Существование арифметического корня степени n

<u>Теорема</u> (о существовании корня). Пусть $n \in \mathbb{N}$ – натуральное число, и пусть $a \in \mathbb{R}, a > 0$ – положительное действительное число. Тогда существует и единственно действит. число $b \in \mathbb{R}, b > 0$, т.ч. $\boxed{b^n = a}$ (b обознач. $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ и назыв. <u>арифметическим корнем степени n из a</u>.

<u>Док-во.</u> ① <u>Единственность</u> легко следует из того, что $\forall b, b' > 0 \ (b' < b \Rightarrow (b')^n < b^n)$.

② <u>Существование</u>. Если сущ. $b \in \mathbb{Q}, b > 0$, т.ч. $b^n = a$, то теорема доказана, поэтому можно считать, что такого рационального числа b нет. Построим <u>сечение</u> мн-ва $\mathbb{Q}$, определив мн-ва

$$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ или } (x > 0 \text{ и } x^n < a)\} \text{ и}$$
$$R = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > 0 \text{ и } y^n > a\}.$$

Легко убедиться, что $L \neq \emptyset, R \neq \emptyset$, и что L содержит и положит. числа. Например, если взять $m \in \mathbb{N}$ т.ч. $\frac{1}{m} < a < m$, то $\left(\frac{1}{m}\right)^n < a < m^n$, поэтому $\frac{1}{m} \in L$.

По мн-вам L и R легко построить

вложенную последовательность стягивающихся отрезков $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_k \supseteq$, левые концы которых явл. элементами мн-ва L, а правые — мн-ва R, и $\lim\limits_{k\to\infty}(y_k - x_k) = 0$ (здесь $I_k = [x_k, y_k]$), и, по аксиоме Кантора-Дедекинда, сущ. единственное действит. число $b \in \mathbb{R}$, т.ч. $b \in I_k \; \forall k \in \mathbb{N}$. Покажем, что $b^n = a$, (т.е. $b = \sqrt[n]{a}$).

Действительно, если $x; y \in \mathbb{Q}$ таковы, что $0 < x < b < y$, то $x^n < b^n < y^n$. Т.к. $x \in L$ и $y \in R$, то, по опред. этих мн-в, и $x^n < a < y^n$. Но разность $y - x$ может быть сделана меньше любого числа $\varepsilon > 0$, причем можно считать, что $y < y_0$ для некот. фиксир. числа y_0. Имеем
$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + x\cdot y^{n-2} + \ldots + x^{n-1}) <$$
$$< \varepsilon \cdot n \cdot (y_0)^{n-1},$$
т.е. также может быть сделана сколь угодно малой. Т.о., можно построить вложенную посл-ть стягивающихся отрезков, содержащих одновременно действ. числа b^n и a. По аксиоме Кантора-Дедекинда, $b^n = a$. $\square$

Док-но