Машины Тьюринга.

Вычислимые и вычислимо перечисл. языки

Опр. Машиной Тьюринга наз. упор. пятерка $\boxed{M = \langle Q, \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}, s, H, \delta \rangle}$

где Q - конечное мн-во состояний, Σ - конечный алфавит, $\{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}$ - мн-во вспомогат. символов ($\triangleright$ - „левый край", $\triangleleft$ - „правый край", $\sqcup$ - „пустая клетка"), $s \in Q$ - начальн. сост., $H \subseteq Q$ - мн-во заключит. сост., $\delta : (Q \setminus H) \times (\Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup\}) \to$

$\boxed{\delta(q_i, a_j) = (q_k, a_s, m)}$ $\to Q \times (\Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup\}) \times \{L, R, N\}$

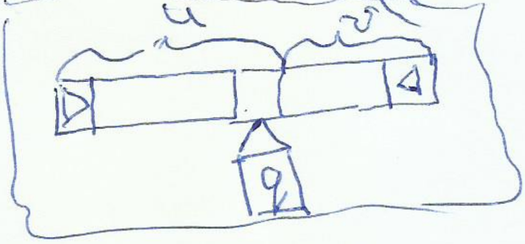
обозн.

$\boxed{q_i a_j \to q_k a_s m}$ - функция перехода, при этом

1) множества Q, Σ, $\{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}$, $\{L, R, N\}$ попарно не пересекаются;

2) $\delta(q, \triangleright) = (q', a, m) \Rightarrow a = \triangleright, m = R$

<u>Опр.</u> <u>Конфигурацией</u> м.Т. M наз. упор. тройка $\boxed{(u, q, v)}$, где
$u \in \{\triangleright\}\cdot(\Sigma \cup \{\sqcup\})^*$, $v \in ((\Sigma \cup \{\sqcup\})^* \cdot \Sigma \cup \{e\})\cdot\{\triangleleft\}$,
$q \in Q$.



<u>Опр.</u> Конфигурация (u, q, v) м.Т. M <u>переходит</u> в конфигурацию (u', q', v') <u>за 1 шаг</u> работы (обозн. $\boxed{(u, q, v) \vdash_M (u', q', v')}$), если выполн. одна из след. соотношений:

1) $u = xa$, $\delta(q, a) = (q', b, N)$,
$u' = xb$, $v' = v$

2) $u = xa$, $\delta(q, a) = (q', b, R)$,
$v = cy\triangleleft$, $u' = xbc$, $v' = y\triangleleft$

2') $u = xa$, $\delta(q, a) = (q', b, R)$,
$v = \triangleleft$, $u' = xb\sqcup$, $v' = \triangleleft$

3) $u = xa$, $\delta(q, a) = (q', b, L)$, $b \neq \sqcup$,
$x = yc$, $u' = yc$, $v' = bv$

3') $u = xa$, $\delta(q, a) = (q', \sqcup, L)$, $v = \triangleleft$,
$u' = x$, $v' = \triangleleft$

Как обычно, отношение $\boxed{\vdash_M^*}$ на множестве конфигураций опред. как рефлексивное и транзит. замыкание отн. $\vdash_M$

Пусть $M = \langle Q, \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}, s, H, \delta \rangle$ – машина Тьюринга, т.ч. $H = \{y, n\}$, и пусть $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Опр. Язык $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ распознается м. Т. M, если $\forall w \in (\Sigma_0)^*$

$$\boxed{\begin{array}{l} w \in L \iff (\triangleright \sqcup, s, w \triangleleft) \vdash_M^* (\triangleright \sqcup, y, \triangleleft) \\ w \notin L \iff (\triangleright \sqcup, s, w \triangleleft) \vdash_M^* (\triangleright \sqcup, n, \triangleleft) \end{array}}$$

Опр. Язык $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ наз. вычислимым (рекурсивным), если L распознается некот. машиной Тьюринга

Пусть $M = \langle Q, \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}, s, H, \delta \rangle$ – машина Тьюринга, т.ч. $H = \{h\}$, и пусть $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Опр. Язык $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ полураспознается м. Т. M, если $\forall w \in (\Sigma_0)^*$

$$w \in L \iff (\triangleright \sqcup, s, w \triangleleft) \vdash_M^* (\triangleright \sqcup, h, \triangleleft)$$

Опр. Язык $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ наз. вычислимо перечислимым (рекурсивно перечислимым), если L полураспознается некот. м. Т.

Предложение. Всякий вычислимый язык явл. вычислимо перечисл.

◁ упр: $h = y$, $H = \{y, n\}$, ... ▷

Теорема (Пост). Язык $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ явл. вычислимым т. и т. т., когда L и $(\Sigma_0)^* \setminus L$ явл. вычислимо перечислимыми.

◁ упр: „параллельное" (одновременное) полураспознавание $w \in (\Sigma_0)^*$ машиной M_y для L и машиной M_n для $(\Sigma_0)^* \setminus L$: копирование w и т. д. ▷

$H = \{ \gamma(M) \in \{0,1\}^{*} \mid$ м.Т. M останавливается, начав работу в конфиг. $(\rhd \sqcup, s, \gamma(M) \lhd) \}$

гёделевский номер м.Т. M

– вычислимо перечисл. язык, не являющийся вычислимым

Док-во от противного, пусть

$H = \{ \gamma(M) \mid M$ остан. на $\gamma(M) \}$ – вычисл. язык, т.е. $\overline{H}$ также явл. в.п. мн-вом. Тогда в.п. мн-вом явл. также $\overline{H} \cap T$, где $T = \{ w \in \{0,1\}^{*} \mid$ сущ. м.Т. M т.ч. $w = \gamma(M) \}$

Пусть $\overline{H} \cap T$ полураспозн. м.Т M_0.

1) если $\gamma(M_0) \in H$, то M_0 остан. на $\gamma(M_0)$, т.е. $\gamma(M_0) \in \overline{H} \cap T$ по опред. M_0 – прот.

2) если $\gamma(M_0) \notin H$, то $\gamma(M_0) \in \overline{H} \cap T$, т.е. M_0 остан. на $\gamma(M_0)$ по опред. M_0 – прот.

Следствие $\boxed{H_1 = \{ \langle \gamma(M), w \rangle \mid M \text{ остан. на } w \}}$ явл. в.п., но не выч. ◁ упр. ▷ Док-во

Опр. Грамматикой (грамматич. сист. преобразований) наз. упор. четверка

$$\boxed{G = \langle V, \Sigma, S, R \rangle}$$

где V - конечный алфавит,
$\Sigma \subseteq V$ - мн-во терминальных симв.
(симв. из $V \setminus \Sigma$ наз. нетерминальными),
$S \in V \setminus \Sigma$ - стартовый нетермин. символ,
$R \subseteq (V^*(V\setminus\Sigma)V^*) \times V^*$ - конечное мн-во правил (продукций).

Как обычно, правило $(xAy, z) \in R$ обозн. $\boxed{xAy \to z}$ $(A \in V \setminus \Sigma,\ x, y, z \in V^*)$

Опр. Для грамматики $G = \langle V, \Sigma, S, R \rangle$ и слов $w, w' \in V^*$, $\boxed{w \Rightarrow_G w'}$ озн., что $w = uxAyv$, $w' = uzv$ для некот. правила $(xAy \to z) \in R$ и некот. $u, v \in V^*$.

Как обычно $\Rightarrow_G^*$ есть рефлекс. и транзит. замыкание отн. $\Rightarrow_G$.

Опр. $\boxed{L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w \}}$

- язык, порождаемый грамматикой G

Теорема Язык $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ порождается некот. грамматикой т. и т.т., когда L полураспознается некот. м. Тьюринга

Док-во ($\Leftarrow$) Пусть L полураспозн. некот. м. Т. $M = \langle Q, \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\}, s, \{h\}, \delta \rangle$ ($\Sigma_0 \subseteq \Sigma$). Определим грамматику $G_M = \langle V_M, \Sigma_0, S, R_M \rangle$ след. образом. Полагаем $V_M = \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup, \triangleleft\} \cup Q \cup \{S\}$ (предполагается, что S — новый симв.)

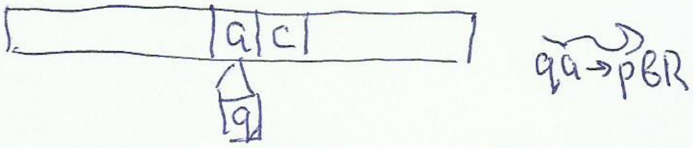
Помещаем в R_M след. правила: (идея: конфиг. (u, q, v) м.Т. M ставится в соотв. слово uqv в алф. V_M, а правила в R соотв. „обращениям" команд м. Т. M)

0) $\boxed{S \to \triangleright \sqcup h \triangleleft}$, $\boxed{\triangleright \sqcup s \to e}$, $\boxed{\triangleleft \to e}$;

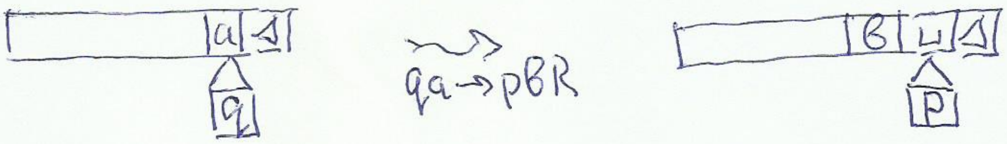
1) для команд типа $qa \to pbN$ — правила $\boxed{bp \to aq}$

2) для команд типа $qa \to pbR$

– правила $\boxed{bcp \to aqc}$ для всех $c \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$

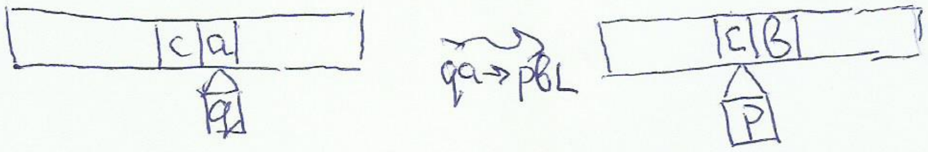


а также правила $\boxed{b\sqcup p\lhd \to aq\lhd}$

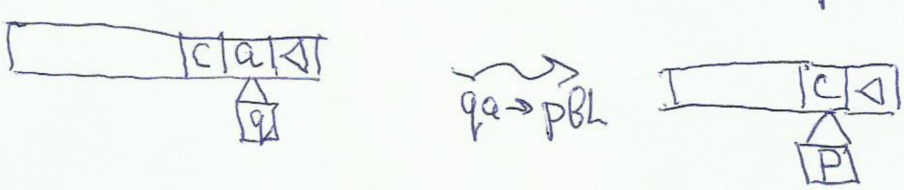


3) для команд типа $qa \to pbL$

– правила $\boxed{cpb \to caq}$ для всех $c \in \Sigma \cup \{\rhd, \sqcup\}$



а также правила $\boxed{cp\lhd \to caq\lhd}$ для команд типа $qa \to p\sqcup L$



(для всех $c \in \Sigma \cup \{\rhd, \sqcup\}$

Непоср. из опред. грамматики G_M следует, что $\forall$ конфигураций (u, q, v) и (u', q', v') м.Т. M,

$$\boxed{(u,q,v) \vdash_M (u',q',v') \overset{\text{(12)}}{\Longleftrightarrow} \overset{\text{(12)}}{\Longleftrightarrow} u'q'v' \Rightarrow_{G_M} u\,q\,v}$$

Поэтому $\forall w \in (\Sigma_0)^*$

$w \in L(G_M) \overset{\text{(13)}}{\Longleftrightarrow} \triangleright \sqcup h \triangleleft \Rightarrow^*_{G_M} \triangleright \sqcup S w \triangleleft \overset{\text{(фсл.)}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{(11)}}{\Longleftrightarrow} (\triangleright \sqcup, S, w\triangleleft) \vdash^*_M (\triangleright \sqcup, h, \triangleleft)$

что и требовалось показать

$\Rightarrow$ Пусть $L \subseteq (\Sigma_0)^*$ порожд. некот. грамматикой $G = \langle V, \Sigma, S, R \rangle$

Идея: $w \in L(G)(= L) \overset{\text{(12)}}{\Longleftrightarrow} S \Rightarrow^*_G w$

Можно построить м.Т. M_G, „перечисляющую" все возможные конечные посл-ти слов из V^* и останавливающуюся, если найдена посл-ть явл. выводом слова w в грамматике G.

Док-но