S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том x, стр. y–z (201..) УДК 510.5
MSC 03D45

О КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ ВЫЧИСЛИМЫХ СИГНАТУР

А.И. Стукачев

Abstract. We extend the notion of HF-superstructure from the case of structures with finite signatures to the case of structures with computable signatures. It is shown that such expansion preserves some known properties of HF-superstructures. Namely, we prove that the property of quasiregularity of a structure is sufficient for qausiresolvability of the corresponding HF-superstructure.

Keywords: computability, computable structures, admissible sets, HF-superstructures.

1. Введение

Целью настоящей заметки является распространение ряда результатов, известных для обобщенной вычислимости в HF-надстройках над структурами с конечными сигнатурами [1, 2], на случай структур с бесконечными вычислимыми сигнатурами. Необходимость такого распространения обусловлена, как минимум, двумя обстоятельствами. Во-первых, даже теории, имеющие конечную сигнатуру, естественным образом порождают структуры, сигнатура которых бесконечна: скулемовские обогащения, обогащения Морли, и т.п.. Оказывается, что от сложности строения таких производных структур по отношению к исходной структуре зависит наличие или отсутствие у соответствующих HF-вычислимостей ряда свойств (например, свойства униформизации, см. [3, 4]). Во-вторых, в классической теории конструктивных моделей случай структур

Stukachev, A.I., On quasiregular structures with computable signatures.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 8227), Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты РФФИ 11-01-00688-а, РФФИ 13-01-91001-АНФ-а), и государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-276.2012.1).

Поступила ... , опубликована ...

с вычислимыми сигнатурами изначально предполагается основным. Поэтому, если рассматримать обобщенную вычислимость в HF-надстройках как аппарат, позволяющий распространить теорию конструктивных моделей на случай структур произвольной мощности, требование конечности сигнатур рассматриваемых структур (существенное в случае допустимых множеств более сложных, чем HF-надстройки), в данном случае нельзя назвать естественным.

2. Основные определения

Пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой предикатной сигнатуры $\sigma = \langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \ldots\rangle$. Определим *наследственно конечную надстройку над* $\mathfrak{M}$ как структуру $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определяемой по сигнатуре σ конечной сигнатуры $\sigma' = \langle U^1, \in^2, \mathrm{Sat}^2\rangle$, с носителем $HF(M)$ и естественной интерпретацией символов U (т.е. $U^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$) и $\in$. Интерпретация предиката Sat на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ соответствует интерпретации в $\mathfrak{M}$ символов сигнатуры σ с зафиксированной выше нумерацией: для любых $a, b \in HF(M)$, полагаем $\mathrm{Sat}^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(a,b)$ истинным в том и только том случае, когда $a \in \omega$, $b = \langle m_0, \ldots, m_{n_a-1}\rangle \in M^{n_a}$, и $P_a^{\mathfrak{M}}(m_0, \ldots, m_{n_a-1})$ истинно. Заметим, что данное определение естественным образом согласовано с аналогичным классическим определением из [1, 2] для структур с конечными сигнатурами. Кроме того, так определенная структура $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ является моделью KPU и допустимым множеством, а, следовательно, по теореме Ганди обладает универсальным Σ-предикатом (см. [1, 2]). Однако универсальная Σ-функция, в общем случае, может не существовать даже для случая HF-надстроек [2]. В настоящей заметке введенное в [2] свойство квазирезольвентности, являющееся достаточным условием для существования универсальной Σ-функции, установлено для HF-надстроек над квазирегулярными структурами вычислимых сигнатур [8].

Напомним "локальную" версию $s\Sigma$-сводимости [3, 5, 6, 7, 4], в которой предполагается, что исходная структура $\mathfrak{B}$ имеет основное множество, состоящее из праэлементов (некоторого "внешнего" допустимого множества). При таком ограничении это отношение будет транзитивным в случае, когда все рассматриваемые структуры обладают указанным свойством. Именно такой случай рассматривается в данной заметке.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы вычислимых предикатных сигнатур σ_1 и σ_2, соответственно. Система $\mathfrak{A}$ *$s\Sigma$-сводится* к системе $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если

1) $A \subseteq HF(B)$ является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ подмножеством;
2) атомарная диаграмма $D(\mathfrak{A})$ (являющаяся подмножеством $HF(B)$) является Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ относительно A подмножеством в следующем смысле: если $\sigma_1 = \langle P_0^{n_1}, P_1^{n_2}, \ldots\rangle$ — вычислимая предикатная сигнатура системы $\mathfrak{A}$, то существует вычислимая последовательность Σ-формул

$$\Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \Psi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \Phi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y), \Psi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y),$$

$$\Phi_2(x_0, \ldots, x_{n_2-1}, y), \Psi_2(x_0, \ldots, x_{n_2-1}, y), \ldots$$

сигнатуры σ_2', и параметер $c \in HF(B)$ такие, что, для всех $k \in \omega$, $\Phi_k^{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}(\bar{x}, c) \cap A^{n_k} = A^{n_k} \setminus \Psi_k^{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}(\bar{x}, c)$ и $P_k^{\mathfrak{A}} = \Phi_k^{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}(\bar{x}, c) \cap A^{n_k}$ является интерпретацией символа P_k на системе $\mathfrak{A}$.

При указанных выше ограничениях на носители рассматриваемых структур, отношение $s\Sigma$-эквивалентности определяется стантартным образом: структура $\mathfrak{A}$ *$s\Sigma$-эквивалентна* структуре $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{A}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой сигнатуры σ. Ее *морлизацией* будем называть всякую структуру $\mathfrak{M}^{Morley}$ вычислимой сигнатуры σ^{Morley}, такую, что, для множества Form_σ формул сигнатуры σ,

1) $\sigma^{Morley} \leftrightharpoons \sigma \cup \{P_\varphi(x_0, \ldots, x_{n_\varphi - 1}) \in \mathrm{Form}_\sigma,\ n_\varphi > 0\}$;
2) $\mathfrak{M}^{Morley}$ является обогащением $\mathfrak{M}$: ее носитель есть множество M, интерпретация символов сигнатуры σ совпадает с соответствующей интерпретацией в $\mathfrak{M}$;
3) $(P_\varphi)^{\mathfrak{M}^{Morley}} = \varphi(x_0, \ldots, x_{n_\varphi - 1})^{\mathfrak{M}}$ для всех $\varphi(x_0, \ldots, x_{n_\varphi - 1}) \in \mathrm{Form}_\sigma$, т.ч. $n_\varphi > 0$.

Морлизация структуры единственна с точностью до $s\Sigma$-эквивалентности, если предполагается, что зафиксирована связанная с вычислимой нумерацией символов сигнатуры σ геделевская нумерация формул из Form_σ.

В случае, когда для морлизации $\mathfrak{M}^{Morley}$ структуры $\mathfrak{M}$ имеет место

$$\mathfrak{M}^{Morley} \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M},$$

структуру $\mathfrak{M}$ будем называть *квазирегулярной.* Отметим, что структуры со свойством эффективной модельной полноты [9, 10] и, в частности, структуры с регулярной элементарной теорией [2], являются квазирегулярными. Важным примером квазирегулярной структуры, элементарная теория которой не является регулярной, является обогащение поля действительных чисел с помощью экспоненциальной функции [9, 10].

Ряд свойств, которыми обладают модели регулярных теорий конечных сигнатур, сохраняется и для квазирегулярных структур с вычислимыми сигнатурами. В частности, это относится к свойству квазирезольвентности [2] соответствующих HF-надстроек. Содержанием данной заметки является доказательство этого факта, причем само доказательство получается как модификация доказательства Ю.Л.Ершова для регулярного случая.

Напомним основные определения и обозначения из [2]. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная структура вычислимой предикатной сигнатуры σ. В допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определим последовательность

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$$

транзитивных Δ-подмножеств следующим образом. Для $n \in \omega$, пусть $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — множество "праэлементов", соответствующих натуральным числам (но не являющихся ни ординалами, ни праэлементами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$). Аналогичным образом определяется множество $\underline{\omega} = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$. Полагаем

$$B_0 \leftrightharpoons M;$$

$$B_n \leftrightharpoons \{\varkappa(\bar{m}) \mid \bar{m} \in M^n, \varkappa \in \mathrm{HF}_n(\underline{n})\},\ n \in \omega, n > 0,$$

где $\mathrm{HF}_n(\underline{n}) (\subseteq \mathrm{HF}(\underline{n}) \subseteq \mathrm{HF}(\underline{\omega}))$ — конечное семейство всех элементов из $\mathrm{HF}(\underline{n})$ ранга не больше n.

Как отмечено в [2], $\mathrm{HF}(M) = \cup_{n\in\omega} B_n$, и предикат

$$\{\langle \alpha, n \rangle \mid a \in \mathrm{HF}(M),\ n \in \omega,\ a \in B_n\}$$

является Δ-предикатом на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Если, кроме того, Δ-предикатом является предикат
$$\{\langle n, b, m\rangle \mid n, m \in \omega,\ \langle n, b\rangle \in \mathrm{Tr}_{B_m}\},$$
где, обозначая через $\mathrm{FV}(\Phi)$ множество свободных переменных формулы Φ,
$$\mathrm{Tr}_B \leftrightharpoons \{\langle n, b\rangle \mid n \text{ — геделевский номер номер формулы } \Phi \text{ сигнатуры } \sigma',$$
$$b \text{ определяет означивание } \gamma_b : \mathrm{FV}(\Phi) \to B \text{ и } \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \restriction B \models \Phi[\gamma_b]\}$$
то последовательность $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$ является *квазирезольвентой* для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ в смысле [2].

3. Основной результат

Свойство квазирегулярности, установленное Ю.Л.Ершовым для HF-надстроек над моделями регулярных теорий конечных сигнатур, справедливо и в случае HF-надстроек над квазирегулярными структурами вычислимых сигнатур.

Теорема 1. Если $\mathfrak{M}$ — квазирегулярная структура, то последовательность
$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$$
является квазирезольвентой для допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что все параметры в Σ-формулах, подтверждающих квазирегулярность структуры $\mathfrak{M}$, являются праэлементами. Укажем, как для фиксированного $n \in \omega$, $n > 0$, по любой формуле без параметров Φ сигнатуры σ' эффективно построить Σ-формулу $\tilde{\Phi}$ сигнатуры σ', такую, что Φ и $\tilde{\Phi}$ имеют одинаковые множества свободных переменных и
$$\Phi \equiv_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})\restriction B_n} \tilde{\Phi}.$$

Доказательство теоремы включает в себя доказательство следующего утверждения, которое не использует квазирезольвентность структуры $\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой предикатной сигнатуры σ. Для всякой формулы без параметров $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ сигнатуры σ', всякого $n \in \omega$, $n > 0$, и всякого набора $\overline{\varkappa} = \langle \varkappa_0, \ldots, \varkappa_k\rangle \in HF_n(\underline{n})^{k+1}$, эффективно определяется формула $\Phi_{n,\overline{\varkappa}}(\bar{u}^0, \ldots, \bar{u}^k)$ сингатуры $\sigma \restriction n = \langle P_0^{s_0}, \ldots, P_{n-1}^{s_{n-1}}\rangle$, такая, что, для любых $\overline{m}^0, \ldots, \overline{m}^k \in M^n$,*
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \restriction B_n \models \Phi(\varkappa_0(\overline{m}^0), \ldots, \varkappa_k(\overline{m}^k)) \iff \mathfrak{M} \models \Phi_{n,\overline{\varkappa}}(\overline{m}^0, \ldots, \overline{m}^k).$$

Доказательство. Будем использовать следующие понятия и обозначения из [2]. Для элемента $\varkappa \in HF_n(\underline{n})$, через $t_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n-1})$ обозначается терм сигнатуры $\{\cup^2, \{\}^1, \varnothing\}$ от прапеременных $u_0, \ldots, u_{n-1}$ такой, что для любой интерпретации $\gamma : \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \to M$ верно $t_\varkappa^{(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}),\cup,\{\},\varnothing)}[\gamma] = \varkappa(\overline{m})$, где $\gamma(u_i) = m_i$ для всех $i < n$, $\overline{m} = \langle m_0, \ldots, m_{n-1}\rangle$. (Для того, чтобы операция $\cup$ была всюду определена, полагаем $a \cup b = a' \cup b'$, где $c' = c$, если $c \in HF(M)^*$, и $c' = \varnothing$, если $c \in M$.)

Пусть $\bar{u}^0 = \langle u_0^0, \ldots, u_{n-1}^0\rangle, \ldots, \bar{u}^k = \langle u_0^k, \ldots, u_{n-1}^k\rangle$ — наборы попарно различных прапеременных, через $\Phi'_{\overline{\varkappa}}(\bar{u}^0, \ldots, \bar{u}^k)$ обозначим формулу
$$(\Phi)^{x_0,\ldots,x_k}_{t_{\varkappa_0}(\bar{u}^0),\ldots,t_{\varkappa_k}(\bar{u}^k)}.$$

Формула $\Phi'_{\overline{\varkappa}}$ является формулой сигнатуры $\sigma' \cup \{\cup^2, \{\}^1, \varnothing\}$ с двумя сортами переменных: общие переменные $x_0, x_1, \ldots$ и прапеременные $u_0, u_1, \ldots$. Не уменьшая общности, можно считать, что формула $\Phi'_{\overline{\varkappa}}$ не содержат ограниченных кванторов.

Этап 1. Используем процедуру $\Phi \mapsto \overline{\Phi}$ из [2] элиминации кванторов по общим переменным для таких формул. Если Φ не содержит кванторов по общим переменным, то $\overline{\Phi} \leftrightharpoons \Phi$; если $\Phi = (\Phi_0 q \Phi_1)$, $q \in \{\wedge, \vee, \to\}$, то $\overline{\Phi} \leftrightharpoons (\overline{\Phi_0} q \overline{\Phi_1})$; если $\Phi = \neg\Phi_0$, то $\overline{\Phi} \leftrightharpoons \neg\overline{\Phi}$; если $\Phi = Qu\Phi_0$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $\overline{\Phi} \leftrightharpoons Qu\overline{\Phi_0}$; если $\Phi = \exists x \Phi_0$, то

$$\overline{\Phi} \leftrightharpoons \bigvee_{\varkappa \in HF_n(\underline{n})} \exists u_0 \ldots \exists u_{n-1} (\overline{\Phi_0})^x_{t_\varkappa(\bar{u})};$$

если $\Phi = \forall x \Phi_0$, то

$$\overline{\Phi} \leftrightharpoons \bigwedge_{\varkappa \in HF_n(\underline{n})} \forall u_0 \ldots \forall u_{n-1} (\overline{\Phi_0})^x_{t_\varkappa(\bar{u})}.$$

Этап 2. Для любой пары термов t_0, t_1 сигнатуры $\langle \varnothing, \{\}, \cup \rangle$ над прапеременными $u_0, \ldots, u_{n-1}$, можно эффективно определить формулы Φ_{t_0,t_1} и Ψ_{t_0,t_1} пустой сигнатуры такие, что $\mathrm{FV}(\Phi_{t_0,t_1}) = \mathrm{FV}(\Psi_{t_0,t_1}) = \mathrm{FV}(t_0) \cup \mathrm{FV}(t_1)$, и для любого означивания $\gamma : \mathrm{FV}(t_0 = t_1) \to M$ справедливы соотношения:

$$t_0^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \in t_1^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \iff \mathfrak{M} \models \Phi_{t_0,t_1}[\gamma]$$
$$t_0^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \subseteq t_1^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \iff \mathfrak{M} \models \Psi_{t_0,t_1}[\gamma].$$

Доказательство этого факта проводится индукцией по сложности термов t_0, t_1 и буквально следует соответствующим рассуждениям из [2]. Пусть τ обозначает предложение $\exists x(x = x)$, а $\sim \tau$ — предложение $\exists x(x \neq x)$. Полагаем

1) для $t_0 = u_i$
   - если $t_1 = u_j$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons (u_i = u_j)$;
   - если $t_1 = \varnothing$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \tau$;
   - если $t_1 = \{t_1'\}$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Psi_{t_1',u_i}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \tau$;
   - если $t_1 = (t_1' \cup t_1'')$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{u_i,t_1'} \vee \Phi_{u_i,t_1''}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \tau$;

2) для $t_0 = \varnothing$
   - если $t_1 = u_i$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$;
   - если $t_1 = \varnothing$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \tau$;
   - если $t_1 = \{t_1'\}$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Psi_{t_1',\varnothing} \wedge \Psi_{\varnothing,t_1'}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \tau$;
   - если $t_1 = (t_1' \cup t_1'')$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{\varnothing,t_1'} \vee \Phi_{\varnothing,t_1''}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \tau$;

3) для $t_0 = \{t_0'\}$
   - если $t_1 = u_i$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$;
   - если $t_1 = \varnothing$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$;
   - если $t_1 = \{t_1'\}$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Psi_{t_0,t_1'} \wedge \Psi_{t_1',t_0}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{t_0',t_1}$;
   - если $t_1 = (t_1' \cup t_1'')$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{t_0,t_1'} \vee \Phi_{t_0,t_1''}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{t_0',t_1}$;

4) для $t_0 = (t_0' \cup t_0'')$
   - если $t_1 = u_j$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$;
   - если $t_1 = \varnothing$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \sim \tau$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Psi_{t_0',\varnothing} \wedge \Psi_{t_0'',\varnothing}$;
   - если $t_1 = \{t_1'\}$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Psi_{t_0,t_1'}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{t_0',t_1} \wedge \Phi_{t_0'',t_1}$;
   - если $t_1 = (t_1' \cup t_1'')$, то $\Phi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{t_0,t_1'} \vee \Phi_{t_0,t_1''}$, $\Psi_{t_0,t_1} \leftrightharpoons \Phi_{t_0',t_1} \wedge \Psi_{t_0'',t_1}$.

Итак, $\overline{\Phi'_{\overline{\varkappa}}}(\bar{u})$ — формула сигнатуры $\sigma' \cup \{\cup, \{\}, \varnothing\}$, не имеющая вхождений общих переменных. Произведем над ней следующие преобразования. Учитывая, что B_n состоит из элементов ранга не выше n и, в частности, $B_n \cap \omega = n$, любое вхождение подформулы вида $\mathrm{Sat}(t_0, t_1)$ заменяем на формулу

$$\bigvee_{\{k\in\omega | k<n, M^{s_k}\subseteq B_n\}} ((t_0 = k)\wedge\exists u_0\ldots\exists u_{s_k-1}((t_1 = \langle u_0,\ldots,u_{s_k-1}\rangle)\wedge P_k(u_0,\ldots,u_{s_k-1}))),$$

если $\{k \in \omega | k < n, M^{s_k} \subseteq B_n\} \neq \varnothing$, и на формулу $\sim\tau$, в противном случае.

Далее, в полученной формуле любое вхождение элементарной подформулы вида $(t_0 \in t_1)$ заменяем на формулу Φ_{t_0,t_1}, а любое вхождение подформулы вида $(t_0 = t_1)$, такой, что или t_0 или t_1 не является прапеременной, заменяем на формулу $(\Psi_{t_0,t_1} \wedge \Psi_{t_1,t_0})$. Полученная в результате формула $\Phi_{n,\overline{\varkappa}}(\bar{u}^0,\ldots,\bar{u}^k)$ является искомой. $\square$

Вернемся к построению формулы $\tilde{\Phi}$ по Φ. Пусть Φ — произвольная формула сигнатуры σ', и пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_0,\ldots,x_k\}$.

Вследствие квазирегулярности $\mathfrak{M}$, по любой формуле $\Phi(\bar{u})$ сигнатуры σ можно эффективно найти эквивалентную ей над структурой $\mathfrak{M}$ Σ-формулу $\Phi^*(\bar{u})$. Пользуясь этим, от формулы $\Phi_{n,\overline{\varkappa}}$, построенной в лемме 1, перейдем к эквивалентной ей Σ-формуле $\Phi^*_{n,\overline{\varkappa}}$. Для любого $\varkappa \in HF_n(\underline{n})$ можно эффективно построить Σ-формулу $E_\varkappa(x,\bar{u})$ такую, что

$$E_\varkappa(x,\bar{u}) \equiv_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} (x = t_\varkappa(\bar{u})).$$

Полагаем

$$\tilde{\Phi}_0(x_0,\ldots,x_k) \leftrightharpoons \bigvee_{\bar{\varkappa}\in HF_n(\underline{n})^{k+1}} \exists\bar{u}^0\ldots\exists\bar{u}^k((\wedge_{i\leqslant k}E_{\varkappa_i}(x_i,\bar{u}^i)) \wedge \Phi^*_{n,\overline{\varkappa}}(\bar{u}^0,\ldots,\bar{u}^k)).$$

Из отмеченных выше эквивалентностей следует, что для любого означивания $\gamma : \{x_0,\ldots,x_k\} \to B_n$ справедливы эквивалентности

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \restriction B_n \models \Phi[\gamma] \iff$$

$$\iff (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \cup, \{\}, \varnothing) \models \bigvee_{\bar{\varkappa}\in HF_n(\underline{n})^{k+1}} \exists\bar{u}^0\ldots\exists\bar{u}^k$$

$$((\wedge_{i\leqslant k}(x_i = t_{\varkappa_i}(\bar{u}^i))) \wedge \overline{\Phi}_{n,\overline{\varkappa}})[\gamma] \iff \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \tilde{\Phi}_0[\gamma].$$

Формула $\tilde{\Phi}_0$ является Σ-формулой, однако она содержит два вида переменных — общие $x_0,\ldots,x_k$ и прапеременные $\bar{u}^0,\ldots,\bar{u}^k$. Последний шаг в построении $\tilde{\Phi}$ состоит в переходе в формуле $\tilde{\Phi}_0$ от списка прапеременных $\bar{u}^0,\ldots,\bar{u}^k$ к списку общих переменных $\bar{x}^0,\ldots,\bar{x}^k$: полагаем

$$\tilde{\Phi}(x_0,\ldots,x_k) \leftrightharpoons \bigvee_{\bar{\varkappa}\in HF_n(\underline{n})^{k+1}} (\exists\bar{x}^0\ldots\exists\bar{x}^k$$

$$((\wedge_{i\leqslant k}\wedge_{j<n} U(x^i_j)) \wedge (\wedge_{i\leqslant k}E_{\varkappa_i}(x_i,\bar{x}^i)) \wedge \Phi^*_{n,\overline{\varkappa}}(\bar{x}^0,\ldots,\bar{x}^k)).$$

Ввиду эффективности построения Σ-формулы $\tilde{\Phi}$ по Φ и n получаем, что Sat_{B_n} является Σ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (и даже Δ-предикатом), что и требовалось показать.

$\square$

Автор благодарен А.С.Морозову, указавшему на существенные неточности в первоначальном тексте заметки и сделавшему ряд полезных замечаний, позволивших улучшить изложение. Автор также признателен за замечания анонимному рецензенту работы [8], в первоначальном тексте которой основой результат данной заметки был приведен без подробного доказательства.

Список литературы

[1] *J. Barwise*, Admissible Sets and Strucrures, Springer-Velag, Berlin (1975).
[2] *Ю.Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Научная книга, Новосибирск (1996).
[3] *A.I. Stukachev*, Uniformization property in hereditary finite superstructures, Sib. Adv. Math. **7** (1997), 123–132.
[4] *A.I. Stukachev*, Effective model theory: an approach via Σ-definability, Lect. Notes in Logic, **41** (2013), 164–197.
[5] *V. Baleva*, The jump operation for structure degrees, Arch. Math. Logic, **45** (2006), 249–265.
[6] *А.И. Стукачев*, Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней, Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 182–190.
[7] *A.I. Stukachev*, A Jump Inversion Theorem for the semilattices of Σ-degrees, Sib. Adv. Math., **20** (2010), 68–74.
[8] *А.И. Стукачев*, О свойствах $s\Sigma$-сводимости, Алгебра и логика (сдано в печать).
[9] *A.J. Wilkie*, Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function, J. Amer. Math. Soc., **9** (1996), 1051–1094.
[10] *A.J. Macintyre and A.J. Wilkie*, On the decidability of the real exponential field, in Kreiseliana, About and Around Georg Kreisel', A.K. Peters (1996), 441–467.

Алексей Ильич Стукачев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: aistu@math.nsc.ru