

Еще несколько пределов, вычисл. 1
с помощью кр-ва Бернулли:

Пример $\forall a \in \mathbb{R}, (a > 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

0) $a = 1$ - очевидно
1) $a > 1$: имеем $\sqrt[n]{a} > 1 \quad \forall n \geq 1$

Пусть $d_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$, тогда

$$a = (1 + d_n)^n \geq 1 + n d_n > n d_n, \text{ т.е.}$$

$$0 < d_n < \frac{a}{n} \quad \forall n \geq 1, \text{ т.е.}$$

$d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (послед-ство $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - сужк, мажор)

$$\text{Т.о., } \sqrt[n]{a} = 1 + d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + 0 = 1$$

2) $0 < a < 1$: упр

(Например: возьмем произвольн
 $\varepsilon > 0$ и, т.к. $\sqrt[n]{a} < 1$, найдем
 $N \in \mathbb{N}$ т.ч. $(1 - \sqrt[n]{a}) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Имеем $\sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon$ - набрав, сдвину

Отсюда $a > (1 - \varepsilon)^n > 1 - n\varepsilon$ только
Вост. взять $N = \left\lceil \frac{1-a}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon < 1 (\Leftrightarrow -\varepsilon > -1) \\ \end{array} \right.$

пример $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 2

Разложение $(1+x)^n$ по ф-ле

Бинома Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + x^n$$

позволяет при $x > 0$ получить более точные версии нер-ва Бернулли.

Итак, при $n \geq 2$ имеем

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1, \text{ поэтому } \sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n > 0. \text{ Далее, } n = (1 + \alpha_n)^n > \\ > 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$$

Т.к. $n-1 \geq n/2$ при $n \geq 2$, то

$$n > \frac{n^2 \alpha_n^2}{4}, \text{ откуда } 0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 2$$

Т.о., $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ - с.м.з.н., и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$$

Пример

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

3

при $n > |a| + 1$ имеем (можно считать, что $a \neq 0$)

$$0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{n} \leq$$

$$\leq c \cdot \left(\frac{|a|}{|a|+1} \right)^{n-m} \quad \text{где некот } c \in \mathbb{R} \text{ и } m \in \mathbb{N},$$

зависящих только от a , и
не зависящих от n

(упр. найти c и m).

Имеем ? - упр

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c \cdot \left(\frac{|a|}{|a|+1} \right)^{n-m} \right) =$$

$$= c \cdot \left(\frac{|a|}{|a|+1} \right)^{-m} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{|a|+1} = c \cdot \left(\frac{|a|}{|a|+1} \right)^{-m} \cdot 0$$

$$= 0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

✍

Теорема Исходная посл-ть
 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится

Док-во. Покажем, что эта посл-ть
 ограничена и монотонна,
 откуда, по теореме Вейерштрасса
 будет следовать существование
 предела.

Воспользуемся нер-вом между
 средним геом. и средним арифм.;
 $\forall n \geq 1 \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \left(= \text{только при } x_i = x_j \right)$$

- а) доказать это нер-во для $n=2$
 б) доказать это нер-во для произв. n инд
 методом мат. индукции $\Rightarrow$

А именно, рассм. $n+1$ чисел

$$1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, 1$$

Тогда

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \quad [5]$$

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} < \frac{n+2}{n+1} \quad \text{Возв. в степен. } n+1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Т.о., з.п. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ явл. возраст.

Покажем ограниченность.

Рассм з.п. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$. Аналогичн. образом можно показать, что эта посл-ва монотонно возрастает (упр)

$$\text{Т.к. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1,$$

$$\text{то } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{Поскольку } \left(1-\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 3, \text{ имеем}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} < 4 \quad \forall n \geq 3$$

Итак, з.п. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ монотонна и ограничена, а значит, сходится по ДКН

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ обозн. } e : \quad \boxed{6}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\dots$$

Теорема. e - иррациональное число

$$\text{Теорема. } e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$