

Последовательности, способы
задания последовательностей.

Числовые последовательности
и их свойства. Предел числовых
последовательностей

Пусть $X \neq \emptyset$ - произвольное
мн-во.

Опр. Последовательностью

элементов мн-ва X наз. произвольная
функция $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ (т.е. $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$,
 $\text{Rng}(f) \subseteq X$)

Элементы $x_n \in X$, занумерованные
натуральными числами $n \in \mathbb{N}$,

образуют ~~мн-во~~ последовательность
 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, для которой $f(n) = x_n \forall n$

Такие последовательности обозн.

обычно $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, или $(x_n)_{n=1}^{\infty}$,

или $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Замечание. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

По определению, все ^{рассм.} последовательности явл. "бесконечными", т.е. имеют вид $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, где $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$

Такая имеет смысл рассм. и конечные последовательности,

т.е. последовательности вида $f: \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow X$ для некот $N \in \mathbb{N}$ (здесь $\text{Dom}(f) = \{1, 2, \dots, N\}$, $\text{Rng}(f) \subseteq X$)

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$, образуют последовательность $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(N) = x_N$,

которая обозначается $(x_n)_{n=1}^N$ или $[x_1, x_2, \dots, x_N]$

Замечание. $(x_n)_{n=1}^N \neq \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

Опр. Числовой последовательностью наз. последовательность вида $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е. $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$, $\text{Rng}(f) \subseteq \mathbb{R}$).

Способы задания (числовых) последовательностей

Т.к. важная часть явл. функций, то используем все методы задания функций:

- аналитический (указанием формулы n -ого члена $z.n.$)
- описательный (указанием характеристического свойства n -ого члена $z.n.$)
- кусочный, табличный, графич.

Важными способами задания (числовой) последовательности явл. рекуррентный: указанием закона, а именно которого n -ый член последовательности выражается через один или несколько предыдущих.

Примеры:

14

1) арифметическая и геометрическая прогрессии:

$$a_n = a + (n-1) \cdot d : a, a+d, a+2d, \dots$$

аналит.
способ

$$b_n = b \cdot q^{n-1} : b, b \cdot q, b \cdot q^2, \dots$$

$(b, q \in \mathbb{R})$
 $q \neq 0$

2) p_n — n -ое простое число

описат.
способ

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \leq 10; \\ 1/n^2, & \text{если } n > 10 \end{cases}$$

кусочный
способ

$$x_n = n! : [x_1 = 1]$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot (n+1)$$

рекурр.
способ

$$y_1 = y_2 = 1, [y_{n+2} = y_n + y_{n+1}]$$

рекурр.
способ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

— числа Фибоначчи

Свойства числовых последовательностей

[5]

Опр. Числовая последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется

- 1) ограниченной сверху, если $\exists B \in \mathbb{R}$, т.е. $\boxed{a_n \leq B} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) ограниченной снизу, если $\exists A \in \mathbb{R}$, т.е. $\boxed{A \leq a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) ограниченной, если она ограничена сверху и снизу
(Упр. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена т.ч.т.т., когда $\exists C \in \mathbb{R}$, т.е. $\boxed{|a_n| \leq C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
- 4) возрастающей, если $\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N} (m < n \Rightarrow a_m < a_n)}$
- 5) убывающей, если $\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N} (m < n \Rightarrow a_m > a_n)}$
- 6) неубывающей, если $\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N} (m \leq n \Rightarrow a_m \leq a_n)}$

7) невозрастающей, если

$$\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \leq n \Rightarrow a_m \geq a_n)}$$

8) монотонной, если она явл.
неубывающей или невозрастающей

9) строго монотонной, если она
явл. возрастающей или убывающей

10) стационарной (или постоянной)
если $\boxed{a_m = a_n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Предел числовой послед.

Опр. Число $a \in \mathbb{R}$ называется
пределом ч.п. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(обозн.
" a_n сходится к a ") $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a}$ или
 $\boxed{a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a}$), если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{т.ч.} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.}$$

7

т.н., имеющая предел, наз.
сходящейся. т.н., предел
 которой равен 0, наз.
бесконечно малой. т.о.
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ явл. бесконечно малой,
 если $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } |a_n| < \varepsilon}$
 $\forall n \geq N$

Опр. Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
стремится (сходится) к $+\infty$

(обозн. $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty}$ или
 $\boxed{a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty}$), если

$\boxed{\forall C > 0, C \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } a_n > C \quad \forall n \geq N}$

Опр. Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
стремится (сходится) к $-\infty$

(обозн. $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty}$ или $\boxed{a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty}$
 если

$$\forall C < 0, C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n \geq N \quad a_n < C$$

Опр. Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ наз. бесконечно большой, если

$$\forall C > 0, C \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } |a_n| > C \quad \forall n \geq N$$

(Говорят, что $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ стремится (расходится) к ∞ , и исп. обозн.)

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty} \quad \text{или} \quad \boxed{a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty}$$

Опр. Т.п. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется расходящейся, если она не имеет конечного предела, т.е. не существует $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к a