наборов $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \omega^{<\omega}$ одинаковой длины, $p|\bar{n}_1 = p|\bar{n}_2$ тогда и только тогда, когда $q|\bar{n}_1 = q|\bar{n}_2$.

Определение 2.4. Для произвольных систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и некоторого $k > 0$, (непустое) множество $I \subseteq A^k \cap B$ называется *множеством $\mathfrak{A}$-неразличимых элементов в $\mathfrak{B}$* (размерности k), если для любых наборов $\bar{i}, \bar{i}' \in I^{<\omega}$ одинаковой длины,

$$\text{из } \langle \mathfrak{A}, \bar{i}\rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \bar{i}'\rangle \text{ следует, что } \langle \mathfrak{B}, \bar{i}\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{i}'\rangle.$$

Лемма 2.2. Для любых c-простых теорий T, T', и $k > 0$, следующие условия эквивалентны:

1) существуют вычислимые невырожденные ω-типы p и q теорий T и T', соответственно, такие, что q является p/k-неразличимым;

2) существуют вычислимые модели $\mathfrak{A} \models T$ и $\mathfrak{A}' \models T'$, такие, что в $\mathfrak{A}'$ существует бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{A}$-неразличимых элементов размерности k.

Доказательство. Непосредственно следует из определений и леммы 2.1. $\square$

Определение 2.5. Для $\alpha \leqslant \omega$, α-тип p называется *минимальным* , или упорядоченно неразличимым, если для любого $k < \alpha$ и любых подмножеств $I, J \subseteq \alpha$ мощности k,

$$p|I = p|J,$$

где, для $I = \{i_0 < i_1 < \ldots\}$, через $p|I$ обозначается тип $p|\langle i_0, i_1, \ldots\rangle$.

Из определения очевидно, что ω-тип p является минимальным тогда и только тогда, когда p является q-неразличимым для ω-типа q последовательности всех натуральных чисел в плотном линейном порядке, содержащем $\langle\omega, \leqslant\rangle$ как подсистему, например, в $\langle\mathbb{Q}, \leqslant\rangle$. Минимальность p также эквивалентна тому, что множество $\{p|I \mid I \subseteq \omega \text{ конечно}\}$ конечных подтипов p минимально по включению. Отметим также, что любой ω-подтип $p|I$ для бесконечного $I \subseteq \omega$ совпадает с p.

Минимальные невырожденные ω-типы теории T — это в точности типы бесконечных последовательностей упорядоченно неразличимых элементов в моделях T. По теореме Эренфойхта-Мостовского, любая непротиворечивая теория имеет невырожденные минимальные ω-типы. В данной работе, как и в работе [2], рассматривается вопрос существования вычислимых невырожденных минимальных ω-типов у c-простых теорий.

Определение 2.6. Пусть $n \in \omega$. Теорию T будем называть *n-дискретной*, если любой тип теории T однозначно определяется своими n-подтипами.

Будем называть теорию *дискретной*, если она n-дискретна для некоторого $n \in \omega$. Если T — n-дискретная теория, число n-типов которой конечно, то T ω-категорична и подмодельно полна в некотором обогащении конечным числом формульно определимых в исходной сигнатуре предикатов. Всякая регулярная n-дискретная теория с конечным числом n-типов является c-простой.

Лемма 2.3. Всякая подмодельно полная теория конечной предикатной сигнатуры является n-дискретной с конечным числом n-типов для некоторого $n \in \omega$.

Доказательство. См. работу [2], лемма 2.3. □

Лемма 2.4. Пусть T — c-простая дискретная теория.

1) Все минимальные невырожденные ω-типы теории T вычислимы. В частности, теория T имеет вычислимые минимальные невырожденные ω-типы.

2) В любой вычислимой модели теории T вычислимо реализуется хотя бы один минимальный невырожденный ω-тип.

Доказательство. См. доказательство леммы 2.4 работы [2]. □

В дальнейшем будет также использоваться следующее утверждение из [1, 2].

Предложение 2.1. Если T — c-простая теория, имеющая несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок, то T имеет вычислимые невырожденные минимальные ω-типы.

3 Основные конструкции: пределы Фрессе и теоретико–модельный форсинг

В данном параграфе к теории из теоремы 1.2 (точнее, к ее счетной вычислимой модели) последовательно применяются две достаточно известные теоретико–модельные конструкции. На первом этапе используется важная конструкция Хрушовского (см., например, [9], теорема 7.4.8). Применяющийся в этой конструкции способ кодирования позволяет интерпретировать систему бесконечной сигатуры в системе конечной сигнатуры, используя дополнительные элементы в качестве вспомогательных меток. Конструкция Хрушовского позволяет при таком сведении оставаться в классе моделей ω-категоричных теорий (более того, c-простых теорий). Однако для контроля над ω-типами, которые образуют новые элементы–метки, указанная конструкция, основанная на пределах Фрессе, непригодна. На втором этапе, с использованием эффективного аналога опускания бескванторных типов при построении генерической модели, методом теоретико–

модельного форсинга по sc-простой теории бесконечной вычислимой сигнатуры строится c-простая теория конечной сигнатуры, имеющая вычислимые невырожденные минимальные ω-типы только в том случае, когда их имеет исходная теория. Особенностью использующейся конструкции, заимствованной из конструкции Хрушовского, является наличие "обратного связывания" наборов меток с наборами элементов исходной модели.

Для описываемых ниже построений существенным является наличие у исходной теории особых свойств. Эти свойства, имеющие технический характер, сформулированы в следующей лемме, которая, по существу, была установлена в [10, 11].

Лемма 3.1. Для любой системы $\mathfrak{A}$ существует система $\mathfrak{B} \equiv_\Sigma \mathfrak{A}$ такая, что:

1) сигнатура системы $\mathfrak{B}$ не содержит функциональных символов;
2) сигнатуры системы $\mathfrak{B}$ вместе с любым предикатным символом P^k содержит предикатный символ Q^k, для которого $Q^{\mathfrak{B}} = B^k \setminus P^{\mathfrak{B}}$;
3) для любого предикатного символа P^k сигнатуры системы $\mathfrak{B}$ множество $P^{\mathfrak{B}}$ бесконечно.

Кроме того, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ c-простая, то такой же является и $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Доказательство. Для выполнения пункта 1 достаточно перейти от функций к предикатам, выделяющим их графики. Пункт 2 очевиден. Для выполнения пункта 3, предполагая пункты 1 и 2 выполненными, рассмотрим Σ-эквивалентное расширение $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, носителем которого является дизъюнктное объединение $A \cup T \cup F$, множества T и F бесконечны, и для любой пары противоположных в системе $\mathfrak{A}$ предикатных символов P^k и Q^k, и любого $\bar{b} \in (A \cup T \cup F)^k$, $\mathfrak{B} \models P(\bar{b})$ тогда и только тогда, когда либо $\bar{b} \in A^k$ и $\mathfrak{A} \models P(\bar{b})$, либо в набор $\bar{b}$ входят элементы из T и не входят элементы из F, а $\mathfrak{B} \models Q(\bar{b})$ тогда и только тогда, когда либо $\bar{b} \in A^k$ и $\mathfrak{A} \models Q(\bar{b})$, либо в набор $\bar{b}$ входят элементы из F. Предполагается также, что сигнатура системы $\mathfrak{B}$ содержит одноместные предикаты, выделяющие множества T и F, откуда следует Σ-эквивалентность $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Отметим, что ω-категоричность сохраняется вследствие того, что, для всех $n \in \omega$, из конечности числа n-типов системы $\mathfrak{A}$ следует конечность числа n-типов системы $\mathfrak{B}$. Проверка сохранения остальных свойств, обеспечивающих принадлежность $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ классу c-простых теорий, достаточно тривиальна. Так, при переходе от сигнатуры, содержащей функциональные символы к предикатной сигнатуре, соответствующее преобразование для класса $\exists$-формул заключается в последовательной замене формулы Φ, содержащей вхождения терма вида $f(t_1, \ldots, t_k)$, на формулу $\exists z([\Phi]_z^{f(t_1,\ldots,t_k)} \wedge R_f(t_1, \ldots, t_k, z))$. $\square$

В дальнейшем предполагается, что все рассматриваемые в работе классы конечных алгебраических систем замкнуты относительно изоморфных копий. Как обычно, будем говорить, что класс $\mathcal{K}$ конечных алгебраических систем *имеет вычислимое представление*, если существует вычислимое множество $\mathcal{X}$ (конечных алгебраических систем), для которого $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}$, и для любой $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ существует $\mathcal{C} \in \mathcal{X}$, для которой $\mathcal{C} \cong \mathfrak{A}$

Напомним (см. [9]), что класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем некоторой фиксированной сигнатуры удовлетворяет свойству

HP, если из $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, следует, что $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$;

JEP, если для любых $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathcal{K}$ существуют $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ и вложения $f_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{D}$ и $f_2 : \mathfrak{B}_2 \to \mathfrak{D}$;

AP, если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathcal{K}$ и вложений $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1$ и $f_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_2$ существуют $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ и вложения $g_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{D}$ и $g_2 : \mathfrak{B}_2 \to \mathfrak{D}$ такие, что $f_1 g_1 = f_2 g_2$.

Классы c-простых и sc-простых теорий вычислимых сигнатур будем обозначать C-SIMPLE и SC-SIMPLE, соответственно, выделяя в них подклассы C-SIMPLE$_{fin}$ и SC-SIMPLE$_{fin}$, состоящие из теорий с конечной сигнатурой. На первом этапе конструкции к счетной системе $\mathfrak{A}$, $T_0 = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in$ SC-SIMPLE применяется, с использованием пределов Фрессе, конструкция Хрушовского, в результате чего получается счетная система

$\mathfrak{B}$, $T_1 = \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \in$ C-SIMPLE$_{fin}$которая впоследствии расширяется до теории T_1'. На следующем этапе, с использованием эффективной конструкции вынуждения и опускания бескванторных типов, строится T_1'-генерическая структура $\mathcal{C}$, такая, что $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{C})$ является c-простой теорией конечной сигнатуры, в моделях которой опускаются все невырожденные вычислимые ω-типы с условием минимальности. Получившаяся в результате теория $T_2 \in$ C-SIMPLE$_{fin}$, ввиду опускания всех вычислимых невырожденных минимальных ω-типов и вследствие результатов [2], не имеет несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок.

Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная, ω-категоричная и подмодельно полная система вычислимой предикатной сигнатуры $\sigma_0 = \langle R_n^{f(n)} | n > 3 \rangle$, причем для всех $n > 3$ выполнено условие $f(n) \leqslant n$. Отметим, что сигнатура теории из теоремы 1.2 удовлетворяет этому условию. Будем также предполагать, что для системы $\mathfrak{A}$ справедливы свойства 1–3 из леммы 3.1. Действительно, счетная модель теории из теоремы 1.2, основные свойства которой описаны в [12, 13], удовлетворяет свойствам 1 и 3 леммы 3.1, поэтому можно считать, перейдя к вычислимому обогащению сигнатуры σ_0, что свойство 2 также справедливо, вместе с указанным выше неравенством.

Пусть $\mathcal{J}$ — класс всех конечных подсистем системы $\mathfrak{A}$ (в частности, $\mathcal{J}$ удовлетворяет свойствам HP, JEP и AP). Рассмотрим сигнатуру $\sigma_1 \leftrightharpoons \langle P^1, L^1, R^1, H^2, S^4 \rangle$, символы которой не входят в сигнатуру σ_0, и пусть $\sigma_H \leftrightharpoons \sigma_0 \cup \sigma_1$. Результатом первого этапа конструкции будет класс $\mathcal{K}$ конечных систем сигнатуры σ_H, удовлетворяющих, в частности, универсальным замыканиям следующих формул:

1) $(L(x) \vee R(x)) \to \neg P(x)$;

2) $H(x, y) \to (\neg P(x) \wedge \neg P(y))$;

3) $S(x, y, z, w) \to (P(z) \wedge P(w) \wedge \neg P(x) \wedge \neg P(y))$;

4) $R_n(\bar{x}) \to (P(x_0) \wedge \ldots \wedge P(x_{f(n)-1}))$, для всех $n \in \omega$.

Для формулирования следующей группы требований, которым будет удовлетворять класс $\mathcal{K}$, понадобится еще несколько определений. Для системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ_H и $n \in \omega$, $n > 1$, будем называть *n-парой в* $\mathfrak{M}$ набор $\langle c_0, \ldots, c_{n-1}, a_0, \ldots, a_{f(n)-1} \rangle \subseteq M$, для которого в $\mathfrak{M}$ справедливо следующее:

5) $\neg P(c_0) \wedge \ldots \wedge \neg P(c_{n-1}) \wedge P(a_0) \wedge \ldots \wedge P(a_{f(n)-1})$;

6) $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$;

7) $H(c_i, c_j)$ тогда и только тогда, когда $j \equiv i + 1 (\mathrm{mod\ n})$;

8) $L(c_i)$ тогда и только тогда, когда $i = 0$;

9) $R(c_j)$ тогда и только тогда, когда $j = f(n) - 1$;

10) $S(c_h, c_i, a_k, a_m)$ тогда и только тогда, когда $a_h = a_k$.

Класс $\mathcal{K}$ состоит из конечных систем $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ_H, удовлетворяющих условиям 1–4, для которых $\mathfrak{M}|P^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{J}$, и из того, что $(\bar{c}, \bar{a})$ является n-парой, следует, что $\mathfrak{M} \models R_n(\bar{a})$.

Лемма 3.2. Класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет свойствам HP, JEP и AP, причем для $\mathfrak{B}' = \lim(\mathcal{K})$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \restriction \sigma_1$ выполнено следующее:

> если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ является sc-простой теорией вычислимой сигнатуры, то $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ является c-простой теорией конечной сигнатуры σ_1.

Доказательство. Справедливость для класса $\mathcal{K}$ свойства HP следует из определения класса $\mathcal{K}$: класс $\mathcal{J}$ обладает свойством HP, а свойства 1 – 4 устойчивы относительно подсистем. Доказательство истинности для класса $\mathcal{K}$ свойств JEP и AP можно найти, например, в [9].

Итак, $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}')$, как теория сигнатуры σ_H, ω–категорична и подмодельно полна (то есть допускает элиминацию кванторов). Отсюда следует, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ ω–категорична и модельно полна, так как предикаты, соответствующие символам из $\sigma_H \setminus \sigma_1$ (вместе с их дополнениями, ввиду замечания о свойствах из леммы 3.1), определимы $\exists$-формулами сигнатуры σ_1:

$\mathfrak{B}' \models R_n(\bar{a})$ тогда и только тогда, когда существует набор $\bar{c}$, для которого $(\bar{c}, \bar{a})$ образуют n-пару в $\mathfrak{B}$.

Установим разрешимость $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ и ее множества полных формул. Эти свойства вытекают из соответствующих свойств $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ (точнее, из существования вычислимого представления у класса $\mathcal{J}$) и следующих общих фактов. Так как теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ полна, для ее разрешимости достаточно существования вычислимо перечислимого множества аксиом. По построению системы $\mathfrak{B}'$, $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}')$ подмодельно полна, а значит $\forall\exists$-аксиоматизируема. Напомним, что система $\mathfrak{M}$ называется *слабо однородной* [9], если для любых ее конечно порожденных подсистем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ и вложения $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ существует вложение $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$, продолжающее f. По свойству слабой однородности системы $\mathfrak{B}' = \lim(\mathcal{K})$, в качестве множества $\forall\exists$-аксиом можно взять предложения вида $\forall\bar{x}\exists\bar{y}(AtDiagr_n(\mathfrak{D}|\bar{x}) \to AtDiagr_n(\mathfrak{D}))$ для всех конечных систем $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$, $|\mathfrak{D}| = \bar{x} \cup \bar{y}$ (здесь $AtDiagr_n(\mathfrak{M})$ обозначает конъюнкцию элементов атомарной диаграммы системы $\mathfrak{M}$, состоящую только из символов произвольного конечного фрагмента σ_n сигнатуры σ). Так как класс $\mathcal{K}$ имеет эффективное представление, данное множество аксиом вычислимо перечислимо. Разрешимость множества полных формул $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ следует из разрешимости и подмодельной полноты теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}')$, а также из следующих свойств сигнатуры σ_0 и системы $\mathfrak{A}$: предикаты R_n истинны только на невырожденных наборах, и, для всякого $m \in \omega$, существует $n_m \in \omega$, такое, что $f(n) > m$ для всех $n > n_m$. $\square$

Приступим к описанию второго этапа конструкции. Опишем алгоритм "обратного связывания" элементов множества меток с элементами носителя исходной системы. Вначале, определим вспомогательную бесконечную вычислимую сигнатуру σ_M, являющуюся сигнатурой несущественного обеднения $\mathfrak{B}_M$ морлизации системы $\mathfrak{B}$:

$$\sigma_M = \sigma_1 \cup \{Q_n^k | n \in \omega \text{ — наименьший геделевский номер}$$

$$\text{(полной формулы) невырожденного } k\text{-типа теории } Th(\mathfrak{B})\}.$$

Отметим, что система $\mathfrak{B}_M$, как и морлизация системы $\mathfrak{B}$, подмодельно полна.

Далее, рассмотрим сигнатуру $\sigma_2' = \sigma_M \cup \{(L')^1, (H')^2, (S')^4\}$, где символы L', H', S' не входят в сигнатуру σ_M. Определим множество предложений S сигнатуры σ_2', содержащий универсальные замыкания следующих формул:

1) $L'(x) \to P(x)$;

2) $H'(x, y) \to (P(x) \wedge P(y))$;

3) $S'(x, y, z, w) \to (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg P(z) \wedge \neg P(w))$.

Для $n > 1$, *обратной n-парой* в системе $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ_2' будем называть любой набор $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-1} \rangle \subseteq N$, для которого в $\mathfrak{N}$ справедливы $\forall$-замыкания следующих формул:

5) $P(a_0) \wedge \ldots \wedge P(a_{n-1}) \wedge \neg P(c_0) \wedge \ldots \wedge \neg P(c_{n-1})$;

6) $(c_i \neq c_j) \wedge (a_i \neq a_j)$ при $i \neq j$;

7) $H'(a_i, a_j)$ тогда и только тогда, когда $j = i + 1$;

8) $L'(a_i)$ тогда и только тогда, когда $i = 0$;

9) $S'(a_h, a_i, c_k, c_m)$ тогда и только тогда, когда $c_h = c_k$.

Набор вида $(\bar{a}, \bar{c})$ будем называть *обратной парой*, если он является обратной n-парой для некоторого $n \in \omega$. Множество *обратных напарников* для невырожденного минимального набора $\bar{c}$ определяется индукцией по его длине $lh(\bar{c})$:

1) если $lh(\bar{c}) = 0$, то $lh(\bar{a}) = 0$ (обратный напарник пустого набора — пустой набор);

2) если $lh(\bar{c}) > 0$, то существует наибольшее $k \leqslant lh(\bar{a}) = lh(\bar{c})$, такое, что

a) для всех $s < k$, для всех $i_0 < \ldots < i_{s-1} < k$, наборы $\langle a_{i_0}, \ldots, a_{i_{s-1}} \rangle$ лежат в множестве обратных напарников набора $\langle c_0, \ldots, c_{s-1} \rangle$, и набор $\langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle$ имеет невырожденный минимальный тип в $\mathfrak{N} \upharpoonright \sigma_M$ с наименьшим геделевским номером (полной формулы) среди всех наборов с таким свойством;

b) для всех $k < s < lh(\bar{a})$, набор $\langle a_0, \ldots, a_s \rangle$ имеет в $\mathfrak{N} \upharpoonright \sigma_M$ тип с наименьшим геделевским номером (полной формулы) среди всех наборов, расширяющих набор $\langle a_0, \ldots, a_{s-1} \rangle$.

Рассмотрим множество предложений сигнатуры σ'_2 вида

$$T'_1 = [\mathrm{Th}(\mathfrak{B}') \cup S],$$

где $\mathfrak{B}'$ —естественное обогащение системы $\mathfrak{B}$ до системы сигнатуры σ_M, а множество S состоит из предложений, указанных выше.

Лемма 3.3. T'_1 имеет вычислимое множество аксиом, являющихся $\forall\exists$-предложениями сигнатуры σ'_2.

Доказательство. Следует из разрешимости системы $\mathfrak{B}'$ и из вычислимости множества предложений S. □

Применим к T'_1 эффективную версию конструкции *теоретико-модельного форсинга*, результатом которой будет вычислимая генерическая система, являющаяся экзистенциально замкнутой моделью индуктивной теории T'_1. Пусть $C = \{c_i | i \in \omega\}$ — вычислимое множество констант, не входящих в сигнатуру σ'_2, и пусть $\sigma'_2(C) = \sigma'_2 \cup C$. Обозначим через Φ множество предложений сигнатуры $\sigma'_2(C)$, и пусть $\{\varphi_i \mid i \in \omega\}$ — вычислимая нумерация множества Φ.

Как обычно, T'_1-*условием* будем называть конечное множество литералов сигнатуры $\sigma'_2(C)$, совместное с теорией T'_1.

Результатом конструкции будет вычислимая последовательность T'_1-условий $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \ldots$, образующая вычислимое генерическое множество $G = \cup_{n\in\omega} p_n$, которое стандартным образом порождает вычислимую генерическую модель $\mathfrak{C}' = \mathfrak{M}(G)$. Предварительно, установим ряд лемм. Множество всех T'_1-условий будем далее обозначать символом P.

Лемма 3.4. *Множество P вычислимо.*

Доказательство. Следует из разрешимости теории T_1, а также из разрешимости множества $\forall$-предложений S. $\square$

Лемма 3.5. Отношение $R = \{\langle p, \varphi \rangle \in P \times \Phi \mid \exists q \supseteq p \, (q \Vdash_{T_1'} \varphi)\}$ вычислимо.

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ. Не нарушая общности, можно ситать, что рассматриваемые формулы не содержат связки $\wedge$ и квантора $\forall$.

1) φ — атомарное предложение сигнатуры $\sigma_2'(C)$. Определяющее отношение R условие в этом случае эффективно проверяется вследствие вычислимости множества T_1'-условий (лемма 3.4).

2) φ — предложение вида $\exists \psi$. Для условия p, через $C(p)$ будем обозначать множество констант из C, входяших в литералы из p. Расширение $p' \supseteq p$ будем называть *1-расширением*, если $|C(p') \setminus C(p)| = 1$. Отметим, что множество всех, с точностью до изоморфизма, T_1'-условий, являющихся (невырожденными) 1-расширениями T_1-условия p, конечно и определяется по p эффективно. Действительно, это следует из конечности числа $|C(p) + 1|$-типов ω-категоричной теории T_1 и того, что множество $\sigma_2' \setminus \sigma_M$ состоит из конечного числа предикатных символов. Определяющее отношение R условие, таким образом, проверяется эффективно вследствие индукционного предположения.

3) φ — предложение вида $\neg\psi$. По определению, $p \Vdash_{T_1'} \neg\psi$ тогда и только тогда, когда справедливо условие $\neg(\exists q \supseteq p(q \Vdash_{T_1'} \psi))$. По индукционному предположению, последнее проверяется эффективно.

4) φ — предложение вида $(\psi_1 \vee \psi_2)$. По определению, $p \Vdash_{T_1'} (\psi_1 \vee \psi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_{T_1'} \psi_1$ или $p \Vdash_{T_1'} \psi_2$. По индукционному предположению, это проверяется эффективно.

$\square$

Лемма 3.6. Отношение $R_0 = \{\langle p, \varphi \rangle \in P \times \Phi \mid p \Vdash_{T_1'} \varphi\}$ вычислимо.

Доказательство. Следует из леммы 3.5 и проводится аналогичным образом, индукцией по сложности предложения φ. Лемма 3.5 используется при рассмотрении случая, когда φ является предложением вида $\neg\psi$. $\square$

Основным для данного этапа будет следующее утверждение, являющееся частным случаем и эффективизацией теоремы об опускании бескванторных типов в генерических моделях из [15].

Теорема 3.1. Пусть $\{\varphi_{mn}(\bar{x}) | m, n \in \omega\}$ — вычислимое множество экзистенциальных формул сигнатуры σ'_2. Если для любого T'_1-условия p, любого $m \in \omega$ и любого (невырожденного) $\bar{c} \in C^m$, существует $n \in \omega$ такое, что множество

$$T'_1 \cup p \cup \{\varphi_{mn}(\bar{c})\}$$

совместно, то существует вычислимая T'_1-генерическая модель $\mathfrak{M}$, в которой выполнено бесконечное предложение

$$\bigwedge_{m\in\omega} \forall \bar{x} \bigvee_{n\in\omega} \varphi_{mn}(\bar{x}).$$

Доказательство. Следует [15]. Используя леммы 3.4, 3.5 и 3.6, строится вычислимая последовательность T'_1-условий $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \ldots$ такая, что

1) множество $G = \cup_{n\in\omega} p_n$ генерическое;

2) для любого $m \in \omega$ и любого $\bar{c} \in C^m$, выполняется $p_k \Vdash \varphi_{mn}(\bar{c})$ для некоторых $k, n \in \omega$.

Обеднение $\mathfrak{M}$ полученной вычислимой генерической модели $\mathfrak{M}(G)$ до модели сигнатуры σ'_2 удовлетворяет заключению теоремы и является экзистенциально замкнутой моделью теории T'_1. $\square$

Применим теорему 3.1 к теории T'_1 и множеству формул $\{\varphi_{mn}(\bar{x}) \,|\, m, n \in \omega\}$, где, для всех $n \in \omega$, $\varphi_{mn}(\bar{c})$ есть $\exists$-формула сигнатуры σ'_2, эквивалентная импликации вида

$$[(\bar{c} \text{ — невырожденный минимальный } m\text{-тип сигнатуры } \sigma_M) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists \bar{a}((\bar{a} \text{ имеет тип обратного напарника для } \bar{c}) \wedge ((\bar{a}, \bar{c}) \text{ — обратная пара}))].$$

Легко убедиться, что условие совместности из формулировки теоремы для данного множества выполняется, вследствие свойства системы $\mathfrak{A}$ содержать бесконечное число реализаций для всякого конечного типа.

Лемма 3.7. Пусть $T_2' = \{\varphi \,|\, \varnothing \Vdash_{T_1'} \neg\neg\varphi\}$ — форсинг–компаньон теории T_1'. Тогда $T_2' \in$ C-SIMPLE.

Доказательство. Модельная полнота следует из того, что T_2' является модельным пополнением теории T_1' (см. [9]). Разрешимость вытекает из леммы 3.6. Установим ω-категоричность и разрешимость множества полных формул. Пусть $\mathfrak{M}(G)$ — вычислимая T_1'-генерическая модель сигнатуры σ_2'. Имеем $T_2' = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}(G))$, так как $\mathfrak{M}(G) \models T_2'$ по свойствам форсинга, а теория T_2' полна, поскольку класс моделей теории T_1' обладает свойством JEP (см. [14]). Можно считать (после фактризации и перенумерации), что носителем $\mathfrak{M}(G)$ является вычислимое множество $C = \{c_i | i \in \omega\}$.

Пусть $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C^n$ — наборы, имеющие одинаковые бескванторные типы в $\mathfrak{M}(G)$. Покажем, что $(\mathfrak{M}(G), \bar{c}_1) \cong (\mathfrak{M}(G), \bar{c}_2)$ (то есть, что $\mathfrak{M}(G)$ обладает свойством ультраоднородности). Следствием этого будет элементарная эквивалентность $(\mathfrak{M}(G), \bar{c}_1) \equiv (\mathfrak{M}(G), \bar{c}_2)$, откуда вытекает конечность числа n-типов теории T_2' (а значит, ее ω-категоричность) и разрешимость множества полных формул этой теории (всякий n-тип полностью определяется своей атомарной диаграммой).

Построение изоморфизма между $(\mathfrak{M}(G), \bar{c}_1)$ и $(\mathfrak{M}(G), \bar{c}_2)$ проводится стандартным способом: построением последовательности изоморфизмов между подсистемами $\mathfrak{M}(G)$, образованных конечными расширениями наборов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$, соответственно. Для построения продолжений конечных изоморфизмов достаточно использовать следующие свойства теории T_1' и генерического множества G:

1) если $\mathfrak{M}(G)|_{\bar{c}} \cong \mathfrak{M}(G)|_{\bar{d}}$, а $\varphi(x, \bar{y})$ — бескванторная формула, для которой $p \Vdash_{T_1'} \exists x \varphi(x, \bar{c})$ для некоторого $p \subseteq G$, то $q \Vdash_{T_1'} \exists x \varphi(x, \bar{d})$ для некоторого $q \subseteq G$;

2) если $\varphi(x, \bar{y})$ — бескванторная формула, и $p \subseteq G$ таково, что $p \Vdash_{T_1'}$

$\exists x\varphi(x,\bar{c})$, то для любого q, такого, что $p \subseteq q \subseteq G$, справедливо $q \Vdash_{T_1'} \exists x\varphi(x,\bar{c})$.

Первое свойство следует из определения форсинга для случая бескванторных предложений, а второе вытекает из свойств теории T_1' и множества $\exists$-формул $\varphi_{mn}(\bar{x})$, участвующих в определении множества G. $\square$

Предложение 3.1. Пусть $\mathfrak{C}'$ — счетная модель теории T_2', а $\mathfrak{C}$ — обеднение системы $\mathfrak{C}'$ до системы сигнатуры $\sigma_2 = \sigma_1 \cup \{L', H', S'\}$. Тогда $\mathrm{Th}(\mathfrak{C}) \in$ C-SIMPLE$_{fin}$.

Доказательство. Следует из $\exists$-определимости формулами сигнатуры σ_2 удаляемых предикатных символов. $\square$

Лемма 3.8. Теория $T_2 = \mathrm{Th}(\mathfrak{C})$ опускает все вычислимые невырожденные минимальные ω-типы сигнатуры σ_2.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует вычислимый невырожденный минимальный ω-тип γ, совместный с T_2, а значит, вычислимо реализующийся в $\mathfrak{C}$. По выбору теорий T_0 и T_1, возможен только случай, когда $\gamma \in C^\omega$. Так как алгоритм поиска обратного напарника применительно к типу γ для каждого его конечного подтипа был реализован по пункту 2a) (в противном случае γ не был бы минимальным в $\mathfrak{C}$), тип γ порождает вычислимый невырожденный минимальный ω-тип $\alpha \in A^\omega$, $A = P^{\mathcal{C}}$, (что противоречит выбору теории T_1) следующим образом. Для всякого $n \in \omega$, так как $\bar{c} = \gamma|n$ является минимальным невырожденным n-типом в $\mathfrak{C}\restriction_{\sigma_1}$, то, по построению, существует $\bar{a} \in A^n$, являющийся обратным напарником для $\bar{c}$. Так как γ —минимальный ω-тип, то набор $\bar{a}$ удовлетворяет пункту 2a) определяющего условия, для всякого $n > 0$. Используя однородность вычислимой структуры $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}|_{P^{\mathfrak{C}}}$, вычислимый невырожденный минимальный ω-тип $\alpha \in A^\omega$ может быть определен так: полагаем $a_0 \in A$ равным наменьшему эламенту $a \in A(\subseteq \omega)$, являющимся обратным напарником для элемента c_0. Далее, для всякого $n \in \omega$ полагагаем

$$a_{n+1} \in A \text{ равным наименьшему элементу } a \in A(\subseteq \omega), \text{ для которого}$$

$$\langle a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} \rangle \text{ — обратный напарник для } \langle c_0, \ldots, c_n, c_{n+1} \rangle.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Следствием леммы 3.8 является следующая теорема, из которой, в частности, следует существование c-простой теории конечной сигнатуры, опровергающей гипотезу 1.2, а значит, и гипотезу 1.1.

Теорема 3.2. Существует c-простая теория конечной сигнатуры, не имеющая несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок.

Доказательство. Достаточно воспользоваться необходимым условием Σ-определимости несчетных моделей c-простых теорий в в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$ (см. [1, 2]): в любой теории с таким свойством реализуется хотя бы один вычислимый невырожденный минимальный ω-тип. □

Список литературы

[1] *А. И. Стукачев*, Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей, Алгебра и логика, **43**, N 2 (2004), 459—481.

[2] *А. И. Стукачев*, Σ-определимость несчетных моделей c-простых теорий, Сибирский математический журнал, **51** (2010), 649–661.

[3] *Ю. Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[4] *Yu. L. Ershov*, Σ-definability of algebraic structures, in: Y. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode, J. B. Remmel (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, Recursive model theory (Stud. Logic Found. Math., **138**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 235—260.

[5] *Yu. L. Ershov, V. G. Puzarenko, and A. I. Stukachev*, HF-computability, in: S. B. Cooper and A. Sorbi (eds.): Computability in Context: Computation and Logic in the Real World, Imperial College Press/World Scientific, 2011, 173–248.

[6] *A.I. Stukachev*, Effective model theory via the Σ-definability approach, Lecture Notes in Logic, v. 41 (2013), 164–197.

[7] *A.I. Stukachev*, Effective presentations of uncountable structures. II, Abstracts of Logic Colloquium 2011, Barcelona, Spain, July 11–16, x.

[8] *A.I. Stukachev*, Effective presentations of uncountable structures. II, Bulletin of Symbolic Logic, v. 18, N 3 (2012), 465.

[9] *W. Hodges*, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[10] *А.И. Стукачев*, Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней, Сибирские электронные математические известия , **6** (2009), 182–190.

[11] *A.I. Stukachev,* A jump inversion theorem for the semilattices of Sigma-degrees of structures, Siberian Advances in Mathematics, v. 20 (2010), 68–74.

[12] *H. A. Kierstead, J. B. Remmel*, Indiscernibles and decidable models, Journal of Symbolic Logic, **48**, N1 (1983), 21–32.

[13] *H. A.,Kierstead, J. B. Remmel*, Degrees of indiscernibles in decidable models, Transactions of the AMS, **289**, 1 (1985), 41–57.

[14] *J. Barwise, A. Robinson*, Completing theories by forcing, Annals of Mathematical Logic, **2**, N2 (1970), 119–142.

[15] *A. Macintyre*, Omitting quantifier-free types in generic structures, Journal of Symbolic Logic, **37** (1972), 512–520.

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А.И. Стукачев, О c-простых теориях.

Построен пример c-простой теории конечной сигнатуры, не имеющей несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок.