Степень с произвольным действительным показателем

Опр. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, и пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольное действит. число. Определим значение $\boxed{a^\alpha \in \mathbb{R}}$ след. образом: полагаем $\boxed{a^\alpha \leftrightharpoons \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}}$, где $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность рациональных чисел т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \alpha$.

Теорема (о корректности определения a^α)
Данное выше определение корректно:
1) существует посл-ть $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $q_n \in \mathbb{Q}$ т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \alpha$ и последовательность $\{a^{q_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет предел (он и обозн. a^α);
2) если $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(q_n, r_n \in \mathbb{Q})$ – произвольные послед-ти рац. чисел, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, то посл-ти $\{a^{q_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\{a^{r_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ также сходятся, и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^\alpha$.

Док-во. 1) если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то $\alpha = \frac{m}{k}$ для некот $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому $a^\alpha = \sqrt[k]{a^m} \in \mathbb{R}$ существует по теор. о существов. корня. $\square$

т.о., достаточно взять $q_n = \frac{m}{k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Поэтому ограничимся случаем, когда $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (т.е. α – иррац. число). Можно также считать, что $a > 1$, т.к. для $a = 1$, очевидно, $a^\alpha = 1$, а для $a \in (0, 1)$ достаточно перейти к рассм. $a' = \frac{1}{a}$.

Установим вначале след. важное утвержд.

Теорема (нер-во Бернулли). $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$, т.ч. $x \geqslant -1$, $\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx}$

◁ Индукция по n.
$n = 1$: очевидно.
$n \mapsto n+1$: пусть $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Имеем

$$(1+x)^{n+1} = \underset{\geqslant 0}{(1+x)} \cdot (1+x)^n \geqslant (1+x) \cdot (1+nx) =$$

$$= 1 + nx + x + n \cdot x^2 \geqslant 1 + (n+1)x. \;▷$$

Полагая в нер-ве Бернулли $x = \sqrt[n]{a} - 1$, получим $a \geqslant 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$, т.е. $\sqrt[n]{a} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n}$

Для определения a^α выберем последовательность вложенных стягивающихся отрезков $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ с рац. границами, ~~содер~~ определяющую ~~точку~~ число α: $I_n = [q_n, r_n]$, $r_n - q_n < \frac{1}{n}$, и

$q_n < \alpha < r_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$a^{r_n} - a^{q_n} = a^{q_n}\cdot\left(a^{r_n - q_n} - 1\right) \le a^{q_n}\cdot\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \le$$
$$\le a^{q_n}\cdot\frac{(a-1)}{n} \le a^{r_1}\cdot\frac{(a-1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Т.о., последовательность вложенных отрезков $I'_1 \supseteq I'_2 \supseteq \ldots \supseteq I'_n \supseteq \ldots$, где $I'_n \leftrightharpoons [a^{q_n}, a^{r_n}]$, также яв. стягивающейся ($\lim_{n\to\infty}(a^{r_n} - a^{q_n}) = 0$). Поэтому, по аксиоме Кантора-Дедекинда сущ. единственное число $\xi \in \mathbb{R}$, содержащееся во всех отрезках I'_n, $n \in \mathbb{N}$. Т.к., в частности $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$ и $\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \xi$, то пункт 1 теоремы установлен.

2) следует из 1 и доказывается аналогичным способом (упр.)

Док-но