# Показат. и логарифмич. функции

## 1. Степень с действит. показателем

$$\boxed{\underset{а)}{\mathbb{N}} \subset \underset{б)}{\mathbb{Z}} \subset \underset{в)}{\mathbb{Q}} \subset \underset{г)}{\mathbb{R}}}$$

а) Пусть $a \in \mathbb{R}$ - произвольн. действ. число

Для любого $n \in \mathbb{N}$, число $a^n \in \mathbb{R}$ опред. индукцией по $n$:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases}, \text{ т.е. } \boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}}$$

б) Пусть $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $a \neq 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$, полагаем $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$. Кроме того, полагаем $\boxed{a^0 = 1}$

$0^0$ не определено!

в) Пусть $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $a > 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$, арифметическим корнем степени $n$ из числа $a$.

наз действит. число $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ [2]
т.ч. $\underline{b^n = a}$ Такое $b$ существует
и единственно (док-во позже)
и обозн. $\boxed{\sqrt[n]{a}}$. Т.о., $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ и любого $n \in \mathbb{N}$,
полагаем $\boxed{a^{\frac{m}{n}} \leftrightharpoons \sqrt[n]{a^m}}$

2) Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, и пусть
$\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\alpha = \overline{c, d_1 d_2 \dots d_n \dots}_{(10)}$
- разлож. $\alpha$ в $\overbrace{\text{десят.}}^{}$ дробь
(бесконеч.) (без „хвоста" из 9)
(т.е. $\underline{c \in \mathbb{Z}}$ - целая часть числа $\alpha$
$\overline{0, d_1 d_2 \dots d_n \dots}_{(10)}$ - дробная часть числа $\alpha$:
$d_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\overline{0, d_1 d_2 \dots d_n \dots}_{(10)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$ ),

то полагаем
$$\boxed{a^\alpha = \lim_{n \to \infty} a^{\left(c + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}\right)}}$$
Этот предел существует (док-во позже) и знает единс

**Теорема** (осн. свойства степени с действит. показателем).

Для любого $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, справедливо следующее: 0) $\boxed{a^{r_1} > 0}$ $\boxed{a^0 = 1}$

1) $\boxed{a^{r_1 + r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a^{-r_1} = \frac{1}{a^{r_1}}}$ $\boxed{a^{r_1 - r_2} = \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}}$

2) $\boxed{a^{r_1 \cdot r_2} = (a^{r_1})^{r_2}}$

3) $\boxed{(a \cdot b)^{r_1} = a^{r_1} \cdot b^{r_1}}$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}}$

$(\forall b \in \mathbb{R},\ b > 0)$

4) если $a > 1$, то
$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$

5) если $0 < a < 1$, то
$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} > a^{r_2}$

6) если $a \neq 1$, то $\forall b > 0\ \exists r$ т.ч. $a^r = b$

**Док-во** следует из определений проверкой указанных свойств (сначала для $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, затем $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ и т.д.

$\boxed{\text{Опр} \text{ Для } a \in \mathbb{R},\ a>0, \text{ числовая ф-ия } \boxed{f(x) = a^x} \text{ наз. показательной функцией с основанием } a}$

Непоср. из опред. и предыд. теоремы вытекают след. свойства показательной ф-ии $f(x)=a^x$

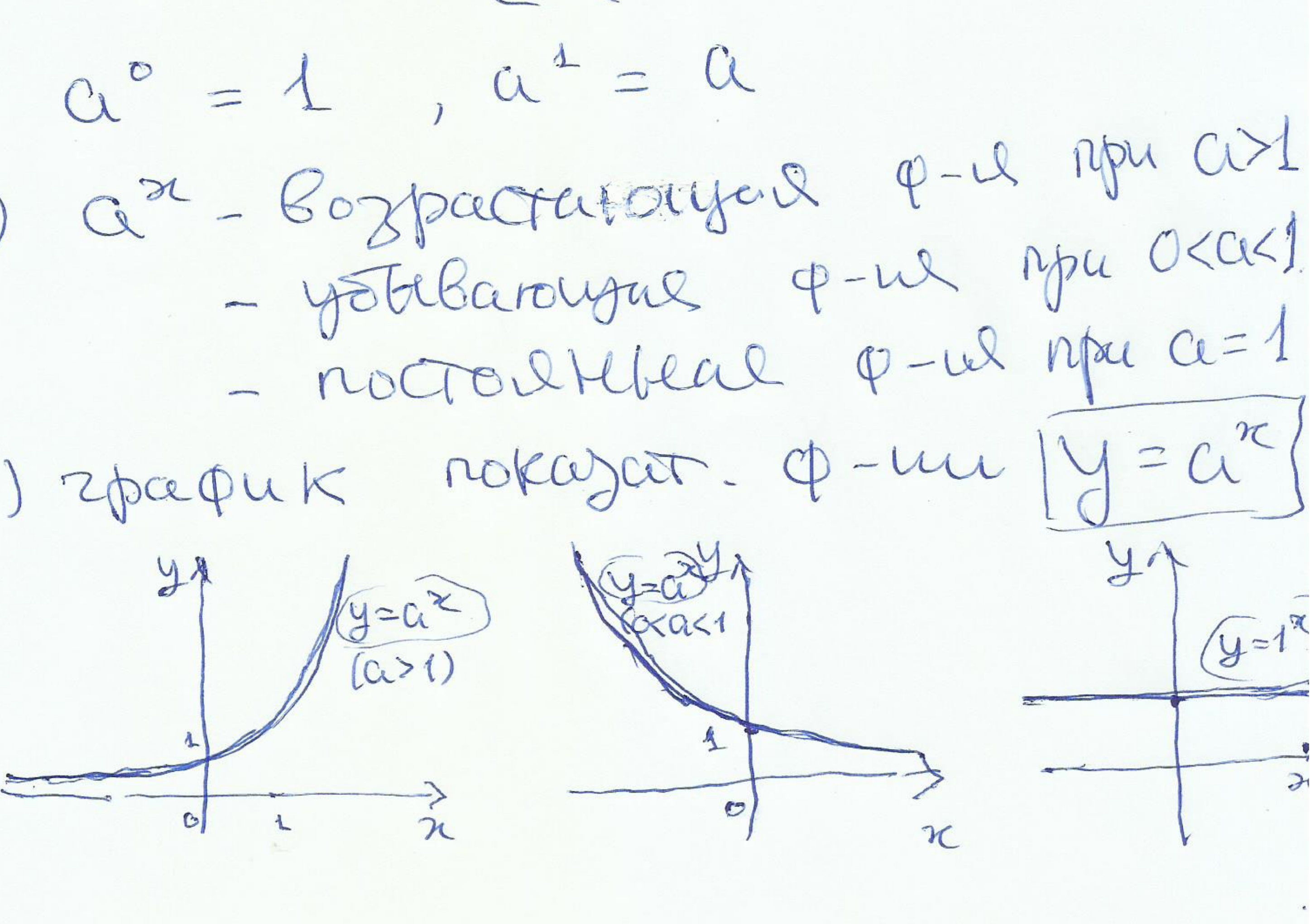
1) $Dom(a^x) = \mathbb{R}$

2) $Rng(a^x) = \begin{cases} (0;+\infty); & \text{если } a \neq 1 \\ \{1\}, & \text{если } a = 1 \end{cases}$

3) $a^0 = 1$, $a^1 = a$

4) $a^x$ - возрастающая ф-ия при $a>1$
- убывающая ф-ия при $0<a<1$
- постоянная ф-ия при $a=1$

5) график показат. ф-ии $\boxed{y=a^x}$



Показательная функция $\boxed{f(x) = e^x}$ (т.е. с основанием $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ )

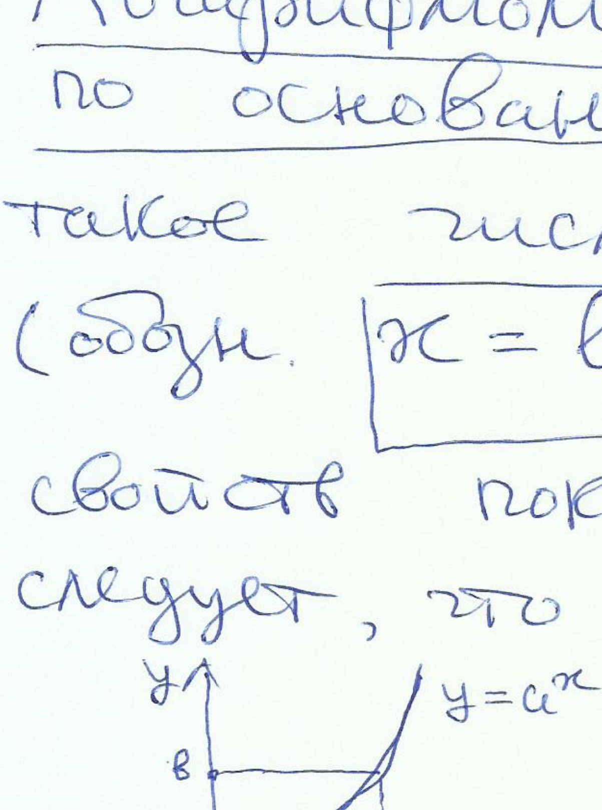
наз. экспоненциальной ф-цией

2. Логарифм числа по заданному основанию

Пусть $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $a > 0,\ a \neq 1$,

и пусть $b \in \mathbb{R}$ т.ч. $b > 0$

Логарифмом числа $b$ по основанию $a$ наз. такое число $x \in \mathbb{R}$, что $\boxed{a^x = b}$ (обозн. $\boxed{x = \log_a b}$). „Непоср." из свойств показ. ф-ции $y = a^x$ следует, что $\forall b > 0\ \exists!\, x\ (a^x = b)$




(т.е. данное опред. корректно)

Непоср. из опред. получаем, что

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ основн. логарифм. тождество

$\boxed{\log_a a^x = x}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

<u>Теорема</u> (основные св-ва логарифмов)

Пусть $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда справедливо следующее:

0) $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $(\forall b > 0)$ $\boxed{\log_a a^x = x}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

1) $\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$ $(\forall b, c > 0)$

– ф-ла логарифма произведения

2) $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ $(\forall b > 0)$

3) $\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$ $(\forall b, c > 0)$

– ф-ла логарифма частного

4) $\boxed{\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b}$ $\begin{pmatrix} \forall b > 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

– ф-ла логарифма степени

5) $\boxed{\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b}$ $\begin{pmatrix} \forall b > 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \end{pmatrix}$

6) $\boxed{\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}}$ $\begin{pmatrix} \forall b > 0 \\ \forall c > 0, c \neq 1 \end{pmatrix}$

– ф-ла перехода к новому основани[ю]

7) $\boxed{\log_a a = 1}$ $\boxed{\log_a 1 = 0}$

8) $\boxed{\text{если } a>1 \text{, то } \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R},\ b_1, b_2 > 0 \quad b_1 < b_2 \Rightarrow \log_a b_1 < \log_a b_2}$

9) $\boxed{\text{если } 0<a<1 \text{, то } \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R},\ b_1, b_2 > 0 \quad b_1 < b_2 \Rightarrow \log_a b_1 > \log_a b_2}$

10) $\boxed{\forall c \in \mathbb{R}\ \exists!\ b > 0 \text{ т.ч. } c = \log_a b}$

Док-во 0) — непоср. из опред.

1) пусть $\log_a(bc) = x$, т.е. $b\cdot c = a^x$

$\log_a b = y$, т.е. $a^y = b$,

$\log_a c = z$, т.е. $a^z = c$,

тогда $a^x = b\cdot c = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$,

откуда $x = y + z$;

2) пусть $\log_a \frac{1}{b} = x$, т.е. $\frac{1}{b} = a^x$

тогда $b = a^{-x}$. Логарифмируя по осн. $a$,

получаем $\log_a b = -x$, т.е. $x = -\log_a b$

3) следует из 1 и 2;

4) пусть $\log_a b^\alpha = x$, т.е. $b^\alpha = a^x$.

Т.к. $b = a^{\log_a b}$, то $b^\alpha = (a^{\log_a b})^\alpha =$

$= a^{\alpha\cdot\log_a b}$, поэтому $x = \alpha\cdot\log_a b$

5) пусть $\log_{a^\alpha} b = x$, т.е $(a^\alpha)^x = b$
Логарифмируя по осн. $a$, получаем
$\log_a (a^\alpha)^x = \log_a a^{\alpha x} = \alpha x = \log_a b$,
откуда $x = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$;

6) пусть $\log_c b = x$, $\log_a b = y$,
$\log_a c = z$, т.е. $b = c^x$, $b = a^y$,
$c = a^z$. Поэтому $b = a^y$.
$b = (a^z)^x = a^{zx}$
откуда $y = zx$, т.е. $x = \frac{y}{z}$

7) очевидно из определения

8, 9, 10) - следуют из св-в показ. ф-ии $f(x) = a^x$

Д-но

<u>Опр.</u> Для $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ числовая функция $\boxed{f(x) = \log_a x}$ наз. <u>логарифмической функцией</u> по основанию $a$

Непоср. из опред. логарифма вытекают след. св-ва логарифм. функции $\boxed{f(x) = \log_a x}$

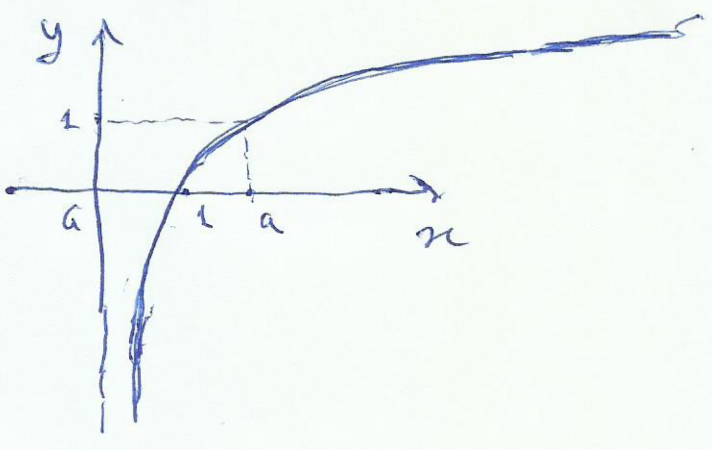
1) $\mathrm{Dom}(\log_a x) = (0; +\infty)$;

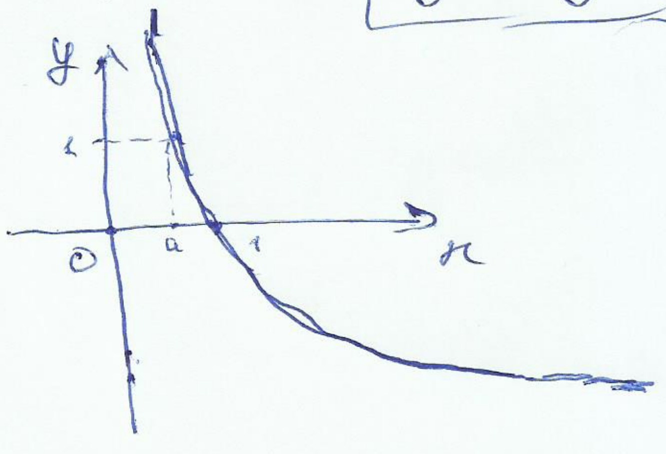
2) $\mathrm{Rng}(\log_a x) = \mathbb{R}$;

3) $\log_a 1 = 0$

4) $\log_a x$ – возраст. ф-ия при $a>1$
– убывающие ф-ия при $0<a<1$

5) график логарифм. ф-ии $\boxed{y = \log_a x}$




Логарифм по осн. e наз. натуральным логарифмом и обозн. $\boxed{\ln x}$ : $\ln x \Leftrightarrow \log_e x$

Логарифм по осн. 10 наз. десятичным логарифмом и обозн. $\boxed{\lg x}$ : $\lg x \Leftrightarrow \log_{10} x$