Производная функции

<u>Опр.</u>: Числ. ф-ия $f(x)$ наз. <u>дифференцируемой в т. $x_0 \in Dom(f)$</u>, если существует конечный предел $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \in \mathbb{R}$. Этот предел обозн. $\boxed{f'(x_0)}$ и называется значением производной ф-ии $f(x)$ в т. x_0.

Функция, область опред. которой явл. все т. $x_0 \in Dom(f)$, в которых $f(x)$ дифференцируема, а значениями в таких точках x_0 явл. $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$, наз. <u>производной ф-ии $f(x)$</u> и обозн. $f'(x)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} Dom(f') = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ диффер. в т. } x_0\} \\ f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \forall x \in Dom(f') \end{array}}$$

Основы дифференциального исчисления

Пусть $f(x)$ – числовая ф-ия (т.е. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}$ может быть отлична от $\mathbb{R}$).

Если $f(x)$ опред. в некот. окрестн. точки $x \in \mathbb{R}$, приращением аргумента наз. величина $\boxed{\Delta x \in \mathbb{R}}$, а величина $\boxed{\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)}$ наз. приращением функции f, соответствующим приращению аргумента Δx.

В этих обозначениях

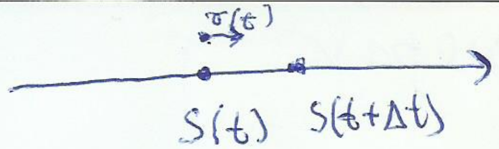
$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

(difference – разность) (отсюда название дифференциального исчисления)

Дифференциальное исчисление было развито в работах И. Ньютона и Г. В. Лейбница.

① Физический смысл производной

Пусть точка движется по числовой прямой по закону, опред. ф-ией зависимости от времени $s(t)$.



Величина

$$\boxed{v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}}$$

наз. (мгновенной) скоростью движения точки в момент времени t.

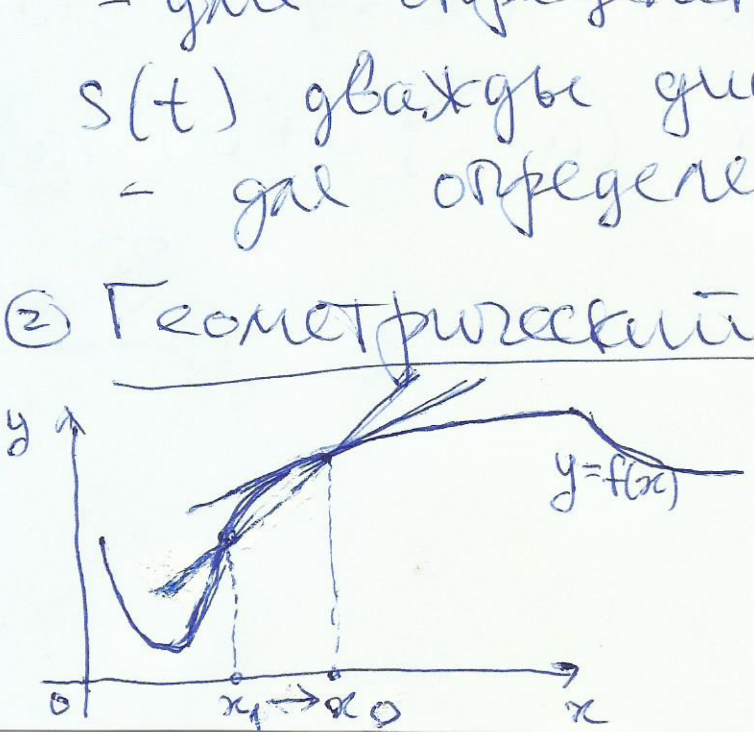
Аналогично, величина

$$\boxed{a(t) = v'(t) = s''(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}}$$

наз. (мгновенным) ускорением движения точки в момент времени t.

Замечание. Все эти величины определены только в случае, когда соотв. конечные пределы существуют (т.е $s(t)$ дифференцируема в т. t – для определения $v(t)$, и $s(t)$ дважды дифференцируема в т. t – для определения $a(t)$).

② Геометрический смысл производной



$$\boxed{y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)}$$

– уравнение прямой проход. через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_1; f(x_1))$

(Такая прямая наз. секущей)

При $x_1 \to x_0$ угловой коэффициент секущей (он равен $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$) стремится к $f'(x_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (если этот предел существует!)

Прямая $\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}$

в этом случае наз. касательной к графику ф-ции $y=f(x)$ в т. x_0.

(т.е. касательная – это предельное положение секущих, проходящих через т. $(x_0; f(x_0))$ и $(x_1; f(x_1))$ при $x_1 \to x_0$)

3) Применение производной для вычисления приближенных значений функции

Если $f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то при $x \to x_0$

$$\boxed{f(x) \approx f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}$$

◁ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0)$ при $x \to x_0$ ▷

Теорема (о непрерывности дифференцируемой ф-ии)

Если г. ф. $f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то $f(x)$ непрерывна в т x_0

Док-во. Пусть $f(x)$ дифференц. в т x_0, т.е. сущ. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)\right) = \left\{\begin{matrix}\text{пределы}\\ \text{сомнож.}\\ \text{существуют}\end{matrix}\right\}$

теор. о пред. произвед.

$= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0) =$

$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$. Т.о.,

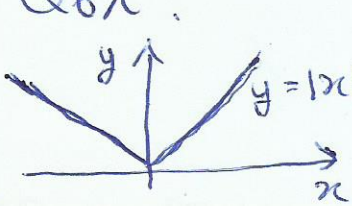
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0$, откуда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

он существует!

Док-но

Замечание. Непрерывность является необходимым условием дифференцируемости, но, в общем случае, не достаточным. Например, $f(x)=|x|$ непрерывна в т. 0, но не явл. дифференцируемой в т. 0:

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|x|-0}{x-0} = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x-0} = -1$



Теорема Если г.ф. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в т. $x_0 \in \mathbb{R}$, то г.ф. $f(x) \pm g(x)$ также дифференцируемы в т. x_0, и

$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)} \quad (\text{в т. } x = x_0)$$

Док-во. Имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) \pm (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \text{по теор. о сумме пред.}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

Док-но

Теорема Если г.ф. $f(x)$ и $g(x)$ дифференц. в т. $x_0 \in \mathbb{R}$, то г.ф. $f(x) \cdot g(x)$ также дифференцируема в т. x_0, и

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

(в т. $x = x_0$).

Док-во. Имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \overset{L6}{=}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{т.к. } f(x) \text{ и } g(x) \text{ диффер. в т. } x_0 \text{ и} \\ g(x) \text{ непрер. в т. } x_0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$ Док-но

Замечание: более коректными явл. формулировки вида

$$\boxed{(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)} \quad \text{и}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

Теорема Если г.ф. $f(x)$ и $g(x)$ диффер. в т. $x_0 \in \mathbb{R}$ и $g(x_0) \neq 0$, то г.ф. $\frac{f(x)}{g(x)}$ также диффер. в т. x_0, и

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}} \quad (\text{в т. } x = x_0)$$

Док-во. Докажем сначала, что

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$$ (в т. $x = x_0$)

◁ Имеем $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)/(x-x_0)\right) =$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x_0)\cdot g(x)}\right) =$$

$= \{$т.к. $g(x_0)\neq 0$ и $g(x)$ непрер. в т. $x_0\} =$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\Big/\lim_{x\to x_0}\left(g(x_0)\cdot g(x)\right) =$$

$= -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ▷ Итак,

по ф-ле производной произведения

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

(в т. $x = x_0$)

Док-но.

Замечание. Более корректными явл. формулировки вида

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

и

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}}.$$

Теорема (производная сложной ф-ции)
Пусть г. ф. $f(x)$ диффер. в т. x_0, а г. ф. $g(x)$ диффер. в т. $y_0 = f(x_0)$.
Тогда г. ф. $g(f(x))$ диффер. в т. x_0
и $\boxed{(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)}$ $\left(\begin{matrix}\text{в т.}\\ x = x_0\end{matrix}\right)$

Док-во Имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\cdot\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{y \to y_0\\ (y = f(x))}} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Док-но.

<u>Замечание</u>. Более корректной является формулировка вида

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$$

<u>Следствие</u> (производная обратной функции)

Пусть $f(x)$ — обратная ф-ия для ф-ии $g(y)$ (т.е. $Dom(f) = Rng(g)$, $Dom(g) = Rng(f)$, $f(g(y)) = y$ $\forall y \in Dom(g)$ $g(f(x)) = x$ $\forall x \in Dom(f)$), и пусть $g(y)$ дифференцируема в т. $y_0 = f(x_0)$, причем $g'(y_0) \neq 0$. Тогда $f(x)$ также диффер. в т. x_0, и $\boxed{f'(x_0) = \dfrac{1}{g'(f(x_0))}}$.

<u>„Док-во"</u> Имеем $g(f(x)) = x$ — тожд. ф-ия, поэтому $(g\circ f)(x)$ диффер. и $(g\circ f)'(x_0) = 1$.

По ф-ле производной сложной ф-ции

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = 1$$

сущ. как конечный предел, причем $\neq 0$

сущ. как конечный предел

$\Downarrow$

$f'(x)$ диффер. в т. x_0 и

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))}$$

„Доказано"

Замечание. Для того, чтобы воспользоваться ф-лой производной сложной ф-ции, нужно, чтобы $f(x)$ была диффер. в т. x_0!

Док-во.

Имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}}$

$= \left\{ \begin{array}{l} x = g(y),\ x_0 = g(y_0), \text{ при } y \to y_0 \\ f(x) = y\ \ ,\ f(x_0) = y_0 \quad g(y) \to g(y_0) \end{array} \right.$ вследствие непрер. $g(y)$ $\Big\}$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Док-но!