О внутренней конструктивизируемости допустимых множеств [1]

А.И. Стукачев
Институт математики СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail:aistu@math.nsc.ru

В настоящей работе рассматривается проблема внутренней конструктивизируемости допустимых множеств с использованием элементов ограниченного ранга. Для случая наследственно конечных надстроек получена точная верхняя оценка ранга внутренней конструктивизируемости: он равен ω для надстроек над конечными системами и не превосходит 2 для надстроек над бесконечными системами. Приведены естественные примеры систем, наследственно конечные надстройки над которыми имеют ранг внутренней конструктивизируемости 0, 1, 2. Показано, что надстройка над полем действительных чисел имеет ранг внутренней конструктивизируемости 1.

Все обозначения являются стандартными и соответствуют [1, 2]. Носители алгебраической системы $\mathfrak{M}$ и KPU-модели $\mathbb{A}$ обозначаются через M и A соответственно. Далее, как правило, рассматривается лишь случай, когда алгебраические системы и KPU-модели имеют предикатную сигнатуру, что не нарушает общности рассуждений.

Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — KPU-модель, то есть алгебраическая система, сигнатура которой содежит предикатные символы $U^1, \in^2$, являющаяся моделью системы аксиом KPU. Согласно [1], система $\mathfrak{M}$ называется Σ-*определимой в* $\mathbb{A}$, если существуют вычислимая последовательность Σ-формул

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, x_1, y), \Psi^*(x_0, x_1, y),$$

$$\Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \Phi_0^*(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \ldots,$$
$$\Phi_k(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \Phi_k^*(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \ldots$$

такая, что для некоторого параметра $a \in A \quad M_0 \rightleftharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a) \neq \emptyset$, $\eta \rightleftharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$ есть отношение конгруэнтности на алгебраической

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N02-0100540, Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-2069.2003.1, программы "Университеты России проект УР.04.01.488., INTAS, проект INTAS YSF 04-83-3310.

системе

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_k^{\mathfrak{M}_0}, \ldots \rangle,$$

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k},\ k \in \omega,$

$$\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a),$$

$$\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1})$$

для всех $k \in \omega$ и система $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-системе $\mathfrak{M}_0 / \eta$. В этом случае говорят, что данная система формул с параметром a *Σ-определяет $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$.*

В дальнейшем будет удобно использовать эквивалентный подход, основанный на понятии $\mathbb{A}$-конструктивизируемости. Отображение (нумерация) $\nu : B \to M$ называется *$\mathbb{A}$-конструктивизацией* системы $\mathfrak{M}$, если $B \subseteq A$ — Σ-множество, нумерационная эквивалентность

$$\eta_\nu = \{\langle b_0, b_1 \rangle | b_0, b_1 \in B,\ \mathfrak{M} \models (\nu(b_0) = \nu(b_1))\}$$

и множества

$$\{\langle k, \langle b_0, \ldots, b_{n_k-1} \rangle\rangle | k \in \omega, b_0, \ldots, b_{n_k-1} \in B, \mathfrak{M} \models P_k(\nu(b_0), \ldots, \nu(b_{n_k-1}))\}$$

являются Δ-множествами в $\mathbb{A}$. Система, имеющая $\mathbb{A}$-конструктивизацию, называется *$\mathbb{A}$-конструктивизируемой.* Известно (см. [1]), что алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-определима в KPU-модели $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ $\mathbb{A}$-конструктивизируема.

Пусть $\mathbb{A}$ — KPU-модель сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$, Θ — Σ-формула той же сигнатуры. Для произвольной Σ-формулы Φ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ *релятивизация* Φ^Θ формулы Φ с помощью Θ определяется индуктивно:

если Φ — атомарная формула, то Φ^Θ есть Φ;

если Φ имеет вид $\neg\Psi$, то Φ^Θ есть $\neg(\Psi^\Theta)$;

если Φ имеет вид $(\Psi_1 * \Psi_2)$, $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$, то Φ^Θ есть $(\Psi_1^\Theta * \Psi_2^\Theta)$;

если Φ имеет вид $(Qx \in y)\Psi$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, то Φ^Θ есть $(Qx \in y)\Psi^\Theta$;

если Φ имеет вид $\exists x\Psi$, то Φ^Θ есть $\exists x(\Theta(x) \wedge \Psi^\Theta)$.

Ясно, что Φ^Θ является Σ-формулой сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$.

Определение 1. *Пусть $\mathbb{A}$ — KPU-модель вычислимой предикатной сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}} = \langle U^1, \in^2, P_0^{n_0}, \ldots \rangle$, $B \subseteq A$ — транзитивное Σ-подмножество, определяемое в $\mathbb{A}$ Σ-формулой Θ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ с параметрами только из B. $\mathbb{A}$ называется конструктивизируемой внутри B, если существует вычислимая последовательность Σ-формул $\Phi(\bar{x}_0, \bar{y})$, $\Phi_=(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y})$, $\Psi_=(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y})$, $\Phi_\in(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y})$, $\Psi_\in(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y})$, $\Phi_U(\bar{x}_0, \bar{y})$, $\Psi_U(\bar{x}_0, \bar{y})$,*

$\Phi_{P_0}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{n_0-1}, \bar{y})$, $\Psi_{P_0}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{n_0-1}, \bar{y}), \ldots$ *(наборы $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$ и т.д. имеют одинаковую длину k, которая называется размерностью конструктивизации, набор $\bar{y}$ имеет длину l), и набор параметров $\bar{b} \in B^l$ такие, что $\{\bar{a} \in A | \mathbb{A} \models \Phi^{\Theta}(\bar{a}, \bar{b})\} \subseteq B^k$ и последовательность релятивизованных формул $\langle \Phi^{\Theta}, (\Phi_=)^{\Theta}, (\Psi_=)^{\Theta}, (\Phi_\in)^{\Theta}, (\Psi_\in)^{\Theta}, (\Phi_U)^{\Theta}, (\Psi_U)^{\Theta}, \Phi^{\Theta}_{P_0}, \Psi^{\Theta}_{P_0}, \ldots \rangle$ с параметрами $\bar{b}$ Σ-определяют KPU-модель $\mathbb{A}$ в $\mathbb{A}$.*

Пусть теперь $\mathbb{A}$ — допустимое множество, то есть KPU-модель, в которой множество ординалов вполне упорядочено (см. [1]). Для произвольного подмножества $B \subseteq A$ определим ранг $\mathrm{rnk}(B)$ следующим образом: $\mathrm{rnk}(B) = \sup\{\mathrm{rnk}(b) | b \in B\}$.

Определение 2. *Рангом внутренней конструктивизируемости допустимого множества $\mathbb{A}$ называется ординал*

$$cr(\mathbb{A}) = \inf\{\mathrm{rnk}(B) | \mathbb{A} \text{ конструктивизируемо внутри } B\}.$$

В следующей теореме получены точные оценки ранга внутренней конструктивизируемости для допустимых множеств вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечных надстроек.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система вычислимой сигнатуры. Тогда*

1) если $\mathfrak{M}$ конечна, то $cr(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) = \omega$,

2) если $\mathfrak{M}$ бесконечна, то $cr(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) \leqslant 2$.

Приступим к доказательству. Пусть, как обычно, для всякого $n \in \omega$ $HF_n(M)$ есть множество элементов из $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ ранга не больше n. Очевидно, что если $\mathfrak{M}$ конечна, то $HF_n(M)$ конечно для всякого $n \in \omega$, поэтому $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не является конструктивизируемым внутри $HF_n(\mathfrak{M})$ при любом $n \in \omega$, откуда следует справедливость пункта 1. Справедливость пункта 2 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{M}$ бесконечна, то наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ является конструктивизируемой внутри $HF_2(M)$.*

Доказательство. Построим $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-конструктивизацию ν стандартной модели арифметики $\mathcal{N} = \langle \omega, \leq, +, \cdot, s, 0 \rangle$ внутри $HF_2(M)$. Воспользуемся для этого кардинальным представлением натуральных чисел на множестве M: каждому $n \in \omega$ сопоставим семейство всех подмножеств M из n элементов, то есть

$$\nu^{-1}(n) \coloneqq \{a \subseteq M \mid |a| = n\}.$$

Нумерацию ν будем называть кардинальной нумерацией. Два подмножества M представляют одно и то же натуральное число, если существует биекция из одного подмножества на другое. Заметим, что для представления функций на M с конечной областью определения в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ достаточно элементов ранга 2. Действительно, всякая функция вида $f = \{\langle u_0, v_0\rangle, \ldots, \langle u_n, v_n\rangle\}$ однозначно определяется любым элементом

$$\{w_0, \ldots, w_n, \{u_0, w_0\}, \ldots, \{u_n, w_n\}, \{u_0, v_0, w_0\}, \ldots, \{u_n, v_n, w_n\}\}$$

ранга 2, где $w_0, \ldots, w_n \in M \setminus \{u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n\}$ — произвольные попарно различные элементы (они существуют вследствие бесконечности M). Пусть C_f — множество всех таких элементов, и пусть

$$C = \cup\{C_f \mid f \ - \text{ конечная функция на } M\}.$$

Тогда $C \subseteq HF_2(M)$, причем легко убедиться, что C является Δ_0-множеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Легко также построить Δ_0-формулы, определяющие по элементу $c \in C$, соответствующему функции f_c, множества $\mathrm{Dom}(f_c)$ и $\mathrm{Rng}(f_c)$ — область определения и область значения фукции f_c, и Δ_0-формулу, определяющую, является ли f_c биекцией. Вследствие этого нумерационная эквивалентность для кардинальной нумерации ν будет Σ-определимой внутри $HF_2(M)$: для любых конечных $a, b \subseteq M$

$$\begin{aligned}\nu(a) = \nu(b) \iff \quad & \exists c \in \ ((f_c - \text{биекция}) \\ & \wedge(\mathrm{Dom}(f_c) = a) \wedge (\mathrm{Rng}(f_c) = b)).\end{aligned}$$

Аналогично, для отношения порядка $\leq$ имеем

$$\nu(a) \leq \nu(b) \iff \exists a' \in HF_1(M)\ ((\nu(a') = \nu(a)) \wedge (a' \subseteq b)),$$

$$\begin{aligned}\nu(a) < \nu(b) \iff \quad & \exists a', b' \in HF_1(M)\ ((\nu(a') = \nu(a)) \wedge (b = a' \cup b') \\ & \wedge(a' \cap b' = \varnothing) \wedge (b' \neq \varnothing)),\end{aligned}$$

откуда, так как $\nu(a) \neq \nu(b) \iff ((\nu(a) < \nu(b)) \vee (\nu(b) < \nu(a)))$, получаем, что нумерационная эквивалентность и отношение порядка являются Δ-определимыми внутри $HF_2(M)$.

Для операций сложения и умножения имеем

$$\begin{aligned}\nu(a) + \nu(b) = \nu(c) \iff \quad & \exists a', b' \in HF_1(M)\ ((\nu(a') = \nu(a)) \wedge (\nu(b) = \nu(b')) \\ & \wedge(c = a' \cup b') \wedge (a' \cap b' = \varnothing)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu(a) \cdot \nu(b) = \nu(c) \iff \quad & \exists c' \in HF_2(M)\ ((\cup c' = c) \wedge (\text{"} c' = \{a'_1, \ldots, a'_{\nu(b)}\}\text{"}) \\ & \wedge(\text{"} a'_i \cap a'_j = \varnothing \text{ при } i \neq j\text{"}) \\ & \wedge(\text{"} \nu(a'_i) = \nu(a) \text{ для всех } i\text{"})),\end{aligned}$$

где запись "$c' = \{a'_1, \dots, a'_{\nu(b)}\}$" есть сокращение для формулы

$$\exists c'' \in HF_1(M)\ ((\nu(c'') = \nu(b)) \wedge \forall a' \in c' \exists! x \in a' (x \in c'')).$$

Таким образом, операции сложения и умножения Δ-определимы внутри $HF_2(M)$ с помощью кардинальной нумерации ν.

Для произвольной системы $\mathfrak{M}$ *схема кодирования* [4] $\mathcal{C}$ состоит из множества $N^{\mathcal{C}} \subseteq M$ и линейного порядка $<^{\mathcal{C}}$ на $N^{\mathcal{C}}$, таких, что

$$\langle N^{\mathcal{C}}, <^{\mathcal{C}} \rangle \simeq \langle \omega, < \rangle,$$

и инъективного отображения $\pi^{\mathcal{C}}$ множества всех конечных последовательностей элементов M в M. Для данной схемы кодирования $\mathcal{C}$ через $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots$ будем обозначать сооответствующие элементы $N^{\mathcal{C}}$ относительно порядка $<^{\mathcal{C}}$. Кроме того, с $\mathcal{C}$ связывается предикат $Seq^{\mathcal{C}}(x)$, истинный, если $x = \pi^{\mathcal{C}}(\emptyset)$ или $x = \pi(\langle m_0, \dots, m_n \rangle)$ для некоторых $m_0, \dots, m_n \in M$ и функции $lh^{\mathcal{C}}(x)$ $pr^{\mathcal{C}}(x, \dot{m})$, выдающие соответственно длину и m-ый элемент набора, представленного элементом x, и выдающие $\dot{0}$ в случае несоответствия аргументов. Система $\mathfrak{M}$ называется *приемлемой (acceptable)* [4], если для $\mathfrak{M}$ существует схема кодирования, в которой $N^{\mathcal{C}}$, $<^{\mathcal{C}}$, $Seq^{\mathcal{C}}$, $lh^{\mathcal{C}}$, $pr^{\mathcal{C}}$ — определимые в $\mathfrak{M}$ отношения и функции.

Построим (многозначную) схему кодирования $\mathcal{C}_*$ конечных последовательностей элементов из M элементами из $HF_2(M)$, для которой $N^{\mathcal{C}_*} = \nu^{-1}(\omega)$, а $Seq^{\mathcal{C}_*}$, $lh^{\mathcal{C}_*}$ и $pr^{\mathcal{C}_*}$ Δ-определимы в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ внутри $HF_2(M)$. Множеством кодов набора $\langle m_0, \dots, m_k \rangle \in M^{k+1}$ в схеме кодирования $\mathcal{C}_*$ будет множество всех элементов вида

$$\{\{m_0, u_0\}, \dots, \{m_k, u_0, \dots, u_k\}, u_0, \dots, u_k\},$$

где элементы $u_0, \dots, u_k$ из M попарно различны, причем $\{u_0, \dots, u_k\} \cap \{m_0, \dots, m_k\} = \varnothing$. Легко убедиться, что отношение $Seq^{\mathcal{C}_*}$ и функции $lh^{\mathcal{C}_*}$ и $pr^{\mathcal{C}_*}$ Δ-определимы внутри $HF_2(M)$.

По кардинальной $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-конструктивизации системы $\mathcal{N}$, схеме кодирования $\mathcal{C}_*$ и произвольной конструктивизации (в смысле классической теории конструктивных моделей) γ допустимого множества $\mathbb{HF}(\omega)$ построим $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-конструктивизацию ν_* для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ внутри $HF_2(M)$ следующим образом. Пусть $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$; положим $(\nu_*)^{-1}(a)$ равным множеству всех элементов вида

$$\{a_\varkappa, \{m_0, u_0\}, \dots, \{m_k, u_0, \dots, u_k\}, u_0, \dots, u_k\},$$

где $\varkappa \in HF(\omega)$ и $m_0, \dots, m_k \in M$ таковы, что $a = \varkappa(m_0, \dots, m_k)$ в смысле [1], множество $a_\varkappa \subseteq M$ удовлетворяет условию $\nu(a_\varkappa) = \gamma^{-1}(\varkappa)$, а элементы $u_0, \ldots, u_k$ из M попарно различны, причем $\{u_0, \ldots, u_k\} \cap \{m_0, \ldots, m_k\} = \{u_0, \ldots, u_k\} \cap a_\varkappa = \{m_0, \ldots, m_k\} \cap a_\varkappa = \varnothing$.

Построенная таким образом нумерация ν_*, является конструктивизацией $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ внутри $HF_2(M)$. Действительно, отношение равенства и отношение принадлежности определяются совместной рекурсией:

$$\varkappa_1(\bar{m}_1) \in \varkappa_2(\bar{m}_2) \iff \exists \varkappa' \in \varkappa_2(\varkappa_1(\bar{m}_1) = \varkappa'(\bar{m}_2)),$$

$$\varkappa_1(\bar{m}_1) \subseteq \varkappa_2(\bar{m}_2) \iff \forall \varkappa' \in \varkappa_1 \exists \varkappa'' \in \varkappa_2(\varkappa'(\bar{m}_1) = \varkappa''(\bar{m}_2)),$$

$$\varkappa_1(\bar{m}_1) = \varkappa_2(\bar{m}_2) \iff (\varkappa_1(\bar{m}_1) \subseteq \varkappa_2(\bar{m}_2)) \wedge (\varkappa_2(\bar{m}_2) \subseteq \varkappa_1(\bar{m}_1)).$$

Поскольку рекурсивная часть такого определения относится к прообразу натурального ряда $\nu^{-1}(\omega)$, найдутся Σ-формулы. определяющие нумерационную эквивалентность и прообраз отношения принадлежности для ν_* внутри $HF_2(M)$. $\Box$

Примером системы $\mathfrak{M}$, для которой $cr(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) = 2$, может служить, например, бесконечная модель теории чистого равенства, или, что более интересно, система $\langle \omega, s \rangle$ натуральных чисел с функцией следования. Действительно, если обозначить через $Th_{WM}(\mathfrak{M})$ теорию системы $\mathfrak{M}$ в языке слабой монадической логики второго порядка, то справедлива следующая

Лемма 1. *Если $\mathfrak{M}$ – бесконечная система, и $Th_{WM}(\mathfrak{M})$ разрешима, то $cr(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) = 2$.*

Доказательство. Предположим, напротив, что $cr(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) < 2$. Тогда, в частности, стандартная модель арифметики $\mathcal{N}$ будет $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-конструктивизируема внутри $HF_1(M)$, а значит, $\mathcal{N}$ интерпретируема в $\mathfrak{M}$ в языке слабой монадической логики второго порядка. Поэтому $Th(\mathcal{N}) \leq_m Th_{WM}(\mathfrak{M})$, и из разрешимости $Th_{WM}(\mathfrak{M})$ следует разрешимость элементарной теории стандартной модели арифметики. Противоречие. $\Box$

Из известного результата Бюхи [3] о разрешимости $Th_{WM}(\langle \omega, s \rangle)$ и предыдущей леммы получаем, что $cr(\mathbb{HF}(\langle \omega, s \rangle)) = 2$.

Примером системы $\mathfrak{M}$, для которой $cr(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) = 0$, очевидно, является стандартная модель арифметики $\mathcal{N}$. Примером системы, для которых ранг внутренней конструктивизируемости наследственно конечной надстройки равен 1, является поле $\mathbb{R}$ действительных чисел. Отметим сначала один общий факт.

Лемма 2. *Если $\mathbb{P}$ — поле характеристики 0, то стандартная модель арифметики конструктивизируема в $\mathbb{HF}(\mathbb{P})$ внутри $HF_1(\mathbb{P})$.*

Доказательство. Построим $\mathbb{HF}(\mathbb{P})$-конструктивизацию μ стандартной модели арифметики $\langle \omega, \leq, +, \cdot, s, 0\rangle$ внутри $HF_1(\mathbb{P})$. Так как $\mathbb{P}$ — поле характеристики 0, то множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 1{+}1, \ldots\}$ является подмножеством $\mathbb{P}$. В качестве искомой конструктивизации возьмем отображение $\mu : \mathbb{N} \to \omega$, при котором $\mu^{-1}(n) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}$ для всех $n \in \omega$.

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{P}$ является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathbb{P})$ внутри $HF_1(\mathbb{P})$: для $t \in \mathbb{P}$ имеем

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{N} \iff \mathbb{HF}(\mathbb{P}) \models\ & \exists a\ ((a \subseteq \mathbb{P}) \wedge (0 \in a) \wedge \forall x \in a \\ & (x \neq 0 \to \exists y \in a(x = y + 1)) \wedge (t = \max(a)), \end{aligned}$$

где $t = \max(a)$ есть обозначение для формулы $\neg(t + 1 \in a)$. Нумерационная эквивалентность для μ совпадает с отношением равенства на $\mathbb{N}$, отношение порядка Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathbb{P})$ внутри $HF_1(\mathbb{P})$: для $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu(n) \leq \mu(m) \iff\ & \mathbb{HF}(\mathbb{P}) \models \exists a \exists b\ ((a = \{0, 1, \ldots, n\}) \\ & \wedge (b = \{0, 1, \ldots, m\}) \wedge (a \subseteq b)), \end{aligned}$$

$$\mu(n) \not\leq \mu(m) \iff \mu(m) < \mu(n) \iff (\mu(m) \leq \mu(n)) \wedge (n \neq m)).$$

Операции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ индуцируются соответствующими операциями поля $\mathbb{P}$, а значит Δ-определимы в $\mathbb{HF}(\mathbb{P})$ внутри $HF_1(\mathbb{P})$. $\square$

Следствие 1. *Если $\mathbb{P}$ — поле характеристики 0, то слабая монадическая теория второго порядка $Th_{WM}(\mathbb{P})$ неразрешима. В частности, неразрешимы слабые монадические теории второго порядка $Th_{WM}(\mathbb{R})$, $Th_{WM}(\mathbb{Q}_p)$ и $Th_{WM}(\mathbb{C})$.*

Теорема 3. $cr(\mathbb{HF}(\mathbb{R})) = 1$.

Доказательство. По лемме 2, стандартная модель арифметики конструктивизируема в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ внутри $HF_1(\mathbb{R})$. Для существования конструктивизации $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ внутри $HF_1(\mathbb{R})$ необходимым и достаточным условием является существования Σ-определимой внутри $HF_1(\mathbb{R})$ схемы кодирования конечных последовательностей действительных чисел.

Приведем пример схемы кодирования конечных последовательностей действительных чисел парами конечных множеств действительных чисел. Набору $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие пару конечных множеств $\langle \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}, \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}\rangle$, где элементы $q_0, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{R}$ определяются следующим образом: находим кратчайшее расстояние

$d = \min\{|a_i - a_j| \ |i, j < n, a_i \neq a_j\}$ между различными элементами набора, и полагаем $q_i = a_i + \frac{d}{2^{i+2}}$ для всех $i < n$ (при таком определении $q_0, \ldots, q_{n-1}$ попарно различны, даже если среди $a_0, \ldots, a_{n-1}$ имеются одинаковые элементы). Множество пар, кодирующих конечные последовательности, будет Σ-определимо внутри $HF_1(\mathbb{R})$ вследствие существования соответствующей конструктивизации для натуральных чисел. Проектирующая функция будет Δ-определимой внутри $HF_1(\mathbb{R})$: $a_i = pr(\langle\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}, \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}\rangle, \mu^{-1}(i))$ тогда и только тогда, когда существует $q_i \in \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$, для которого $|a_i - q_i| = \frac{d}{2^{i+2}}$. Рассуждая аналогично, легко показать, что функция lh в данной схеме кодирования также Δ-определима внутри $HF_1(\mathbb{R})$.

Определим конструктивизацию μ_* допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ внутри $HF_1(\mathbb{R})$ следующим образом. Пусть $a \in \mathbb{HF}(\mathbb{R})$; положим $(\mu_*)^{-1}(a)$ равным множеству всех троек вида

$$\langle \mu^{-1}(\gamma(\varkappa)), \{a_0, \ldots, a_n\}, \{q_0, \ldots, q_n\}\rangle,$$

где $\varkappa \in HF(\omega)$ и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ таковы, что $a = \varkappa(a_0, \ldots, a_n)$, $\gamma : \omega \to HF(\omega)$ — конструктивизация допустимого множества $\mathbb{HF}(\omega)$, и пара $\langle\{a_0, \ldots, a_n\}, \{q_0, \ldots, q_n\}\rangle$ кодирует набор $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ в описанной выше схеме кодирования.

Определенное таким образом отображение μ_* является конструктивизацией (размерности 3) допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ внутри $HF_1(\mathbb{R})$. $\square$

Из теоремы 1, в частности, вытекают конструктивные аналоги некоторых результатов (а именно, теорем 18, 19, и 20) из [5] об определимости в многосортных языках, в которых тип переменных определяет ранг допустимых значений этих переменных.

Список литературы

[1] *Ю.Л. Ершов,* Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[2] *J. Barwise,* Admissible sets and structures, Berlin, 1975.

[3] *J.R. Buchi,* Weak second order arithmetic and finite automata, Z. Math. Logik Grundl. Math.,**6**, (1960), 66 – 92.

[4] *Y.N. Moschovakis,* Elementary induction on abstract structures, Amsterdam, 1974.

[5] *R. Montague,* Recursion theory as a branch of model theory, Proceedings of the Third International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Amsterdam, 1967, 63 – 86.

СТУКАЧЕВ Алексей Ильич,
РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
проспект Коптюга, 4,
Институт Математики СО РАН.
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5 **А.И. Стукачев.** О внутренней конструктивизируемости допустимых множеств.

Рассматривается проблема внутренней конструктивизируемости допустимых множеств с использованием элементов ограниченного ранга. Для случая наследственно конечных надстроек получена точная верхняя оценка ранга внутренней конструктивизируемости: он равен ω для надстроек над конечными системами и не превосходит 2 для надстроек над бесконечными системами. Приведены естественные примеры систем, наследственно конечные надстройки над которыми имеют ранг внутренней конструктивизируемости 0, 1, 2. Показано, что надстройка над полем действительных чисел имеет ранг внутренней конструктивизируемости 1.

UDK 510.5 **A.I. Stukachev.** On inner constructivizability of admissible sets.

We consider a problem of inner constructivizability of admissible sets by means of elements of a bounded rank. For hereditary finite superstructures we find the precise estimates for the rank of inner constructivizability: it is equal ω for superstructures over finite structures and less or equal 2 otherwise. We introduce examples of structures with hereditary finite superstructures with ranks 0, 1, 2. It is shown that hereditary finite superstructure over field of real numbers has rank 1.