Числовые последовательности, имеющие (конечный) предел, т.е. сходящиеся.

> **Теорема** (о единственности предела)
> Если ч.п. сходится, то она имеет ровно один предел

Док-во От противного, предположим, что ч.п. $(a_n)_{n\in\omega}$ имеет два различных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$ причем $a \neq a'$ $(a, a' \in \mathbb{R})$.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$|a-a'| = |(a-a_n)-(a'-a_n)| \leq$$
$$\leq |a-a_n| + |a'-a_n|.$$

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $N \in \mathbb{N}$ т.ч. $|a-a_n| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq N$, и $N' \in \mathbb{N}$ т.ч. $|a'-a_n| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq N'$

Тогда для $M = \max\{N, N'\}$ верно

$$|a-a'| \leq |a-a_M| + |a'-a_M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Т.о., $|a-a'| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, откуда $a = a'$

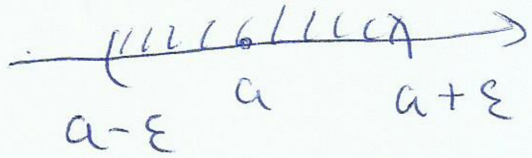
Док-но

Теорема. Всякая сходящаяся ч.п. явл. ограниченной

Док-во. Пусть ч.п. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, т.е. сущ. $a\in\mathbb{R}$ т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

По определению, это означает, что $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ т.ч. $|a_n-a|<\varepsilon\ \ \forall n\geqslant N$.

Т.к. $|a_n-a|<\varepsilon \iff a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$



то взяв, к примеру, $\varepsilon=1$, найдем $N_1\in\mathbb{N}$ т.ч. $a-1<a_n<a+1$

$$\forall n\geqslant N_1$$

Отсюда $|a_n|<\max\{|a-1|,|a+1|\}$

$$\forall n\geqslant N_1$$

а значит

$$|a_n|\leqslant \max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{N_1-1}|,\ |a-1|,|a+1|\}.$$

Т.о., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ явл. ограниченной.

Док-но

Теорема (о неравенстве пределов)

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – сходящиеся ч.п., и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Тогда

1) если $a < b$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. $a_n < b_n$ $\forall n \geq N$

2) если $\exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq N$, то $a \leq b$

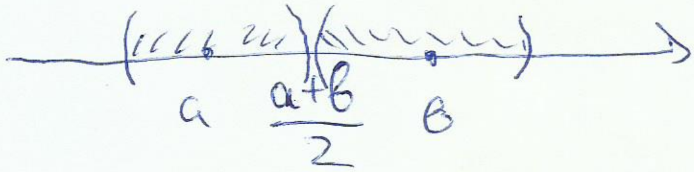
Док-во 1) рассм $\varepsilon_0 = \frac{b-a}{2}$:

сущ. $N_1 \in \mathbb{N}$ т.ч. $a - \varepsilon_0 < a_n < a + \varepsilon_0$ $\forall n \geq N_1$

сущ. $N_2 \in \mathbb{N}$ т.ч. $b - \varepsilon_0 < b_n < b + \varepsilon_0$ $\forall n \geq N_2$

Т.к. $a + \varepsilon_0 = b - \varepsilon_0 \left(= \frac{a+b}{2}\right)$, то

$$a_n < a + \varepsilon_0 = b - \varepsilon_0 < b_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$$



2) от противного: если бы $a > b$, то по пункту 1 $\exists N' \in \mathbb{N}$ т.ч. $a_n > b_n$ $\forall n \geq N'$ – противоречие.

Док-но.

Замечание. В п. 1 нельзя строгие нер-ва заменить на нестрогие, а в п. 2 нельзя нестрогие нер-ва заменить на строгие (упр.)

Теорема (арифметические свойства пределов ч. п.)

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — сходящиеся ч. п., и пусть $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Тогда:

1) $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — сходящиеся ч. п., причем

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b}$$

2) $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — сходящаяся ч. п.

причем $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b}$

(как следствие $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot a}$)
$(c\in\mathbb{R})$

3) если $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ – сходящаяся ч.п., причем

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}}$$

Док-во. 1) Имеем, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ т.ч. $|a_n - a| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq N_1$ и $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ т.ч. $|b_n - b| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq N_2$.

Тогда
$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq$$
$$\leq |a_n-a| + |b_n-b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Рассуждение для ч.п. $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аналогично (упр.)

2) Нам понадобится следующая

Лемма Если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – бесконечно малая последовательность, а $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ограниченная посл-ть, то $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – бесконечно малая последовательность

◄ Имеем $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|y_n| \leq C$ $(C>0)$

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $N \in \mathbb{N}$ т.ч.

$|x_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ $\forall n \geq N$. Т.о.,

$|x_n \cdot y_n| \leq |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$, т.е.

$x_n \cdot y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ►

Завершим док-во п.2. Имеем

$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab$

$= (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b)$ — беск. мал. ч.п.

$\underbrace{(a_n - a)}_{\text{беск. мал. ч.п.}} \cdot \underbrace{b_n}_{\text{огр. ч.п.}} + \underbrace{a}_{\text{огр. ч.п.}} \cdot \underbrace{(b_n - b)}_{\text{беск. мал. ч.п.}}$

Т.о., $(a_n b_n - ab)_{n \in \mathbb{N}}$ — бесконечно малая ч.п., что эквив. тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

3) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Имеем $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n \cdot b|}$.

Т.к. $\lim b_n = b \neq 0$, то

$\left.\begin{array}{l}\exists N_1 \in \mathbb{N} \\ \exists c > 0\end{array}\right\}$ т.ч. $|b_n| > c \quad \forall n \geq N_1$

$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{c}\right)$

Кроме того, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ т.ч. $|b_n - b| < \varepsilon \cdot (|b| c) \quad \forall n \geq N_2$

Поэтому $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon \cdot (|b| \cdot c)}{|b| \cdot c} =$

$= \varepsilon,$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. По п. 2

имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Док-но