Теорема („предельный переход в неравенствах")

Пусть ч.ф. $f(x)$ и $g(x)$ определены в некот. проколотой окрестн. т. $a \in \mathbb{R}$ и имеют конечные пределы в этой точке: пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Тогда:

1) $\boxed{\text{если } A < B, \text{ то } f(x) < g(x) \text{ при } x \to a}$ (т.е. $\exists \delta > 0$ т.ч. $f(x) < g(x)$ $\forall x \in (a-\delta; a+\delta)\setminus\{a\}$)

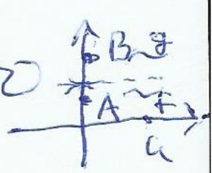
2) $\boxed{\text{если } f(x) \le g(x) \text{ при } x \to a, \text{ то } A \le B}$

Док-во: 1) Рассм. $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$ (>0). Имеем

$\exists \delta_1 > 0$ т.ч. $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\forall x \in (a-\delta_1; a+\delta_1)\setminus\{a\}$

$\exists \delta_2 > 0$ т.ч. $|g(x) - B| < \varepsilon$ $\forall x \in (a-\delta_2; a+\delta_2)\setminus\{a\}$

Взяв $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, получим, что



$\forall x \in (a-\delta; a+\delta)\setminus\{a\}$

$$\begin{cases} A - \dfrac{B-A}{2} < f(x) < \underbrace{A + \dfrac{B-A}{2}}_{=\frac{A+B}{2}} \\ \underbrace{B - \dfrac{B-A}{2}}_{=\frac{A+B}{2}} < g(x) < B + \dfrac{B-A}{2} \end{cases}$$

, в частности, $f(x) < g(x)$.

2) от противного: если $B < A$, то по пункту 1 получим, что $g(x) < f(x)$ при $x \to a$. Прот. Док-но.

Теорема („о двух милиционерах"
„о сэндвиче")

Пусть числ. ф-ии $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены в некот. проколотой окрестности т. $a \in \mathbb{R}$ и пусть $\boxed{g(x) \leq f(x) \leq h(x)}$ для всех x из этой окрестности. Тогда если $g(x)$ и $h(x)$ имеют конечный предел в т. a, причем $\boxed{\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A}$

то и $f(x)$ имеет конечный предел в т. a, и $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = A}$

Док-во Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда сущ. $\delta > 0$ т.ч. $\forall x \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |g(x) - A| < \varepsilon \\ |h(x) - A| < \varepsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}\right)$

Т.к. $A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$, то

$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in (a-\delta; a+\delta) \setminus \{a\}$.

Док-но

<u>Замечание</u> Данная теорема верна и при $a = \pm\infty$ – <u>упр</u>.

<u>Теорема</u> (о пределе композиции)

Пусть $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = b}$, $\boxed{\lim\limits_{y\to b} g(y) = c}$,

причем $\boxed{f(x) \neq b \text{ при } x \to a}$

(т.е. в некот. проколотой окрестн. т a).

Тогда $\boxed{\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c}$

<u>Док-во.</u> (предполагается, что все пред. усл. выполнены: опред. и сущ. пред.)

По условиям теоремы

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0$ т.ч. $\forall y \ (0 < |y - b| < \rho \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon)$

$\forall \rho > 0 \ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall x \ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \rho)$

Т.о., по ε находим ρ, для этого ρ находим соответствующее δ, для которого

$\forall x \ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \varepsilon)$.

(„подстановка $y = f(x)$“)

<u>Док-но</u>

Критерий сходимости Гейне

Пусть ч. ф. $f(x)$ опред. в некот. проколотой окр-ти т. $a \in \mathbb{R}$

$f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, равный $A \in \mathbb{R}$ (т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$) т. и т. т., когда

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{для любой числовой посл-ти} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ \text{т.ч. } x_n \neq a\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \\ x_n \underset{n \to \infty}{\to} a \ \Rightarrow\ f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} A\end{array}}$$

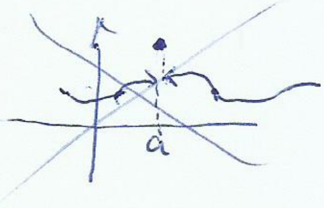
Замечание: аналогичные критерии имеют место и в случаях $a = \pm\infty$, $A = \pm\infty$

Док-во – позже

Непрерывность функций

<u>Опр.</u> Пусть числовая функция $f(x)$ опред. в некот. окрестности т. $a \in \mathbb{R}$ и имеет в этой точке конечный предел. $f(x)$ наз. <u>непрерывной в т. a</u>, если

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

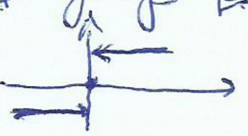


<u>Пример.</u> Постоянная ф-ия $f(x) = c$ и тождественная ф-ия $f(x) = x$ явл. непрерывными на всей числ. прямой.

◁ <u>упр</u> ▷

<u>Пример.</u> Ф-ия $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ не явл. непрерывной в т. 0

◁ упр ▷



(в остальных точках числ. прямой эта ф-ия непрер.)

<u>Пример</u> Ф-ия $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не явл. непрерывной ни в одной точке на числовой прямой.

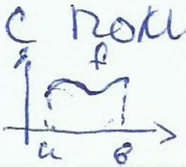
Теорема Пусть числ. ф-ии $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в некот. точке $a \in \mathbb{R}$. Тогда числовые ф-ии $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ также непрерывны в т. a. Если, кроме того, $g(a)\neq 0$, то числ. ф-ия $f(x)/g(x)$ также непрерывна в т. a.

Док-во: эта теорема непосредственно следует из теоремы ~~об арифм.~~ о пределе суммы, разности, произведения и частного числ. ф-ий.

Опр. Числ. ф-ия наз. непрерывной на мн-ве M, если она непрер. во всех точках этого мн-ва. Док-но

Опр. Числ. ф-ия наз. **непрерывной**, если она непрерывна во всех точках своей обл. определения.

Замечание. Для опред. непрерывности ф-ии в граничной точке обл. опред. нужно модифицировать исходн. формулир. с помощью односторонних пределов:



$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$

<u>Пример</u>: Все числ. ф-ции вида

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

где $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, явл. непрерывными

◁ следует из непрер. пост. и тожд. ф-ций и предыд. теоремы ▷

<u>Теорема</u> Если ч. ф. $f(x)$ непрер. в некот. точке $a \in \mathbb{R}$, а ч. ф. $g(y)$ непрер. в точке $f(a)$, то ч. ф. $g(f(x))$ непрер. в т. a

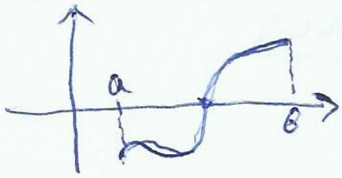
<u>Док-во</u>: следует из док-ва теоремы о пределе композиции, с учетом того, что все проколотые окрестности заменяются на обычные

<u>Док-но</u>

<u>Теорема</u>. Всякая непрерывная в некот. точке ч. ф. явл. ограниченной в некот. окрестн. этой точки

<u>Док-во</u> следует из ~~соот~~ теоремы ~~Док-но~~

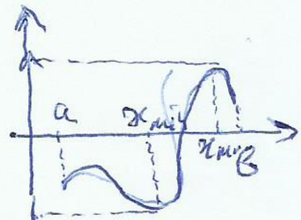
Теорема Больцано-Коши



Если г. ф. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет „значения разных знаков" в т. a и b (точнее, $\boxed{f(a) \cdot f(b) \leq 0}$), то ~~строгое условие~~

$$\boxed{\exists c \in [a; b] \text{ т.ч. } f(c) = 0}$$

Теорема Вейерштрасса



Если г. ф. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает ~~на этом отрезке свои~~ свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке:

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists x_{min}, x_{max} \in [a; b] \text{ т.ч.} \\ f(x_{min}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \\ f(x_{max}) \geq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \end{array}}$$

Производная функции

<u>Опр.:</u> Числ. ф-ия $f(x)$ наз. <u>дифференцируемой в т. $x_0 \in Dom(f)$</u>, если существует конечный предел $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \in \mathbb{R}$. Этот предел обозн. $\boxed{f'(x_0)}$ и называется значением производной ф-ии $f(x)$ в т. x_0.

Функция, областью опред. которой явл. все т. $x_0 \in Dom(f)$, в которых $f(x)$ дифференцируема, а значениями в таких точках x_0 явл. $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$, наз. <u>производной ф-ии $f(x)$</u> и обозн. $f'(x)$:

$$\begin{cases} Dom(f') = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ диффер. в т. } x_0\} \\ f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x \in Dom(f') \end{cases}$$