Нормальные алгоритмы Маркова

Опр. Нормальным алгоритмом Маркова наз. упор. тройка
$$\mathcal{M} = \langle \Sigma, R, F \rangle,$$
где Σ — конечный алфавит,
$R = \langle (u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n) \rangle \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^n$
$(n \geq 1)$ — упор. набор правил (продукций)
$F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ — мн-во номеров заключит. правил.

Правила (u_i, v_i) как обычно, обозн. $u_i \to v_i$, а упор. набор R обозн. в виде схемы
$$\begin{cases} u_1 \to v_1 \\ \vdots \\ u_n \to v_n \end{cases}$$
, при этом запись $u_i \to \cdot\, v_i$ означ., что $i \in F$.

Для нормального алгоритма Маркова $\mathcal{M}$ и слова $w \in \Sigma^*$ однозначно опред. слово $w' \in \Sigma^*$,

являющееся результатом работы M одного шага на слове w (обозн. $\boxed{w \Rightarrow_M w'}$). А именно,

1) если $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, т.ч. $w = x u_i y$ для некот. $x, y \in \Sigma^*$: выбираем наим. $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ с таким св-вом, находим первое вхождение подслова u_{i_0} в слово w (т.е. $w = x u_{i_0} y$ для некот $x, y \in \Sigma^*$, причем $|x|$ – наим. возм.), и полагаем $w' = x v_{i_0} y$;

2) если условия случая 1 не выполняются, полагаем $w' = w$.

Для слов $w, w' \in \Sigma^*$, w' наз. результатом применения н.а.м. M к w (обозн. $\boxed{w' = M(w)}$), если сущ. посл-ть

$$\boxed{w \Rightarrow_M w_1 \Rightarrow_M \dots \Rightarrow_M w_n = w'} \ (n \geq 1)$$

в которой только последний переход

осуществляется по одному из заключит. правил или по п. 2 опред. $\Rightarrow_{\mathcal{M}}$

Если для слова $w \in \Sigma^*$ не существует слова $w' \in \Sigma^*$ т.ч. $w' = \mathcal{M}(w)$, то результат применение н.а. М $\mathcal{M}$ к слову w не определен (обозн. $\boxed{\mathcal{M}(w)\uparrow}$).

Пусть $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. Частичная ф-ия $f : (\Sigma_0)^* \to (\Sigma_0)^*$ наз. вычислимой с помощью н.а. М. $\mathcal{M}$, если

$$\boxed{\forall w \in Dom(f) \quad f(w) = \mathcal{M}(w)}.$$

(при этом $\forall w \notin Dom(f)$ $\mathcal{M}(w)$ не опред.)

Аналогично, частичная ф-ия $f : (\Sigma_0)^* \to (\Sigma_0)^*$ наз. вычислимой с помощью м.Т $M = \langle Q, \Sigma, s, \{h\}, \delta \rangle$, если 1) M останавливается, начав работу в конфиг. $(\rhd \sqcup, s, w \lhd)$ т. и т.т., когда $w \in Dom(f)$

2) $\boxed{\forall w \in Dom(f), \; (\rhd \sqcup, s, w \lhd) \vdash^*_M (\rhd \sqcup, h, f(w)\lhd)}$

Теорема Для любой частичной ф-ции $f : (\Sigma_0)^* \to (\Sigma_0)^*$ след. ус. экви

1) f вычислима с помощью некот. норм. алгоритма Маркова;

2) f вычислима с помощью некот. машины Тьюринга.

◁ упр. ▷

Продукции Поста

Опр. Системой продукций Поста наз. упор пара $\mathcal{P} = \langle \Sigma, P \rangle$, где Σ - конечный алфавит,

$P = \{u_1 W \to W v_1, \ldots, u_n W \to W v_n\}$

$(n \geq 1)$ - конечное мн-во продукций

$(u_i, v_i \in \Sigma^*)$

Для слов $\alpha, \beta \in \Sigma^*$,

$\boxed{\alpha \Rightarrow_{\mathcal{P}} \beta}$, если $\exists i \in \{1, .., n\}$ т. ч. $\alpha = u_i W$, $\beta = W v_i$ для некот $W \in \Sigma^*$

Опр. Грамматической системой преобразований над

упор. пара $\mathcal{R} = \langle \Sigma, R \rangle$, где

Σ - конечный алфавит,

$\boxed{R = \{u_1 \to v_1, \ldots, u_n \to v_n\}}$

($n \geqslant 1$, $u_i, v_i \in \Sigma^*$) - конечное мн-во правил (или продукций)

Для слов $\alpha, \beta \in \Sigma^*$,

$\boxed{\alpha \Rightarrow_R \beta}$, если $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ т.ч.

$\alpha = x u_i y$, $\beta = x v_i y$

для некот. $x, y \in \Sigma^*$.

Как обычно, отношения

$\boxed{\Rightarrow^*_{\mathcal{R}}}$ и $\boxed{\Rightarrow^*_R}$ определяются как

рефл. и транзитивн. замыкания

отношений $\Rightarrow_{\mathcal{R}}$ и $\Rightarrow_R$, соотв.