

Теорема о существовании логарифма

Теорема. Пусть $a \in \mathbb{R}$ т.ч. $a > 0$ и $a \neq 1$.

Тогда $\forall b \in \mathbb{R} \exists! c \in \mathbb{R}$ т.ч. $\boxed{a^c = b}$

(обознач. $\boxed{c = \log_a b}$). Число c назыв. логарифмом числа b по основанию a .

Док-во. Если существует такое $q \in \mathbb{Q}$, что $a^q = b$, то $c = q$ (единственность следует из монотонности ф-ии $f(x) = a^x$). Поэтому достаточно рассм. случай, когда такого $q \in \mathbb{Q}$ нет. Рассм. мин-ва рационал. чисел

$$L = \{q \in \mathbb{Q} \mid a^q < b\},$$

$$R = \{q \in \mathbb{Q} \mid a^q > b\} \quad (\text{не кардинал обильности, считаем, что } a > 1)$$

Покажем, что множества L и R не свд. пустьим, т.е. $\left\{ \begin{array}{l} \exists q \in \mathbb{Q} \text{ т.ч. } a^q < b \text{ и} \\ \exists r \in \mathbb{Q} \text{ т.ч. } a^r > b \end{array} \right.$

А именно, найдем целые числа; прикда. ~~к~~ этим классам. Воспользуемся Берн-ва, Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$. Положим $a = 1+x$, имеем $a^n \geq 1+n(a-1) > n(a-1)$, поэтому достаточно взять $n \in \mathbb{N}$ т.ч. $n > \frac{b}{a-1}$. Тогда $a^n > b$, а значит $n \in R$

Аналогично, т.к. $a^{-m} = \frac{1}{a^m} < \frac{1}{m \cdot (a-1)}$,
 то достаточно взять $m \in \mathbb{N} + \mathbb{R}$.
 $m > \frac{1}{b \cdot (a-1)}$. Тогда $a^{-m} < b$, а значит
 $-m \in L$.

Итак, $L \neq \emptyset, R \neq \emptyset, L \cup R = \mathbb{Q}$, и
 $\forall q \in L \forall r \in R (q < r)$, т.е. мн-ва
 L и R образуют сечение мн-ва рац.
 чисел. По аксиоме Кантора-Дедкинга
 существует единств. число $c \in \mathbb{R}$,
 т.е. $q < c < r \quad \forall q \in L \quad \forall r \in R$.
 По св-ву монотонности ф-ии a^x
 имеем $a^q < a^c < a^r \quad \forall q \in L \quad \forall r \in R$,
 причем a^c - единств. гптв. число,
 удовл. всем таким нер-вам. Но гптв.
 числа b , по опред. мн-ва L и R , имеют
 $a^q < b < a^r \quad \forall q \in L \quad \forall r \in R$, откуда
 $a^c = b$, т.е. $c = \log_a b$. Рек-но