

Теорема. $e (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 1

$(0! \Leftrightarrow 1)$

Док-во. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\left\{ x_n \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{n})^n \right\} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$+ \dots + \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right\} \Leftrightarrow y_n$$

Т.к. $y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} <$
 $< 1 + 1 + 1 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N},$

и $y_n < y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то з.п. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится (по теор. Вейерштрасса)
 а значит ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$
 абс. суммируемый ($<$ суммой ≤ 3).
 Если в равенстве (*) фиксировать k
 и отбросить все члены правой части
 следующие за $(k+1)$ -ым, получим.

неф-во ($\forall n \in \mathbb{N} + 1, n > k$) [2]

$$x_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

По теор. о неф-ве пределов имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right)$$

$$\overset{||}{e} \qquad \qquad \qquad \overset{||}{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}} = y_k$$

откуда $y_k \leq e \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Т.о.,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < y_n \leq e$, а т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$

получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e. \quad \text{Док-во}$$

Теорема e - иррациональное число

Док-во. От противного, предп., что

$e = \frac{p}{q}$ для некот $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Тогда

$$p = eq = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \cdot q, \text{ умножим обе части}$$

$$\text{на } (q-1)! : p \cdot (q-1)! = eq! = q! \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^q \frac{q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}, \text{ откуда}$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = p(q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q!}{n!} \in \mathbb{Z}. \text{ Но}$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+m)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1) \dots (q+m)} \stackrel{3}{\leq} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^m} = \frac{1}{q} < 1.$$

Получим целое число, лежащее в интервале $(0; 1)$ - противоречие. Зак-но

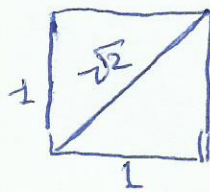
Действительные числа.

Из предыдущей теоремы следует, что $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \notin \mathbb{Q}$, т.е.

монотонная ограниченная пос-ть может не иметь предела в $\mathbb{Q}$.

Аналогично, число π , определяемое как предельное значение периметра вписанных / описанных в окружность диаметра 1 правильных n -угольников, не явл. рациональным.

Однако "исторически" первым примером иррационального числа явл. $\sqrt{2}$ - длина диагонали квадрата со стороной 1.



Теорема

$\sqrt{2}$ - иррациональное
число.

14

Док-во. От противного, предп., что
 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (т.е., по опр., $2 = \frac{p^2}{q^2}$)

Можно считать, что не имеют
общих делителей, отличных от 1.

Имеем $2q^2 = p^2$, откуда p
делится на 2, а значит p^2
делится на 4. Т.о., $2q^2$ делится
на 4, т.е. q^2 делится на 2, т.е.
 q делится на 2. Следовательно,
2 явл. общим делителем p и q .
Противоречие.

Дано

Т.о., мн-во рациональных чисел.

(1) необходимо расширить ("пополнить")
дл. того, чтобы подвжась возможности
сопоставления численной величины
отрезкам (понятие длины отрезка)
и дугам (понятие длины дуги), ---
методом исчерпывания.

Существует несколько способов расширения мн-ва $\mathbb{Q}$, которые эквивалентны и порожд. мн-во действ. (действ.) чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \cong \left\{ c, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots \mid \begin{array}{l} c \in \mathbb{Z} \text{ (в част. зап.)} \\ d_n \in \{0, 1, \dots, 9\} \forall n \\ \forall n \exists m > n \text{ т.ч. } d_m \neq 9 \end{array} \right\}$$

~~с бескон. десятич. гробом~~
~~без хвоста из "9"~~

Более точно, всякое действ. число однозначно отождествляется с з.п.

$$\left(c + \sum_{k=2}^n \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

рациональных чисел

чисел. Число $c = (-1)^s (c_m 10^m + \dots + c_1 10 + c_0)$,
 где $m \geq 0, s \in \{0, 1\}, c_0, \dots, c_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$

наз. целой частью действ.

числа $x = c, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, а
 $0, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ наз. дробной частью
 этого действ. числа.

Рассм. два подхода к опред. мн-ва действ. чисел $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$:
 метод дундаментальных послед-ств
 и метод сечений Дедекинда.

Опр. Послед-ть рациональных чисел $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ наз. фундаментальной,
если

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in \mathbb{Q}) \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч.} \\ &\forall m, n \geq N \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \end{aligned}}$$

Замечание - Если бы, как изначально предполагалось, мн-во $\mathbb{R}$ "уже существовало", то всякая сходящаяся в $\mathbb{R}$ з.п. была бы фундаментальной. Действительно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

По опр., $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$.

Тогда $\forall m, n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - a) - (a_n - a)| \leq \\ &\leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Опр. Фундаментальные послед-ти $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ наз. эквивалентными (символ. $\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}}$), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0 \quad (\text{т.е. } (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ - сск. малая з.п.})$$

Легко убедиться, что $\sim$ эквив. рефл., симм. и транзит. отношением, т.е. $\sim$ - отношение эквивалентности на мн-ве функций. Дад. любой функ. посл. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ рассмотрим
$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \{ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \}$$
 - класс эквив. по отн. $\sim$

Пусть $\mathcal{F}$ - мн-во всех функций. посл. $\mathcal{F}/\sim$ - факт-мн-во $\mathcal{F}$ по отн. $\sim$. Определим на $\mathcal{F}/\sim$ операции $+$, $\cdot$, $-$, $/$, отношение порядка $\leq$ и $<$, а также значения констант 0 и 1 . А именно, где $\alpha = [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ и $\beta = [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}]$, полагаем

$$\begin{cases} \alpha + \beta \leq [(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}], & \alpha - \beta \leq [(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \\ \alpha \cdot \beta \leq [(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}], & 0 \leq [(0)_{n \in \mathbb{N}}] \\ 1 \leq [(1)_{n \in \mathbb{N}}] \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha \leq \beta} \stackrel{\text{д.р.}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ фундам. посл-ти } \quad \boxed{8}$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ и } (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ т.е.}$$

$$c_n \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\boxed{\alpha < \beta} \stackrel{\text{д.р.}}{\Leftrightarrow} \alpha \leq \beta \text{ и } \alpha \neq \beta;$$

Если $\beta \neq 0$, то выберем ф.п. $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и положим

$$\boxed{\alpha / \beta \Leftrightarrow \left[\left(\frac{a_n}{d_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right]} \quad \begin{matrix} \text{т.е.} \\ d_n \neq 0 \forall n \end{matrix}$$

Теорема Данное выше определение корректно, т.е. не зависит от выбора представителей классов эквив., и все указ. в них посл-ти экв. фундаментальными

Док-во. Неразрешительная проверка (уфф) Док-во.

Теорема. Ч.п. $(c + \sum_{k=2}^n \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}})_{n \in \mathbb{N}}$, 9
 где $c \in \mathbb{Z}$, $d_n \in \{0, 1, \dots, 9\} \forall n \in \mathbb{N}$ и
 $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n \quad d_m \neq 9$, зв.
 фундаментальной

Док-во Пусть $a_n = c + \sum_{k=2}^n \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}}$,
 и пусть $\varepsilon > 0$. Для любых
 $n, m \in \mathbb{N}$ (пусть, кэф., $m \leq n$)

$$a_n - a_m = \sum_{k=m+1}^n \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}} = \frac{1}{10^m} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_{m+k-1}}{10^k}$$

$$\leq \frac{9}{10^m} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{10^k} < \frac{9}{10^m} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) =$$

$$= \frac{1}{10^{m-1}}.$$
 Поэтому, для

Н.т.т. $\frac{1}{10^{N-1}} < \varepsilon$, получим

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ т.т. $m, n \geq N \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

Док-во

Различные $\sqrt[n]{n}$ десятичные дроби
 без хвостов "9" соответствуют
 ч.п., которые не явл. эквив.