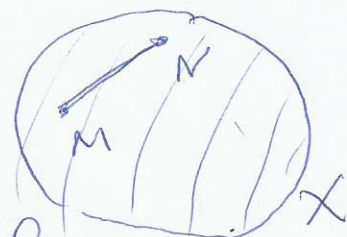


Выпуклые ф-ии

1

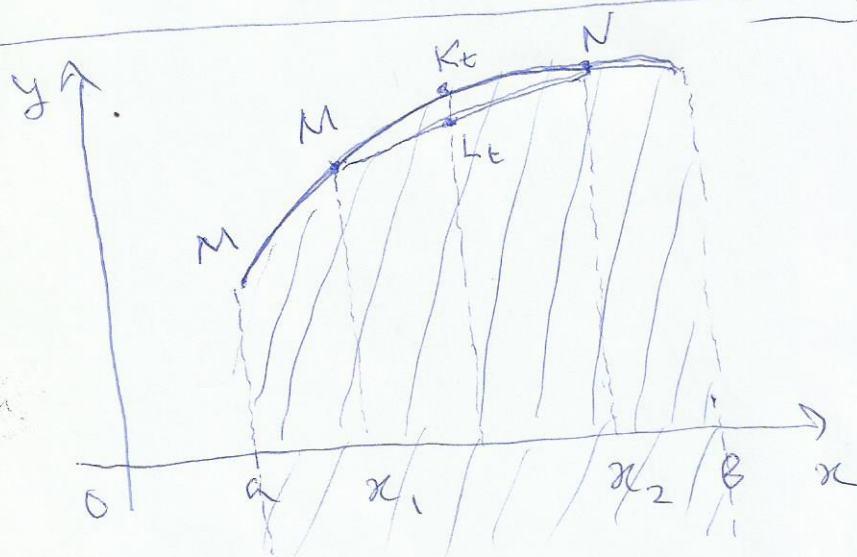
Множество X точек на плоскости
наз. выпуклым, если для любых
точек $M, N \in X$ отрезок MN целиком
лежит в мн-ве X .



Опр. Пусть г.ф. $f(x)$
определена на некоем интервале $(a; b)$.
 $f(x)$ наз. выпуклой вверх на инт. (a, b) ,
если ее график на этом инт.
явл. выпуклым мн-вом; т.е.

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ т.ч. $x_1 < x_2$ и $\forall t \in [0; 1]$

$$f(x_2 \cdot t + x_1 \cdot (1-t)) \geq f(x_2) \cdot t + f(x_1) \cdot (1-t)$$



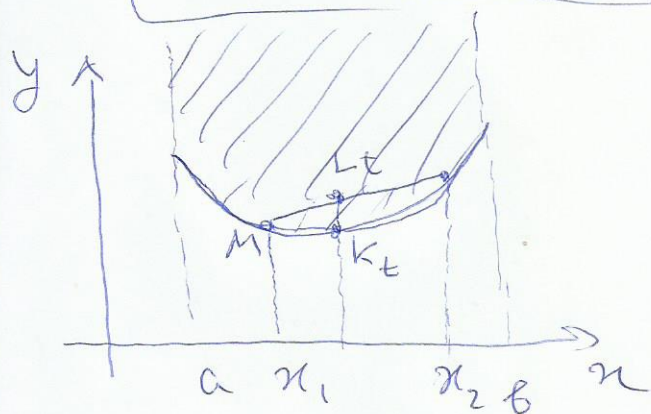
Аналогично, $f(x)$ наз. выпуклой вниз
(вогнутой) на инт. (a, b) , если ее
график на этом инт. явл. выпуклым

мн-вом, т.е.

[2]

$\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ т.ч. $x_1 < x_2$ и $\forall t \in [0; 1]$

$$f(x_2 \cdot t + x_1 \cdot (1-t)) \leq f(x_2) \cdot t + f(x_1) \cdot (1-t)$$



Теорема (критерий выпуклости дифференцир. ф-ии)

Пусть з. ф. $f(x)$ дифференцируема на интервале $[a; b]$. Тогда

1) $f(x)$ выпукла вверх на $[a; b]$



$f'(x)$ не возрастает на $[a; b]$

2) $f(x)$ выпукла вниз на $[a; b]$



$f'(x)$ не убывает на $[a; b]$

Док-во. Рассм., например, пункт 1
(рассужд. для пункта 2 аналогичны)

$\Rightarrow$ пусть $f(x)$ выпукла вверх на $[a; b]$,¹³

т.е. $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$ т.ч. $x_1 < x_2$

и $\forall x \in (x_1; x_2)$ $f(x) \geq \alpha(x)$, где

$\alpha(x)$ — линейная ф-ия, график которой
проходит через точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$

$$\text{Имеем } \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{\alpha(x) - \alpha(x_1)}{x - x_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ \alpha(x_1) = f(x_1) \end{array} \right\} \quad \downarrow x \rightarrow x_1 + \quad \downarrow x \rightarrow x_1 +$$

$$f'(x_1) \geq K$$

$$\text{где } K = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(по теор. о
непр-ве предел

$$\text{Аналогично, } \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq \frac{\alpha(x_2) - \alpha(x)}{x_2 - x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{т.к. } \alpha(x_2) = f(x_2) \end{array} \right\} \quad \downarrow x \rightarrow x_2 - \quad \downarrow x \rightarrow x_2 -$$

$$f'(x_2) \leq K$$

$$\text{Т.о., } f'(x_1) \geq K \geq f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) \geq f'(x_2)$$

т.е. $f'(x)$ не возрастает на $(a; b)$

⊆ Пусть $f'(x)$ не возрастает на $[a; b]$

Рассм. $x_1, x_2 \in [a; b]$ т.ч. $x_1 < x_2$
и пусть $x \in (x_1, x_2)$. По теор. Лагранжа

сущ. $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$ т.ч.

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}; \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$\text{Т.ч.} \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$(f(x) - f(x_1)) \cdot (x_2 - x) \geq (f(x_2) - f(x)) \cdot (x - x_1)$$

$$\underline{f(x) \cdot x_2 - f(x) \cdot x - f(x_1) \cdot x_2 + f(x_1) \cdot x} \geq$$

$$\geq \underline{f(x_2) \cdot x - f(x_2) \cdot x_1 - f(x) \cdot x + f(x) \cdot x_1}$$

$$f(x) \cdot (x_2 - x_1) \geq (f(x_2) - f(x_1))x + f(x_1) \cdot x_2 - f(x_2) \cdot x_1$$

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x + f(x_1) \cdot x_2 - f(x_2) \cdot x_1$$

||

Т.ч., $f(x)$
выпукла вверх на $[a; b]$ Док-но

$\alpha(x)$ - линейная ф-я
график которой проходит
через т. $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$

[5]

Следствие (критерий выпуклости
двухжды дифференцир. ф-ии)
Пусть 2. ф. $f(x)$ двухжды дифференц.
на интервале $(a; b)$. Тогда

1) $f(x)$ выпукла вверх на $(a; b)$



$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

2) $f(x)$ выпукла вниз на $(a; b)$



$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

Док-во. Непосредственно следует
из предыдущего критерия
и достаточного условия монотон-
ности ф-ии (это также явл. и
необходимым в этом случае
- усп.)

Док-во

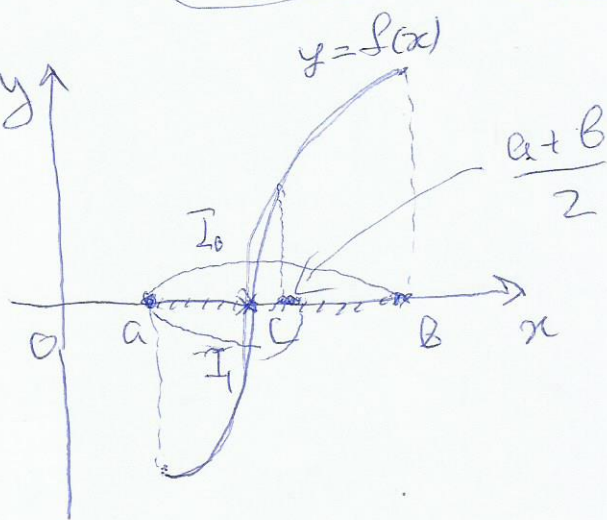
Теорема Больцано-Вейерштрасса

6

Пусть 2-ф. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, и пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$ (значения "разных знаков"). Тогда сущ. $c \in (a; b)$ т.ч. $f(c) = 0$

Док-во. Пусть $I_0 = [a; b]$.

Рассм. т. $\frac{a+b}{2}$.



Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$,
положим $c \equiv \frac{a+b}{2}$.

Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то либо $f(\frac{a+b}{2}) > 0$,

либо $f(\frac{a+b}{2}) < 0$. Выберем в качестве

I_1 отрезок $[a; \frac{a+b}{2}]$, если $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$
и отрезок $[\frac{a+b}{2}; b]$, если $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(b) < 0$.

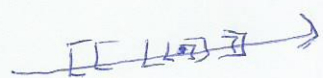
Для отрезка I_1 , в его середине $f(x)$
либо равна 0 (тогда т.с. найдена),
либо один из двух образованных
этой серединой подотрезков таков, что
 $f(x)$ принимает на его концах значения
разных знаков. Положим I_2 равным

этому отрезку, и т.д. [7]

В ходе этого процесса мы либо за конечное число шагов найдем τ , c , где которой $f(c) = 0$, либо получим бесконечн. последовательность вложенных стабилизирующих отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$,

где $(\text{длины } I_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. По аксиоме Кантора - Вейерштрасса, существует и единственна т. $\alpha \in \mathbb{R}$ т.ч.

$$\alpha \in I_n \quad \forall n \geq 0$$



Покажем, что $f(\alpha) = 0$. От противного, пусть, например $f(\alpha) > 0$. Если $f(\alpha) = 2\varepsilon$ где некое $\varepsilon > 0$, то т.к. $f(x)$ непрерывна, $\exists \delta > 0$ т.ч. $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \quad \forall x \in (\alpha - \delta; \alpha + \delta)$. Т.о., $f(x) > \varepsilon (> 0) \quad \forall x \in (\alpha - \delta; \alpha + \delta)$. Но $\exists n$ т.ч. $I_n \subseteq (\alpha - \delta; \alpha + \delta)$, причем в одном из концов этого отрезка I_n $f(x) < 0$ - противоречие. Далее...