Теорема („о двух милиционерах").

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – сходящиеся ч.п. и пусть $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c}$.

Если ч.п. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что $\boxed{a_n \leq x_n \leq b_n \quad \forall n\in\mathbb{N}}$, то она также явл. сходящейся, и

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = c}$$

Док-во. Рассм. произвольное $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon\in\mathbb{R})$. Тогда $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ т.ч.

$|a_n - c| < \varepsilon$ $(\Leftrightarrow c-\varepsilon < a_n < c+\varepsilon)$ $\forall n \geqslant N_1$

$|b_n - c| < \varepsilon$ $(\Leftrightarrow c-\varepsilon < b_n < c+\varepsilon)$ $\forall n \geqslant N_2$

Тогда для $N = \max\{N_1, N_2\}$ имеем

$$c-\varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < c+\varepsilon \quad \forall n \geqslant N$$

Т.о., $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ т.ч.

$|x_n - c| < \varepsilon$ $(\Leftrightarrow c-\varepsilon < x_n < c+\varepsilon)$ $\forall n \geqslant N$

Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

Док-но

Теорема. Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – сходящаяся ч.п.
и пусть $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$. Если
$a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\Rightarrow a \geq 0)$, то
$(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ также явл. сходящейся ч.п.
и $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}}$

Док-во. ① Рассм. случай $a > 0$. Рассм. произвольное $\varepsilon > 0$.
$(\varepsilon \in \mathbb{R})$. Имеем $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| =$

$$= \left| \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} \right| =$$

$$= \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

где $N \in \mathbb{N}$ выбрано таким, что

$$|a_n - a| < \varepsilon \cdot \sqrt{a} \qquad \forall n \geq N$$

Т.о., $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

② В случае $a = 0$, т.е. когда $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – бесконечно малая ч.п. легко показать (по опред. предела), что $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ также явл. бесконечно малой ч.п.
Док-но

Лемма (о связи бескон. малой и бескон. большой г.п.)

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – г.п. т.ч. $a_n \neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Тогда $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ – бескон. малая г.п.} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ – бескон. больша г.п.}}$

Док-во непосредственно следует из определения (упр.) Док-но

Неравенство Бернулли

$\forall x \geq -1 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$

Док-во: индукция по n.

$n=1$: $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$

$n \rightsquigarrow n+1$: пусть $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Имеем $(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geq$

$\geq (1+x)\cdot(1+nx) \geq (1+nx)+x =$

$= 1+(n+1)\cdot x$.

Док-но.

Лемма. Если $\boxed{|q|<1}$, то $(q^n)_{n\in N}$ – сходящаяся ч.п., и $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0}$

Док-во. Для $q=0$ утв. очевидно.
Пусть $q\neq 0$, тогда $\frac{1}{|q|}>1$. Обозначим $\alpha = \frac{1}{|q|}-1$ $(\alpha>0)$, имеем $\left|\frac{1}{q}\right| = 1+\alpha$ и $\left|\frac{1}{q}\right|^n = (1+\alpha)^n$. По нер-ву Бернулли $\left|\frac{1}{q}\right|^n = (1+\alpha)^n > 1+\alpha n > \alpha n$, откуда $|q|^n < \frac{1}{\alpha n}$. Таким образом, $\forall \varepsilon>0$ возьмем $N = \left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right]+1$. Т.к. $N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$ то для $n\geq N$ $|q|^n < \frac{1}{\alpha n} < \frac{1}{\alpha N} < \varepsilon$

Т.о., $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ Док-но

Опр. Пусть $(a_n)_{n\in N}$ – ч.п.
Ряд $\boxed{a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n}$ образован последовательностью частичных сумм $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n\right)_{k\in N}$. Этот ряд наз. сходящимся (суммируемым), если посл-ть $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n\right)_{k\in N}$ сходится.

(обозн. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n}$).

В противном случае этот ряд наз. <u>расходящимся</u>

<u>Пример</u> (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

Пусть $b, q \neq 0$. Посл-ть $b, bq, \dots, bq^{n-1}, \dots$ наз. <u>геометрической прогрессией</u> (со знаменателем q).

<u>Утв.</u> ($q \neq 1$) $\boxed{b + bq + \dots + bq^{n-1} = b\frac{1-q^n}{1-q}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

◁ пусть $S_n = b + bq + \dots + bq^{n-1}$, тогда

$q \cdot S_n = bq + bq^2 + \dots + b \cdot q^n$, поэтому

$S_n - qS_n = b(1-q^n)$ ▷

Геометрические посл-ть со знаменателем q т.ч. $|q|<1$ наз. <u>бесконечно убывающей</u>. Мы показали ранее, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty} (b + bq + \dots + bq^{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(b\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{b}{1-q}\left(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{b}{1-q}$. Т.о.

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = \frac{b}{1-q}}$ ($|q|<1$) — сумма б.у. геом. прогр.