① М.И.: $P(0)$, $\forall n(P(n) \to P(n+1))$ $\Big\} \Rightarrow \forall n\, P(n)$
(мат. инд.)

В.И.: $\forall n\,((\forall m<n)P(m) \to P(n)) \Rightarrow \forall n\, P(n)$
(возвр. инд.)

~~гр. 715, 718 – 1-ый день~~
~~гр. 716, 717 – 2-ой день~~

Утв. 1. $\boxed{\text{М.И.} \Rightarrow \text{В.И.}}$

◁ пусть $\forall n\,((\forall m<n)P(m) \to P(n))$. Рассм. $Q(n) \rightleftharpoons (\forall m<n)P(m)$. Имеем а) $Q(0)$ – очевидно
б) Пусть $Q(n)$, покажем, что $Q(n+1)$. Имеем $Q(n+1) \rightleftharpoons (\forall m<n+1)P(m) \sim (\forall m<n)P(m) \,\&\, P(n)$ – верно по индукт. предположению. Итак $Q(0) \,\&\, \forall n(Q(n) \to Q(n+1))$, откуда по М.И. $\forall n\, Q(n)$, что эквив. $\forall n (\forall m<n)P(m)$. Т.о. $\forall n\, P(n)$ ▷

Утв. 2 $\boxed{\text{В.И.} \Rightarrow \text{М.И.}}$

◁ пусть $P(0)$ и $\forall n(P(n) \to P(n+1))$, покажем, что $\forall n\, P(n)$. Для этого достаточно проверить, что $\forall n\,((\forall m<n)P(m) \to P(n))$. Итак, пусть $(\forall m<n)P(m)$ для $m>1$. В частности, $P(n-1)$, откуда $P(n)$ по предположению. Т.о., $\forall n\, P(n)$ ▷

(2) П.Н.Ч. $P \neq \varnothing \Rightarrow \exists n\,(P(n) \,\&\, (\forall m<n)\, \neg P(m))$

(принцип наим. числа)

Утв. 3 $\boxed{\text{П.Н.Ч} \Leftrightarrow \text{В.И}}$

◁ имеем $A \to B \sim \neg B \to \neg A$, поэтому П.Н.Ч. эквив. утверждению

$$\neg \exists n\,(P(n) \,\&\, (\forall m<n)\, \neg P(m)) \Rightarrow \forall n \neg P(n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n\,(\neg P(n) \vee \neg (\forall m<n)\, \neg P(m))$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n\,((\forall m<n)\, \neg P(m) \to \neg P(n))$$

▷

Следствие $\boxed{\text{М.И.} \Leftrightarrow \text{В.И.} \Leftrightarrow \text{П.Н.Ч}}$

Т.е. все эти три принципа эквивалентны: из любого из них выводятся остальные два.