

Производные основных аналитических функций

1

① Постоянная ф-ия $f(x) = c$
($c \in \mathbb{R}$) дифференцируема на
всей числовой прямой, и

$$(c)' = 0$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

по опр. предела
- упр. $\Rightarrow$

② Тождественная ф-ия $f(x) = x$
дифференцируема на всей числовой
прямой, и

$$(x)' = 1$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

③ Линейная ф-ия $f(x) = kx + b$
($k, b \in \mathbb{R}$) дифференцируема на всей

линейной функцией, и

$$(kx+b)' = k$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(kx+b) - (kx_0+b)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x-x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

④ Функция $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) дифференцируема на всей своей области отрез. (т.е. на $\mathbb{R}$ при $n \geq 0$ и на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $n < 0$), и

$$n \neq 0: (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (x^0)' = 0$$

$$\textcircled{n=0}: x^0 = 1, (x^0)' = (1)' = 0$$

$\textcircled{n \geq 1}$: установить эту ф-лу можно математикой. Индукцией.

а) $n=1$: $(x^1)' = (x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$
 базисный.

б) $n \rightarrow n+1$: $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' \stackrel{\text{ф-ла произведения}}{=} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' =$
 инд. переход
 $= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n$

$$(n < 0): (x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}} \right)' \stackrel{\text{производн. частн.}}{=} \quad |3$$

$$= - \frac{(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = - \frac{(-n) \cdot x^{-n-1}}{x^{-2n}} =$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

⑤ Функция $f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n \geq 1)$

дифференцируема на $\mathbb{R}^+$ -ве $(0; +\infty)$ при n четном, и на $\mathbb{R}$ -ве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ при n нечетном,

$$\left(\sqrt[n]{x} \right)' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

по ф-ле производной обратной ф-ии, $\left(\sqrt[n]{x} \right)' = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} =$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} \left(= \frac{1}{n} x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \right)$$

Следствие

$$\left(x^a \right)' = a \cdot x^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q}$$

④ $\left(x^{\frac{m}{n}} \right)' = \left(\sqrt[n]{x^m} \right)' \stackrel{\text{произв. сложн. ф-ии}}{=}$

$$= \frac{1}{h} (x^m) \left(\frac{1}{h} - 1 \right) \cdot m x^{m-1} =$$

$$= \frac{m}{h} x^{\frac{m}{h} - 1}$$

⑥ Тригонометрическая функция $f(x) = \sin x$ дифференцируема на всей числовой прямой, и

$$\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$$

Имеем $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right) \right) =$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 $\cos(x)$ — непрерывная ф-ция

$$= 1 \cdot \cos(x_0) = \cos(x_0) \Rightarrow$$

Замечание: При использовании:

1) $\boxed{\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1}$ — 1-ый замеч. пред.

2) непрерывность ф-ции $\cos(x)$

7) Тригонометрический ф-ца

5

$$f(x) = \cos(x)$$

дифференцируема на всей области
определения, и

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

по ф-ле производной сложной
ф-цы имеем

$$\begin{aligned} (\cos(x))' &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x) \end{aligned}$$

8) Тригонометрический ф-ца
 $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

дифференцируема на всей области
своего определения, и

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

имеем $(\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' =$ ф-ла
производной
частного

$$= \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

⑨ Тригонометрическая ф-ца

$$f(x) = \operatorname{ctg}(x)$$

дифференцируема на всей области своего определения, и

$$\boxed{(\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } (\operatorname{ctg}(x))' &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \\ &= \frac{\cos'(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \sin'(x)}{\sin^2(x)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

~~сформулируем~~

⑩ Тригонометрические ф-цы

$$f(x) = \operatorname{arcsin}(x) \quad \text{и} \quad f(x) = \operatorname{arccos}(x)$$

дифференцируемы на интервале $(-1; 1)$, и

$$\boxed{(\operatorname{arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{(\operatorname{arccos}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

по ф-ле производной обратной ф-цы имеем

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\nearrow \sin'(y) = \cos(y)$

$\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Аналогично, $(\arccos(x))' =$

$$= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\nearrow \arccos(x) \in [0; \pi]$

① Обратные тригонометрические функции $f(x) = \arctg(x)$ и $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$ дифференцируемы на всей числовой прямой и

$$\boxed{(\arctg(x))' = \frac{1}{x^2+1} \quad \left| \quad (\operatorname{arccotg}(x))' = -\frac{1}{x^2+1} \right.}$$

по ф-ле производной обратной ф-ии имеем

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x))} = \cos^2(\operatorname{arctg}(x)) \quad | 8$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Аналогично,

$$(\operatorname{arccctg}(x))' = \frac{1}{\operatorname{ctg}'(\operatorname{arccctg}(x))} =$$

$$= -\sin^2(\operatorname{arccctg}(x)) = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arccctg}(x)) + 1}$$

$$= -\frac{1}{x^2 + 1}$$

(12) Производные показательной
и логарифмической ф-ии (алекс)

Для $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, показ. ф-ия $\Phi(x) = e^x$ дифф. $\forall x \in \mathbb{R}$, и

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$\boxed{\ln(x)' = \frac{1}{x}}$$

Для натур. логарифма $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$, эта ф-ия дифф. $\forall x > 0$, и
Кроме того, $\forall a > 0$

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x}$$

$$\boxed{(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\Leftarrow (a^x)' = e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-y_0}{2}}{\frac{x-y_0}{2}}, \lim_{y \rightarrow x_0} \cos \left(\frac{x+y_0}{2} \right) = 1 \cdot \cos(x_0) = \cos(x_0) \quad \text{т.к. } 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

пределах замкнутой области (открытой, полуоткрытой). 2) $\cos x$ - непрерывна для $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\sin x$.

Следствие 1 Ф-ии $\cos(x)$ дифференцируемы. $\forall x \in \mathbb{R}$, и $(\cos(x))' = -\sin(x)$

② Ф-ии $\operatorname{tg}(x)$ и $\operatorname{ctg}(x)$ дифференцируемы во всех точках своей области определения, и $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

▲ Имеем $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, найдем $(\cos(x))' = \sin'(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)'$ по формуле дифференцирования сложения ф-ий $= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x$

$$\textcircled{3} \text{ Имеем } \operatorname{tg}'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \text{ где } \operatorname{ctg}(x) \text{ - аналогично}$$

Следствие (производные основных тригонометрических ф-ий)

① Ф-ии $\arcsin(x)$ и $\arccos(x)$ дифференцируемы во всех точках своей области определения, и $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② Ф-ии $\operatorname{arctg}(x)$ и $\operatorname{arctg}(x)$ дифференцируемы во всех точках своей области определения, и $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

▲ Используем теорему о дифференцировании обратной ф-ии. ① Т.к. $y(x) = \sin(x)$ обратная к $y = \arcsin(x)$, то $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ (только координаты x)
 $= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Аналогично для $y = \arccos(x)$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{Имеем } \operatorname{tg}^2 x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \text{ отсюда } \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \text{ и } g(y) = \operatorname{tg} y$$

$$f'(x) = g'(f(x))$$

$$\text{т.о. } (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x)) + 1} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x)) + 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{так: получая аналогичную ф-у для } \operatorname{arctg}(x)$$

Используем производные при исследовании функций (исследование на экстремумы).

$f(x)$ возрастает на I , если $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (можно использовать термин "строго возрастает")

$f(x)$ убывает на I , если $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (можно использовать термин "строго убывает")

Опр. Пусть ф-ия $f(x)$ определена в некоторой окрестности т.к.

1. x_0 - л-е точкой локального минимума ф-ии $f(x)$, если $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom}(f)$, где некоторое $\delta > 0$

2. x_0 - л-е точкой локального максимума ф-ии $f(x)$, если $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ для некоторого $\delta > 0$

3. x_0 - л-е точкой локального экстремума ф-ии $f(x)$, если известно наличие локального минимума $f(x)$, либо точки л-е максимума $f(x)$

Пусть ф-ия $f(x)$ непрер. в некоторой окрестности T, x_0 является точкой локального экстремума ф-ии $f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 (т.е. имеет производную в x_0), то $f'(x_0) = 0$

Д-во. Пусть, например, T, x_0 — точка локального максимума ф-ии $f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в T, x_0 . Пусть для некоторого $\delta > 0$ верно, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq T$ (это можно считать в силу непрерывности).

Имеем: а) для любой $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{поскольку} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (\text{потому что ограничивается и стремится к нулю})$$

1) можем сказать существует т.к. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

аналогично для любой точки $y = (x_0, x_0 + \delta)$ имеем $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ потому что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \text{т.к.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\text{и} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{то} \quad \begin{cases} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad f'(x_0) = 0$$

Замечание. Теорема Ферма дает лишь необходимые условия локального экстремума

$f(x)$ дифференцируема в T, x_0 , $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

x_0 — точка локального экстремума (обратное неверно, см. пример 2)

Обратное неверно, рассмотрим $f(x) = x^3$ и $x_0 = 0$, тогда $f'(x_0) = 3x_0 = 0$, но x_0 не является точкой локального экстремума. Кроме того, условие существования производной для ф-ии $f(x)$ не является необходимым. Рассмотрим ф-ию

$f(x) = |x|$ — она не дифференцируема в $x_0 = 0$, однако имеет в этой точке локальный экстремум

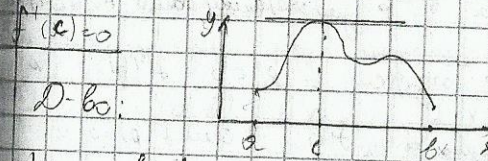
и производная для ф-ии $f(x)$ не существует. Рассмотрим ф-ию

$f(x) = |x|$ — она не дифференцируема в $x_0 = 0$, однако имеет в этой точке локальный экстремум

Потому, все, что можно утверждать на основании теоремы Ферма, состоит в том, что все точки локального экстремума ф-ии $f(x)$ на промежутке (a, b) являются точками, где $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

Теорема Ролля (о среднем значении)

Пусть ф-ия $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала (a, b) . Если $f(a) = f(b)$, то существует $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$



Д-во:

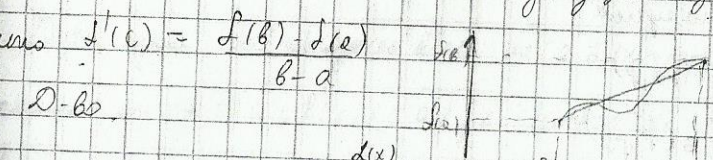
1) если $f(x) = \text{const}$ на всем отрезке $[a, b]$, то $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (a, b)$

Если $f(x)$ не является постоянной на $[a, b]$ — т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса, существуют $\tau \in (a, b)$, где $f(x)$ принимает свои локальные максимум и минимум

ф-ии $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Т.к. $f(a) = f(b)$, то τ является точкой локального экстремума ф-ии $f(x)$. По теореме Ферма получаем $f'(\tau) = 0$ Д-во

Теорема Лагранжа (о среднем значении)

Пусть ф-ия $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала (a, b) . Тогда существует $\xi \in (a, b)$, такое, что $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Д-во.

Рассмотрим линейную ф-ию, проходящую от $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ и рассмотрим разность $\varphi(x) = f(x) - L(x)$

или разность $\varphi(x) = f(x) - L(x)$

ак-во: 1) Если $f(x) = \text{const}$ на всем отрезке $[a; b]$, то $f'(c) = 0 \quad \forall c \in [a; b]$

2) Если $f(x)$ не явл. пост. на $[a; b]$, то $f(x)$ непр. на $[a; b]$, по т.

Вейерштрасса, изм. f на $(a; b)$ явл. непр. точкой

максимум

ф-ции $f(x)$ на $[a; b]$, т.к. с явл. точкой лок. максимум для

ф-ции $f(x)$. по теор. Ферми получаем $f'(c) = 0$

теор. Лагранжа

(о среднем значении) Пусть ф-ция $f(x)$ непр. на отр $[a; b]$ и дифф. во всех точках из инт. $(a; b)$, тогда

$$\forall c : c \in (a; b) \text{ т.з. : } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Док-во:

Рассм. линейную $\lambda(x)$ ф-цию, проходящую

через т. $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, и рассм. разность

$$g(x) = f(x) - \lambda(x)$$

$$\lambda(x) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} (x - a) + f(a)$$

Потому по т. Ролля $\exists c \in (a; b) : g'(c) = 0$. Т.к. $g'(c) = f'(c) - \lambda'(c) =$

$$= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ т.е. :}$$

(Достаточное условие возрастания/убывания ф-ции) $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Теорема: Пусть ф-ция $f(x)$ дифф. во всех точках некоторого интервала $(a; b)$

Тогда 1) Если $f'(c) > 0 \quad \forall c \in (a; b)$, то $f(x)$ возр. на инт. $(a; b)$

2) Если $f'(c) < 0 \quad \forall c \in (a; b)$, то $f(x)$ убыв. на инт. $(a; b)$

3) Если $f'(c) \geq 0 \quad \forall c \in (a; b)$, то $f(x)$ не убыв. на инт. $(a; b)$

4) Если $f'(c) \leq 0 \quad \forall c \in (a; b)$, то $f(x)$ не возр. на инт. $(a; b)$

Док-во: 1) Пусть $f'(c) > 0 \quad \forall c \in (a; b)$. Рассмотрим произвольные две точки $x_1, x_2 \in (a; b)$

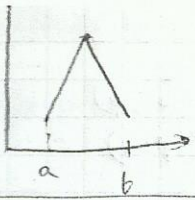
$x_1 < x_2$. По теор. Лагранжа $\exists \xi \in (a; b)$ т.з. $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ Т.о. т.к. $f'(c) > 0$

$f(x_2) > f(x_1)$. Т.о. $f(x)$ возр. на инт. $(a; b)$

2, 3, 4 - аналогично

Теорема: (Дост. условие локального максимума/минимума) ф-ции

Пусть ф-ция $f(x)$ дифф. на интервалах $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$ для нек. x_0



Тогда 1) Если $\begin{cases} f'(c) > 0 & \forall c \in (a, x_0) \\ f'(c) < 0 & \forall c \in (x_0, b) \end{cases}$ то x_0 явл. т. строгого локального максимума.

2) Если $\begin{cases} f'(c) < 0 & \forall c \in (a, x_0) \\ f'(c) > 0 & \forall c \in (x_0, b) \end{cases}$ то x_0 явл. т. строгого локального минимума $f(x)$

$\left. \begin{aligned} f(x_0) &> f(x) \\ \text{• строгий лок. макс.} \\ f(x_0) &> f(x) - \\ \text{лок. макс} \end{aligned} \right\} \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$

3) Если $\begin{cases} f'(c) \geq 0 & \forall c \in (a, x_0) \\ f'(c) \leq 0 & \forall c \in (x_0, b) \end{cases}$ то x_0 явл. т. локального максимума

4) Если $\begin{cases} f'(c) \leq 0 & \forall c \in (a, x_0) \\ f'(c) \geq 0 & \forall c \in (x_0, b) \end{cases}$ то x_0 явл. т. локального минимума

Док-во: 1) ...

Тогда по дан. условию $f(x)$ возрастает на интервале $(a; x_0)$ и убывает на инт. $(x_0; b)$. Т.к. $f(x)$ непрерывна в т. x_0 , то $\begin{cases} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ f(x_0) > f(c) & \forall c \in (a, x_0) \\ f(x_0) < f(c) & \forall c \in (x_0, b) \end{cases}$

Случаи 2, 3, 4 рассматриваются аналогично. Док-во

Т.о., если произв. ф-ция $f(x)$ меняет знак + на - , в точке x_0 , то x_0 явл. т. лок. максимума ф-ции $f(x)$. Если, кроме того $f(x)$ дифф. в т. x_0 , то $f'(x_0) = 0$ (т.к. x_0 - точка лок. экстремума)

Теорема: Если $f(x)$ дифф. на (a, b) и для некот. т. $x_0 \in (a, b)$ $f'(x_0) = 0$

$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x) > 0 & \forall x \in (a, b) \end{cases}$ то x_0 - точка лок. макс.

Теорема: (Дост. условие лок. макс/мин.)

Пусть ф-ция $f(x)$ дважды дифференцируема в т. p , дифф. в некот. окрестности т. p и $f'(x)$ непрерывна в т. p .

Тогда: ① Если $f'(p) = 0$ и $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ - т. строгого локального мин. $f(x)$
② Если $f'(p) = 0$ и $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ - т. строгого локального макс.

Док-во: Рассмотрим, например, случай 1. Т.к. $f''(p) > 0$, то ф-ция $f'(x)$

возрастает вблизи т. p . $f''(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p} > 0$, Поэтому, используя

теорему о пер-ве презентов, и непрерывность $f(x)$ в т. p , получаем.

$\lim_{x \rightarrow p} f'(x) = f'(p) = 0$. Отсюда следует, что вблизи т. p (при $x \rightarrow p$)

$f'(x) > f'(p)$ при $x > p$ т.к. $f'(p) = 0$ и $f'(x)$ непрерывна в т. p , то

$$f'(p) = 0$$

$f''(p) > 0 \Rightarrow f'(x)$ возрастает вблизи Т.Р

Т.Р имеет вид $c \cdot 10^{-n}$ на 10^{-n}

$$\begin{array}{c} f'(x) < 0 \quad f'(p) = 0 \quad f'(x) > 0 \\ \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\ f(x) \text{ убывает,} \quad \quad \quad f(x) \text{ возрастает} \\ \text{минимум} \quad \quad \quad \text{максимум} \end{array}$$

Теорема (достаточные условия локального максимума, минимума ф-ции.

Пусть ф-ия $f(x)$ дважды дифференцируема в Т.Р дифференцируемая в некоторой окрестности Т.Р, а $f'(x)$ непрерывна в Т.Р. Тогда если $f'(p) = 0$ и $f''(p) > 0$, то

Т.Р является точкой строгого локального минимума ф-ии $f(x)$; и) если $f'(p) = 0$ и

$f''(p) < 0$, то Т.Р является точкой строгого локального максимума ф-ии $f(x)$

Д.в.: 1) рассмотрим, например случай 1. Т.к $f'(p) > 0$, то $f'(x)$ возрастает

вблизи Т.Р. $f''(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p} > 0$ по определению предела, значит $f'(x) - f'(p) > 0$ для $x > p$.

предельно непрерывности $f'(x)$ в Т.Р. Получаем $\lim_{x \rightarrow p} f'(x) = f'(p) = 0$. Отсюда

вблизи Т.Р $f'(x) > f'(p)$ при $(x \text{ достаточно близка к } p) \quad x > p$, и аналогично

$f'(x) < f'(p)$ при $x < p$, т.к $f'(x) = 0$ и $f'(x)$ непрерывна в Т.Р, то

$f'(x) < 0$ где $x \in (p - \delta_1, p)$ и $f'(x) > 0$ где $x \in (p, p + \delta_2)$ Получим

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ получим

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (p - \delta, p)$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (p, p + \delta)$$

$$f'(p) = 0$$

Т.о $f(x)$ убывает на интервале $(p - \delta, p)$, возрастает на $(p, p + \delta)$ поэтому

и $f(x)$ имеет строгий локальный минимум в Т.Р.

Аналог. в случае $f''(p) < 0$

Выпуклые ф-ции

Ф-ия $f(x)$ называется выпуклой на некотором интервале (a, b) и-е

выпуклой вверх (если из графиков выпуклого множества) если $\forall x_1, x_2, t \in (0, 1)$

$$f(x_2 + t(x_1 - x_2)) \leq f(x_2)t + f(x_1)(1 - t) \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

аналогично определяется понятие выпуклой вниз функции на (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2, t \in (0, 1) \quad f(x_2 + t(x_1 - x_2)) \geq f(x_2)t + f(x_1)(1 - t)$$

Замечание. Функции выпуклые вверх (вниз) на (a, b) т.ч.т.т., когда

и график (картина) или выпуклый или вогнутый

Теорема (необходимые и достаточные условия выпуклости вверх. Пусть $f(x)$

определена и дифференцируема на интервале от a до b . Тогда $f(x)$ выпуклая

вверх на интервале (a, b) т.ч.т.т., когда $f'(x)$.. Ф-ия $f'(x)$ является неубывающей на (a, b) .

Д.в.: пусть $f(x)$ неубывающая вверх на (a, b) и пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ $x_1 < x_2$

Покажем, что $f'(x_1) \leq f'(x_2)$: а) рассмотрим x_1, x_2 т.к

$$\forall x \in (x_1, x_2) \quad f(x) \geq d(x) \quad (\text{где } d - \text{прямая касательная к } f \text{ в } x_1 \text{ и } x_2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{d(x) - d(x_1)}{x - x_1} \quad (d(x_1) = f(x_1))$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

