

Пусть есть натуральное число A записываемое в [десятичной системе счисления](#) как $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, где a_0 — единицы, a_1 — десятки и т. д.

Пусть m — произвольное натуральное число, на которое мы хотим делить и выводить признак делимости на него.

Находим ряд [остатков](#) по следующей схеме:

r_1 — остаток от деления 10 на m
 r_2 — остаток от деления $10 \cdot r_1$ на m
 r_3 — остаток от деления $10 \cdot r_2$ на m
 $\dots$
 r_n — остаток от деления $10 \cdot r_{n-1}$ на m .

Формально:

$$r_1 \equiv 10 \pmod{m}$$

$$r_i \equiv 10 \cdot r_{i-1} \pmod{m}, \quad i = \overline{2 \dots n}$$

Так как остатков конечное число (а именно m), то этот процесс заикнется (не позже, чем через m шагов) и дальше можно его не продолжать: Начиная с некоторого $i = i_0$: $r_{i+p} = r_i$, где p — получившийся [период](#) последовательности $\{r_i\}$. Для единообразия можно принять, что $r_0 = 1$.

Тогда A имеет тот же остаток от деления на m , что и число

$$r_n \cdot a_n + \dots + r_2 \cdot a_2 + r_1 \cdot a_1 + a_0.$$

Доказательство.

Пользуясь тем, что в алгебраическом выражении по модулю m можно заменять числа их остатками от деления на m , получаем:

$$\begin{aligned}
 A \pmod{m} &= (\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}) \pmod{m} = (\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \cdot 10 + a_0) \pmod{m} \\
 &= (\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \cdot r_1 + a_0 r_0) \pmod{m} \\
 &= (\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \cdot 10 r_1 + a_1 r_1 + a_0 r_0) \pmod{m} \\
 &= (\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \cdot r_2 + a_1 r_1 + a_0 r_0) \pmod{m} = \dots \\
 &= (a_n r_n + \dots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 r_0) \pmod{m}
 \end{aligned}$$

Основные частные случаи:

Признак делимости на 2

Здесь $m = 2$. Так как $10 \div 2$, то $r_0 = 1$, $r_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем известный признак: остаток от деления числа на 2 равен остатку от деления его последней цифры на 2, или обычно: число делится на 2, если его последняя цифра чётна.

Признаки делимости на 3 и 9

Здесь $m = 3$ или $m = 9$. Так как $10^i \equiv 1 \pmod{3}, i \in \mathbb{N}$ (остаток от деления 10 как на 3, так и на 9 равен 1), то все $r_i = 1$. Значит, остаток от деления числа на 3 (или на 9) равен остатку от

деления суммы его цифр на 3 (соответственно, 9), или иначе: число делится на 3 (или 9), если сумма его цифр делится на 3 (или 9).

Признак делимости на 4

Здесь $m = 4$. Находим последовательность остатков: $r_0 = 1, r_1 = 2, r_i = 0, i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем признак: остаток от деления числа на 4 равен остатку от деления $2 \cdot a_1 + a_0$ на 4, или, заметив, что остаток зависит только от 2 последних цифр: число делится на 4, если число, состоящее из 2 его последних цифр, делится на 4.

Признак делимости на 5

Здесь $m = 5$. Так как $10 \div 5$, то $r_0 = 1, r_i = 0, i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем известный признак: остаток от деления числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5, или обычно: число делится на 5, если его последняя цифра — 0 или 5.

Признак делимости на 7]

Здесь $m = 7$. Находим остатки.

1. $10 = 1 \cdot 7 + 3 \Rightarrow r_1 = 3$
2. $10 \cdot r_1 = 4 \cdot 7 + 2 \Rightarrow r_2 = 2$
3. $10 \cdot r_2 = 2 \cdot 7 + 6 \Rightarrow r_3 = 6$
4. $10 \cdot r_3 = 8 \cdot 7 + 4 \Rightarrow r_4 = 4$
5. $10 \cdot r_4 = 5 \cdot 7 + 5 \Rightarrow r_5 = 5$
6. $10 \cdot r_5 = 7 \cdot 7 + 1 \Rightarrow r_6 = 1 = r_0$, цикл замкнулся.

Следовательно, для любого числа

$$A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$$

его остаток от деления на 7 равен

$$a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + \dots$$

Пример

Рассмотрим число 48916. По доказанному выше,

$$48916 \equiv 6 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 =$$

а значит, 48916 делится на 7.

Признак делимости на 11

Здесь $m = 11$. Так как $10^{2n} = 99 \cdot 101 \dots 01 + 1 \equiv 1 \pmod{11}$, то все $r_{2i} = 1$, а $r_{2i-1} = 10 \equiv -1 \pmod{11}$. Отсюда можно получить простой признак делимости на 11:

остаток от деления числа на 11 равен остатку от деления его суммы цифр, где каждая нечётная (начиная с единиц) цифра взята со знаком «−», на 11.

Проще говоря:

если разбить все цифры числа на 2 группы — через одну цифру (в одну группу попадут все цифры с нечётными позициями, в другую — с чётными), сложить все цифры в каждой группе и вычесть одну полученную сумму из другой, то остаток от деления на 11 результата будет такой же, что и у первоначального числа.