# Использование производной при исследовании функций

**Опр.** 1) Г.ф. $f(x)$ <u>возрастает</u> на мн-ве $I \subseteq Dom(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in I$

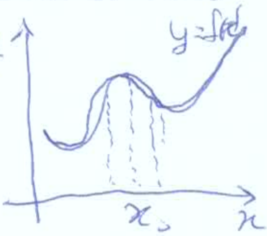
$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

2) Г.ф. $f(x)$ <u>неубывает</u> на мн-ве $I \subseteq Dom(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in I$

$$\boxed{x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$$

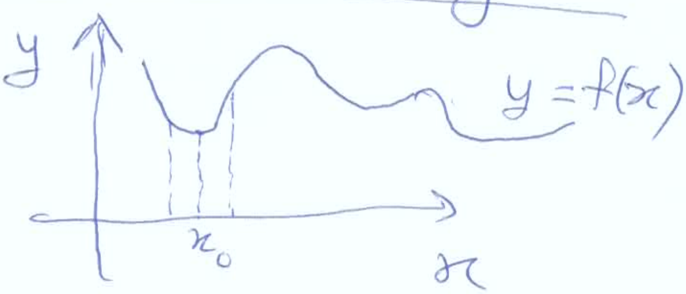
3,4) аналогично выглядят определения <u>убывающей на $I$</u> и <u>невозрастающей на $I$</u> функции

**Опр.:** 1) Точка $x_0 \in Dom(f)$ наз. точкой <u>локального максимума</u> г.ф. $f(x)$ если $\exists \delta > 0$ т.ч. $(x_0-\delta; x_0+\delta) \subseteq Dom(f)$ (т.е. $f(x)$ определена „вблизи" т. $x_0$) и $\boxed{f(x) \leq f(x_0)} \ \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$.




Если, кроме того, $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$, то $x_0$ наз. точкой <u>строгого локального максимума</u>

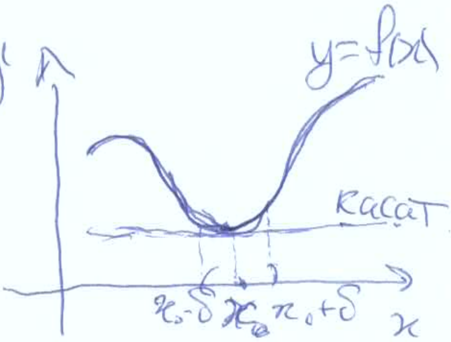
2) аналогично выглядят определения точек локального минимума и строгого локального минимума функции.




Опр. Точка $x_0 \in Dom(f)$ наз. точкой локального экстремума ч.ф. $f(x)$, если $x_0$ явл. точкой лок. максимума или точкой лок. минимума ф-ии $f(x)$.

Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума)
Пусть $f(x)$ – ч.ф., и пусть $x_0 \in Dom(f)$.
Если $\begin{cases} x_0 \text{ – точка лок. экстремума } f(x) \\ \text{и } f(x) \text{ дифференцируема в т. } x_0 \end{cases}$
то $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

Док-во. Пусть, например, $x_0$ – точка локального минимума $f(x)$, и пусть $\delta > 0$ таково, что



интервал $(x_0 - 0; x_0 + 0)$ это «подтверждает»: $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Имеем $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0,$$ поэтому

$$\boxed{\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0}$$ (по теор. о нерав. пределов)

Аналогично, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0,$$ поэтому

$$\boxed{\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0}$$ (по теор. о нер-ве пределов)

Т.к. $f(x)$ дифференцируема в т. $x_0$, то существует $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Имеем $\begin{cases} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{cases}$, откуда $f'(x_0) = 0$.

Док-но

Замечание: в док-ве теоремы Ферма было использовано св-во:

ф-ия имеет предел в точке т. и т.т., когда она имеет правосторонний и левосторонний пределы в этой точке, и эти пределы совпадают.

Лемма Г. ф. $h(x)$ имеет предел в т. $x_0$ т. и т. т., когда $h(x)$ имеет левосторонний предел в т. $x_0$ и $h(x)$ имеет правосторонний предел в т. $x_0$, причем $\lim\limits_{x\to x_0-} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} h(x)$

В этом случае

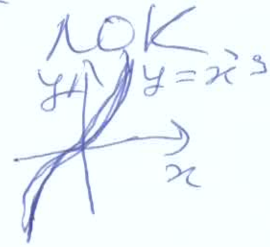
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0-} h(x) = \lim_{x\to x_0+} h(x)$$

◁ обязательное утв, которое непосредственно вытекает из определений ▷

<u>Замечание</u>: теорема Ферма имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 - \text{точка лок. экстр. } f(x) \\ f(x) \text{ дифференц. в т. } x_0 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x_0)=0$$

и дает <u>необходимое условие</u> лок. экстремума. Достаточным это условие, вообще говоря, <u>не является</u>. Например, г. ф. $\boxed{f(x)=x^3}$ в т. $x_0=0$ дифференц. и $f'(x_0)=3x_0^2=0$, однако $x_0=0$ не явл. точкой лок. экстремума этой ф-ции




(это так называемая „точка перегиба").

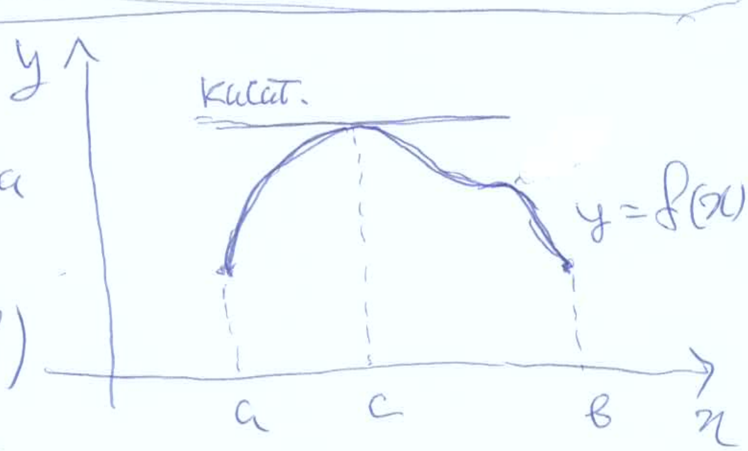
С другой стороны, точка может быть точкой лок. экстремума, но функция в этой точке не явл. дифференцируемой: например, г. ф. $f(x)=|x|$ в т. $x_0=0$ имеет строгий лок. минимум, но $|x|$ не дифференцируема в этой точке

Т.о., все точки лок. экстремума[*] ф-ии содержатся в мн-ве точек, в которых производная
либо не определена, (критические точки)
либо определена и равна 0.

Теорема Ролля (о среднем значении)

Пусть г.ф. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$ $(a < b)$.
Если $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a; b)$ т.ч. $f'(c) = 0$

Док-во




Если $f(x)$ постоянна на $[a; b]$, то $f'(c) = 0$ $\forall c \in (a; b)$

Если же нет, то (по теор. Вейерштрасса $f(x)$ достигает на $[a; b]$ наиб. и наим. значение) сущ. $c \in (a; b)$ т.ч. либо $f(c)$ явл. наиб. значением $f(x)$ на $[a; b]$,

либо $f(c)$ явл. наим. знач. 
$f(x)$ на $[a;b]$. В любом из этих случаев, $c \in (a;b)$ явл. точкой локального экстремума ф-ии $f(x)$, дифференцируемой в т. $c$. По теор. Ферма,

$$f'(c) = 0.$$

Док-но

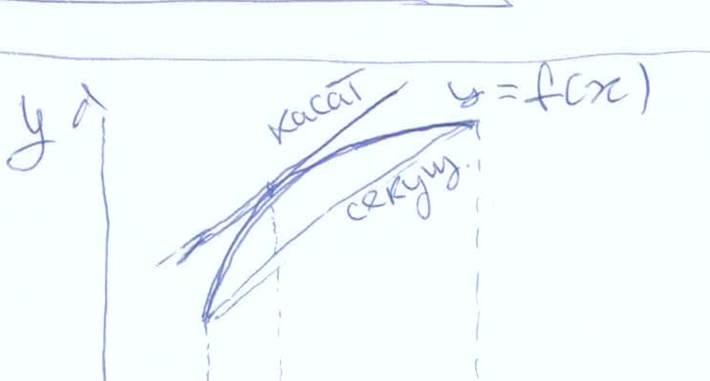
**Теорема Лагранжа** (о среднем значении)

Пусть г. ф. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a;b)$. Тогда существует т. $c \in (a;b)$ т.ч.

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

$a<b$

Док-во.




Рассм линейную ф-ию $\alpha(x)$, проход. через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$: она имеет уравнение

$$\ell(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a).$$

Для ф-ии $g(x) = f(x) - \ell(x)$ имеем $g(a) = g(b)$ $(=0)$. По теор. Ролля, $\exists c \in (a;b)$ т.ч. $g'(c) = 0$. Но $g'(c) = f'(c) - \ell'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Док-но

Теорема (достаточное условие монотонности ф-ии)

Пусть г. ф. $f(x)$ дифференцируема во всех точках некот. инт. $(a;b)$. Тогда:

1) если $f'(c) > 0$ $\forall c \in (a;b)$, то $f(x)$ возраст. на $(a;b)$

2) если $f'(c) < 0$ $\forall c \in (a;b)$, то $f(x)$ убывает на $(a;b)$

3) если $f'(c) \geq 0$ $\forall c \in (a;b)$, то $f(x)$ неубывает на $(a;b)$

4) если $f'(c) \leq 0$ $\forall c \in (a;b)$, то $f(x)$ невозрастает на $(a;b)$

Док-во: 1) пусть $f'(c) > 0 \; \forall c \in (a; b)$

Рассм. произвольн. $x_1, x_2 \in (a; b)$ т.ч. $x_1 < x_2$. По теор. Лагранжа, $\exists c \in (x_1, x_2) \; (\subseteq (a; b))$ т.ч.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$\underset{0}{\vee} \qquad\qquad \underset{0}{\vee}$$

Т.о. $f(x_2) > f(x_1)$, что и требовалось.

Случаи 2, 3, 4 рассм. аналогично.

Док-но

Теорема (достаточное условие локального экстремума)

Пусть т.ф. $f(x)$ и дифференцируема на интервалах $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$ для некот. т. $x_0 \in Dom(f)$. Тогда:

1) если $\begin{cases} f'(c) > 0 \; \forall c \in (a; x_0) \\ f'(c) < 0 \; \forall c \in (x_0; b) \end{cases}$, то $x_0$ явл. точкой строгого лок. максимума ф-ии $f(x)$;

$+-$

$f(x)$ непрерывна на $(a; b)$!

2) если $\begin{cases} f'(c)<0 \ \forall c\in(a;x_0) \\ f'(c)>0 \ \forall c\in(x_0;b) \end{cases}$, то $x_0$ явл. точкой строгого лок. минимума ф-ии $f(x)$;

$(-\ +)$

3) если $\begin{cases} f'(c)\geq 0 \ \forall c\in(a;x_0) \\ f'(c)\leq 0 \ \forall c\in(x_0;b) \end{cases}$, то $x_0$ явл. точкой лок. максим ф-ии $f(x)$;

$(+_0\ -_0)$

4) если $\begin{cases} f'(c)\leq 0 \ \forall c\in(a;x_0) \\ f'(c)\geq 0 \ \forall c\in(x_0,b) \end{cases}$, то $x_0$ явл. точкой лок. миним. ф-ии $f(x)$

$(-_0\ +_0)$

Док-во: рассм., например, случай 1 (рассуждения в остальных случаях аналог.) По достаточному условию монотонности ф-ии, $f(x)$ возрастает на $(a,x_0)$ и убывает на $(x_0,b)$. Покажем, что $f(x_0)>f(x)$ $\forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$ (т.е. $x_0$ - точка строгого лок. максимума ф-ии $f(x)$. От противного, пусть $\exists x_1\in(a;b)\setminus\{x_0\}$ т.ч. $f(x_1)\geq f(x_0)$. Пусть, например, $x_1<x_0$. Имеем $f(x_0)\leq f(x_1)<f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$, и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) \geq f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) > f(x_0).$$

т.к. $f(x)$ непрер. в $x_0$ — по теор. о нер-ве пределов

Т.о., $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, что противоречит условию непрерывности ф-ции $f(x)$.

Случай $x_1 > x_0$ рассм. аналогично.

Док-но

Т.о., если производная $f(x)$ "меняет знак с − на +" в т. $x_0$, то $x_0$ – точка лок максимума $f(x)$, а если производная $f(x)$ "меняет знак с + на −" в т. $x_0$, то $x_0$ – точка лок. минимума $f(x)$.

Теорема (достаточное условие локального экстремума)

Пусть г. ф. $f(x)$ а) дважды дифференцир. в т. $x_0$; б) диффер. в некот окрестн. т. $x_0$

Тогда справедливо следующее:

1) если $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$, то $x_0$ – точка строгого лок. максимума ф-ции $f(x)$

2) если $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$, то $x_0$ – точка строгого лок. минимума ф-ции $f(x)$

Док-во: рассм., например, пункт 1 (рассуждения в остальных случаях аналогичны). Итак, пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$. Т.к.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

Непосредственно из определения предела, $\exists a < x_0$ и $b > x_0$ т.ч. $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$

По достат. усл. лок. экстремума, доказанному ранее, $x_0$ - точка строгого лок. максимума $f(x)$.

упр!

Док-но