Стукачев Алексей Ильич

МОДЕЛИ ЯЗЫКА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛИНГВИСТИКЕ

Конспект лекций

Выполнено в рамках проекта “Модели языка
в математической и компьютерной лингвистике”,
реализуемого победителем грантового конкурса
для преподавателей магистратуры 2021/2022 г.
Стипендиальной программы Владимира Потанина

Новосибирск 2023

Оглавление

Стр.

Введение 7

Глава 1. Формальные языки и автоматы 11
1.1 Регулярные языки и ДКА 11
1.2 Контекстно-свободные языки 22
1.3 Нормальная форма Хомского 32
1.4 Грамматики, машины Тьюринга и вычислимо перечислимые языки 33

Глава 2. Определимость и вычислимость 36
2.1 Теория KPU. 36
2.2 Σ-рекурсия. 47
2.3 Устойчивые и абсолютные предикаты. 52
2.4 Допустимые ординалы и допустимые множества. 55
2.5 Σ-операторы и теорема Ганди 63
2.6 Универсальный Σ-предикат 66
2.7 Теорема компактности Барвайса 70
2.8 Допустимые множества вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ 84
2.9 Синтаксические критерии наследственно вычислимых свойств моделей 94

Глава 3. Вычислимые функционалы в семантике Монтегю . . 102
3.1 Введение 102
3.2 Основные понятия 104
3.2.1 Σ-предикаты конечных типов 105
3.2.2 Интенсиональная логика Монтегю 108
3.3 Ранговая модель интенсиональной логики 110
3.3.1 Предварительное описание 111
3.3.2 Изоморфизм ранговой и векторной моделей 114
3.4 Интерпретация семантики возможных миров 117
3.4.1 Кодирование счетных множеств вещественных чисел . . . 118

3.4.2 Интерпретация семантики возможных миров для простейшей модели . . . 119
3.4.3 Интерпретация семантики возможных миров для векторной модели . . . 120
3.4.4 Анализ времен Past Simple, Future Simple и Present Continuous английского языка . . . 121
3.5 Логические следствия предложений естественных языков . . . 123
3.5.1 Предпорядок на Σ-формулах . . . 124
3.5.2 Полярности в Σ-формулах . . . 126
3.5.3 Исчисление для моделей вычислимых функционалов конечных типов . . . 127

Глава 4. Темпоральные аппроксимационные пространства . . . 135
4.1 Введение . . . 135
4.2 Плотные линейные порядки и обобщенная конструктивизируемость . . . 136
4.3 Интервальные расширения плотных линейных порядков . . . 138
4.4 Аппроксимационные пространства темпоральных процессов . . . 145
4.5 Приложения в темпоральной логике и формальной семантике естественных языков . . . 152
4.6 Интервальная семантика для глаголов русского языка . . . 156
4.7 Заключение . . . 157

Глава 5. Интервальная семантика для русского языка . . . 160
5.1 Введение . . . 160
5.2 Плотные линейные порядки и обобщенная конструктивизируемость . . . 160
5.3 Темпоральные модели в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ и $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ . . . 161
5.4 Формульные аппроксимационные пространства . . . 162
5.5 Интервальные расширения и темпоральные процессы . . . 163
5.6 Алгоритмические аспекты анализа темпоральных процессов . . . 168

5.7 Приложения в темпоральной логике и формальной семантике английского языка . . . 169
5.8 Анализ глагольной системы русского языка . . . 173
5.9 Режимы интерпретации . . . 176
5.10 Глагольный вид в русском языке . . . 180

Глава 6. Категориальные грамматики . . . 190
6.1 Введение . . . 190
6.2 Основания теории множеств . . . 192
6.3 Эскиз теории семантической информации . . . 195
6.4 Категориальные грамматики . . . 197
6.5 Заключение . . . 200
6.6 Список литературы . . . 201

Глава 7. Монотонность в натуральной логике и языке . . . 203
7.1 Введение . . . 203
7.2 Теория обобщенных кванторов в работах Монтегю . . . 204
7.3 Обобщенные кванторы в естественном языке . . . 207
7.4 Монотонность обобщенных кванторов в работах Йохана ван Бентема . . . 209
7.5 Монотонность и polarity sensitivity . . . 212
7.6 Анализ кванторов в английском и русском языках . . . 213
7.7 Заключение . . . 218
7.8 Список литературы . . . 219

Глава 8. Темпоральная система Райхебаха . . . 221
8.1 Введение . . . 221
8.2 Биография Райхенбаха . . . 221
8.3 Венский кружок . . . 223
8.4 Берлинский кружок . . . 227
8.5 Трехзначная логика Райхенбаха . . . 227
8.6 Схема Райхенбаха для системы времен английского глагола . . . 229
8.7 Список литературы . . . 234

Глава 9. Ситуационная семантика Барвайса-Перри . . . 236
9.1 Введение . . . 236

9.2 Понятие ситуационной семантики 236
9.3 Теория значения 238
9.4 Отношения в предложении 240
9.5 Недостатки теории 243
9.6 Различия с другими теориями 244
9.7 Заключение 245
9.8 Список литературы 246

Глава 10. Пропозициональные установки (Propositional Attitudes) 247
10.1 Введение 247
10.2 История 248
10.3 Пропозициональные установки и философия языка 251
10.4 Семантика и структура 254
10.5 Состояния пропозициональных установок 255
10.6 Сомнения по поводу пропозициональных установок 257
10.7 Список литературы 258

Глава 11. Модель DisCoCat 260
11.1 Введение 260
11.2 История 261
11.3 Формальное определение 265
11.4 Развитие идеи 267
11.5 Практическое применение 269
11.6 Заключение 271
11.7 Список литературы 272

Дополнение 275

Введение

Математическая и компьютерная лингвистика является крайне востребованной и активно развивающейся областью исследований. Это обусловлено задачами искусственного интеллекта и анализа данных, связанными с обработкой информации на естественных языках (как письменной, так и устной). Обработка естественного языка (natural language processing, NLP) в настоящее время опирается преимущественно на методы машинного обучения и статистического анализа больших объемов текстовой информации. В то же время, работающие в этой сфере ИТ-индустрии специалисты отмечают назревшую необходимость более глубокого понимания строения и принципов функционирования естественных языков для решения наиболее сложных задачах NLP. В первую очередь, речь идет о семантике предложения. Содержание курса как раз составляет описание моделей такого типа, сочетающих математическую глубину и формальную строгость с возможностью практической реализации.

Важную роль в определении структуры и содержании нового учебного курса "Модели языка в математической и компьютерной лингвистике"играет сочетание различных моделей языков (в первую очередь, естественных): математических моделей, основанных на формальной семантике Монтегю и синтаксической категориальной грамматике Ламбека, и компьютерных моделей, использующихся при решении конкретных задач NLP и опирающихся на довольно далекие от указанных выше модели и методы. Работы автора по алгоритмическим аспектам семантики Монтегю опираются на результаты основанной А.И.Мальцевым в Новосибирске всемирно известной школы алгебры и математической логики. Они имеют целью определить степень алгоритмической реализуемости математических моделей, основанных на классических принципах (например, принципе композициональности Фреге) и формальных логических языках с точной семантикой (логики предикатов, модальные, темпоральные и интенсиональные логики).

Тем самым эти модели, служащие для описания строения и функционирования естественных языков, становится возможным реализовать алгоритмически и использовать для решения задач анализа текстовой информации, не поддающихся имеющимся методам компьютерной лингвистики. Основными мето-

дами здесь являются дистрибутивная семантика (Word2Vec и т.п.) и машинное обучение. Данная область исследований развивается крайне активно. В курс включено описание подхода, предложенного группой исследователей, возглавляемой проф. Б.Коке из Университета Оксфорда. Этот подход интересен тем, что сочетает принцип композициональности Фреге с методами дистрибутивной семантики.

Важнейшими обзорными источниками по тематике курса являются монографии

1. Barbara H. Partee, Alice ter Meulen, and Robert E. Wall, Mathematical Methods in Linguistics, Kluwer Academic Publishers, 1990;
2. Compositionality in Formal Semantics, Selected Papers by Barbara H. Partee, Blackwell Publishing, 2004;
3. Dawid R. Dowty, Robert E. Wall, and Stanley Peters, Introduction to Montague Semantics, D. Reidel Publishing Company, 1989;
4. Horst Lohnstein, Formale Semantik und Naturliche Sprache, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1996;
5. Paul H. Portner, What is Meaning?, Blackwell Publishing, 2005;
6. И.А.Герасимова, Формальная грамматика и интенсиональная логика, М., ИФ РАН, 2000.

Первая глава текста посвящена введению в теорию формальных языков и автоматов (иерархия Хомского порождающих грамматик) и использует в качестве основного источника монографию

1. Harry R. Lewis, Christos H. Papadimitriou, Elements of the Theory of Computation, Prentice-Hall, 1998.

Вторая часть текста содержит введение в теорию допустимых множеств и обобщенную вычислимость и следует монографиям

1. J. Barwise, Admissible Sets and Structures,Springer Verlag, 1975;
2. Ю.Л.Ершов, Определимость и вычислимость, Научная книга, 1996,

а также обзорным работам

1. Yu.L. Ershov, V.G. Puzarenko, and A.I. Stukachev, HF-Computability, In S. B. Cooper and A. Sorbi (eds.): *Computability in Context: Computation and Logic in the Real World*, Imperial College Press/World Scientific (2011), pp. 173-248;

2. Alexey Stukachev, Effective Model Theory: an approach via Σ-Definability, *Lecture Notes in Logic*, v. 41 (2013), pp. 164-197.

Оригинальная часть курса основана на публикациях автора

1. Alexey Stukachev, Approximation spaces of temporal processes and effectiveness of interval semantics, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, v. 1242 (2021), pp. 53-61;
2. А.И. Стукачев, Интервальные расширения порядков и темпоральные аппроксимационные пространства, *Сибирский математический журнал*, т. 62, N4 (2021), стр. 894-910;
3. А.С. Бурнистов, А.И. Стукачев, О внутренней конструктивизируемости функциональных структур, *Алгебра и логика*, т. 61, N1 (2022), стр. 23-41;
4. Artem Burnistov and Alexey Stukachev, Generalized computable models and Montague semantics, *Studies in Computational Intelligence*, v. 1081 (2023), pp. 107-124;
5. Artem Burnistov and Alexey Stukachev, Computable functionals of finite types in Montague semantics, *Lecture Notes in Computer Science*, in print.

Кроме того, существенно использовались материалы следующих выпускных квалификационных и курсовых работ, выполненных под руководством автора:

1. А.М.Рыжков, Использование формальной семантики при анализе аспекта и времени в русском и английском языках, выпускная квалификационная работа бакалавра, ГИ НГУ, 2018;
2. А.С.Бурнистов, Конструктивизируемость функциональных структур над числовыми системами, выпускная квалификационная работа бакалавра, ММФ НГУ, 2021;
3. А.С.Бурнистов, Вычислимые функционалы конечных типов в семантике Монтегю и натуральная логика, выпускная квалификационная работа магистра, ММФ НГУ, 2023;
4. У.Д.Пензина, Сравнительный анализ монотонности обобщенных кванторов в английском и русском языках, курсовая работа, ГИ НГУ, 2023.

Автор благодарен слушателям курса Е.Адалатовой, Д.Лебедкину, А.Мельниковой, К.Овчинниковой, М.Печенкинй, С.Поповой, О.Рябовой,

А.Ульченко, А.Французовой, Т.Черновой за предоставленную возможность использования подготовленных ими рефератов.

Глава 1. Формальные языки и автоматы

1.1 Регулярные языки и ДКА

Определение 1.1.1. Пусть Σ – произвольное конечное непустое множество, которое будем называть *алфавитом*, а его элементы — *символами* этого алфавита. Множеством *слов* алфавита Σ назовем множество

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$$

Для $n \geq 0$ слово $w = (x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma^n$ будем обозначать $x_1 x_2 \ldots x_n$, а число $|w| = n$ будем называть *длиной* слова w. Будем считать, что $\Sigma^0 = \{e\}$, где e — обозначение для пустого слова, т.е. слова, в котором нет символов (в частности, $|e| = 0$).

Определение 1.1.2. Для слов $u = x_1 x_2 \ldots x_n \in \Sigma^n$ и $v = y_1 y_2 \ldots y_m \in \Sigma^m$, *конкатенацией* слов u и v называется слово $w = uv = x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_m$ ($|w| = n + m$).

Аналогично определяется конкатенация произвольного конечного числа слов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ из Σ^*. При $k = 0$ считаем $u_1 u_2 \ldots u_k = e$.

Пример. На словах могут быть определены другие содержательные синтаксические операции. В качестве примера рассмотрим операцию *обращения*: для слова $w \in \Sigma^*$, слово $w^R \in \Sigma^*$ определяется индукцией по длине: $e^R = e$, $(ua)^R = au^R$, где $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

Определение 1.1.3. *Языком* алфавита Σ называется произвольное множество слов $L \subseteq \Sigma^*$

Определение 1.1.4. Пусть $L_1, L_2, L \subseteq \Sigma^*$ – некоторые языки. Определим над ними следующие операции:

1. $L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \text{ или } w \in L_2\}$
2. $L_1 \cap L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \text{ и } w \in L_2\}$
3. $L_1 \setminus L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \text{ и } w \notin L_2\}$
4. $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$

5. $L_1 \circ L_2 = L_1 L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = uv,\ u \in L_1, v \in L_2\}$
6. $L^* = \{w \in \Sigma^* \mid w = u_1 u_2 \dots u_n, n \geqslant 0, u_1, u_2, \dots, u_n \in L\}$

Полезно также определить язык $L^+ = L \circ L^*$, состоящий из всевозможных "нетривиальных" конкатенаций слов из L. В случае, когда $e \notin L$, имеет место соотношение $L^+ = L^* \setminus \{e\}$. Например, для $L = \Sigma$ язык Σ^+ состоит из всех слов алфавита Σ, имеющих ненулевую длину (то есть отличных от e).

Определение 1.1.5. Пусть Σ – конечный алфавит, и пусть символы $\varnothing$, $\cup$, $\circ$, *, (,) не лежат в алфавите Σ. Определим по индукции множество *регулярных выражений* алфавита Σ:

1. $\varnothing$ – регулярное выражение алфавита Σ;
2. a – регулярное выражение алфавита Σ для любого $a \in \Sigma$;
3. если α и β – регулярные выражения алфавита Σ, то $(\alpha \cup \beta)$, $(\alpha \circ \beta)$, α^* также являются регулярными выражениями алфавита Σ;
4. других регулярных выражений алфавита Σ нет.

Определение 1.1.6. Пусть α – регулярное выражение алфавита Σ. Язык $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ определяется по регулярному выражению α индукцией по сложности α:

1. $L(\varnothing) = \emptyset$;
2. $L(a) = \{a\},\ a \in \Sigma$;
3. $L((\alpha \cup \beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$;
4. $L((\alpha \circ \beta)) = L(\alpha) \circ L(\beta)$;
5. $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$.

Определение 1.1.7. Язык $L \subseteq \Sigma^*$ называется *регулярным*, если существует регулярное выражение α алфавита Σ такое, что

$$L = L(\alpha).$$

Определение 1.1.8. *Детерминированным конечным автоматом (ДКА)* над алфавитом Σ называется упорядоченная пятерка

$$M = (Q, \Sigma, s, F, \delta), \quad \text{где}$$

Q – конечное множество *состояний*, $s \in Q$ – *начальное состояние*, $F \subseteq Q$ – множество *заключительных состояний*, а $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ – *функция перехода*.

Определение 1.1.9. *Конфигурацией* ДКА $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ называется произвольная пара (q, w), где $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$.

Определение 1.1.10. Отношение $\vdash_M$ перехода (за один шаг) определим на множестве конфигураций ДКА M следующим образом: $(q_1, u) \vdash_M (q_2, v)$, если $u = av$ для некоторого $a \in \Sigma$, $\delta(q_1, a) = q_2$

Определение 1.1.11. Отношение $\vdash_M^*$ перехода за несколько (включая ноль) шагов определяется как рефлексивное и транзитивное замыкание $\vdash_M$, т.е. $(q,u) \vdash_M^* (r,v)$, если существует $n \in \mathbb{N}$ и слова $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \Sigma^*$, т.ч.

$$(q,u) = (q_1, u_1) \vdash_M (q_2, u_2) \vdash_M \ldots \vdash_M (q_n, u_n) = (r,v)$$

для некоторых $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$. При $n = 0$ $(q,u) = (r,v)$.

Определение 1.1.12. Слово $w \in \Sigma^*$ *распознается* ДКА M, если $(s,w) \vdash_M^* (q,e)$ для некоторого заключительного состояния $q \in F$.

Для ДКА M определим язык $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ распознается ДКА $M\}$.

Определение 1.1.13. Язык $L \subseteq \Sigma^*$ называется *автоматным*, если найдется ДКА M, т.ч.

$$L = L(M).$$

Определение 1.1.14. *Недетерминированным конечным автоматом* (НКА) над алфавитом Σ называется упорядоченная пятерка

$$M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta), \quad \text{где}$$

Q – конечное множество *состояний*, $s \in Q$ – *начальное состояние*, $F \subseteq Q$ – множество *заключительных состояний*, а $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times Q$ – отношение перехода.

Множеством *конфигураций* НКА M называется множество $Q \times \Sigma^*$.

Определение 1.1.15. Отношение $\vdash_M$ перехода на множестве конфигураций НКА M определяется так: $(q_1,u) \vdash_M (q_2, v)$, если $u = av$ для некоторого $a \in \Sigma \cup \{e\}$ и $(q_1, a, q_2) \in \Delta$.

Рефлексивное и транзитивное замыкание $\vdash_M$ обозначается $\vdash_M^*$ и определяется для НКА так же, как и в случае ДКА. Точно так же, слово $w \in \Sigma^*$ *распознается* НКА M, если $(s,w) \vdash_M^* (q,e)$ для некоторого заключительного состояния $q \in F$.

Одним из основных результатов теории формальных языков является теорема о равенстве классов регулярных и автоматных языков. Перед доказательством теоремы рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 1.1.1. *Для языка $L \subseteq \Sigma^*$ следующие условия эквивалентны:*

1. *$L = L(M)$ для некоторого ДКА M;*
2. *$L = L(M)$ для некоторого НКА M.*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$

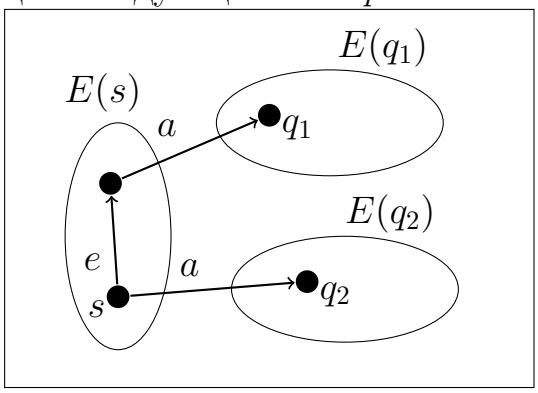
ДКА – частный случай НКА. Пусть $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ – ДКА, определим НКА $M' = (Q', \Sigma, s', F', \Delta)$, полагая $Q' = Q$, $s' = s$, $F' = F$. Отношение перехода зададим как график функции перехода

$$\Delta = \big\{(q,a,\delta(q,a)) \mid q \in Q\big\}$$

По построению, $L(M') = L(M)$. Действительно, легко доказать индукцией по длине слова w, что $w \in L(M')$ тогда и только тогда, когда $w \in L(M)$.

$(2 \Rightarrow 1)$

Пусть $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ – НКА, определим ДКА $M' = (Q', \Sigma, s', F', \delta)$ с помощью следующего *алгоритма детерминизации.*



1. для каждого $q \in Q$ определим *e-орбиту* $E(q) \leftrightharpoons \big\{r \in Q \mid (q,e) \vdash_M^* (r,e)\big\}$ – множество состояний, в которые можно попасть из q с помощью скачков (e-переходов);
2. $Q' \leftrightharpoons P(Q) = \{X \mid X \subseteq Q\}$, $s' \leftrightharpoons E(s)$, $F' \leftrightharpoons \{X \subseteq Q \mid X \cap F \neq \varnothing\}$;

3. для всякого $X \subseteq Q$ и всякого $a \in \Sigma$, определим

$$\delta(X, a) \leftrightharpoons \bigcup\{E(r) \mid (q,a,r) \in \Delta \text{ для некоторого } q \in X\}.$$

По построению, $L(M') = L(M)$. Действительно, легко доказать индукцией по длине слова w, что $w \in L(M')$ тогда и только тогда, когда $w \in L(M)$. $\square$

Замечание 1.1.1. Не все состояния Q' являются достижимыми в ДКА M'. Такие состояния не влияют на язык, распознаваемый автоматом M'.

Теорема 1.1.1 (о совпадении классов регулярных и автоматных языков)**.** *Для языка $L \subseteq \Sigma^*$ следующие условия эквивалентны:*

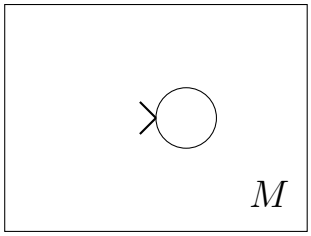
1. *$L = L(\alpha)$ для некоторого регулярного выражения α алфавита Σ;*
2. *$L = L(M)$ для некоторого ДКА M.*

Т.о., классы регулярных и автоматных языков совпадают.

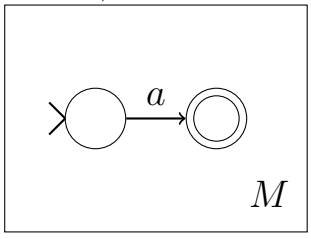
Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$

Пусть $L = L(\alpha)$ для некоторого регулярного выражения α. Учитывая предложение 1.1.1, достаточно показать, что существует НКА M, т.ч. $L(\alpha) = L(M)$. Используем индукцию по сложности выражения α.

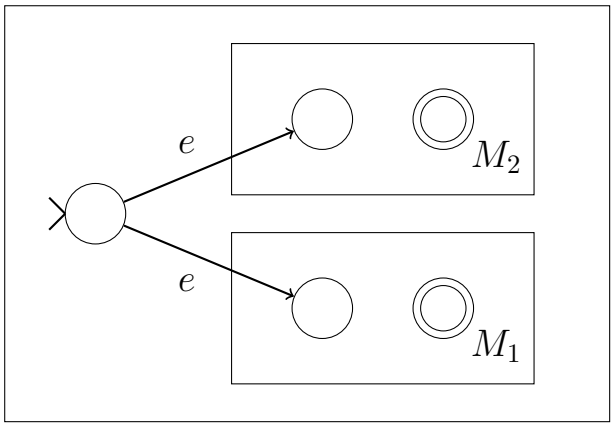
1. $\alpha = \varnothing$



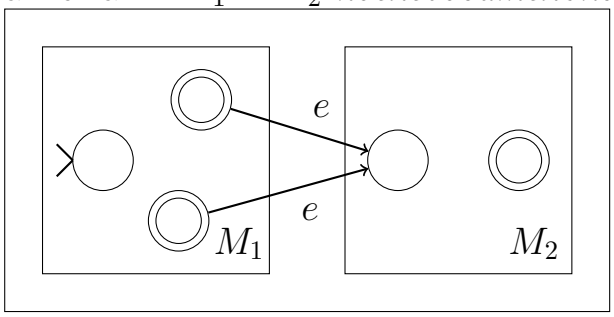
2. $\alpha = a$, $a \in \Sigma$



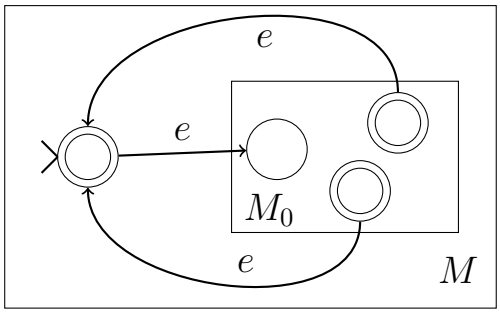
3. $\alpha = (\alpha_1 \cup \alpha_2)$, где $L(\alpha_1) = L(M_1)$, $L(\alpha_2) = L(M_2)$ (не нарушая общности, можно считать, что множества состояний автоматов M_1 и M_2 не пересекаются). Тогда $L(\alpha) = L(M)$ для автомата M, соединяющего автоматы M_1 и M_2 *параллельно*:



4. $\alpha = (\alpha_1 \circ \alpha_2)$, где $L(\alpha_1) = L(M_1)$, $L(\alpha_2) = L(M_2)$ (не нарушая общности, можно считать, что множества состояний автоматов M_1 и M_2 не пересекаются). Тогда $L(\alpha) = L(M)$ для автомата M, соединяющего автоматы M_1 и M_2 *последовательно*:



5. $\alpha = \alpha_0^*$, где $L(\alpha_0) = L(M_0)$. Тогда $L(\alpha) = L(M)$, где автомат M строится по автомату M_0 следующими образом:



$(2 \Rightarrow 1)$

Пусть M – КА (не обязательно ДКА) и $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ $(n \geq 1)$, $s = q_1$, $F = \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\} \subseteq Q$. Для каждой пары $i,j \in \{1, \ldots, n\}$ и $m \leq n$ определим регулярное выражение $R(i,j,m)$ индукцией по m. Регулярные выражения $R(i,j,m)$ соответствуют маршрутам из q_i в q_j с использованием состояний $q_1, \ldots, q_m$ в качестве промежуточных.

1. $R(i,j,0)$ определяется по отношению перехода Δ автомата M. Если из q_i в q_j нет переходов, то $R(i,j,0) \leftrightharpoons \varnothing$. Если существуют переходы

(q_i, a_1, q_j), ..., $(q_i, a_s, q_j) \in \Delta$, $a_1, \ldots, a_s \in \Sigma \cup \{e\}$, то $R(i,j,0) \leftrightharpoons (a'_1 \cup \ldots \cup a'_s)$, где $a' \leftrightharpoons a$ для всех $a \in \Sigma$ и $e' \leftrightharpoons \varnothing^*$.

2. Для $m > 0$ имеем

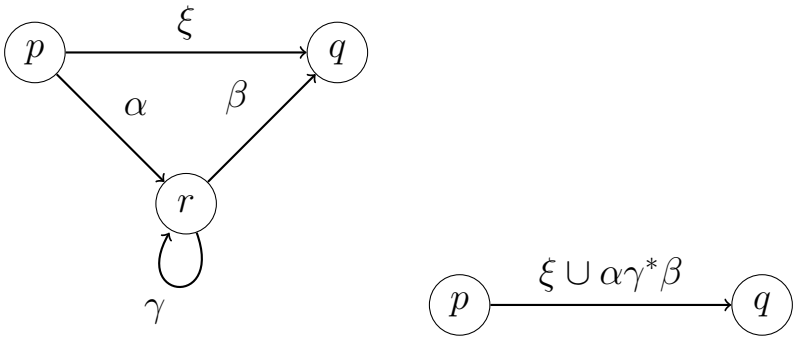
$$R(i,j,m) \leftrightharpoons R(i,j,m-1) \cup \\ \cup R(i,m,m-1)R(m,m,m-1)^*R(m,j,m-1).$$

Т.о., для регулярного выражения $\alpha_M = \cup\{R(1,i,n) \mid q_i \in F\}$ получаем $L(\alpha_M) = L(M)$. □

Практическая реализация алгоритма построения по автомату соответствующего ему регулярного выражения использует идею этого доказательства. Пусть $L = L(M)$ для некоторого КА (согласно предложению 1.1.1 достаточно рассмотреть случай, когда M – НКА). Не нарушая общности, считаем, что в M только одно заключительное состояние, причём в начальное состояние нет входящих дуг, а из конечного состояния нет исходящих дуг. Алгоритм построения по КА M регулярного выражения α, т.ч. $L(\alpha) = L(M)$ заключается в сборке "метаавтомата" переходы в котором маркируются регулярными выражениями для каждой пары p и q оставшихся состояний.

Последовательно выполняя процедуру удаления для всех состояний, кроме начального и конечного, получим "метаавтомат" с единственной дугой содержащей регулярное выражение α, для которого $L(M) = L(\alpha)$.

Пример. Рассмотрим схему работы алгоритма при удалении одного состояния:



Теорема 1.1.2. *Класс регулярных языков замкнут относительно объединения, пересечения, разности, дополнения, конкатенации и итерации ("звездочки" Клини).*

Доказательство. Замкнутость относительно объединения, конкатенации и "звездочки" Клини очевидно следует из определения регулярности. Рассмотрим остальные операции.

- Пересечение: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$
- Разность: $L_1 \backslash L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$
- Дополнение: используем автоматность языка L. Пусть $L = L(M)$ для ДКА $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$, тогда $\overline{L} = L(\overline{M})$, где $\overline{M} = (Q, \Sigma, s, Q \backslash F, \delta)$.

□

Пусть Σ – некоторый конечный непустой алфавит и пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – произвольный язык алфавита Σ.

Определение 1.1.16. Бинарное отношение $\approx_L$ задаётся на множестве Σ^* следующим образом:

$$\forall x,y \in \Sigma^* \quad x \approx_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* \quad xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Заметим, что $\approx_L$ является отношением эквивалентности на Σ^*. Т.е. можно определить систему классов эквивалентности (фактор-множество) $\Sigma^*/_{\approx_L}$ следующим образом

$$\forall x \in \Sigma^* \quad [x]_{\approx_L} = \{y \in \Sigma^* \mid x \approx_L y\}$$

Далее покажем, что фактор-множество конечно т. и т. т., когда L – регулярный язык.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – некоторый регулярный язык и пусть $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ – ДКА, такой что $L = L(M)$. На множестве слов определим бинарное отношение $\sim_M$ следующим образом:

$$\forall x, y \in \Sigma^* \quad x \sim_M y \Leftrightarrow (s,x) \vdash_M^* (q,e) \wedge (s,y) \vdash_M^* (q,e)$$

Т.к. $\sim_M$ является отношением эквивалентности на Σ^*, то можно говорить о классах эквивалентности $[x]_{\sim_M}$ и фактор-множестве $\Sigma^*/_{\sim_M}$.

Предложение 1.1.1. *Если $L \subseteq \Sigma^*$ – регулярный язык и M – ДКА, такой что $L = L(M)$, то*

$$\forall x, y \in \Sigma^* \quad x \sim_M y \Rightarrow x \approx_L y$$

Доказательство. Следует из определения этих эквивалентностей. □

Таким образом, отношение $\sim_M$ является утончением отношения $\approx_L$ в случае, когда $L = L(M)$, т.е.

$$\forall x \in \Sigma^* \quad [x]_{\sim_M} \subseteq [x]_{\approx_L}$$

Так как количество элементов в фактор-множестве $\Sigma^*/_{\sim_M}$ не превосходит количества элементов в множестве Q (конечного по определению ДКА) и так как $|\Sigma^*/_{\approx_L}| \leq |\Sigma^*/_{\sim_M}|$, то $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно.

Теорема 1.1.3. *Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – язык, для которого $\Sigma^*/_{\approx_L}$ – конечное множество. Существует такой ДКА $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$, что $L = L(M)$ и $|Q| = |\Sigma^*/_{\approx_L}|$.*

Доказательство. Построим для L *канонический* ДКА $M_L = (Q_L, \Sigma, s_L, F_L, \delta_L)$. Полагаем

$$Q_L \leftrightharpoons \Sigma^*/_{\approx_L}, \quad s_L \leftrightharpoons [e]_{\approx_L}, \quad F_L \leftrightharpoons \{[x]_{\approx_L} \mid x \in L\},$$

а для произвольных $x \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$ определим функцию перехода следующим образом:

$$\delta_L([x]_{\approx_L},a) \leftrightharpoons [xa]_{\approx_L}$$

Необходимо убедиться в том, что

1. такое определение корректно (т.е. не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности)
2. $L(M_L) = L$.

Доказательство пункта 1) следует из определения. Корректность функции перехода

$$\forall x,y \in \Sigma^* \quad \forall a \in \Sigma \quad x \approx_L y \Rightarrow xa \approx_L ya,$$

следует из определения отношения $\approx_L$ при $z = az'$ и произвольном z'.

Чтобы проверить 2), покажем, что

$$\forall x,y \in \Sigma^* \quad ([x]_{\approx_L},y) \vdash^*_{M_L} ([xy]_{\approx_L}, e)$$

индукцией по длине y. В случае $y = e$ утверждение очевидно. Шаг индукции $y = ay'$, где $a \in \Sigma$, следует из отределения функции перехода

$$([x]_{\approx_L},ay') \vdash_{M_L} ([xa]_{\approx_L}, y') \vdash^*_{M_L} ([xay']_{\approx_L}, e)$$

Таким образом, для любого слова $x \in \Sigma^*$, x распознаётся ДКА M_L т. и т. т., когда $([e]_{\approx_L}, x) \vdash^*_{M_L} ([x]_{\approx_L}, e)$ и $[x]_{\approx_L} \in F_L$, т.е. $x \in L$. □

Теорема 1.1.4 (Майхилл-Нероуд)**.** *Язык $L \subseteq \Sigma^*$ является регулярным т. и т. т., когда $\Sigma^*/_{\approx_L}$ – конечное множество.*

Доказательство. Если $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно, то существует канонический ДКА M_L, построенный в доказательстве предыдущей теоремы и распознающий язык L, т.е. язык $L \subseteq \Sigma^*$ регулярен.

Если L – регулярный язык, то он распознаётся некоторым ДКА M, а значит $|\Sigma^*/_{\approx_L}| \leq |\Sigma^*/_{\sim_M}| \leq |Q_M|$, откуда $\Sigma^*/_{\approx_L}$ конечно.

□

Непосредственно из доказательства теоремы Майхилла-Нероуда следует, что канонический ДКА M_L для регулярного языка L имеет наименьшее возможное число состояний среди ДКА, распознающих язык L. Однако построение канонического ДКА для L нельзя назвать конструктивным ввиду сложности определения отношения $\approx_L$. Опишем алгоритм, который по произвольному ДКА M находит ДКА M', распознающий тот же самый язык и имеющий наименьшее возможное число состояний (*алгоритм минимизации*).

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – регулярный язык и $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ – ДКА, для которого $L = L(M)$.

Определение 1.1.17. Конфигурация $(q,w) \in Q \times \Sigma^*$ ДКА M называется "хорошей" если $(q,w) \vdash^*_M (q',e)$ для некоторого $q' \in F$.

Определение 1.1.18. Для состояний $p,q \in Q$

$p \equiv q \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z \in \Sigma^*$ (p,z) – "хорошая" конфигурация $\Leftrightarrow$

(q,z) – "хорошая" конфигурация

Нетрудно убедиться, что отношение $\equiv$ является отношением эквивалентности на Q.

Так как для ДКА M отношение $\sim_M$ является утончением $\approx_L$ на Σ^* и количество классов в $\Sigma^*/_{\sim_M}$ равно числу достижимых состояний в M, то отношение $\equiv$ на множестве $Q_{\text{дост.}} \subseteq Q$ всех достижимых состояний из Q позволяет определить ДКА $M' = (Q', \Sigma, s', F', \delta')$ следующим образом: полагаем $Q' \leftrightharpoons Q_{\text{дост.}}/_{\equiv}$,

$s' \leftrightharpoons [s]_{\equiv}$, $F' \leftrightharpoons \{[q]_{\equiv} \mid q \in F \cap Q_{\text{дост}}\}$, $\delta'([q]_{\equiv}, a) \leftrightharpoons [\delta(q,a)]_{\equiv}$ для $q \in Q_{\text{дост.}}, a \in \Sigma$. По построению, $L(M') = L(M)$ и M' имеет наименьшее возможное число состояний.

Упражнение. Доказать корректность.

Разберем практическую реализацию описанного алгоритма. Для произвольного $n \geq 0$, рассмотрим отношение $\equiv_n$ на множестве $Q_{\text{дост.}}$ достижимых состояний M, определенное следующим образом:

$p \equiv_n q \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z \in \Sigma^*, |z| \leq n$

(p,z) – "хорошая" конфигурация $\Leftrightarrow$ (q,z) – "хорошая" конфигурация

Можно заметить, что $\forall m,n \in \mathbb{N}$, т.ч. $m \geqslant n$, $p \equiv_m q \Rightarrow p \equiv_n q$, т.е. $\equiv_m$ – утончение $\equiv_n$. Т.о., $p \equiv_0 q \Leftrightarrow (p,q \in F \vee p,q \in Q \setminus F)$ — базисный шаг индуктивного определения отношения $\equiv_n$, а индукционный переход определяется следующим образом:

$$\forall p,q \in Q, \forall n \geq 1 \quad p \equiv_n q \Leftrightarrow \begin{cases} p \equiv_{n-1} q \\ \forall a \in \Sigma \ \delta(p,a) \equiv_{n-1} \delta(p,a) \end{cases}$$

Упражнение. Проверить эквивалентность.

Т.о., можно построить последовательность отношений эквивалентности $\equiv_0, \ldots, \equiv_{n-1}, \equiv_n$, где каждое следующее является утончением предыдущего. Вследствие конечности Q найдется $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\equiv_n = \equiv_{n+1} = \ldots$ (наступает стабилизация), а значит $\equiv = \equiv_n$.

Следующее утверждение дает одно полезное необходимое условие регулярности языка.

Теорема 1.1.5 (о накачке)**.** *Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – регулярный язык. Тогда существует $n_0 \geq 1$, т.ч. $\forall w \in L$ $\big(|w| \geq n_0 \Rightarrow \exists x,y,z \in \Sigma^*$, т.ч. $w = xyz$, $|xy| \leq n_0$, $y \neq e$ и $xy^k z \in L \ \forall k \geq 0\big)$.*

Доказательство. Следует из автоматности языка L. Пусть $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta)$ – ДКА, т.ч. $L = L(M)$ и пусть $n_0 = |Q|$. Рассмотрим произвольное слово $w \in L$,

$|w| \geq n_0$, т.е. $w = a_1 a_2 \dots a_{n_0} a_{n_0+1} \dots a_m$ $m \geq n_0$. Для $q_1 = s$ имеем

$$(q_1, a_1 a_2 \dots a_m) \vdash_M (q_2, a_2 \dots a_m) \vdash_M \dots$$
$$\vdash_M (q_{n_0}, a_{n_0} \dots a_m) \vdash_M (q_{n_0+1}, a_{n_0+1} \dots a_m) \vdash_M (q_{m+1}, e), \quad q_{m+1} \in F$$

Т.к. $|Q| = n_0$, то $\exists i,j \in 1, \dots, n_0 + 1$, т.ч. $i < j$ и $q_i = q_j$. Полагаем $x \leftrightharpoons a_1 \dots a_{i-1}$, $y \leftrightharpoons a_i \dots a_{j-1}$, $z \leftrightharpoons a_j \dots a_m$. Легко убедиться, что $xy^k z \in L$ $\forall k > 0$.

□

Следствие 1.1.1. *Язык* $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ *не является автоматным.*

Упражнение. Доказать следствие.

1.2 Контекстно-свободные языки

Определение 1.2.1. *Контекстно-свободной грамматикой* (КС-грамматикой) называется упорядоченная четверка $G = (V, \Sigma, S, R)$, где V – конечное множество символов, $\Sigma \subset V$ – множество *терминальных символов* (символы из $V \backslash \Sigma$ называются *нетерминальными*), $S \in V \backslash \Sigma$ – *начальный* нетерминальный символ, $R \subseteq (V \backslash \Sigma) \times V^*$ – конечное множество *правил*, называемых также *продукциями*.

Замечание 1.2.1. Для $(A, v) \in R$ используем обозначение $A \to_G v$, т.е. нетерминал A в грамматике G порождает слово v.

Определение 1.2.2. Для КС-грамматики $G = (V, \Sigma, S, R)$ и слов $u,v \in V^*$, отношение $u \Rightarrow_G v$ означает, что $\exists x, y, z \in V^*$ и $A \in V \backslash \Sigma$, т.ч. $u = xAy$, $v = xzy$ и $(A \to_G z) \in R$.

Определение 1.2.3. Отношение $\Rightarrow_G^*$ есть рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow_G$, т.е. $\forall u,v \in V^*$ $u \Rightarrow_G^* v \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ либо $u = v$, либо $\exists n \geq 0$ $w_1, \dots, w_n \in V^*$, т.ч. $u \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G w_n \Rightarrow v$

Определение 1.2.4. Для КС-грамматики $G = (V, \Sigma, S, R)$, язык $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$ называется языком, порожденным грамматикой G.

Определение 1.2.5. Язык $L \subset \Sigma^*$ называется *контекстно-свободным*, если $L = L(G)$ для некоторой КС-грамматики G.

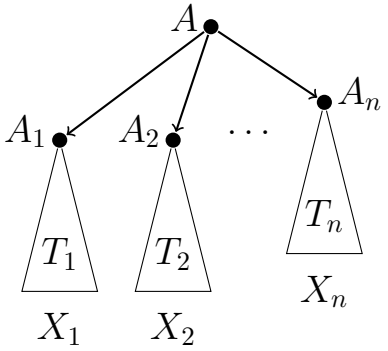
Пример. Рассмотрим КС-грамматику $G = (V, \Sigma, S, R)$, где $V = \{S, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $R = \{S \to aSb, S \to e\}$. Тогда $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Теорема 1.2.1. *Всякий регулярный язык является контекстно-свободным.*

Доказательство. Так как из регулярности следует автоматность, соответствующая КС-грамматика строится по детерминированному конечному автомату $M = (Q,\Sigma,s,F,\delta)$, распознающему данный язык: в качестве множества нетерминальных символов возьмем Q, в качестве стартового нетерминала s, а множество правил состоит из продукций вида $q \to ap$, где $\delta(q,a) = p$, а также продукций вида $q \to e$, где $q \in F$. □

Пусть $G = (V, \Sigma, S, R)$ – КС-грамматика. Множество *деревьев разбора* для G, а также понятия корня, листьев, результата и высоты дерева определяются индуктивно (корень и листья понимаются как вершины дерева, а результат как слово из Σ^*):

1. • a, $a \in \Sigma$ (корень, лист и результат такого дерева равен a, высота равна 0);
2. $A\bullet \to \bullet e$, где $(A \to e) \in R$ ($A \in V$ – корень, e – лист и результат, высота такого рана 1);
3. пусть $T_1, \ldots, T_n$ ($n \geqslant 1$) – деревья разбора для G с корнями $A_1, \ldots, A_n$, множествами листьев $Y_1, \ldots, Y_n$, результатами $X_1, \ldots, X_n \in \Sigma^*$ и пусть $A \to A_1 \ldots A_n$ – продукция из R, тогда



– дерево разбора для G, в котором A – корень, $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$ – листья, $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$ – результат, а высота равна максимуму из высот деревьев $T_1, \ldots, T_n$, увеличенному на 1;

4. других деревьев разбора для G нет.

Таким образом, всякое дерево разбора есть ориентированный упорядоченный размеченный граф, являющийся деревом.

Теорема 1.2.2. Пусть $G = (V, \Sigma, R, S)$ – КС-грамматика, тогда для любого нетерминала $A \in V \backslash \Sigma$ и любого слова $w \in \Sigma^*$ следующие условия эквивалентны

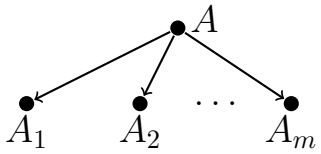
1. $A \Rightarrow_G^* w$ (слово w порождается в грамматике G из нетерминала A);
2. существует дерево разбора для G с корнем A и результатом w.

Доказательство. $(1 \Leftarrow 2)$

Пусть существует дерево разбора. Проведем рассуждение индукцией по его высоте h. Для $h = 1$ возможны следующие случаи:

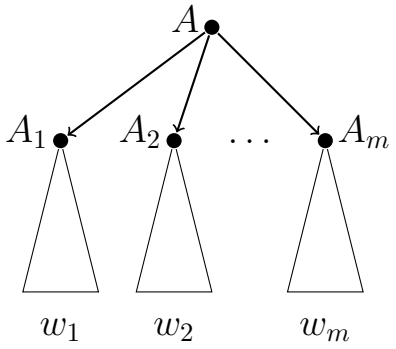
а) $A\bullet \to \bullet e \Rightarrow (A \to e) \in R \Rightarrow A \Rightarrow_G^* e$;

б)



т.е. $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \Sigma$, $(A \to A_1 A_2 \ldots A_m) \in R \Rightarrow A \Rightarrow_G^* A_1 A_2 \ldots A_m$

Индукционный переход от случая $h \leq n$ к $h = n + 1$:



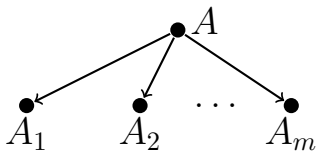
среди $A_1, A_2, \ldots, A_m$ есть нетерминалы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ с соответствующими порождениями $A_{i_1} \Rightarrow_G^* w_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \Rightarrow_G^* w_{i_k}$. Для слова $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ построим искомое порождение $A \Rightarrow_G^* w$:

$$A \Rightarrow_G A_1 \ldots A_n \Rightarrow_G A_1 \ldots A_{i_1 - 1} w_{i_1} A_{i_1 + 1} \ldots A_n \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w$$

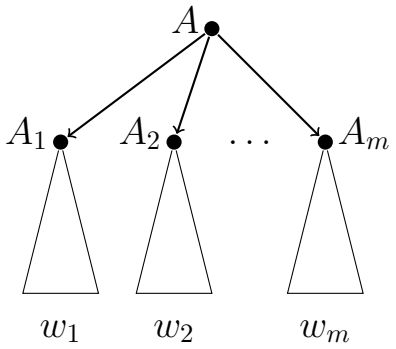
$(1 \Rightarrow 2)$

Пусть $A \Rightarrow_G^* w$, т.е. $A \Rightarrow_G u_1 \Rightarrow_G u_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow_G u_n \Rightarrow_G w$ для некоторого $n \geq 0$ и $u_1, \ldots, u_n \in V^*$. Построим дерево разбора индукцией по n.

Для $n = 0$ и $A \Rightarrow_G w$ либо $w = e$, тогда $A\bullet \longrightarrow \bullet e$ – дерево, либо $w = A_1 \dots A_m \in \Sigma^*$ $m \geq 1$ и $(A \to A_1 \dots A_m) \in R$ и дерево разбора имеет вид



Индукционный переход $n \to n+1$. Пусть $A \Rightarrow_G u_1 \Rightarrow_G u_2 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G u_n \Rightarrow_G u_{n+1} \Rightarrow_G w$. Рассмотрим слово $u_1 \in V^*$: $u_1 = A_1 \dots A_m$, где $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ – нетерминалы, участвующие в порождении w. Причем для каждого нетерминала A_{i_j} длина вывода $A_{i_j} \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G w_{i_j}$ не превосходит n, т.е. имеется соответствующее дерево разбора. Объединив их, получим полное дерево разбора



□

Определение 1.2.6. Пусть $G = (V, \Sigma, S, R)$ – КС-грамматика. Для u,$v \in V^*$, $u \Rightarrow_{L,G} v$ означает, что $u = xAy$, $v = xzy$ для некоторых $x \in \Sigma^*$, y,$z \in V^*$ и $A \in V \setminus \Sigma$, т.ч. $(A \to z) \in R$. Аналогично, $u \Rightarrow_{R,G} v$ означает, что $u = xAy$, $v = xzy$ для некоторых x,$z \in V^*$, $y \in \Sigma^*$ и $A \in V \setminus \Sigma$, т.ч. $(A \to z) \in R$.

Как обычно, отношения $\Rightarrow^*_{L,G}$ и $\Rightarrow^*_{R,G}$ определяются как рефлексивные и транзитивные замыкания отношений $\Rightarrow_{L,G}$ и $\Rightarrow_{R,G}$, соответственно. Непосредственно из определений и свойств КС-грамматик вытекает

Предложение 1.2.1. Пусть $G = (V, \Sigma, S, R)$ – КС-грамматика. Для любых $u \in V^*$ и $v \in \Sigma^*$, следующие условия эквивалентны:

1) $u \Rightarrow^*_G v$;
2) $u \Rightarrow^*_{L,G} v$;
3) $u \Rightarrow^*_{R,G} v$.

Из этого предложения и установленной ранее теоремы получаем

Следствие 1.2.1. Для КС-грамматики $G = (V, \Sigma, S, R)$ и $w \in \Sigma^*$, следующие условия эквивалентны:

1. $w \in L(G)$;
2. $S \Rightarrow^*_G w$;
3. $S \Rightarrow^*_{L,G} w$;
4. $S \Rightarrow^*_{R,G} w$;
5. существует дерево разбора для G с корнем S и результатом w.

С помощью деревьев разбора устанавливается теорема о накачке для контекстно-свободных языков, дающая полезное необходимое условие принадлежности этому классу и позволяющая доказывать, что конкретный язык не является контекстно-свободным.

Для контекстно-свободной грамматики $G = (V,\Sigma, S, R)$, назовем ее *шириной* натуральное число

$$\varphi(G) = \max\{n \mid (A \to A_1 \dots A_n) \in R\}.$$

Теорема 1.2.3 (о накачке)**.** Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – язык, порождаемый контекстно-свободной грамматикой $G = (V,\Sigma,S,R)$. Тогда для любого $w \in L$ такого, что $|w| > \varphi(G)^{|V\setminus\Sigma|}$, существуют $u,v,x,y,z \in \Sigma^*$ такие, что $w = uvxyz$, $vy \neq e$ и, для любого $k \geqslant 0$, $uv^kxy^kz \in L$.

Доказательство. В качестве вспомогательного утверждения потребуется

Лемма 1.2.1. Если T – дерево разбора для КС-грамматики G, имеющее высоту h и результат w, то $|w| \leqslant \varphi(G)^h$.

Доказательство. Индукция по h. □

Следствие 1.2.2. Если $w \in L(G)$ и $|w| > \varphi(G)^h$, то в любом дереве разбора для G с результатом w, существует путь из корня в один из листьев, длина которого $> h$.

Итак, пусть слово $w \in L(G)$ таково, что $|w| > \varphi(G)^{|V\setminus\Sigma|}$. Выберем дерево разбора T для G, имеющее результат w и наименьшее число листьев среди всех таких деревьев (считаем также, что в G нет правил вида $A \to A$). По следствию из леммы, в дереве T существует путь (из корня в один из листьев) длины большей, чем $|V \setminus \Sigma|$, а значит, в этом пути как минимум $|V \setminus \Sigma| + 2$ вершин (узлов). По определению деревьев разбора, все эти вершины, кроме последней, являются нетерминалами. Таким образом, данный путь содержит

как минимум $|V \setminus \Sigma| + 1$ нетерминальных символов. Следовательно, существует символ $A \in V \setminus \Sigma$, встречающийся на этом пути (как минимум) дважды. Пусть поддерево дерева T, порождаемое нижним вхождением A, имеет результат x, а поддерево дерева T, порождаемое верхним вхождением A, имеет результат vxy. Слова u,$z \in \Sigma^*$ определяются из условия $w = uvxyz$. По выбору дерева T, $vy \neq e$.

Из всего этого следует, что $uv^k xy^k z \in L(G)$ для всех $k \geqslant 0$.

□

Пользуясь установленной выше теоремой о накачке, легко получаем

Пример 1.2.1. Язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$ не является контекстно-свободным.

Следующая теорема содержит положительные результаты о свойствах замкнутости класса контекстно-свободных языков.

Теорема 1.2.4. Класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операций объединения, конкатенации и итерации ("звездочки" Клини).

Доказательство. Пусть $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ и $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ – произвольные КС-языки, то есть $L_1 = L(G_1)$ и $L_2 = L(G_2)$ для некоторых КС-грамматик $G_1 = (V_1, \Sigma_1, S_1, R_1)$ и $G_2 = (V_2, \Sigma_2, S_2, R_2)$. Можно считать, что $(V_1 \setminus \Sigma_1) \cap (V_2 \setminus \Sigma_2) = \varnothing$. Выберем новый символ $S \notin V_1 \cup V2$. По грамматикам G_1 и G_2 непосредственно определяются грамматики, порождающие, соответственно, языки $L_1 \cup L_2$, $L_1 \circ L_2$ и $(L_1)^*$:

а) $L_1 \cup L_2 = L(G_\cup)$ для КС-грамматики $G_\cup = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, S, R_\cup)$, где $R_\cup = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$;

б) $L_1 \circ L_2 = L(G_\circ)$ для КС-грамматики $G_\circ = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, S, R_\circ)$, где $R_\circ = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$;

в) $(L_1)^* = L(G_*)$ для КС-грамматики $G_* = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, S, R_*)$, где $R_* = R_1 \cup \{S \to e, S \to S S_1\}$.

□

В отличие от класса регулярных языков, класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операций пересечения и дополнения. А именно, легко убедиться, что языки $\{a^n b^n c^m \mid m,n \geqslant 0\}$ и $\{a^m b^n c^n \mid m,n \geqslant 0\}$ являются контекстно-свободными. Пересечением этих двух языков является язык

$\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$, который не является контекстно-свободным. Как следствие, поскольку операция пересечения выражается через операции объединения и дополнения по формуле $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операции дополнения.

Определение 1.2.7. *Автоматом с магазинной памятью* (pushdown automaton) называется упорядоченная шестерка

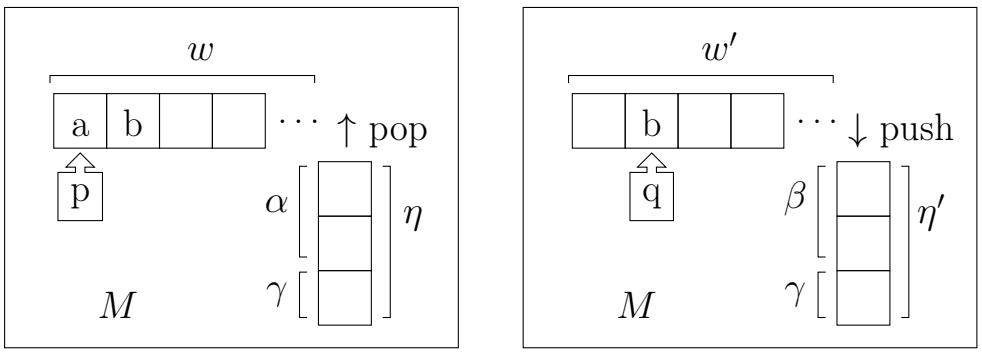
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, F, \Delta), \quad \text{где}$$

Q – конечное множество *состояний*, Σ – *внешний алфавит*, Γ – *внутренний алфавит*, $s \in Q$ – *начальное состояние*, $F \subseteq Q$ – множество *заключительных состояний*, а $\Delta \subseteq \big(Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*\big) \times (Q \times \Gamma^*)$ – конечное *отношение перехода*.

Определение 1.2.8. *Конфигурацией* автомата с магазинной памятью M называется упорядоченная тройка $C = (q, w, \eta)$, где $q \in Q$ – текущее состояние, $w \in \Sigma^*$ – текущее входное слово, $\eta \in \Gamma^*$ – текущее состояние магазина (стека).

Определение 1.2.9. Для конфигураций C и C' автомата M будем говорить, что конфигурация C' получена из C за один шаг работы автомата M (обозн. $C \vdash_M C'$), если $C = (p, w, \eta)$, $C' = (q, w', \eta')$, и справедливо следующее: $w = aw'$, $\eta = \alpha\gamma$, $\eta' = \beta\gamma$ для некоторой пятерки $\big((p, a, \alpha), (q, \beta)\big) \in \Delta$ (здесь $\gamma \in \Gamma^*$ – неиспользуемое содержимое стека).

Как обычно, $\vdash_M^*$ есть рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\vdash_M$.



Определение 1.2.10. Слово $w \in \Sigma^*$ *распознается* автоматом с магазинной памятью M, если $(s,w,e) \vdash_M^* (q,e,e)$ для некоторого заключительного состояния $q \in F$.

Для автомата M, как обычно, определим язык

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ распознаётся автоматом } M\}.$$

Будем говорить, что язык $L \subseteq \Sigma^*$ *распознается автоматом с магазинной памятью*, если $L = L(M)$ для некоторого автомата с магазинной памятью M.

Справедлива следующая

Теорема 1.2.5. Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ – произвольный язык. Следующие условия эквивалентны:

1) L – контекстно-свободный язык;
2) L распознается некоторым автоматом с магазинной памятью.

Перед тем, как приступить к (довольно длинному) доказательству этой важной теоремы, установим одно из ее следствий.

Предложение 1.2.2. Пересечение контекстно-свободного языка с регулярным языком является контекстно-свободным языком.

Доказательство. Пусть для $L_1,L_2 \subseteq \Sigma^*$ справедливы равенства $L_1 = L(M_1)$, $L_2 = L(M_2)$, где $M_1 = \langle Q_1,\Sigma,\Gamma_1,s_1,F_1,\Delta\rangle$ и $M_2 = \langle Q_2,\Sigma,s_2,F_2,\delta\rangle$ – автомат с магазинной памятью и детерминированный конечный автомат, соответственно. Определим автомат с магазинной памятью $M = (Q,\Sigma,\Gamma,s,F,\Delta)$, для которого $L(M) = L_1 \cap L_2$. Полагаем $Q = Q_1 \times Q_2$, $\Gamma = \Gamma_1$, $s = (s_1,s_2)$, $F = F_1 \times F_2$. Наконец, определим отношение перехода Δ как объединение множеств

$$\{(((q_1,q_2),a,\alpha),((q_1',\delta(q_2,a)),\beta)) \mid q_i,q_i' \in Q_i, a \in \Sigma,((q_1,a,\alpha),(q_1',\beta)) \in \Delta_1\}$$

и

$$\{(((q_1,q_2),e,\alpha),((q_1',q_2),\beta)) \mid q_1,q_1' \in Q_1, q_2 \in Q_2, ((q_1,e,\alpha),(q_1',\beta)) \in \Delta_1\}.$$

□

Итак, приступим к доказательству теоремы. Установим сначала импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $L = L(G)$ для некоторой контекстно-свободной грамматики $G = (V,\Sigma,S,R)$, где $\Sigma = \{a_1,\ldots,a_m\}$, $R = \{A_1 \to v_1,\ldots,A_n \to v_n\}$ (здесь $A_i \in V \setminus \Sigma$, $v_i \in V^*$). Определим автомат с магазинной памятью

$$M_G = (\{s,q\},\Sigma,V,s,\{q\},\Delta),$$

в котором отношение перехода Δ состоит из команд

$((s,e,e),(q,S))$,
$((q,e,A_1),(q,v_1))$,
...
$((q,e,A_n),(q,v_n))$,
$((q,a_1,a_1),(q,e))$,
...
$((q,a_m,a_m),(q,e))$.

Покажем, что $L(M_G) = L(G)$. Справедлива следующая

Лемма 1.2.2. Для любого $w \in \Sigma^*$ и любого $\alpha \in (V \setminus \Sigma)V^* \cup \{e\}$, $S \Rightarrow^*_{L,G} w\alpha$ тогда и только тогда, когда $(q,w,S) \vdash^*_{M_G} (q,e,\alpha)$.

Из этой леммы, полагая $\alpha = e$, получаем требуемое равенство.

Доказательство. Пусть $S \Rightarrow^*_{L,G} w\alpha$, то есть $S \Rightarrow_{L,G} u_1 \Rightarrow_{L,G} \ldots \Rightarrow_{L,G} u_n = w\alpha$ для некоторого $n \geqslant 0$, $u_1,\ldots,u_n \in V^*$. Индукция по n: если $n = 0$, то $w = e$, $\alpha = S$, то есть $(q,e,S) \vdash^*_{M_G} (q,e,s)$. Пусть теперь $S \Rightarrow_{L,G} u_1 \Rightarrow_{L,G} \ldots \Rightarrow_{L,G} \Rightarrow_{L,G} u_n \Rightarrow_{L,G} u_{n+1} = w\alpha$ для некоторого $n \geqslant 0$ и $u_1,\ldots,u_{n+1} \in V^*$. Рассмотрим последний переход в этом порождении: пусть $u_n = xA\beta$, $u_{n+1} = x\gamma\beta$, где $x \in \Sigma^*$, $\beta \in V^*$ и $(A \to \gamma) \in R$. По индукционному предположению, $S \Rightarrow^*_{L,G} xA\beta$ влечет $(q,x,S) \vdash^*_{M_G} (q,e,A\beta)$. Так как $u_{n+1} = x\gamma\beta = w\alpha$, то $w = xy$, $\gamma\beta = y\alpha$. Отсюда $(q,xy,S) \vdash^*_{M_G} (q,y,A\beta) \vdash_{M_G} (q,y,\gamma\beta) = (q,y,y\alpha) \vdash^*_{M_G} (q,e,\alpha)$.

Наоборот, пусть $(q,w,S) \vdash^*_{M_G} (q,e,\alpha)$. Индукция по числу n переходов, обрабатывающих нетерминалы из стека. Если $n = 0$, то $w = e$,$\alpha = S$, то есть $S \Rightarrow^*_{L,G} S$. Пусть теперь $(q,w,S) \vdash^*_{M_G} (q,e,\alpha)$ с использованием $n+1$ перехода, обрабатывающего нетерминалы из стека. Рассмотрим последний такой переход: пусть $(q,w,S) \vdash^*_{M_G} (q,y,A\beta) \vdash_{M_G} (q,y,\gamma\beta) \vdash^*_{M_G} (q,e,\alpha)$, где $w = xy$ для некоторых $x,y \in \Sigma^*$, и $(A \to \gamma) \in R$. По индукционному предположению, $S \Rightarrow^*_{L,G} xA\beta$, а значит и $S \Rightarrow^*_{L,G} x\gamma\beta$. Но, так как в последних переходах $(q,w,S) \vdash^*_{M_G} (q,y,\gamma\beta) \vdash^*_{M_G} (q,e,\alpha)$ использовались только перехо-

ды, обрабатывающие терминалы из стека, получаем, что $y\alpha = \gamma\beta$, то есть $S \Rightarrow^*_{L,G} x\gamma\beta = xy\alpha = w\alpha$. □

Установим теперь импликацию 2) ⇒ 1). Пусть $L = L(M)$ для некоторого автомата с магазинной памятью $M = (Q,\Sigma,\Gamma,s,F,\Delta)$.

Определение 1.2.11. Автомат с магазинной памятью $M = (Q,\Sigma,\Gamma,s,F,\Delta)$ называется *простым*, если для любого перехода $((q,a,\beta),(p,\gamma)) \in \Delta$, т.ч. $q \neq s$, выполняются условия $\beta \in \Gamma$ и $|\gamma| \leqslant 2$.

Лемма 1.2.3. Для любого автомата с магазинной памятью M существует простой автомат с магазинной памятью M', для которого $L(M) = L(M')$.

Доказательство. Построим по автомату $M = (Q,\Sigma,\Gamma,s,F,\Delta)$ эквивалентный ему простой автомат $M = (Q',\Sigma,\Gamma',s',F',\Delta')$ следующим образом. Пусть s',f' и Z – новые символы. Полагаем $F' \leftrightharpoons \{f'\}$, $\Gamma' \leftrightharpoons \Gamma \cup \{Z\}$ и $Q' \leftrightharpoons Q \cup \{s',f'\}$ (в дальнейшем Q' может быть дополнено новыми состояниями). Помещаем в Δ', помимо всех элементов Δ, переходы $((s',e,e),(s,Z))$ и $((f,e,Z),(f',e))$ для всех $f \in F$. Далее, заменяем в Δ' все переходы, нарушающие условия простоты, по следующей схеме:

а) все переходы вида $((q,a,\beta),(p,\gamma))$, т.ч. $\beta = B_1B_2\ldots B_n$, $n \geqslant 2$, заменяем на последовательности переходов

$((q,e,B_1),(q_{B_1},e))$,
$((q_{B_1},e,B_2),(q_{B_1B_2},e))$,
$\ldots$
$((q_{B_1B_2\ldots B_{n-1}},a,B_n),(p,\gamma))$

(здесь $q_{B_1}, \ldots, q_{B_1B_2\ldots B_{n-1}}$ – новые состояния, которые добавляются в Q');

б) далее, все переходы вида $((q,a,\beta),(p,\gamma))$, т.ч. $\gamma = C_1C_2\ldots C_m$, $m \geqslant 2$, заменяем на последовательности переходов

$((q,a,\beta),(r_1,C_m))$,
$((r_1,e,e),(r_2,C_{m-1}))$,
$\ldots$
$((r_{m-1},e,e),(p,C_1))$

(здесь $r_1, \ldots, r_{m-1}$ – новые состояния, которые добавляются в Q');

в) наконец, все переходы вида $((q,a,e),(p,\gamma))$, т.ч. $q \neq s'$, заменяем на множества переходов вида $((q,a,A),(p,\gamma A))$ для всех $A \in \Gamma'$.

Множество правил R контекстно-свободной грамматики, порождающей язык $L(M)$, определяется по соответствующему M простому автомату M' следующим образом. Помещаем в R правило $S \to \langle s,Z,f' \rangle$, а также правила вида $\langle q,e,q \rangle \to e$ для всех $q \in Q'$. Далее, сопоставляем каждому переходу типа $((q,a,B),(p,C))) \in \Delta'$ множество правил вида $\langle q,B,r \rangle \to a\langle p,C,r \rangle$, $r \in Q'$, а каждому переходу типа $((q,a,B),(p,C_1C_2))) \in \Delta'$ – множество правил вида $\langle q,B,r \rangle \to a\langle p,C_1,r' \rangle \langle r',C_2,r \rangle$, $r,r' \in Q'$.

Используя индуктивные рассуждения, несложно убедиться в том, что справедлива следующая

Лемма 1.2.4. Для любых $w \in \Sigma^*, p,q \in Q', A \in \Gamma'$,

$\langle q,A,p \rangle \Rightarrow_{G_M}^* w$ тогда и только тогда, когда $(q,w,A) \vdash_{M'}^* (p,e,e,)$.

Как следствие, $S \Rightarrow_{G_M}^* w$ т. и т.т., когда $S \to \langle s,Z,f' \rangle \Rightarrow_{G_M}^* w$ т. и т.т., когда (вследствие леммы) $(s,w,Z) \vdash_{M'}^* (f',e,e)$, то есть $w \in L(M') = L(M)$.

□

1.3 Нормальная форма Хомского

Определение 1.3.1. Контекстно-свободная грамматика $G = (V,\Sigma,S,R)$ находится в *нормальной форме Хомского*, если все правила в R имеют вид $A \to BC$ для некоторых $A,B,C \in V$.

Теорема 1.3.1. Для любой контекстно-свободной грамматики $G = (V,\Sigma,S,R)$ существует контекстно-свободная грамматика $G' = (V',\Sigma,S,R')$, находящаяся в нормальной форме Хомского, для которой $L(G') = L(G) \setminus (\Sigma \cup \{e\})$.

Доказательство. Помещаем в V' все символы из V, а в R' – все правила из R. Затем проводим следующие преобразования:

а) удаляем из R' *"длинные" правила* вида $A \to B_1B_2 \ldots B_n$, $n > 2$, и добавляем вместо каждого такого правила множество правил $A \to B_1A_1$,

$A_1 \to B_2A_2$, …, $A_{n-2} \to B_{n-1}B_n$ (здесь $A_1, \ldots, A_{n-2}$ – новые нетерминальные символы, которые добавляются в V');

б) для удаления из R' *"e-правил"* вида $A \to e$ поступаем следующим образом. Определим множество $\mathcal{E} = \{B \in V \mid B \Rightarrow_G^* e\}$ (оно определяется конструктивно как наименьшая неподвижная точка последовательности $\mathcal{E}_0 = \varnothing$, $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n \cup \{B \in V \mid (B \to \beta) \in R$ для некоторого $\beta \in (\mathcal{E}_n)^*\}$ для $n \geqslant 0$). Теперь удаляем из R' все правила вида $A \to e$ и для каждого правила из R' вида $A \to BC$ или $A \to CB$, где $B \in \mathcal{E}$, добавляем правило $A \to C$;

в) для удаления из R' *"1-правил"* вида $A \to B$ поступаем следующим образом. Для каждого $A \in V$ (в том числе и для $A \in \Sigma$) определим множество $\mathcal{D}(A) = \{B \in V \mid A \Rightarrow_G^* B\}$ (оно определяется конструктивно как наименьшая неподвижная точка последовательности $\mathcal{D}_0(A) = \{A\}$, $\mathcal{D}_{n+1}(A) = \mathcal{D}_n(A) \cup \{C \in V \mid (B \to C) \in R$ для некоторого $B \in \mathcal{D}_n(A)\}$ для $n \geqslant 0$). Теперь удаляем из R' все правила вида $A \to B$ и для каждого правила из R' вида $A \to BC$, добавляем (конечное) множество правил вида $A \to B'C'$, где $B' \in \mathcal{D}(B) \setminus \{B\}$, $C' \in \mathcal{D}(C) \setminus \{C\}$. Кроме того, добавляем в R' (конечное) множество правил вида $S \to BC$ для всех правил $A \to BC$ из R, таких, что $A \in \mathcal{D}(S) \setminus \{S\}$.

Индукцией по длине слова $w \in \Sigma^*$, $|w| \geqslant 2$, легко убедиться, что $w \in L(G')$ тогда и только тогда, когда $w \in L(G)$.

□

1.4 Грамматики, машины Тьюринга и вычислимо перечислимые языки

Определение 1.4.1. *Грамматикой* (системой преобразований, rewriting system) называется упорядоченная четверка $G = (V, \Sigma, S, R)$, где V – конечное множество символов, $\Sigma \subset V$ – множество *терминальных символов* (символы из $V \setminus \Sigma$ называются *нетерминальными*), $S \in V \setminus \Sigma$ – *начальный* нетерминальный символ, $R \subseteq (V^* \times (V \setminus \Sigma) \times V^*) \times V^*$ – конечное множество *правил*, называемых также *продукциями*.

Замечание 1.4.1. Для правила $((u,A,v),\alpha) \in R$ используем обозначение $uAv \to_G \alpha$.

Определение 1.4.2. Для грамматики $G = (V, \Sigma, S, R)$ и слов $\alpha,\beta \in V^*$, отношение $\alpha \Rightarrow_G \beta$ означает, что, существуют $\exists x,y,u,v,\gamma \in V^*$ и $A \in V\backslash\Sigma$, т.ч. $\alpha = xuAvy$, $\beta = x\gamma y$ и $(uAv \to_G \gamma) \in R$.

Определение 1.4.3. Отношение $\Rightarrow_G^*$ есть рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow_G$, т.е. $\forall u,v \in V^*$ $u \Rightarrow_G^* v \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ либо $u = v$, либо $\exists n \geq 0$ $w_1, \ldots, w_n \in V^*$, т.ч. $u \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w_n \Rightarrow v$

Определение 1.4.4. Для грамматики $G = (V, \Sigma, S, R)$, язык $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$ называется языком, порожденным грамматикой G.

Теорема 1.4.1. Для любой грамматики $G = (V,\Sigma,S,R)$ существует грамматика $G' = (V',\Sigma,S',R')$ такая, что $L(G) = L(G')$ и все правила в R' имеют вид

$$uAv \to u\gamma v,$$

где $u,v,\gamma \in (V')^*, A \in V' \setminus \Sigma$.

Доказательство. Помещаем в V' все элементы из V, в R' – все правила из R, и проводим следующие преобразования. Не нарушая общности, можно считать, что все правила в R' имеют вид $A_1A_2 \ldots A_m \to B_1B_2 \ldots B_n$, где все $A_1, \ldots, A_m$ являются нетерминалами из $V' \setminus \Sigma$. Действительно, достаточно добавить в V' новые нетерминальные символы N_a для всех $a \in \Sigma$, заменить в R' все правила вида $u \to v$ на правила вида $N(u) \to N(v)$, где $N(C_1 \ldots C_k) = N(C_1) \ldots N(C_k)$, причем $N(C) = C$, если $C \in V \setminus \Sigma$, и $N(C) = N_C$, если $C \in \Sigma$. Кроме того, нужно добавить в R' правила вида $N_a \to a$ для всех $a \in \Sigma$.

Рассмотрим, например, случай правила $A_1A_2 \ldots A_m \to B_1B_2 \ldots B_n$, в котором $m \leqslant n$. Заменяем его на множество правил

$A_1A_2 \ldots A_m \to A'_1A_2 \ldots A_m$,
$A'_1A_2 \ldots A_m \to A'_1A'_2A_3 \ldots A_m$,
$\ldots$
$A'_1A'_2 \ldots A'_{m-1}A_m \to A'_1A'_2 \ldots A'_{m-1}B_m \ldots B_n$,
$A'_1A'_2 \ldots A'_{m-1}B_m \ldots B_n \to B_1A'_2 \ldots A'_{m-1}B_m \ldots B_n$,
$\ldots$
$B_1B_2 \ldots A'_{m-1}B_m \ldots B_n \to B_1B_2 \ldots B_{m-1}B_m \ldots B_n$.

(здесь $A'_1, \ldots, A'_{m-1}$ – новые нетерминальные символы, которые добавляются в множество V').

Случай $m > n$ рассматривается аналогично. □

Определение 1.4.5. Грамматика $G = (V,\Sigma,S,R)$ называется *контекстно-зависимой* (или *неукорачивающейся*), если все правила в R (кроме, возможно, правила $S \to e$) имеют вид

$$uAv \to u\gamma v,$$

где $u,v \in V^*, A \in V \setminus \Sigma$, и $\gamma \in V^+$. В случае, когда в R входит правило $S \to e$, нетерминал S не должен содержаться в правых частях правил из R.

Язык называется *контекстно-зависимым*, если он порождается некоторой контекстно-зависимой грамматикой.

Предложение 1.4.1. Всякий контекстно-зависимый язык является вычислимым.

Доказательство. Пусть $G = (V,\Sigma,S,R)$ — контекстно-зависимая грамматика. Укажем алгоритм, который по любому слову $w \in \Sigma^*$ определяет, верно ли, что $w \in L(G)$. Имеется конечное множество упорядоченных наборов $(u_0,u_1,\ldots,u_n)$ попарно различных слов $u_0,u_1,\ldots,u_n \in V^*$, $n \geqslant 0$, таких, что $|u_0| \leqslant |u_1| \leqslant \ldots \leqslant |u_n| \leqslant |w|$. Таким образом, достаточно проверить, существует ли в этом (вычислимом) множестве такой набор, для которого $u_0 = S$, $u_n = w$, при этом u_{i+1} получается из u_i получается по одному из правил из R для всех $i < n$. □

Приведем пример вычислимого языка, не являющегося контекстно-зависимым. Пусть $\{ w_n \mid n \in \omega \}$ — вычислимая нумерация всех слов алфавита $\{a,b\}$, и пусть $\{G_n \mid n \in \omega \}$ — вычислимая нумерация всех контекстно-зависимых грамматик с алфавитом терминальных символов $\{a,b\}$. Определим язык $L_c \subseteq \{a,b\}^*$ следующим образом: для всякого $n \in \omega$, $w_n \in L_c$ тогда и только тогда, когда $w_n \notin L(G_n)$. Из построения непосредственно следует, что L_c — вычислимый язык, при этом $L_c \neq L(G_n)$ для всех $n \in \omega$.

Глава 2. Определимость и вычислимость

2.1 Теория KPU.

Пусть σ – произвольная сигнатура, содержащая символ равенства. Теория KPU определяется в сигнатуре $\sigma^* = \sigma \cup \{\in, \ldots\}$, которая получается добавлением к сигнатуре σ символа принадлежности $\in$, а также, возможно, других предикатных, функциональных или константных символов. Вместо того, чтобы определять σ^* точно, опишем класс алгебраических систем этой сигнатуры, оставляя читателю возможность формального определения σ^*.

Определение 2.1.1. *Алгебраическая система* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}; A, E, \ldots)$ *сигнатуры* σ^* *состоит из*

(i) алгебраической системы $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *сигнатуры* σ*, причем возможен случай* $M = \emptyset$ *(элементы множества* M *называются праэлементами* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*);*

(ii) непустого множества A*, не пересекающегося с* M *(элементы множества* A *называются множествами* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*);*

(iii) отношения $E \subseteq (M \cup A) \times A$ *(которое интерпретирует отношение принадлежности* $\in$*);*

(iv) других отношений, функций и констант на множестве $A \cup M$*, интерпретирующие остальные символы из* $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$ *(список которых обозначен многоточием).*

Символ равенства сигнатуры σ^* всегда интерпретируется обычным отношением равенства.

Для обозначений переменных введем следующее соглашение: в алгебраической системе $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}; A, E, \ldots)$ переменные

$p, q, p_1, \ldots$ принимают значения из M (праэлементы),

$a, b, c, d, f, r, a_1, \ldots$ принимают значения из A (множества),

$x, y, z, \ldots$ принимают значения из $M \cup A$.

Подобный способ обозначения позволяет легко формулировать утверждения, относящиеся к множествам или праэлементам. Например, формула $\forall p \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow x = p)$ означает, что множество $\{p\}$ существует для всякого праэлемента p,

тогда как формула $\forall p \exists a \forall q (q \in a \leftrightarrow q = p)$ означает, что существует множество a, пересекающееся с классом праэлементов только по p.

В дальнейшем символы u,v,w будут использоваться для обозначения переменных, значениями которых могут быть как праэлементы, так и множества.

Аксиомы теории KPU можно разделить на три класса. Аксиомы экстенсиональности и фундированности выражают основные свойства множеств. Аксиомы пары, объединения Δ_0-выделения определяют возможные способы конструирования множеств. Наиболее важная аксиома – Δ_0-органиченности – гарантирует достаточное число возможных шагов конструирования. Для того, чтобы сформулировать две последние аксиомы, необходимо определить понятие Δ_0-формулы сигнатуры $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$ (Леви, 1965).

Определение 2.1.2. *Множество* Δ_0**-формул** *сигнатуры* $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$ *– это наименьшее множество* Y*, содержащее все атомарные формулы сигнатуры* $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$*, для которого*

(i) если $\varphi \in Y$*, то* $\neg\varphi \in Y$*;*

(ii) если φ,$\psi \in Y$*, то* $(\varphi \wedge \psi)$,$(\varphi \vee \psi) \in Y$*;*

(iii) если $\varphi \in Y$*, то* $\forall u \in v\, \varphi \in Y$ *и* $\exists u \in v\, \varphi \in Y$ *для всех переменных* u,v*.*

Важность Δ_0-формул следует из метаматематического факта, состоящего в том, что всякий предикат, определенный с помощью Δ_0-формулы, является абсолютным (см. далее), и эмпирического факта (который будет установлен в дальнейшем), состоящего в том, что многие широко используемые предикаты могут быть определены с помощью Δ_0-формул (см. таблицу 1).

Определение 2.1.3. Аксиомы теории KPU *(для сигнатуры* $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$*) – это универсальные замыкания следующих формул:*

Экстенсиональность: $\forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$*;*

Фундированность: $\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x [\varphi(x) \wedge \forall y \in x \neg\varphi(y)]$ *для всех формул* $\varphi(x)$*, не содержащих свободных вхождений переменной* y*;*

Существование пары: $\exists a (x \in a \wedge y \in a)$*;*

Объединение: $\exists b \forall y \in a \forall x \in y (x \in b)$*;*

Δ_0*-выделение:* $\exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$ *для всех* Δ_0*-формул, не содержащих свободных вхождений переменной* b*;*

Δ_0-*ограниченность:* $\forall x \in a \exists y\, \varphi(x,y) \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, \varphi(x,y)$ *для всех* Δ_0-*формул, не содержащих свободных вхождений переменной* b.

Отметим, что формулы $\varphi(x)$ и $\varphi(x,y)$ могут иметь свободные переменные, отличные от x и y.

Определение 2.1.4. Аксиомы теории KPU^+ – *это аксиомы теории* KPU, *и аксиома*

$$\exists a \forall x [x \in a \leftrightarrow \exists p (x = p)],$$

утверждающая, что существует множество всех праэлементов.

Определение 2.1.5. Аксиомы теории KP – *это аксиомы теории* KPU, *и аксиома*

$$\forall x \exists a (x = a),$$

утверждающая, что всякий элемент является множеством, то есть отсутствуют праэлементы.

Замечание 2.1.1. *Некоторые из аксиом вытекают из определения алгебраических систем сигнатуры* $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$. *Следующие формулы в явном виде формулируют некоторые из этих утверждений (все их следует считать аксиомами теории* KPU*):*

$$\forall p \forall a (p \neq a),$$

$$\exists a (a = a),$$

$$\forall p \forall x (x \notin p).$$

Предложение 2.1.1. *(i) Существует единственное множество* 0, *не содержащее элементов.*

(ii) Для любого a *существует единственное множество* $b = \cup a$, *для которого* $x \in b \iff \exists y \in a (x \in y)$.

(iii) Для любых a,b *существует единственное множество* $c = a \cup b$, *для которого* $x \in c \iff x \in a$ *или* $x \in b$.

(iv) Для любых a,b *существует единственное множество* $c = a \cap b$, *для которого* $x \in c \iff x \in a$ *и* $x \in b$.

Как обычно, упорядоченная пара элементов x и y – это множество

$$\langle x,y \rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

Легко доказать, что $\langle x,y\rangle = \langle z,w\rangle$ тогда и только тогда, когда $x = z$ и $y = w$.

Предложение 2.1.2. *Для любых a,b существует множество $c = a \times b$ (декартово произведение a и b), такое, что*

$$c = \{\langle x,y\rangle | x \in a \text{ и } y \in b\}.$$

Доказательство. Согласно таблице 1, условие на a,b,u вида

$$u = \langle x,y\rangle \wedge x \in a \wedge y \in b$$

определяется Δ_0-формулой, поэтому можно воспользоваться аксиомой Δ_0-выделения при наличии множества c такого, что $\langle x,y\rangle \in c$ для всех $x \in a, y \in b$. Существование такого множества c вытекает из аксиомы Δ_0-ограниченности следующим образом. Для всякого $x \in a$ существует w_x такое, что $\langle x,y\rangle \in w_x$ для всех $y \in b$. Действительно, для данного $y \in b$ существует множество $d = \langle x,y\rangle$, поэтому по аксиоме Δ_0-ограниченности существует множество w_x такое, что $\langle x,y\rangle \in w_x$ для всех $y \in b$. Воспользуемся аксиомой Δ_0-ограниченности еще раз. Имеем

$$\forall x \in a \exists w \underbrace{\forall y \in b \exists d \in w (d = \langle x,y\rangle)}_{\Delta_0}$$

поэтому существует множество c_1 такое, что для всех $x \in a, y \in b$ $\langle x,y\rangle \in w$ для некоторого $w \in c_1$. Для множества $c = \cup c_1$ имеем $\langle x,y\rangle \in c$ для всех $x \in a$,y, $\in b$. □

Как обычно, индукцией по n определяются упорядоченные n-ки для $n > 2$:

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle\rangle,$$

и, аналогично,

$$a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 \times (a_2 \times \ldots \times a_n).$$

Таким образом, $a_1 \times \ldots \times a_n$ это множество n-ок $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, где $x_i \in a_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

С помощью понятий упорядоченной пары и упорядоченного набора можно, как обычно, определить понятия отношения, функции и т.п., используя для этого только Δ_0-формулы (см. таблицу 1).

Множество a называется **транзитивным** (обозн. $\mathrm{Tran}(a)$), если

$$\forall x \in a \forall z \in x (z \in a),$$

таким образом, $\mathrm{Tran}(a)$ – Δ_0-формула. Праэлементы по определению не являются транзитивными. Всякое множество праэлементов является транзитивным. Пустое множество 0 также является транзитивным.

Определение 2.1.6. *Обозначим* $\mathcal{P}(a) = a \cup \{a\}$.

Упражнение 1. *Докажите (методом индукции), что для любого* n

$$\mathrm{KPU} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists a(a = \{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Упражнение 2. *Докажите, что если* a *– множество транзитивных элементов, то* $\cup a$ *– транзитивное множество. Докажите, что если множество* a *транзитивно, и* $b \subseteq a$*, то множество* $a \cup \{b\}$ *также транзитивно. В частности, если* a *транзитивно, то транзитивно и* $\mathcal{P}(a)$.

Определение 2.1.7. Ординалом *называется транзитивное множество, каждый элемент которого также является транзитивным. Формально,*

$$\mathrm{Ord}(a) \iff \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall x \in a \mathrm{Tran}(x).$$

Ординалы будем обозначать символами α,β,γ, ... Запись $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha \in \beta$. Ординал α называется **натуральным числом**, если для всех $\beta \leqslant \alpha$ при $\beta \neq 0$ имеем $\beta = \mathcal{P}(\gamma)$ для некоторого γ. Для обозначения натуральных чисел будем использовать символы n,m, ...

Упражнение 3. *Докажите в* KPU*:*

(i) 0 *является ординалом;*

(ii) если α *– ординал, то* $\mathcal{P}(\alpha)$ *– также ординал, который обозначается* $\alpha + 1$*;*

(iii) если $\alpha \neq \beta$*, то* $\alpha < \beta$ *или* $\beta < \alpha$ *(используйте аксиому фундированности);*

(iv) для всех α *верно* $\alpha \not< \alpha$*;*

(v) если a *– множество ординалов, то* $\beta = \cup a$ *также является ординалом, причем* $\alpha \leqslant \beta$ *для всех* $\alpha \in a$ *и* $\exists \alpha \in a(\gamma \leqslant \alpha)$ *для всех* $\gamma < \beta$ *(то есть* $\beta = \sup(a)$ *– супремум множества* a*);*

(vi) если $\alpha < \beta$*, то* $\alpha + 1 \leqslant \beta$*;*

(vii) любое непустое множество ординалов имеет наименьший элемент.

Определение 2.1.8. *Множество a называется* **конечным**, *если существует биекция f, для которой* $\mathrm{dom}(f) = a$, *а множеством значений является некоторое натуральное число n. Множество a называется* **счетным**, *если существует биекция f, для которой* $\mathrm{dom}(f) = a$, *а множеством значений является некоторое множество натуральных чисел.*

Упражнение 4. *(i) Докажите, что всякий элемент ординала является ординалом.*

(ii) Докажите, что множество является ординалом тогда и только тогда, когда оно транзитивно, а его элементы линейно упорядочены отношением $\in$.

(iii) Докажите, что ординал конечен тогда и только тогда, когда он является натуральным числом.

Таблица 1. Некоторые Δ_0-предикаты.

обозначение	Δ_0-определение
$x \subseteq y$	$\forall z \in x(z \in y)$
$a = \{x,y\}$	$(x \in a) \wedge (y \in a) \wedge \forall z \in a((z = x) \vee (z = y))$
$a = \langle x,y \rangle$	$\exists b \in a \exists c \in a((b = \{x\}) \wedge (c = \{x,y\}) \wedge (a = \{b,c\}))$
$\mathrm{Pair}(a)$	$\exists c \in a \exists x \in c \exists y \in c(a = \langle x,y \rangle)$
$pr_1(a) = x$	$\exists c \in a \exists y \in c(a = \langle x,y \rangle)$
$pr_2(a) = y$	$\exists c \in a \exists x \in c(a = \langle x,y \rangle)$
$\mathrm{Reln}(a)$	$\forall x \in a \mathrm{Pair}(a)$
$\mathrm{Fun}(f)$	$\mathrm{Reln}(f) \wedge \forall a \in f \forall b \in f((pr_1(a) = pr_1(b)) \to (pr_2(a) = pr_2(b)))$
$a = \mathrm{dom}(r)$	$\mathrm{Reln}(r) \wedge \forall b \in r(pr_1(b) \in a) \wedge \forall x \in a \exists b \in r(pr_1(b) = x)$
$a = \mathrm{rng}(r)$	$\mathrm{Reln}(r) \wedge \forall b \in r(pr_2(b) \in a) \wedge \forall x \in a \exists b \in r(pr_2(b) = x)$
$y = f(x)$	$\mathrm{Fun}(f) \wedge (\langle x,y \rangle \in f)$
$a = \cup b$	$\forall x \in b \forall y \in x(y \in a) \wedge \forall y \in a \exists x \in b(y \in x)$

Конечные и счетные множества – первые примеры понятий, которые нельзя определить с помощью Δ_0-формул. Данные определения формально записываются в виде

$$\exists f \varphi(f,a),$$

где φ – Δ_0-формула. Формулы вида $\exists u \varphi(u)$, где φ – Δ_0-формула, называются Σ_1**-формулами**. Оказывается, что существует широкий класс формул, эквива-

лентных Σ_1-формулам, которые можно использовать в принципах выделения, ограниченности и замещения.

Определение 2.1.9. *Класс* **Σ-формул** *– это наименьший класс Y, содержащий все Δ_0-формулы, замкнутый относительно конъюнкции, дизъюнкции, ограниченной квантификации, и удовлетворяющий условию*

(i) если $\varphi \in Y$, то $\exists u\varphi \in Y$ для всех переменных u.

Класс **Π-формул** *– это наименьший класс Y', содержащий все Δ_0-формулы, замкнутый относительно конъюнкции, дизъюнкции, ограниченной квантификации, и удовлетворяющий условию*

(ii) если $\varphi \in Y$, то $\forall u\varphi \in Y$ для всех переменных u.

Например, формулы

$$\forall b \in a[b \text{ счетно}] \quad \text{и} \quad \forall x \in a \exists b[\mathrm{Tran}(b) \wedge x \in b]$$

– Σ-формулы, но не Σ_1-формулы. Очевидно, что отрицание Σ-формулы логически эквивалентно Π-формуле, и наоборот. В качестве следствия к теореме 1 мы покажем, что для любой Σ-формулы φ существует Σ_1-формула φ' такая, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'.$$

Если φ – произвольная формула, w – переменная, не встречающаяся в этой формуле, то через $\varphi^{(w)}$ обозначается результат ограничения всех неограниченных кванторов в φ переменной w, то есть в формуле φ все кванторы вида $\exists u$ заменяются на $\exists u \in w$, а все кванторы вида $\forall u$ – на $\forall u \in w$. Таким образом, $\varphi^{(w)}$ – Δ_0-формула. Если φ – Δ_0-формула, то очевидно $\varphi^{(w)} = \varphi$. Всюду далее запись $\varphi^{(w)}$ подразумевает, что w не встречается в формуле φ.

Лемма 1. *Для любой Σ-формулы φ следующие утверждения общезначимы (то есть истинны во всех системах вида $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$):*

(i) $(\varphi^{(u)} \wedge u \subseteq v) \to \varphi^{(v)}$,

(ii) $\varphi^{(u)} \to \varphi$,

где $u \subseteq v$ есть сокращение для формулы $\forall x[x \in u \to x \in v]$. (На самом делее, точнее говорить об общезначимости универсальных замыканий формул (i) и (ii)).

Доказательство. Ограничимся доказательством только утверждения (i). Доказательство проводится индукцией по построению Σ-формулы φ. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} =$

$(\mathfrak{M},A,E,\ldots)$, $x,y \in A \cup M$, и $x \subseteq y$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$. Если φ – Δ_0-формула, то очевидно $\varphi^{(x)} = \varphi^{(y)} = \varphi$. Если φ имеет вид $\varphi_1 * \varphi_2$, $* \in \{\wedge,\vee\}$, то по индукции из $\varphi_i^{(x)}$ следует $\varphi^{(y)}$ (i=1,2), поэтому из $\varphi^{(x)}$ следует $\varphi^{(y)}$. Аналогично для ограниченных кванторов.

Пусть теперь φ имеет вид $\exists w\varphi_1(w)$, и пусть $\varphi^{(x)}$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$, то есть существует $w \in x$, для которого $\varphi_1(w)^{(x)}$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$. По индукции $\varphi_1(w)^{(y)}$ верно в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$, а так как $x \subseteq y$, то верно и $\exists w \in y(\varphi_1(w)^{(y)})$, то есть $\varphi^{(y)}$. □

Теорема 1. *(принцип Σ-рефлексии) Для любой Σ-формулы φ*

$$\mathrm{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists a\varphi^{(a)}.$$

В частности, в теории KPU *любая Σ-формула эквивалентна Σ_1-формуле.*

Доказательство. По предыдущей лемме, формула $\exists a\varphi^{(a)} \to \varphi$ общезначима, поэтому аксимы KPU нужны лишь для доказательства $\varphi \to \exists a\varphi^{(a)}$. Доказательство проводится индукцией по построению φ, причем случай, когда φ – Δ_0-формула, тривиален. Рассмотрим три наиболее интересных случая, оставляя два других в качестве упражнения.

Случай 1. Формула φ имеет вид $\psi \wedge \theta$. По индукции можно считать, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \psi \leftrightarrow \exists a\psi^{(a)} \text{ и}$$

$$\mathrm{KPU} \vdash \theta \leftrightarrow \exists a\theta^{(a)}.$$

Покажем, что

$$\mathrm{KPU} \vdash (\psi \wedge \theta) \to \exists a[\psi \wedge \theta]^{(a)}.$$

Пусть имеет место $\psi \wedge \theta$. По индукции существуют a_1 и a_2 такие, что $\psi^{(a_1)}$ и $\theta^{(a_2)}$. Если теперь взять $a = a_1 \cup a_2$, то $\psi^{(a)}$ и $\theta^{(a)}$ имеют место по предыдущей лемме.

Случай 2. Формула φ имеет вид $\forall u \in v\psi(u)$. По индукции можно считать, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \psi \leftrightarrow \exists a\psi^{(a)}.$$

Пусть имеет место $\forall u \in v\psi(u)$. Покажем, что $\exists a\forall u \in v\psi(u)^{(a)}$. Для каждого $u \in v$ существует b такое, что $\psi(u)^{(b)}$, поэтому по принципу Δ_0-ограниченности существует a_0 такое, что $\forall u \in v\exists b \in a_0\psi(u)^{(b)}$. Положим $a = \cup a_0$. Тогда для любого $u \in v$ имеем $\exists b \subseteq a\psi(u)^{(b)}$, поэтому $\forall u \in v\psi(u)^{(a)}$ по предыдущей лемме.

Случай 3. Формула φ имеет вид $\exists u\psi(u)$. По индукции можно считать, что $\psi(u) \leftrightarrow \exists b\psi(u)^{(b)}$. Пусть имеет место $\exists u\psi(u)$. Нужно показать, что существует a, для которого $\exists u \in a\psi(u)^{(a)}$. Пусть имеет место $\psi(u)$; возьмем b, для которого имеет место $\psi(u)^{(b)}$, и положим $a = b \cup \{u\}$. Тогда $u \in a$ и $\psi(u)^{(a)}$ по предыдущей лемме.

□

В первоначальном определении допустимого множества, данном Платеком, принцип Σ-рефлексии постулируется в качестве аксиомы. Роль этого принципа очень велика, как мы увидим далее. Однако принцип Δ_0-ограниченности, во-первых, легче проверяется в конкретных системах, во-вторых, он больше похож на привычную аксиому замены из ZF.

Теорема 2. *(принцип Σ-ограниченности). Для каждой Σ-формулы φ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$, то существует множество b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$ и $\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y)$.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$. По принципу Σ-рефлексии существует множество c такое, что

$$(1) \qquad \forall x \in a \exists y \in c \varphi^{(c)}(x,y).$$

Пусть

$$(2) \qquad b = \{y \in c | \exists x \in a \varphi^{(c)}(x,y)\},$$

это множество существует по принципу Δ_0-выделения. Так как по доказанной ранее лемме $\varphi^{(c)}(x,y) \to \varphi(x,y)$, из (1) следует, что

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y),$$

а из (2) следует, что

$$\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y).$$

□

Теорема 3. *(признак Δ-выделения). Для любой Σ-формулы $\varphi(x)$ и любой Π-формулы $\psi(x)$ следующее утверждение является теоремой KPU: если $\forall x \in a(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$, то существует множество $b = \{x \in a | \varphi(x)\}$.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in a(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$. Тогда $\forall x \in a(\varphi(x) \vee \neg\psi(x))$. Так как последняя формула эквивалентна Σ-формуле, существует c такое, что

$\forall x \in a(\varphi^{(c)}(x) \vee \neg\psi^{(c)}(x))$. По принципу Δ_0-выделения, существует множество $b = \{x \in a | \varphi^{(c)}(x)\}$. Ясно, что для всякого $x \in b$ верно $\varphi(x)$. Если $x \in a$ и $\varphi(x)$, то $\psi(x)$, а значит и $\psi^{(c)}(x)$ (так как $\psi(x) \to \psi^{(c)}(x)$), поэтому $\varphi^{(c)}(x)$. Таким образом, $x \in b$. □

Теорема 4. *(принцип Σ-замещения). Для любой Σ-формулы $\varphi(x,y)$ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если $\forall x \in a \exists! y \varphi(x,y)$, то существует функция f, для которой $\mathrm{dom}(f) = a$ и $\forall x \in a \varphi(x, f(x))$.*

Доказательство. По принципу Σ-ограниченности существует множество b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$. По принципу Δ-выделения существует множество f такое, что

$$f = \{\langle x,y\rangle \in a \times b | \varphi(x,y)\} =$$

$$= \{\langle x,y\rangle \in a \times b | \neg\exists z(\varphi(x,z) \wedge y \neq z)\}.$$

□

Предыдущее утверждение на практике трудно использовать из-за квантора $\exists!$ в посылке. Часто бывает полезней

Теорема 5. *(принцип сильного Σ-замещения). Для каждой Σ-формулы $\varphi(x,y)$ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$, то существует функция f такая, что $\mathrm{dom}(f) = a$ и*

(i) $\forall x \in a\ f(x) \neq 0$;

(ii) $\forall x \in a \forall y \in f(x)\ \varphi(x,y)$.

Доказательство. По принципу Σ-ограниченности существует множество b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$ и $\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y)$. По принципу Σ-рефлексии существует w такое, что

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi^{(w)}(x,y) \text{ и } \forall y \in b \exists x \in a \varphi^{(w)}(x,y).$$

Для каждого конкретного $x \in a$ вследствие аксиом Δ_0-выделения и экстенсиональности существует единственное множество c_x такое, что

$$c_x = \{y \in b | \varphi^{(w)}(x,y)\}.$$

По принципу Σ-замещения существует функция f, для которой $\mathrm{dom}(f) = a$ и $f(x) = c_x$ для всех $x \in a$. □

Определение 2.1.10. *Пусть* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *–* Σ*-формула сигнатуры* σ^**, а* $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ *–* Π*-формула сигнатуры* σ^**, такие, что*

$$\mathrm{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Пусть R *– новый* n*-местный предикатный символ, определяемый предложением*

$$(\mathrm{R}) \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n[\mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n)].$$

Тогда R *называется символом* **Δ-отношения** *в* KPU*.*

Лемма 2. *Пусть теория* KPU *рассматривается в сигнатуре* σ^**, и пусть* R *– символ* Δ*-отношения в* KPU*. Через* KPU$'$ *обозначим теорию* KPU *для сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$ *вместе с аксиомой (R).*

(i) Для любой формулы $\theta(\bar{x})$ *сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$ *существует формула* $\theta_0(\bar{x})$ *сигнатуры* σ^* *такая, что в* KPU*+(R) выводима*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}).$$

Кроме того, если θ *–* Σ*-формула сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$*, то* θ_0 *–* Σ*-формула сигнатуры* σ^**.*

(ii) Для любой Δ_0*-формулы* $\theta(\bar{x})$ *сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{R})$ *существуют* Σ*-* *и* Π*-формулы* $\theta_0(\bar{x})$ *и* $\theta_1(\bar{x})$ *сигнатуры* σ^* *такие, что в* KPU*+(R) выводимы*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}) \text{ и } \theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_1(\bar{x}).$$

(iii) KPU$'$ *является консервативным расширением* KPU*, то есть для любого предложения* θ *сигнатуры* σ^*

$$\mathrm{KPU}' \vdash \theta \iff \mathrm{KPU} \vdash \theta.$$

Определение 2.1.11. *Пусть* $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ *–* Σ*-формула сигнатуры* σ^**, для которой*

$$\mathrm{KPU} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y \varphi(x_1,\ldots,x_n,y).$$

Пусть F *– новый* n*-местный функциональный символ, определяемый предложением*

$$(\mathrm{F}) \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y[\mathrm{F}(x_1,\ldots,x_n) = y \leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n,y)].$$

Тогда F *называется символом* **Σ-функции** *в* KPU*.*

Лемма 3. *Пусть теория* KPU*рассматривается в сигнатуре* σ^**, и пусть* F *– символ* Σ*-функции в* KPU*. Через* KPU$'$ *обозначим теорию* KPU*для сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{F})$ *вместе с аксиомой (F).*

(i) Для любой формулы $\theta(\bar{x})$ *сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{F})$ *существует формула* $\theta_0(\bar{x})$ *сигнатуры* σ^* *такая, что в* KPU*+(F) выводима*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}).$$

Кроме того, если θ *–* Σ*-формула сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{F})$*, то* θ_0 *–* Σ*-формула сигнатуры* σ^**.*

(ii) Для любой Δ_0*-формулы* $\theta(\bar{x})$ *сигнатуры* $\sigma^*(\mathrm{F})$ *существуют* Σ*-* *и* Π*-формулы* $\theta_0(\bar{x})$ *и* $\theta_1(\bar{x})$ *сигнатуры* σ^* *такие, что в* KPU*+(F) выводимы*

$$\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_0(\bar{x}) \text{ и } \theta(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_1(\bar{x}).$$

(iii) KPU$'$ *является консервативным расширением* KPU*.*

2.2 Σ-рекурсия.

Теорема 6. *(Существование транзитивного замыкания). В* KPU*можно определить символ* Σ*-функции* TC *так, что следующие утверждения являются теоремами* KPU*: для любого* x $\mathrm{TC}(x)$ *– транзитивное множество,* $x \subseteq \mathrm{TC}(x)$*, и для любого транзитивного множества* a *из* $x \subseteq a$ *следует* $\mathrm{TC}(x) \subseteq a$*.*

Доказательство. Доказательство проводится *индукцией относительно* $\in$: для любой формулы φ аксиому фундированности можно записать так:

$$\forall x(\forall y \in x \varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x \varphi(x).$$

Поэтому для того, чтобы установить $\forall x \varphi(x)$, достаточно показать, что для любого x $\varphi(x)$ вытекает из справедливости $\varphi(y)$ для всех $y \in x$.

Если бы существование ординала ω можно было доказать в KPU, с его помощью можно было бы определить

$$\mathrm{TC}(a) = a \cup (\cup a) \cup (\cup \cup a) \cup \ldots.$$

Для понимания доказательства данное замечание следует иметь в виду. Определим предикат $Q(x,a)$ как

$$x \subseteq a \wedge \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall b(x \subseteq b \wedge \mathrm{Tran}(b) \to a \subseteq b).$$

Предикат Q определяется Π-формулой, и $Q(x,a)$ означает, что a – наименьшее транзитивное множество, содержащее x. Ясно, что $Q(x,a) \wedge Q(x,a') \to a = a'$.

Далее, пусть $P(x,a)$ – Σ-предикат, определяемый как

$$x \text{ – праэлемент } \wedge a = 0, \text{ или}$$

$$x \text{ – множество, } x \subseteq a, \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall z \in a \exists f[\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f)$$

$$\text{– натуральное число } n+1 = \{0,\ldots,n\} \wedge z = f(0) \in f(1) \in \ldots \in f(n) \in x.$$

(Многоточие $\ldots$ легко формализуемо, поэтому данное определение не содержит "скрытой"рекурсии.) Простой индукцией по натуральным числам можно показать, что $P(x,a) \to Q(x,a)$. Отсюда, в частности, $P(x,a) \wedge P(x,a') \to a = a'$.

Если бы для каждого x существовало множество a такое, что $P(x,a)$, то Σ-функция TC определялась бы условием

$$\mathrm{TC}(x) = a \iff P(x,a)$$

и $\mathrm{TC}(x)$ действительно было бы транзитивным замыканием x. Итак, нужно установить, что $\forall x \exists a P(x,a)$. Если x – праэлемент, то $a = 0$, поэтому установим $\forall b \exists a P(b,a)$ индукцией относительно $\in$. Для данного b будем считать, что

$$\forall x \in b \exists c P(x,c),$$

а значит и

$$\forall x \in b \exists! c P(x,c).$$

По принципу Σ-замещения существует функция g, для которой $\mathrm{dom}(g) = b$ и $P(x,g(x))$ для всех $x \in b$. Положим

$$a = b \cup (\cup \mathrm{rng}(g)) = b \cup (\cup_{x \in b} g(x)).$$

Ясно, что $b \subseteq a$, и, кроме того, нетрудно убедиться, что a транзитивно. Проверим последнее условие в определении $P(b,a)$. Пусть $z \in a$. Если $z \in b$, положим $f = \{\langle 0,z\rangle\}$. Пусть теперь $z \in \cup \mathrm{rng}(g)$, то есть $z \in g(x)$ для некоторого $x \in b$. Тогда существует функция h, для которой $\mathrm{dom}(h) = n+1$, $h(0) = z$,

$h(i) \in h(i+1)$, и $h(n) \in x$ (так как $P(x,g(x))$). Положим $f = h \cup \{\langle n+1,x\rangle\}$. Тогда $f(0) = z \in f(1) \in f(2) \in \ldots \in f(n+1) = x \in b$, а значит $P(a,b)$. □

Следующая теорема позволяет усилить метод доказательства индукцией относительно $\in$.

Теорема 7. *(Доказательство индукцией по TC.) Для любой формулы $\varphi(x)$ следующее утверждение является теоремой* KPU*: если для любого x из $\forall y \in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)$ следует $\varphi(x)$, то $\forall x\varphi(x)$.*

Доказательство. Покажем, что из данной посылки следует, что $\forall x\forall y \in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)$. В этом случае верно и $\forall x\varphi(x)$, так как $x \in \mathrm{TC}(\{x\})$. Можно предположить, что для всех $z \in x$

$$(1) \qquad \forall y \in \mathrm{TC}(z)\varphi(y),$$

доказывая индукцией по $\in$, что $\forall y \in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)$. Отсюда ввиду посылки следует, что $\varphi(z)$, то есть имеет место $\varphi(y)$ для всех $y \in x \cup (\cup\{\mathrm{TC}(z)|z \in x\}) = \mathrm{TC}(x)$. □

Следующая теорема играет центральную роль в дальнейшем изложении.

Теорема 8. *(Определение с помощью Σ-рекурсии.) Пусть G – символ $n+2$-местной Σ-функции, $n \geqslant 0$. Можно определить новый символ Σ-функции F, для которого следующее утверждение будет теоремой* KPU$+(F)$ *(где (F) – аксиома, определяющая F): для всех $x_1,\ldots,x_n,y$*

$$(i) \qquad F(x_1,\ldots,x_n,y) = G(x_1,\ldots,x_n,y,\{\langle z,F(x_1,\ldots,x_n,z)\rangle|z \in \mathrm{TC}(y)\}).$$

Прежде чем переходить к довольно длинному доказательству теоремы 8, приведем несколько полезных следствий. Например, (i) можно заменить на

$$F(x_1,\ldots,x_n,y) = G(x_1,\ldots,x_n,y,\{\langle z,F(x_1,\ldots,x_n,z)\rangle|z \in y\}).$$

(Возьмем $G'(\bar{x},y,f) = G(\bar{x},y,f \restriction y)$ и применим теорему 8.) Можно также по двум функциям G и H определить

$$F(x_1,\ldots,x_n,p) = H(x_1,\ldots,x_n,p),$$

$$F(x_1,\ldots,x_n,a) = G(x_1,\ldots,x_n,a,\{\langle z,F(x_1,\ldots,x_n,z)\rangle|z \in \mathrm{TC}(a)\}).$$

Обычно именно в таком виде определения с помощью Σ-рекурсии будут даваться в дальнейшем.

Доказательство. Допустив, что функция F уже определена, нужно установить, что для всех $x_1,\ldots,x_n,y$ существует f такое, что

$$(1) \qquad f \text{ – функция } \wedge \operatorname{dom}(f) = \mathrm{TC}(y),$$

$$(2) \qquad \forall w \in \operatorname{dom}(f)\ (f(w) = F(x_1,\ldots,x_n,w)), \text{ и}$$

$$(3) \qquad F(x_1,\ldots,x_n,y) = G(x_1,\ldots,x_n,y,f).$$

Эти замечания дают идею нужного определения F. Для удобства обозначений будем считать, что $n = 1$. Пусть $P(x,y,z,f)$ – Σ-предикат, означающий, что

$$f \text{ – функция } \wedge \operatorname{dom}(f) = \mathrm{TC}(y)$$

$$\wedge \forall w \in \mathrm{TC}(y)\ (f(w) = G(x,w,f \restriction \mathrm{TC}(w)))$$

$$\wedge z = G(x,y,f).$$

Мы докажем, что

$$(4) \qquad \forall x \forall y \exists! z \exists f P(x,y,z,f);$$

и ввиду этого сможем определить символ Σ-функции f так:

$$(5) \qquad F(x,y) = z \iff \exists f P(x,y,z,f)$$

(ясно, что правая часть (5) является Σ-формулой). Для доказательства (4) достаточно установить, что

$$(6) \qquad P(x,y,z,f) \wedge P(x,y,z',f') \to z = z' \wedge f = f', \text{ и}$$

$$(7) \qquad \forall y \exists z \exists f P(x,y,z,f).$$

Докажем (6) и (7) индукцией по $\mathrm{TC}(y)$. Будем использовать при доказательстве свойства (8) и (9), вытекающие из определения P:

$$(8) \qquad P(x,y,z,f) \to z = G(x,y,f);$$

$$(9) \qquad P(x,y,z,f) \wedge w \in \mathrm{TC}(y) \to P(x,w,f(w), f \restriction \mathrm{TC}(w)).$$

Итак, докажем (6) индукцией по $\mathrm{TC}(y)$. Предположим, что для $w \in \mathrm{TC}(y)$ существует не более одного u и не более одного g, для которых $P(x,w,u,g)$, и покажем, что $P(x,y,z,f) \wedge P(x,y,z',f') \to z = z' \wedge f = f'$. Так как $z = G(x,y,f)$ и $z' = G(x,y,f')$, достаточно показать, что $f = f'$. Но f и f' – функции с одинаковой областью определения $\mathrm{TC}(y)$, поэтому достаточно показать, что $f(w) =$

$f'(w)$ для всех $w \in \mathrm{TC}(y)$. Но по (9) имеют место $P(x,w,f(w),f \restriction \mathrm{TC}(w))$ и $P(x,w,f'(w),f' \restriction \mathrm{TC}(w))$, поэтому $f(w) = f'(w)$ по индукционному предположению. Осталось установить (7), и здесь как раз используется Δ_0-ограниченность в форме принципа Σ-замещения. Покажем, что $\exists z \exists f P(x,y,z,f)$, предполагая, индукцией относительно TC, что $\forall w \in \mathrm{TC}(y) \exists u \exists g P(x,w,u,g)$, а значит, вследствие (6), существуют единственные u_w,g_w, для которых $P(x,w,u_w,g_w)$. По принципу Σ-замещения существует функция

$$f = \{\langle w,u_w\rangle | w \in \mathrm{TC}(y)\}.$$

Для доказательства (7) достаточно установить, что $P(x,y,G(x,y,f),f)$, а это в свою очередь следует из того, что $\forall z \in \mathrm{TC}(y)(f(z) = G(x,z,f \restriction \mathrm{TC}(z)))$. Так как $P(x,z,u_z,g_z)$, то $f(z) = u_z = G(x,y,g_z)$. Поэтому остается только показать, что $f \restriction \mathrm{TC}(z) = g_z$. Для $w \in \mathrm{dom}(g_z) = \mathrm{TC}(z)$ из (9) следует, что $P(x,w,g_z(w),g_z \restriction \mathrm{TC}(w))$. Отсюда по (6) получаем, что $g_z(w) = u_w = f(w)$, а значит $g_z = f \restriction \mathrm{TC}(z)$, что и требовалось. Таким образом, (7) доказано. Теперь можно определить F с помощью (5) и приступить к доказательству соотношения (i) из формулировки теоремы. Согласно (5),

$$F(x,y) = G(x,y,f), \text{ если } P(x,y,G(x,y,f),f),$$

поэтому остается показать, что

$$f = \{\langle z,F(x,z)\rangle | z \in \mathrm{TC}(y)\}.$$

Для $z \in \mathrm{TC}(y)$ из (9) следует, что $P(x,z,f(z),f \restriction \mathrm{TC}(z))$, поэтому из (5) получаем $F(x,z) = f(z)$, что и требовалось. □

Упражнение 5. *Покажите, что если функции F_1,F_2 обе удовлетворяют условию (i) теоремы 8 при всех $x_1,\ldots,x_n,y$, то $F_1(x_1,\ldots,x_n,y) = F_2(x_1,\ldots,x_n,y)$ при всех $x_1,\ldots,x_n,y$.*

Для применений теоремы 8 обычно нет необходимости в явном виде определять функции G и H.

Следствие 1. *(Δ-предикаты, определенные с помощью рекурсии). Пусть P и Q – соответственно $n+1$- и $n+2$-местные Δ-предикаты, $n \geqslant 0$. Тогда можно определить Δ-предикат* R *так, что следующие утверждения доказуемы в соответствующем расширении* KPU*:*

$$(i) \quad \mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n,p) \leftrightarrow P(x_1,\ldots,x_n,p);$$

$$(ii)\quad \mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n,a) \leftrightarrow Q(x_1,\ldots,x_n,a,\{b \in \mathrm{TC}(a) | \mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n,b)\}).$$

Доказательство. Пусть G и H – характеристические функции предикатов P и Q соответственно. Используя Σ-рекурсию, определим F – характеристическую функцию для R, тогда

$$\mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n,y) \leftrightarrow F(x_1,\ldots,x_n,y) = 1$$

$$\leftrightarrow F(x_1,\ldots,x_n,y) \neq 0,$$

поэтому R будет Δ-предикатом. □

Примеры Σ-функций, определяемых с помощью Σ-рекурсии:
1) функция rank, сопоставляющая произвольному элементу KPU-модели ординал, который называется *рангом* этого элемента:

$\mathrm{rank}(p) = 0,$

$\mathrm{rank}(a) = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \,|\, x \in a\};$

2) функция sp, сопоставляющая произвольному элементу KPU-модели множество праэлементов, которое называется *носителем* этого элемента:

$\mathrm{sp}(p) = \{p\},$

$\mathrm{sp}(a) = \cup\{\mathrm{sp}(x) \,|\, x \in a\};$

3) функции $+$ и $\cdot$, сопоставляющие произвольной паре ординалов KPU-модели ординалы, которые называются, соответственно, их *суммой* и *произведением*:

$\alpha + \beta = \alpha \cup \sup\{(\alpha + \gamma) + 1 \,|\, \gamma < \beta\},$

$\alpha \cdot \beta = \sup\{(\alpha \cdot \gamma) + \alpha \,|\, \gamma < \beta\}.$

2.3 Устойчивые и абсолютные предикаты.

В этом параграфе обсуждаются причины, по которым аксиомы выделения и ограниченности в теории KPU постулируются только для Δ_0-формул. Обоснование такого выбора использует одно из центральных понятий данного курса – понятие абсолютности.

Напомним процесс задания теоретико-множественого универсума $\mathbb{V}_M$ (см. начало следующего параграфа). Множества добавляются в $\mathbb{V}_M$ по шагам, и принцип выделения регламентирует возможности для построения множеств на

каждом шаге. Суть принципа Δ_0-выделения состоит в том, что множество $b = \{x \in a | \varphi(x,y)\}$ может быть образовано на шаге α только в том случае, когда уже построены a и y, и значение $\varphi(x,y)$ полностью (абсолютно) определяется только с использованием множеств, построенных до шага α. Другими словами, на более позднем шаге β множество $\{x \in a | \varphi(x,y)\}$ должно совпадать с b, несмотря на то, что теперь имеется больше множеств, которые могли бы изменить значение $\varphi(x,y)$, будь там неограниченные кванторы.

Аналогичные рассуждения и в случае принципа ограниченнности. Предположим, что в процессе построения $\mathbb{V}_M$ оказалось, что $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$. Нужно, чтобы на следующем щаге можно было построить множество b, для которого $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$ было справедливо на этом и всех последующих шагах. Но что если уже появление самого множества b приведет к нарушению $\varphi(x,y)$ для некоторого $x \in a$? Такое может случиться, если φ содержит неограниченные кванторы. Исхдя из этих соображений, принцип ограниченности должен применяться только для формул $\varphi(x,y)$, которые не могут менять значения при добавлении новых элементов в универсум множеств. Иными словами, формула $\varphi(x,y)$ должна быть абсолютной.

Определение 2.3.1. *Пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, E, \ldots)$ – *алгебраическая система сигнатуры* σ^*. *Для любого* $a \in A$ *пусть*

$$a_E = \{y \in M \cup A | yEa\}.$$

Отметим, что значение a_E зависит как от a, так и от $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$. Грубо говоря, a_E – множество, которым a "видится"из $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$.

Стандартное понятие подсистемы естественным образом переносится и на системы сигнатуры σ^*. Будем говорить, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ – **подсистема** $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$, и обозначать $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, E, \ldots)$, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{N}, B, E', \ldots)$, если $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$ (как системы сигнатуры σ), $A \subseteq B$, и интерпретации $E, \ldots$ являются ограничениями на $M \cup A$ соответствующих интерпретаций $E', \ldots$.

Однако данное определение нельзя считать естественным при изучении моделей теории множеств. Действительно, пусть $a \in A$. Проблема в том, что множество a как элемент $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ и как элемент $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ может "раздвоиться". Условие $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ гарантирует лишь, что $a_E \subseteq a_{E'}$, не исключая возможности, что для некоторого $x \in B \setminus A$ верно $x \in a_{E'} \setminus a_E$. Безусловно, такую ситуацию нельзя считать нормальной (поскольку множество должно полностью определяться

своими элементами), поэтому мы введем более сильное понятие подсистемы, отвечающее требованиям теории множеств.

Определение 2.3.2. *Пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M},A,E,\ldots)$ *и* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{N},B,E',\ldots)$ *– алгебраические системы сигнатуры* σ^**. Система* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ *называется* **концевой подсистемой** *системы* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *(обозн.* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*), если* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *и* $a_E = a_{E'}$ *для всех* $a \in A$*.*

Если A – транзитивное множество, $B \supseteq A$, $E = \in \cap A^2$ и $E' = \in \cap B^2$, то
$$(\mathfrak{M},A,E) \leqslant_{end} (\mathfrak{M},B,E'),$$

так как для любого $a \in A$ имеем $a_E = a_{E'} = a$. Если же A не является транзитивным, то это, вообще говоря, не верно.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}},\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *– алгебраические системы сигнатуры* σ^**, и пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*. Если* φ *–* Σ*-формула сигнатуры* σ^**, то для любых* $x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ *из* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *следует* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)$*.*

Определение 2.3.3. *Формула* $\varphi(u_1,\ldots,u_n)$ *сигнатуры* σ^* *называется* **устойчивой** *относительно теории* T *сигнатуры* σ^**, если для любых моделей* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*,* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$ *теории* T *с условием* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*, и для любых* $x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$
$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Формула φ *называется* **абсолютной** *относительно теории* T*, если для любых* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$*,* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}$*,* $x_1,\ldots,x_n$ *с теми же условиями*
$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n) \iff \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Следствие 2. *Любая* Σ*-формула является устойчивой, и любая* Δ_0*-формула является абсолютной (относительно любой теории).*

Доказательство. По предыдущей лемме любая Σ-формула является устойчивой, поэтому любая Δ_0-формула также является устойчивой. Кроме того, класс Δ_0-формул замкнут относительно отрицания, и произвольная формула φ абсолютна тогда и только тогда, когда φ и $\neg\varphi$ устойчивы. □

Теорема 9. *Для любой теории* T *сигнатуры* σ^* *верно следующее: если* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *– устойчивая относительно теории* T *формула, то для некоторой* Σ*-формулы* $\psi(x_1,\ldots,x_n)$
$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n[\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)].$$

Как следствие, если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *– абсолютная относительно теории* T *формула, то для некоторой* Σ*-формулы* $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ *и некоторой* Π*-формулы* $\theta(x_1,\ldots,x_n)$
$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n[(\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)) \wedge (\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \theta(x_1,\ldots,x_n))]$.

2.4 Допустимые ординалы и допустимые множества.

Для удобства зафиксируем максимально большой универсум множеств над произвольным семейством праэлементов M. Определим по рекурсии

$$V_M(0) = 0,$$

$$V_M(\alpha+1) = P(M \cup V_M(\alpha)),$$

$$V_M(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_M(\alpha), \text{ если } \lambda \text{ предельный},$$

$$\mathbb{V}_M = \bigcup_{\alpha} V_M(\alpha),$$

где последнее объединение проводится по всем ординалам α. (В этом определении на первом шаге $V_M(0) = 0$, а не $V_M(0) = M$ из тех соображений, что $\mathbb{V}_M$ должно быть семейством *множеств* над M). Будем использовать символ $\in_M$ для отношения принадлежности на $\mathbb{V}_M$, опуская нижний индекс в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям. Если $\mathfrak{M} = \langle M,\ldots,\rangle$, для $\mathbb{V}_M$ будем также использовать обозначение $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Если M пусто, будем $V_M(\alpha)$ обозначать через $V(\alpha)$, а $\mathbb{V}_M$ – через $\mathbb{V}$.

Определение 2.4.1. *Пусть* $\sigma^* = \sigma \cup \{\in,\ldots\}$, *и пусть* $\mathfrak{M}$ *– алгебраическая система сигнатуры* σ. **Допустимым множеством над** $\mathfrak{M}$ *называется модель* KPU $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ *вида*

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in,\ldots),$$

где $M \cup A$ *транзитивно в* $\mathbb{V}_M$, $a \in$ *– ограничение* $\in_M$ *на* $M \cup A$. *Допустимое множество* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ *называется* **допустимым с** $\mathfrak{M}$, *если* $M \in A$, *то есть* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \models$ KPU$^+$.

Для обозначения допустимых множеств будем использовать обозначения $\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$,$\mathbb{C}$. Если необходимо использовать систему $\mathfrak{M}$, лежащую в основе допустимого множества, будем использовать обозначение $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$.

Итак, допустимые множества – это модели KPU, носители которых являются транзитивными частями $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, а символ принадлежности интерпретируется стандартным образом как $\in_M$. Отметим, что хотя интерпретация символа принадлежности должна быть стандартной, предыдущее определение не требует этого для остальных символов из ... в $\sigma \cup \{\in, \ldots\}$. Например, если $\sigma^* = \sigma \cup \{\in, \mathrm{P}\}$ и в допустимом множестве $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in, P)$ выполнена аксиома Power, то вовсе не обязательно, что $P(a)$ на самом деле является множеством-степенью для a, оно вполне может быть некоторой маленькой частью настоящего множества-степени для a.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in_M, \ldots)$, $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{N}, B, \in_N, \ldots)$ – *допустимые множества, и* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant \mathbb{B}_{\mathfrak{N}}$. *Тогда* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathbb{B}_{\mathfrak{N}}$.

Доказательство. Если $a \in A$, то $a_{\in_M} = a = a_{\in_N}$, так как $M \cup A$ транзитивно в $\mathbb{V}_M$. □

Данная лемма верна и для случая $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}} = \mathbb{V}_{\mathfrak{N}}$, хотя $\mathbb{V}_{\mathfrak{N}}$ и не является алгебраической системой. Эта очевидная лемма имеет очень важное значение: вместе с результатами предыдущего раздела она гарантирует, что Δ-предикаты и Σ-функции KPU имеют тот же смысл, какой они имеют в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$.

Пример. Рассмотрим Σ-функции TC и P (множество-степень), и в допустимом множестве $\mathbb{A} = (\mathfrak{M}, A, \in, P)$ выполнена аксиома Power: $\forall x \forall y [x \in \mathrm{P}(y) \leftrightarrow (S(x) \wedge x \subseteq y)]$. Для каждого $a \in A$ для значений $\mathrm{TC}(a)$ и $\mathrm{P}(a)$ возможны две различные интерпретации. Для TC пусть b_0 и b_1 – множества, для которых

$$\mathbb{A} \models \mathrm{TC}(a) = b_0 \text{ и } \mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \models \mathrm{TC}(a) = b_1.$$

Для P пусть c_0 и c_1 – множества, для которых

$$\mathbb{A} \models \mathrm{P}(a) = c_0 \text{ и } \mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \models \mathrm{P}(a) = c_1.$$

Так как $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ и TC – Σ-функция в KPU, то $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \models \mathrm{TC}(a) = b_0$, и значит $b_0 = b_1$. Поэтому b_0 действительно будет транзитивным замыканием a, то есть

$$b_0 = \bigcap \{b | b \text{ транзитивно}, b \subseteq a\}.$$

Для P, однако, это не так. Поскольку $x \subseteq y$ – Δ_0-отношение, то $c_0 \subseteq c_1$, и это все, что можно утверждать. Как правило, c_0 будет собственным подмножеством c_1 – настоящего множества-степени для a.

Определение 2.4.2. *Множество $a \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ называется* **чистым множеством**, *если его носитель пуст, то есть* $\mathrm{TC}(a) \cap M = 0$. *(Например, все ординалы являются чистыми множествами.) Допустимое множество называется* **чистым допустимым множеством**, *если оно не содержит праэлементов, то есть является моделью теории KP. Чистые допустимые множества будут обозначаться $\mathbb{A} = (A, \in, \ldots)$, если при этом $\sigma^* = \{\in\}$, то вместо $\mathbb{A} = (A, \in)$ будем просто писать A.*

Теорема 10. *Пусть $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in)$ – допустимое множество, и пусть $A_0 = \{a \in A | a$ - чистое множество$\}$. Тогда A_0 – чистое допустимое множество, которое называется* **чистой частью** $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. По лемме 5 имеем $A_0 \leqslant_{end} \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \leqslant_{end} \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Вследствие абсолютности, $sp(a)$ имеет одинаковое значение в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ и $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Проверим истинность аксиом Δ_0-ограниченности, оставив проверку остальных аксиом KPU в качестве упражнения. Пусть $a,b \in A_0$, и пусть в A_0 выполнена формула $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y,b)$, где φ – Δ_0-формула. Если формула $\varphi(x,y,b)$ истинна в A_0, то она истинна и в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ вследствие абсолютности, поэтому в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ истинна формула

$$\forall x \in a \exists y [sp(y) = 0 \wedge \varphi(x,y,b)].$$

По принципу Σ-ограниченности, в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ существует множество c, для которого

$$(1) \quad \forall x \in a \exists y \in c [sp(y) = 0 \wedge \varphi(x,y,b)] \text{ и}$$

$$(2) \quad \forall y \in c \exists x \in a [sp(y) = 0 \wedge \varphi(x,y,b)].$$

Из (2) следует, что $sp(c) = 0$, так как $sp(c) = \cup\{sp(y) | y \in c\}$, поэтому $c \in A_0$. Но тогда (1) – Δ_0-формула с параметрами из A_0, которая истинна в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. Вследствие абсолютности, (1) истинно и в A_0. □

Определение 2.4.3. Ординалом $o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ *допустимого множества $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ называется наименьший ординал, не лежащий в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, или, что то же самое, порядковый тип ординалов из $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. Ординал α называется* **допустимым**, *если $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ для некторой системы $\mathfrak{M}$ и некоторого допустимого множества*

$\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. *Ординал* α *называется* $\mathfrak{M}$**-допустимым**, *если* $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ *для некоторого допустимого множества* $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ *с условием* $M \in A$.

Следствие 3. *Ординал* α *является допустимым, если* $\alpha = o(A)$ *для некоторого чистого допустимого множества* A.

Доказательство. Если $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$ и $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ – допустимое множество, то $\alpha = o(A_0)$, где A_0 – чистая часть $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. □

Какие ординалы являются допустимыми? Далее будет показано, что ω – допустимый ординал. Из того, что арифметические операции над ординалами определяются с помощью Σ-рекурсии, следует, что любой допустимый ординал α должен быть замкнут относительно операций взятия последователя, сложения, умножения и возведения в степень. Поэтому наименьший допустимый ординал $\alpha > \omega$ должен быть больше, чем

$$\omega + \omega, \omega \cdot \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \epsilon_0, \ldots$$

(операции здесь рассматриваются для ординальной (а не кардинальной) арифметики). Далее будет показано, что каждый бесконечный кардинал κ является допустимым, и что для любого $\beta < \kappa$ существует κ допустимых ординалов между β и κ (и значит κ является пределом допустимых ординалов).

Определение 2.4.4. *Пусть* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in, \ldots)$. *В дальнейшем часто будет использоваться следующие терминология и обозначения. Объект* x *называется* **элементом** $\mathbb{A}$ *(обозн.* $x \in \mathbb{A}$*), если* $x \in A \cup M$. **Отношением на** $\mathbb{A}$ *будем называть отношение на* $A \cup M$. n*-местное отношение* S *на* $\mathbb{A}$ *называется* Σ_1**-отношением на** $\mathbb{A}$, *если для некоторой* Σ_1*-формулы* φ, *возможно, с параметрами из* $\mathbb{A}$

$$(1) \qquad S(x_1, \ldots, x_n) \iff \mathbb{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A}$. *Отношение* S *называется* Π_1**-отношением на** $\mathbb{A}$, *если (1) справедливо для некоторой* Π_1*-формулы* φ, *и* Δ_1**-отношением на** $\mathbb{A}$, *если* S *является одновременно* Σ_1*- и* Π_1*-отношением на* $\mathbb{A}$. *Функция* F *называется* **функцией на** $\mathbb{A}$, *если ее область определения является подмножеством* $(M \cup A)^n$ *для некоторого* n, *а областью значений – подмножество* $M \cup A$. *Если при этом график* F *является* Σ_1*-отношением на* $\mathbb{A}$, *то* F *называется* Σ_1**-функцией на** $\mathbb{A}$.

Предложение 2.4.1. *Пусть* $\mathbb{A}$ *– допустимое множество.*

(i) Если $a \in \mathbb{A}$*, то* a *–* Δ_1*-отношение на* $\mathbb{A}$*.*

(ii) Если $x \in \mathbb{A}$*, то* $\{x\}$ *–* Δ_1*-отношение на* $\mathbb{A}$*.*

(iii) Класс Σ_1*-отношений на* $\mathbb{A}$ *замкнут относительно* $\wedge, \vee, \exists x \in a, \forall x \in a, \exists x$*.*

Множество $a \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ называется **наследственно конечным**, если $TC(a)$ – конечное множество. Пусть $\mathbb{HF}(M)$ – множество наследственно конечных множеств из $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Можно определить это множество более конструктивно следующим образом:

$$HF_0(M) = P_{fin}(M);$$

$$HF_{n+1}(M) = P_{fin}(HF_n(M) \cup M) \cup HF_n(M);$$

$$\mathbb{HF}(M) = \bigcup_{n \in \omega} HF_n(M),$$

где $P_{fin}(X)$ – семейство всех конечных подмножеств множества X.

Теорема 11. $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *является наименьшим допустимым множеством над* $\mathfrak{M}$*. Более строго, пусть* $\sigma^* = \sigma \cup \{\in, \ldots\}$*, и пусть* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, \mathbb{HF}(M), \in, \ldots)$ *– алгебраическая система сигнатуры* σ^**. Тогда*

(i) $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *– допустимое множество.*

(ii) Если $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, A, \in, \ldots)$ *– допустимое множество, то* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$*.*

Символом $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ будет обозначаться как множество так и соответствующая алгебраическая система, однако из контекста всегда ясно, что именно имеется в виду.

Доказательство. Пункт (ii) очевиден, так как A должно быть замкнуто относительно взятия пары и объединения, а значит индукцией можно показать, что для всех n $HF_n(M) \subseteq A$. Покажем, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ – допустимое множество. Так как $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ транзитивно в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ верны аксиомы экстенсиональности и фундированности. Отметим, что для любого n $HF_n(M)$ также является транзитивным. Если $x, y \in HF_n(M)$, то $\{x, y\} \in HF_{n+1}(M)$, а значит, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ выполняется также аксиома пары. Если $a \in HF_n(M)$, то $\cup a$ – конечное подмножество $HF_n(M)$, а значит, является элементом $HF_{n+1}(M)$, поэтому в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлива аксиома объединения. Если $a \subseteq b \in HF_n(M)$, то

$a \in HF_n(M)$, поскольку любое подмножество конечного множества конечно, поэтому в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлив принцип (полного) выделения, а значит верна и аксима Δ_0-выделения. Аналогично, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлив принцип (полной) ограниченности, так как если $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ имеет, например, k элементов $x_1, \ldots, x_k$, и для каждого x_i существует y_i такое, что $\varphi(x_i, y_i)$, то все элементы $y_1, \ldots, y_k$ содержатся в некотором $HF_n(M)$, а значит $\{y_1, \ldots, y_k\} \in HF_{n+1}(M)$. □

Следствие 4. *Наименьшим допустимым множеством является*

$$\mathbb{HF} = \{a \in \mathbb{V} | a \text{ - чистое наследственно конечное множество}\}.$$

Наименьшим допустимым ординалом является ω.

Доказательство. $\mathbb{HF}$ – чистая часть для любого $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, и $o(\mathbb{HF}) = \omega$. □

Именно с $\mathbb{HF}$ начинается исследование допустимых множеств. Теория допустимых множеств возникла из попыток обобщения теории рекурсии на натуральных числах, и, как мы сейчас покажем, теория рекурсии на натуральных числах эквивалентна изучению Σ_1- и Δ_1-определимости в $\mathbb{HF}$.

Теорема 12. *Пусть S – отношение на множестве натуральных чисел.*

(i) S р.п. $\iff$ S – Σ_1-отношение на $\mathbb{HF}$.

(ii) S рекурсивно $\iff$ S – Δ_1-отношение на $\mathbb{HF}$.

Возможны релятивизованные версии этой теоремы (которые доказываются аналогично): например, S рекурсивно относительно f тогда и только тогда, когда S – Δ_1-отношение на $(\mathbb{HF}, \in, f)$ (последнее является допустимым множеством по теореме 11)

Доказательство. Предполагается, что читатель знаком с основами классической теории рекурсии.

($\Rightarrow$). Заметим, что из (i) следует (ii), так как S рекурсивно тогда и только тогда, когда S и $\neg S$ рекурсивно перечислимы. Тем не менее, докажем сначала импликацию ($\Rightarrow$) из (ii), чтобы затем воспользоваться этим при доказательстве соответствующей импликации в (i). Очевидно, достаточно доказать, что любая общерекурсивная функция f (на натуральных числах) продолжается до Σ_1-функции $\hat{f}$ на $\mathbb{HF}$ с помощью определения

$$\hat{f}(x) = f(x), \text{ если } x \in \omega$$

$$= 0, \text{ если } x \notin \omega.$$

Для этого рассмотрим одно из эквивалентных определений класса рекурсивных функций, в котором функции образуются, начиная с базисных, при помощи некоторых операторов (переводящих всюду определенные функции во всюду определенные). Возьмем определение из монографии Дж. Шенфилда "Математическая логика"(хотя выбор определения практически не влияет на сложность доказательства). Итак, класс (всюду определенных) рекурсивных функций – это наименьший класс, содержащий $+, \cdot, \chi_<$ (характеристическую функцию отношения $<$), $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$(проектирующие функции), замкнутый относительно композиции и относительно μ-оператора (если G – рекурсивная функция, такая, что $\forall \bar{n} \exists m[G(\bar{n},m) = 0]$, и для всех $\bar{n}$

$$F(\bar{n}) = \mu m[G(\bar{n},m) = 0] \text{ – наименьшее } m, \text{ для которого } G(\bar{n},m) = 0,$$

то F – также рекурсивная функция.)

Нами уже определены на множестве ординалов Σ_1-функции $+$ и $\cdot$ и Δ_0-отношение $<$. Композиция всюду определенных Σ_1-функций снова является всюду определенной Σ_1-функцией, поэтому остается проверить замкнутость класса всюду определенных Σ_1-функций относительно операции минимизации. Пусть $\forall \bar{n} \exists m(G(\bar{n},m) = 0)$, G – рекурсивная функция, а значит $\hat{G}$ – Σ_1-функция в $\mathbb{HF}$ по индуктивному предположению, и пусть $F(\bar{n}) = \mu m[G(\bar{n},m) = 0]$. Тогда $\hat{F}(\bar{x}) = y$ равносильно тому, что

$$((\text{для некоторого } i\ x_i \text{ не является натуральным числом}) \wedge (y = 0)) \vee ((\text{все } x_i \text{ и } y \text{ – натуральные числа})$$
$$\wedge\ (G(\bar{x},y) = 0) \wedge (\forall z < y \exists n[n \neq 0 \wedge G(\bar{x},z) = n])).$$

Это условие записывается Σ-формулой (так как G – Σ_1-функция), а значит, и Σ_1-формулой. Таким образом, всякая рекурсивная функция и всякий рекурсивный предикат на ω являются соответственно Δ_1-функцией и Δ_1-предикатом в $\mathbb{HF}$. Но всякий рекурсивно перечислимый предикат $S(\bar{x})$ представляется в виде $\exists n R(\bar{x},n)$, где R – рекурсивный предикат, поэтому всякое рекурсивно перечислимое отношение на ω является Σ_1-отношением в $\mathbb{HF}$.

Для доказательства в обратную сторону нам понадобится

Лемма 6. *Существует функция $e : \omega \to \mathbb{HF}$ такая, что*

(i) e – биекция;

(ii) e *–* Σ_1*-функция в* $\langle \mathbb{HF} \in \rangle$*;*

(iii) $n = e(m)$ *– рекурсивное отношение на* ω*;*

(iv) для всякой Δ_0*-формулы* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *отношение* $\{\langle n_1, \ldots, n_k\rangle | \langle \mathbb{HF}, \in\rangle \models \varphi(e(n_1), \ldots, e(n_k))\}$ *рекурсивно.*

Доказательство. Определим функцию e рекурсивно:

$e(0) = 0;$

$e(1) = \{e(0)\} = \{0\};$

$e(2) = \{e(1)\};$

$\vdots$

$e(5) = \{e(2), e(0)\};$

$\vdots$

$e(2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}) = \{e(n_1), \ldots, e(n_k)\}$ $(n_1 > n_2 > \ldots > n_k)$.

Функция e всюду определена, причем определяется Σ-рекурсией. Поэтому по теореме 8 e является Σ_1-функцией. Индукцией легко показать, что e – биекция. Для доказательства (iii) заметим, что если $e(k)$ – натуральное число n, то $e(k + 2^k) = n + 1$. Для доказательства (iv) заметим, что $e(n) \in e(m)$ тогда и только тогда, когда n является степенью в разложении m в виде $2^{k_1} + \ldots + 2^{k_l}$. Доказательство для остальных Δ_0-формул легко получается индукцией по сложности. □

Приступим к доказательству импликации ($\Leftarrow$) теоремы. Пусть S – Σ_1-отношение на $\mathbb{HF}$, то есть $S(n)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{HF} \models \exists y \varphi(n, y)$, где φ – Δ_0-формула (для простоты считаем, что S – одноместное отношение). Имеем $S(n)$ тогда и только тогда, когда $\exists k \exists m [e(k) = n \wedge \varphi(e(k), e(m))]$. Отношение в скобках является рекурсивным по пунктам (iii) и (iv) леммы, поэтому S – рекурсивно перечислимое отношение. □

Существует еще один подход к представлению классической теории рекурсии. Будем рассматривать натуральные числа не как конечные ординалы, а как некие базисные объекты (праэлементы) с заданными на них арифметическими операциями:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle.$$

Имеет место (доказываемая аналогично предыдущей)

Теорема 13. *Пусть* S *– отношение на системе* $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$.

(i) S в.п. $\iff$ *S – Σ_1-отношение на $\mathbb{HF}_{\mathfrak{N}}$.*
(ii) S вычислимо $\iff$ *S – Δ_1-отношение на $\mathbb{HF}_{\mathfrak{N}}$.*

2.5 Σ-операторы и теорема Ганди

В этом и следующем параграфах сигнатура KPU-модели $\mathbb{A}$ обозначается символом $\sigma_{\mathbb{A}}$, а ее основное множество и множество элементов не являющихся праэлементами (множество "множеств") — символами A и A^*, соответственно.

Пусть $\mathbb{A}$ – модель KPU, $P(A)$ – множество всех подмножеств множества A.

Определение 2.5.1. *Отображение $F : P(A)^n \to P(A)$ $(n \in \omega)$ называется Σ-оператором, если существует Σ-формула $\Phi(x_0,\ldots,x_{n-1},y)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ такая, что для всех $S_0,\ldots,S_{n-1} \in P(A)$*

$$F(S_0,\ldots,S_{n-1}) = \{a \mid \exists a_0 \ldots \exists a_{n-1}(\bigwedge_{i<n} a_i \subseteq S_i \wedge \mathbb{A} \models \Phi(a_0,\ldots,a_{n-1},a))\}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что всякий Σ-оператор обладает свойством *монотонности*: если $F : P(A)^n \to P(A)$ – Σ-опрератор, $S_0,\ldots,S_{n-1},S'_0,\ldots,S'_{n-1} \in P(A)$, то

из $S_0 \subseteq S'_0,\ldots,S_{n-1} \subseteq S'_{n-1}$ следует, что $F(S_0,\ldots,S_{n-1}) \subseteq F(S_0,\ldots,S_{n-1})$.

Пусть $F : P(A) \to P(A)$ – одноместный Σ-оператор. Ввиду монотонности оператор F обладает наименьшей (по включению) неподвижной точкой, которая может быть описана следующим образом.

Для каждого ординала α (внешнего, не обязательно из $\mathbb{A}$) определим подмножество $\Gamma_\alpha \subseteq A$ так:

$$\Gamma_0 = \varnothing,\ \Gamma_{\alpha+1} = F(\Gamma_\alpha),\ \Gamma_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \Gamma_\beta$$

для произвольного предельного β. Легко устанавливается, что $\alpha \leqslant \beta$ влечет $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta$, а ввиду "мощностных"соображений существует ординал α такой, что $\Gamma_{\alpha+1} = F(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$. Нетрудно также показать, что для $M \subseteq A$ такого, что $F(M) \subseteq M$ (в частности, для $F(M) = M$)), справедливо включение $\Gamma_\alpha \subseteq M$

для всех ординалов α. Следовательно, если $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$, то Γ_α – наименьшая неподвижная точка F. Пусть α_* – наименьший ординал такой, что $\Gamma_{\alpha_*+1} = \Gamma_{\alpha_*}$.

Теорема 14. *(Ганди) Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество, $F : P(A) \to P(A)$ – Σ-оператор. Тогда наименьшая неподвижная точка Γ_* оператора F является Σ-подмножеством A, а наименьший ординал α_*, такой, что $\Gamma_* = \Gamma_{\alpha_*}$, не превосходит ординала $o(\mathbb{A})$.*

Доказательство. Введем следующее семейство A-конечных функций:

$$B = \{f \mid \begin{array}{l} f - A - \text{конечная функция, } \mathrm{dom}(f) - \text{ординал, } f(0) = \varnothing, \\ f \text{ монотонна, т.е. } \alpha \leqslant \beta < \mathrm{dom}(f) \text{ влечет } f(\alpha) \subseteq f(\beta), \\ \text{и для любого } \alpha \in \mathrm{dom}(f) \text{ верно } f(\alpha) \subseteq \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F(f(\beta))\}. \end{array}$$

Из определения семейства B и определения Σ-оператора видно, что семейство B является Σ-подмножеством множества A. Ясно, что множество

$$C = \{ \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f)} f(\alpha) | f \in B\}$$

также является Σ-подмножеством A.

Пусть

$$\Delta = \cup\{c|c \in C\},\ \Delta \in \Sigma(A).$$

Покажем, что множество Δ обладает следующими свойствами.

(1) Если $a \in A^*$ и $a \subseteq \Delta$, то существует элемент $c \in C$ такой, что $a \subseteq c(\subseteq \Delta)$.

Из определения Δ и условия $a \subseteq \Delta$ следует соотношение

$$\mathbb{A} \models \forall b \in a \exists f(f \in B \wedge \exists \alpha \in \mathrm{dom}(f)(b \in f(\alpha)))).$$

Используя принцип Σ-ограниченности, найдем элемент $g \in A^*$ такой, что

$$\mathbb{A} \models \forall b \in a \exists f \in g(f \in B \wedge \exists \alpha \in \mathrm{dom}(f)(b \in f(\alpha))) \wedge (\forall f \in g(f \in B)).$$

По A-конечному подмножеству $g \subseteq B$ определим функцию f_0 следующим образом:

$$\mathrm{dom}(f_0) = \cup\{\mathrm{dom}(f)|f \in g\},$$

$$f_0(\alpha) = \cup\{f(\gamma)|f \in g, \gamma \in \mathrm{dom}(f), \gamma \leqslant \alpha\},\ \alpha \in \mathrm{dom}(f_0).$$

Нетрудно проверить, что f_0 является A-конечной функцией. Более того, $f_0 \in B$. Очевидно, что $f_0(0) = \varnothing$ и f_0 монотонна. Проверим, что выполняется равенство

$$f_0(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F(f_0(\beta)),\ \alpha \in \mathrm{dom}(f_0).$$

Если $a \in f_0(\alpha)$, то существуют $f \in g$, $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$, $\gamma \leqslant \alpha$ такие, что $a \in f(\gamma)$. Так как $f \in g \subseteq B$, то

$$a \in f(\gamma) \subseteq \bigcup_{\delta<\gamma} F(f_0(\delta)) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F(f_0(\beta)).$$

Таким образом, $f_0 \in B$. Положим

$$c_0 = \cup\{f_0(\alpha) | \alpha \in \mathrm{dom}(f_0)\}.$$

Тогда $c_0 \in C$ и $a \subseteq c_0$ по выбору семейства g и определению f_0.

(2) $F(\Delta) \subseteq \Delta$.

Пусть $b \in F(\Delta)$. По определению Σ-оператора, существует элемент $a \in A^*$ такой, что $a \subseteq \Delta$ и $b \in F(a)$. Для этого элемента a найдем, по пункту (1), функцию $f_0 \in B$ такую, что

$$a \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)\ (\subseteq \Delta).$$

Положим

$$f_1 = f_0 \cup \{\langle \mathrm{dom} f_0, \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)\rangle\} \cup \{\langle s(\mathrm{dom}(f_0)),(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)) \cup \{b\}\rangle\}.$$

Ясно, что f_1 – A-конечная функция, $\mathrm{dom}(f_1) = s(s(\mathrm{dom}(f_0)))$,

$$f_1(\mathrm{dom}(f_0)) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} F(f_0(\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} F(f_1(\alpha)).$$

Так как $a \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_0)} f_0(\alpha)$ и $b \in F(\alpha)$, то

$$f_1(s(\mathrm{dom}(f_0))) \subseteq \bigcup_{\alpha\leqslant\mathrm{dom}(f_0)} F(f_1(\alpha)).$$

Следовательно,

$$f_1 \in B, b \in c_1 = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{dom}(f_1)} f_1(\alpha) \subseteq \Delta.$$

Таким образом, $F(\Delta) \subseteq \Delta$.

(3) $\Delta \subseteq \Gamma_{o(\mathbb{A})}$.

Достаточно показать, что для любой функции $f \in B$

$$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{dom}(f)} f(\alpha) \subseteq \Gamma_{\mathrm{dom}(f)}.$$

Для этого индукцией по $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ установим, что $f(\alpha) \subseteq \Gamma(\alpha)$. Имеем $f(0) = \varnothing \subseteq \Gamma_0$. Если $f(\alpha) \subseteq \Gamma_\alpha$, то

$$f(\alpha+1) \subseteq F(f(\alpha)) \subseteq F(\Gamma_\alpha) = \Gamma_{\alpha+1}.$$

Если ординал α предельный и $f(\beta) \subseteq \Gamma_\beta$ для всех $\beta < \alpha$, то

$$f(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F(f(\beta)) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha.$$

Из установленных соотношений $F(\Delta) \subseteq \Delta$ и $\Delta \subseteq \Gamma_{o(\mathbb{A})}$ следует, что $\Delta = \Gamma_{o(\mathbb{A})}$, Δ – наименьшая неподвижная точка и $\alpha_* \leqslant o(\mathbb{A})$. Теорема доказана. $\square$

2.6 Универсальный Σ-предикат

Пусть σ – произвольная сигнатура, P – символ одноместного предиката, не входящий в σ. Множество *P-позитивных формул* сигнатуры $\sigma(P)$ определяется индуктивно:

– всякая формула сигнатуры σ является P-позитивной;

– формула $P(x)$ является P-позитивной;

– если Φ и Ψ – P-позитивные формулы, то формулы $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $Qx\Phi$, $(Qx \in y)\Phi$ $(Q \in \{\exists,\forall\})$ являются P-позитивными;

– других P-позитивных формул нет.

Тот факт, что формула Φ сигнатуры $\sigma(P)$ со свободными переменными среди $\bar{x}$ является P-позитивной, будем обозначать указанием $\Phi = \Phi(\bar{x},P^+)$.

Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество, $\Phi(x,P^+)$ – P-позитивная формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}(P)$ с параметрами из A. Оператор $\Gamma_\Phi : P(A) \to P(A)$ определяется следующим образом: для любого $S \in P(A)$

$$\Gamma_\Phi(S) = \{a \in A | \langle \mathbb{A},S\rangle \models \Phi(a)\}.$$

Предложение 2.6.1. *Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество, $\Phi(x,P^+)$ – P-позитивная Σ-формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}(P)$ с параметрами из A. Тогда суще-*

ствует Σ*-оператор* $F_\Phi : P(A) \to P(A)$ *такой, что для всякого* Σ*-множества* $S \subseteq A$

$$\Gamma_\Phi(S) = F_\Phi(S).$$

Доказательство. Определим Σ-оператор F_Φ следующим образом: пусть для любого $S \in P(A)$

$$F_\Phi(S) = \{a \in A | \exists \pi \in A((\pi \subseteq S) \wedge \Phi(a,\pi))\},$$

где Σ-формула $\Phi(x,\pi)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ получается из $\Phi(x,P^+)$ заменой всех атомарных подфомул вида $P(t)$ на $t \in \pi$.

Пусть $S \subseteq A$ – Σ-множество, которое определяется в $\mathbb{A}$ Σ-формулой $\Psi(x)$ (с параметрами), и пусть $a \in A$. Индукцией по сложности формулы $\Phi(x,P^+)$ покажем, что $\mathbb{A} \models \Phi^P_\Psi(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \exists \pi((\pi \subseteq \Psi^{\mathbb{A}}) \wedge \Phi^P_\pi(a))$. Заметим, что в доказательстве нуждается только импликация слева направо, поскольку импликация в обратную сторону очевидно следует из монотонности формулы Φ относительно P.

1) если Φ – формула сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$, или $\Phi = P(x)$, то это очевидно;
2) если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, или $\Phi = \exists y \Phi_0(x,y,P^+)$, или $\Phi = (\exists y \in z)\Phi_0(x,y,P^+)$, то это непосредственно следует из индукционного предположения;
3) Если $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$, то по индукционному предположению существуют $\pi_1,\pi_2 \subseteq \Psi^{\mathbb{A}}$, подтверждающие истинность утверждения для формул Φ_1 и Φ_2 соответственно. Вследствие монотонности для формулы Φ можно взять $\pi_1 \cup \pi_2$.
4) если $\Phi = (\forall y \in a)\Phi_0(x,y,P^+)$, то по индукциооному предположению имеем $(\forall y \in a)(\exists \pi \subseteq P)\Phi_0(x,y,\pi) \Leftrightarrow (\forall y \in a)\exists \pi((\forall z \in \pi)\Psi(z) \wedge \Phi_0(x,y,\pi)))$, откуда по принципу Δ_0-ограниченности получаем, что $\exists \rho(\forall y \in a)(\exists \pi \in \rho)((\forall z \in \pi)\Psi(z) \wedge \Phi_0(x,\pi)) \wedge (\forall \pi \in \rho)(\exists y \in a)((\forall z \in \pi)\Psi(z) \wedge \Phi_0(x,\pi))$. Поэтому для элемента $\pi_0 = \cup\rho$ имеем $(\pi_0 \subseteq S) \wedge (\forall y \in a)\Phi_0(x,y,\pi_0)$.

□

Следствие 5. *Если* Φ *–* P*-позитивная* Σ*-формула сигнатуры* $\sigma_{\mathbb{A}}(P)$*, то наименьшая неподвижная точка оператора* Γ_Φ *является* Σ*-множеством в* $\mathbb{A}$ *и может быть получена как элемент последовательности* $\Gamma_0 = \varnothing$, $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\Phi(\Gamma_\alpha)$, $\Gamma_\delta = \cup_{\alpha<\delta}\Gamma_\alpha$ *для предельных* δ*, удовлетворяющий условию* $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$*, причем* $\alpha \leqslant o(\mathbb{A})$.

Пусть σ — конечная сигнатура. Стандартным способом определим геделевскую нумерацию g всех термов и RQ-формул (то есть формул, допускающих ограниченные кванторы вида $\forall x \in y$ и $\exists x \in y$) сигнатуры σ_*, предполагая, что множество V всех переменных языка есть множество $\{x_0,x_1,\ldots\}$. К примеру, для простейшей сигнатуры $\sigma_* = \langle U^1, \in^2\rangle$ можно определить с помощью Σ-рекурсии

$g(x_i) = c(0,i),\ \ i \in \omega,$
$g(x_i = x_j) = c(1,c(i,j)),\ \ i,j \in \omega,$
$g(x_i \in x_j) = c(2,(c(i,j)),\ \ i,j \in \omega,$
$g(U(x_i)) = c(3,i),\ \ i \in \omega,$
$g(\Phi_0 \wedge \Phi_1) = c(4,c(g(\Phi_0),g(\Phi_1))),\ \ \Phi_0,\Phi_1 \in RQF(\sigma_*),$
$g(\Phi_0 \vee \Phi_1) = c(5,c(g(\Phi_0),g(\Phi_1))),\ \ \Phi_0,\Phi_1 \in RQF(\sigma_*),$
$g(\Phi_0 \to \Phi_1) = c(6,c(g(\Phi_0),g(\Phi_1))),\ \ \Phi_0,\Phi_1 \in RQF(\sigma_*),$
$g(\neg\Phi) = c(7,g(\Phi)),\ \ \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\exists x_i \in x_j \Phi) = c(8,c(c(i,j),g(\Phi))),\ \ i,j \in \omega, \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\forall x_i \in x_j \Phi) = c(9,c(c(i,j),g(\Phi))),\ \ i,j \in \omega, \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\exists x_i \Phi) = c(10,c(i,g(\Phi)),\ \ i \in \omega, \Phi \in RQF(\sigma_*),$
$g(\forall x_i \Phi) = c(11,c(i,g(\Phi)),\ \ i \in \omega, \Phi \in RQF(\sigma_*),$

где $c : \omega^2 \to \omega$ – канторовская нумерация пар, а $RQF(\sigma_*)$ – класс всех RQ-формул сигнатуры σ_*.

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Легко показать, что существуют частичные Σ-функции F_0 и F_Σ такие, что $\mathrm{dom}(F_0) = \mathrm{dom}(F_\Sigma) = \mathrm{Nat}(\mathbb{A}) = \omega$ и для $a \in \omega$

$$F_0(a) = \begin{cases} 1, \text{ если существует } \Delta_0 - \text{формула } \Phi \text{ такая, что } g(\Phi) = a, \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$F_\Sigma(a) = \begin{cases} 1, \text{ если существует } \Sigma - \text{формула } \Phi \text{ такая, что } g(\Phi) = a, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

С каждым элементом $a \in A$ свяжем интерпретацию $\gamma_a : V \to A$, определенную следующим образом:

$$\gamma_a(x_i) = \begin{cases} b, \text{ если } \langle i,b\rangle \in a \text{ и для любого } c \in A \text{ из } \langle i,c\rangle \in a \text{ следует } b = c, \\ \varnothing, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Определим отображение $\bar{\gamma} : A \times \omega \to A$ так:

$$\bar{\gamma}(a,0) = \varnothing,\ \bar{\gamma}(a,i+1) = \gamma_a(x_i).$$

Очевидно, что $\bar{\gamma}$ является частичной Σ-функции на $\mathbb{A}$ с областью определения $A \times \omega$.

Предложение 2.6.2. *Существует двуместная частичная Σ-функция T_0 на $\mathbb{A}$ такая, что $\mathrm{dom}(T_0) = \omega \times A$ и для $a \in \omega$, $b \in A$ справедливо*

$$T_0(a,b) = \begin{cases} 1, \text{ если } F_0(a) = 1, \text{ и если } \Phi \text{ – } \Delta_0 - \text{формула такая, что} \\ \quad g(\Phi) = a, \text{ то } \mathbb{A} \models \Phi[\gamma_b], \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Можно определить Σ-формулу $\Phi_0(x_0,x_1,x_2,P^+)$ сигнатуры $\sigma_* \cup \langle F_0,l,r,\bar{\gamma},P\rangle$, которая бы "кодировала" индуктивное оределение истинности (ложности) Δ_0-формулы. Действительно, положим

$$\begin{aligned} \Phi_0(x_0,x_1,x_2,P^+) \ &= [F_0(x_0) = 0 \wedge x_2 = 0] \vee [F_0(x_0) = 1 \wedge (\Phi_U(x_0,x_1,x_2,P^+) \\ &\vee \Phi_=(x_0,x_1,x_2,P^+) \vee \Phi_\in(x_0,x_1,x_2,P^+) \vee \Phi_\wedge(x_0,x_1,x_2,P^+) \\ &\vee \Phi_\vee(x_0,x_1,x_2,P^+) \vee \Phi_\to(x_0,x_1,x_2,P^+) \vee \Phi_\neg(x_0,x_1,x_2,P^+) \\ &\vee \Phi_{\exists x\in y}(x_0,x_1,x_2,P^+) \vee \Phi_{\forall x\in y}(x_0,x_1,x_2,P^+) \\ &\vee \Phi_{\exists x}(x_0,x_1,x_2,P^+) \vee \Phi_{\forall x}(x_0,x_1,x_2,P^+))], \end{aligned}$$

где, например, $\Phi_{\exists x\in y}(x_0,x_1,x_2,P^+)$ имеет вид $[(l(x_0) = 8 \wedge \exists x_3 \exists x_4 \in \bar{\gamma}(x_1,rlr(x_0))(x_3 = (x_1 \setminus \{llr(x_0)\} \times A) \cup \{\langle llr(x_0),x_4\rangle\} \wedge P(rr(x_0),x_3,1)) \wedge x_2 = 1)) \vee (\forall x_4 \in \bar{\gamma}(x_1,rlr(x_0))\exists x_3(x_3 = (x_1 \setminus \{llr(x_0)\} \times A) \cup \{\langle llr(x_0),x_4\rangle\} \wedge P(rr(x_0),x_3,0)) \wedge x_2 = 0))]$. Отметим, что функции l и r, "обратные" к функции c, как и сама функция c, в любом допустимом множестве $\mathbb{A}$ естественным образом определяются как частичные Σ-функции с областью определения ω.

Предположим, что n – номер Δ_0-формулы Ψ, $Q \subseteq A^3$ и для всех $m \in \omega, m < n$, верно следующее утверждение: если m – номер Δ_0-формулы Ψ', то для любого $a \in A$ имеем $\langle m,a,1\rangle \in Q$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \Psi'[\gamma_a]$, а $\langle m,a,0\rangle \in Q$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \neg\Psi'[\gamma_a]$. Легко убедиться, что в этом случае

$$\langle \mathbb{A},Q\rangle \models \Phi_0(n,a,1) \iff \mathbb{A} \models \Psi[\gamma_a],$$

$$\langle \mathbb{A},Q\rangle \models \Phi_0(n,a,0) \iff \mathbb{A} \models \neg\Psi[\gamma_a].$$

Таким образом, если $Q \in P(A^3)$ – наименьшая неподвижная точка оператора $\Gamma_{\Phi_0} : P(A^3) \to P(A^3)$, то Q есть (график) T_0. □

Аналогичным образом доказывается

Теорема 15. *(Σ-определимость истинности Σ-формул) Существует двуместных Σ-предикат T_Σ на $\mathbb{A}$ такой, что для любых $n \in \omega$, $a \in A$ $\langle n,a\rangle \in T_\Sigma$ тогда и только тогда, когда n является геделевым номером Σ-формулы Φ и $\mathbb{A} \models \Phi[\gamma_a]$.*

Непосредственным следствием предыдущего утверждения является

Теорема 16. *(существование универсального Σ-предиката) Существует Σ-формула Σ-$Sat(x_0,x_1)$ без параметров такая, что для любого допустимого множества $\mathbb{A}$ и любой Σ-формулы $\Phi(x_0)$ (быть может, с параметрами из A) существует элемент $a \in A$ такой, что*

$$\Phi^{\mathbb{A}}(x_0) = \Sigma\text{-}Sat^{\mathbb{A}}(x_0,a).$$

Применяя классический метод диагонализации, легко получить

Следствие 6. *Существует Σ-формула $\Phi_*(x_0)$ без параметрос такая, что для любой* KPU*-модели $\mathbb{A}$ Σ-множество $\Phi_*^{\mathbb{A}}(x_0)$ не является Δ-множеством в $\mathbb{A}$.*

2.7 Теорема компактности Барвайса

На протяжении этой главы нашей метатеорией является теория KPU в сигнатуре, содержащей одноместные предикатные символы R,F,C и V, выделяющие элементы, которые служат обозначениями для предикатных, функциональных, константных символов и символов переменных соответственно, а также одноместные функциональные символы v и $\#$. Элементы, удовлетворяющие предикату R, будем обозначать символами r,r_1,..., а символы h,h_1,... и c,c_1,d,d_1... будут соответствовать элементам, удовлетворяющим предикатам F и C соответственно. Будем также считать, что в сигнатуре нашей метатеории присутствуют константные символы $\neg$, $\vee$, $\wedge$,$\forall$ и $\exists$. Наша метатеория содержат следующие *аксиомы синтаксиса*:

(1) аксиома, утверждающая, что классы (обозначений для) предикатных, функциональных, константных символов и символов переменных попарно не пересекаются, а значения всех пяти констант различны и не лежат ни в одном из этих классов;

(2) аксиома для (обозначений) переменных, утверждающая, что $(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge \mathrm{Ord}(\beta) \wedge \alpha \neq \beta \rightarrow v(\alpha) \neq v(\beta))$ и $V(x) \leftrightarrow \exists\alpha(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x = v(\alpha))$ (в дальнейшем вместо $v(\alpha)$ будем использовать обозначение v_α);

(3) аксиома для функции "местности" $\#$, утверждающая, что если x – обозначение для предикатного или функционального символа, то $\#(x)$ – положительное натуральное число (местность соответствующего предиката или функции).

Множество L называется *языком*, если L является множеством предикатных, функциональных и константных символов.

Определение 2.7.1. *Элемент t называется термом языка L, если t является переменной или константным символом языка L, или имеет вид $\langle h,y\rangle$, где h – функциональный символ языка L, $y = \langle y_1,\ldots,y_{\#(h)}\rangle$, и все y_i являются термами языка L.*

Определение 2.7.2. *Атомарная формула языка L – это множество одного из следующих видов:*

(i) $\langle =,t_1,t_2\rangle$, где t_1,t_2 – термы языка L (обозначаем $(t_1 = t_2)$);

(ii) $\langle r,t_1,\ldots,t_n\rangle$, где r – предикатный символ языка L, $n = \#(r)$, и $t_1,\ldots,t_n$ – термы языка L (обозначаем $r(t_1,\ldots,t_n)$).

Определение 2.7.3. *Множество φ называется конечной формулой языка L, если*

φ – атомарная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle\neg,\psi\rangle$, где ψ – конечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle\wedge,\{\varphi,\psi\}\rangle$ или $\langle\vee,\{\varphi,\psi\}\rangle$, где φ,ψ – конечные формулы языка L, либо

φ имеет вид $\langle\exists,v,\psi\rangle$ или $\langle\forall,v,\psi\rangle$, где v – переменная, ψ – конечная формула языка L.

Будем обозначать эти формулы стандартным образом: $\neg\psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\exists v\psi$ и $\forall v\psi$ соответственно. Кроме того, будем использовать сокращение $\varphi \rightarrow \psi$ для формулы $(\neg\varphi \vee \psi)$.

Предложение 2.7.1. *Если выполнятся аксиома бесконечности, то для любого языка L существует множество*

$$L_{\omega\omega} = \{\varphi | \varphi \text{ – конечная формула языка } L, \text{ с переменными вида } v_n, n < \omega\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что существует множество

$$Terms = \{t | t \text{ – терм языка } L, \text{ содержащий переменные вида } v_n,\ n \in \omega\}.$$

Определим индукцией по n множества

$$Terms(0) = \{c \in L | c \text{ – константный символ}\} \cup \{v_n | n \in \omega\},$$

$$Terms(n+1) = \{\ \langle h,t_1,\ldots,t_k\rangle | h \in L,\ h \text{ – функциональный символ},\ k = \#(h),\ t_1,\ldots,t_k \in Terms(n)\} \cup Terms(n).$$

Эти множества существуют, если существует ω. По этой же причине существует множество

$$Terms = \cup_{n\in\omega} Terms(n).$$

Существование множества $L_{\omega\omega}$ доказывается аналогично. □

Определение 2.7.4. *Множество φ называется бесконечной формулой, если*

φ – конечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle\neg,\psi\rangle$, где ψ – бесконечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle\exists,v,\psi\rangle$ или $\langle\forall,v,\psi\rangle$, где v – переменная, ψ – бесконечная формула языка L, либо

φ имеет вид $\langle\wedge,\Phi\rangle$ или $\langle\vee,\Phi\rangle$, где Φ – непустое множество бесконечных формул языка L.

Понятие бесконечной формулы языка L определяется аналогично. Будем использовать обозначения $\wedge\Phi$ и $\vee\Phi$ для формул $\langle\wedge,\Phi\rangle$ и $\langle\vee,\Phi\rangle$ соответственно. Формула $\wedge\Phi$ называется *конъюнкцией* множества формул Φ, а формула $\vee\Phi$ – *дизъюнкцией* множества формул Φ.

Для бесконечных формул естественным образом определяются их свободные и связанные переменные, а также результат подстановки терма вместо свободной переменной (определяется рекурсией по транзитивному замыканию формулы). Будем обозначать результат подстановки в формулу φ терма t вместо переменной v через φ_t^v. Как обычно, *предложением* называется формула без свободных переменных.

Для формулы φ определим множество $\mathrm{sub}(\varphi)$ ее *подформул* рекурсией по транзитивному замыканию следующим образом:

$\mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\}$, если φ – атомарная формула,

$\mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi)$, если φ имеет вид $\neg\psi$,$\exists v\psi$, или $\forall v\psi$,

$\mathrm{sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \bigcup_{\psi\in\Phi} \mathrm{sub}(\psi)$, если φ имеет вид $\wedge\,\Phi$ или $\vee\,\Phi$.

Лемма 7. *Если формула φ имеет конечное число свободных переменных, то любая ее подформула также имеет конечное число свободных переменных. В частности, если φ – подформула некоторого предложения, то φ имеет конечное число свободных переменных.*

Эта лемма (легко доказываемая индукцией по сложности формул) мотивирует следующее определение.

Определение 2.7.5. *Бесконечная формула называется регулярной, если она имеет конечное число свободных переменных. Символом $L_{\infty\omega}$ обозначается класс всех регулярных бесконечных формул языка L.*

Все рассматриваемые в дальнейшем бесконечные формулы будут регулярными, поэтому условимся опускать прилагательное "регулярная"для краткости.

Для бесконечной формулы φ определим бесконечную формулу $\sim\varphi$ следующим образом:

$\sim\varphi$ есть $\neg\varphi$, если φ – атомная формула;

$\sim(\neg\varphi)$ есть φ;

$\sim(\wedge\Phi)$ есть $\vee\{\neg\varphi|\varphi\in\Phi\}$;

$\sim(\vee\Phi)$ есть $\wedge\{\neg\varphi|\varphi\in\Phi\}$;

$\sim(\exists v\varphi)$ есть $\forall v\neg\varphi$;

$\sim(\forall v\varphi)$ есть $\exists v\neg\varphi$.

Определение 2.7.6. *Пусть L – язык. Фрагментом $L_{\infty\omega}$ называется любое множество L_A бесконечных формул и переменных, такое, что*

(i) всякая конечная формула $L_{\omega\omega}$ является элементом L_A;

(ii) если $\varphi\in L_A$, то всякая подформула и переменная формулы φ является элементом L_A;

(iii) если $\varphi(v)\in L_A$ и t – терм L, все переменные которого принадлежат L_A, то $\varphi(t)$ является элементом L_A;

(iv) если $\varphi,\psi,v \in L_A$, *то*

$$\neg\varphi, \sim\varphi, \exists v\varphi, \forall v\varphi, \varphi\vee\psi, \varphi\wedge\psi$$

являются элементами L_A.

Пусть K – язык, $C = \{c_n | n < \omega\}$ – счетное множество константных символов, не встречающихся в K. Обозначим $L = K \cup C$.

Если K_A – фрагмент $K_{\infty\omega}$, то с ним естественным образом связывается фрагмент $L_A = K_A(C)$ языка $L_{\infty\omega}$: это множество всех формул вида $\varphi(c_{i_1},\ldots,c_{i_n})$, получающихся заменой конечного числа свободных переменных константами из C. Зафиксируем эти обозначения.

Терм t фрагмента L_A называется *базисным*, если он яляется элементом C или имеет вид $h(c_{i_1},\ldots,c_{i_n})$, где $h \in K$, $c_{i_1},\ldots,c_{i_n} \in C$.

Определение 2.7.7. *Механизмом совместности для* L_A *называется множество* S *такое, что всякое* $s \in S$ *есть множество предложений фрагмента* L_A, *и для всякого* $s \in S$ *выполняется следующее:*

(C0) (правило тривиальности) $\varnothing \in S$; *если* $s \subseteq s' \in S$, *то* $s \cup \{\varphi\} \in S$ *для любого* $\varphi \in s'$;

(C1) (правило совместности) если $\varphi \in s$, *то* $\neg\varphi \notin s$;

(C2) ($\neg$*-правило) если* $\neg\varphi \in s$, *то* $s \cup \{\sim\varphi\} \in S$;

(C3) ($\wedge$*-правило) если* $\wedge\Phi \in s$, *то* $s \cup \{\varphi\} \in S$ *для всех* $\varphi \in \Phi$;

(C4) ($\forall$*-правило) если* $(\forall v\varphi(v)) \in s$, *то* $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$ *для всех* $c \in C$;

(C5) ($\vee$*-правило) если* $\vee\Phi \in s$, *то* $s \cup \{\varphi\} \in S$ *для некоторого* $\varphi \in \Phi$;

(C6) ($\exists$*-правило) если* $(\exists v\varphi(v)) \in s$, *то* $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$ *для некоторого* $c \in C$;

(C7) (правило равенства) Пусть t *– базисный терм* L_A *и* $c,d \in C$, *тогда*

(i) если $(c = d) \in s$, *то* $s \cup \{(d = c)\} \in S$;
(ii) если $\varphi(t),(c = t) \in s$, *то* $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$;
(iii) $s \cup \{e = t\} \in S$ *для некоторого* $e \in C$.

Лемма 8. *Если множество* S *удовлетворяет всем условиям из предыдущего определения за исключением условия (C0), то существует наименьший по включению механизм совместности* $S' \supseteq S$.

Доказательство. Определим функцию f на ω следующим образом:

$$f(0) = S \cup \{\varnothing\},$$

$$f(n+1) = f(n) \cup \{s \cup \{\varphi\} | s \in f(n) \wedge \exists s' \in f(n)[s \subseteq s' \wedge \varphi \in s']\}.$$

Легко показать, что $S' = \cup_{n\in\omega} f(n)$ является механизмом совместности. Кроме того, если для некоторого механизма совместности S'' имеет место включение $S \subseteq S''$, то $f(n) \subseteq S''$ для всех $n \in \omega$. □

Лемма 9. *Пусть S – механизм совместности, $s \in S$. Тогда*

(i) если φ,$(\varphi \to \psi) \in s$, то $s \cup \{\psi\} \in S$;

(ii) если $c \in C$, то $s \cup \{c = c\} \in S$;

(iii) если c,d,$e \in C$, $(c = d) \in s$, $(d = e) \in s$, то $s \cup \{c = e\} \in S$.

Доказательство. Пусть φ,$\varphi \to \psi \in s$. Так как $\varphi \to \psi$ есть сокращение для формулы $\neg\varphi \vee \psi$, по свойству $(C5)$ получаем, что $s \cup \{\neg\varphi\} \in S$ или $s \cup \{\psi\} \in S$. Первый случай невозможен по свойству $(C1)$.

Предположим теперь, что выполняются условия пункта (iii). По свойству $(C7i)$ имеем $s' = s \cup \{e = d\} \in S$. По свойству $(C7ii)$ имеем $s' \cup \{c = e\} \in S$, поэтому по свойству $(C0)$ получаем $s \cup \{c = e\} \in S$.

Наконец, докажем пункт (ii). Пусть $c \in C$. По свойству $(C7iii)$ существует $e \in C$, для которого $s \cup \{c = e\} \in S$. По свойству $(C7i)$ имеем $s \cup \{c = e$,$e = c\} \in S$. Применяя пункт (iii), получим, что $s \cup \{c = e$,$e = c$,$c = c\} \in S$, откуда по свойству $(C0)$ $s \cup \{c = c\} \in S$. □

Теорема 17. *(Теорема о существовании модели) Пусть L_A – счетный фрагмент, S – механизм совместности для L_A. Для всех $s \in S$ существует каноническая система $\mathfrak{M}$ языка L, являющаяся моделью для s, то есть $\mathfrak{M} \models \varphi$ для всех $\varphi \in s$.*

Доказательство. Поскольку L_A является счетным фрагментом, можно занумеровать все его термы t_0,$t_1, \ldots, t_n, \ldots$ и формулы φ_0,$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ натуральными числами. Будем строить последовательность

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq \ldots \subseteq s_n \subseteq \ldots$$

элементов из S следующим образом. Положим $s_0 = s$ (из условия теоремы). Далее, для каждого $n \in \omega$ множество s_{n+1} получается из s_n добавлением одного, двух, или трех предложений из L_A.

Шаг 1. Найдем первый константный символ $c \in C$ в списке термов, для которого $s_n \cup \{c = t_n\} \in S$, и положим $s'_n = s_n \cup \{c = t_n\}$.

Шаг 2. Если $s'_n \cup \{\varphi_n\} \notin S$, положим $s_{n+1} = s'_n$. Если же $s'_n \cup \{\varphi_n\} \in S$, положим $s''_n = s'_n \cup \{\varphi_n\}$. Далее возможны три различных случая, в зависимости от вида формулы φ_n.

Шаг 3. Если φ_n не начинается с $\exists$ или $\vee$, положим $s_{n+1} = s''_n$.

Шаг 4. Если φ_n имеет вид $\exists v\psi$, то найдем первый константный символ $c \in C$ в списке термов, для которого $s''_n \cup \{\psi^v_c\} \in S$ (он существует по свойству $(C6)$), и положим $s_{n+1} = s''_n \cup \{\psi^v_c\}$.

Шаг 5. Если φ_n имеет вид $\vee\Phi$, то найдем первую формулу $\psi \in \Phi$ в списке формул, для которой $s''_n \cup \{\psi\} \in S$ (она существует по свойству $(C5)$), и положим $s_{n+1} = s''_n \cup \{\psi\}$.

Итак, пусть $s_\omega = \cup_{n\in\omega} s_n$. Дальнейшие рассуждения являются стандартными. Определим на C отношение эквивалентности $\approx$ так: $c \approx d$ тогда и только тогда, когда $(c = d) \in s_\omega$. Пусть $M = \{c/\approx | c \in C\}$. По свойству $(C7)$, если $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \in s_\omega$ и $c_i \approx d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\varphi(d_1, \ldots, d_n) \in s_\omega$. Поэтому корректно следующее определение интерпретаций предикатных и функциональных символов языка L в модели $\mathfrak{M}$ с носителем M:

$$\langle c_1/\approx, \ldots, c_n/\approx\rangle \in r^{\mathfrak{M}} \iff r(c_1, \ldots, c_n) \in s_\omega,$$

$$h^{\mathfrak{M}}(c_1/\approx, \ldots, c_n/\approx) = d/\approx \iff (h(c_1, \ldots, c_n) = d) \in s_\omega.$$

Индукцией по сложности формул из L_a легко убедиться, что $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой формулы $\varphi \in s_\omega$ (используя свойства $(C0)$ – $(C7)$). □

Теорема 18. *(Расширенная теорема о существовании модели) Пусть L_A – счетный фрагмент, S – механизм совместности для L_A. Если T – множество предложений L_A такое, что для любого $s \in S$ из $\varphi \in T$ следует $s \cup \{\varphi\} \in S$, то для любого $s \in S$ $T \cup s$ имеет каноническую модель.*

Доказательство. Пусть $S' = \{T \cup s | s \in S\}$. Множество S' почти является механизмом совместности: оно удовлетворяет условиям (С1) – (С7). Применив лемму 8, получим механизм совместности $S'' \supseteq S'$. Теперь применим теорему о существовании модели для $(T \cup s) \in S''$. □

Пусть L_A – фрагмент $L_{\infty\omega}$. Предложение φ фрагмента L_A называется *общезначимым* (обозначаем $\models \varphi$), если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой системы $\mathfrak{M}$ фрагмента L_A.

Определение 2.7.8. *Пусть L_A – фрагмент L. Множество Γ формул фрагмента L_A называется механизмом общезначимости для L_A, если Γ содержит частные случаи схем аксиом (A1) – (A7) для любого $\varphi \in L_A$, не содержит $\varphi \wedge \neg\varphi$, и замкнуто относительно правил вывода (R1) – (R3):*

(A1) подстановки в тавтологии конечной пропозициональной логики;

(A2) $\neg\varphi \leftrightarrow \sim \varphi$;

(A3) $\wedge\Phi \to \varphi$ для любой $\varphi \in \Phi$;

(A4) $v_\alpha = v_\alpha$;

(A5) $v_\alpha = v_\beta \to v_\beta = v_\alpha$;

(A6) $\forall v\varphi(v) \to \varphi(t)$ для любого терма t, свободного для v в $\varphi(v)$;

(A7) $\varphi(v) \wedge (v = t) \to \varphi(t)$ для любого терма t, свободного для v в $\varphi(v)$;

(R1) (Modus Ponens) если φ,$(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, то $\psi \in \Gamma$;

(R2) (Генерализация) если $(\varphi \to \psi(v)) \in \Gamma$ и v не входит свободно в φ, то $(\varphi \to \forall v\psi(v))$;

(R3) (Конъюнкция) если $\wedge\Phi \in L_A$ и $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ для всех $\varphi \in \Phi$, то $(\psi \to \wedge\Phi) \in \Gamma$.

Подчеркнем, что все рассматриваемые выше формулы являются элементами L_A.

Упражнение 6. *(i) Пусть $\mathfrak{M}$ – система языка L и пусть $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ – множество формул $\varphi(v_1,\ldots,v_n) \in L_A$, для которых*

$$\mathfrak{M} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1,\ldots,v_n).$$

$\Gamma_{\mathfrak{M}}$ является множеством по принципу Δ-выделения. Легко убедиться, что $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ является механизмом общезначимости.

(ii) Если $\mathcal{X}$ – множество механизмов общезначимости, то

$$\cap\mathcal{X} = \cap\{\Gamma | \Gamma \in \mathcal{X}\}$$

является механизмом общезначимости.

Зафиксируем фрагмент L_A, множество $C = \{c_n | n \in \omega\}$ новых константных символов, и пусть $K = L \cup C$, и $K_A = L_A(C)$ – фрагмент $K_{\infty\omega}$, естественным

образом связанный с L_A: $\varphi \in K_A$, если для некоторого $\psi \in L_A$ φ получается из ψ заменой символов некоторых свободных переменных на константные символы:

$$\varphi = \psi^{v_{\alpha_1},\ldots,v_{\alpha_k}}_{c_{i_1},\ldots,c_{i_k}}.$$

Будем говорить, что φ – результат *свободной подстановки* в ψ.

Предложение 2.7.2. *Пусть* Γ_0 – *механизм общезначимости для фрагмента* L_A, *и пусть* Γ – *множество всех результатов свободных подстановок в формулы из* Γ_0. *Определим*

$$S = \{s | s \text{ – конечное множество } K_A\text{-предложений, } (\neg \wedge s) \notin \Gamma\}.$$

Тогда

(i) S *является механизмом совместности для* K_A;

(ii) если $\varphi \in \Gamma$, $s \in S$, *то* $s \cup \{\varphi\} \in S$.

Доказательство. Заметим сначала, что Γ – механизм общезначимости для K_A. Ограничимся доказательством двух пунктов.

(A7) Рассмотрим предложение фрагмента K_A вида

$$\varphi(c_1,\ldots,c_n,v) \wedge v = t \to \varphi(c_1,\ldots,c_n,t),$$

где терм t также может содержать $c_1,\ldots,c_n$. Это предложение является результатом свободной подстановки в формулу вида

$$\varphi(w_1,\ldots,w_n,v) \wedge v = t' \to \varphi(w_1,\ldots,w_n,t'),$$

где $t' = t^{c_1,\ldots,c_n}_{w_1,\ldots,w_n}$. По схеме аксиом $(A7)$ для Γ_0 эта формула принадлежит Γ_0, а значит первоначальная формула принадлежит Γ.

(R3) Пусть $(\psi \to \wedge\Phi) \in K_A$, и пусть $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ для всех $\varphi \in \Phi$. Нужно показать, что $(\psi \to \wedge\Phi) \in \Gamma$. Эта формула является результатом свободной подстановки некоторой формулы из L_A, имеющей, к примеру, вид

$$\psi^{v_1}_{c_1} \to \wedge\{\varphi^{v_1}_{c_1} | \varphi(v_1) \in \Phi_0\}.$$

Так как $(\psi(c_1) \to \varphi(c_1)) \in \Gamma$,последняя формула является результатом свободной подстановки, к примеру, формулы

$$\psi^{v_\beta}_{c_1} \to \varphi^{v_\beta}_{c_1},$$

где $\psi(v_\beta) \to \varphi(v_\beta) \in \Gamma_0$. Но тогда, используя (R1), (R2) и (A6) для Γ_0, получаем, что $(\psi(v_1) \to \varphi(v_1)) \in \Gamma_0$ для всех $\varphi(v_1) \in \Phi_0$. По правилу (R3) для Γ_0, $\psi(v_1) \to \wedge\{\varphi(v_1)|\varphi(v_1) \in \Phi_0\}$ принадлежит Γ_0, а значит $\psi \to \wedge\Phi$ принадлежит Γ. Проверка остальных пунктов оставляется читателю в качестве упражнения. Итак, Γ является механизмом общезначимости для K_A. Проверка свойства (ii) является рутинной: предположим, что $\varphi \in \Gamma$, $s \in S$, но $s \cup \{\varphi\} \notin \Gamma$. Тогда $\neg(\wedge s \wedge \varphi) \in \Gamma$, откуда по (A1) и (R1) $(\varphi \to \neg \wedge s) \in \Gamma$. Но тогда по (R1) $\neg \wedge s \in \Gamma$, поэтому $s \notin S$ – противоречие. Остальные пункты, подтверждающие, что S – механизм совместности, рассматриваются аналогично, за исключением небольшой тонкости для (C6). Предположим, что $\exists v\varphi(v) \in s \in S$, но для всех $c \in C$ $s \cup \{\varphi(c)\} \notin S$. Тогда $\wedge s \to \neg\varphi(c) \in \Gamma$ для всех $c \in C$ и, в частности, для некоторого c, не встречающегося в S. Вследствие этого

$$\wedge s \to \neg\varphi(v)$$

также является результатом свободной подстановки некоторой формулы из Γ_0, а значит принадлежит Γ. Поэтому Γ принадлежат и формулы

$$\wedge s \to \forall v \neg\varphi(v) \ \text{(по (R2))},$$

$$\wedge s \to \neg\exists v\varphi(v) \ \text{(по (R1),(A1),(A2))},$$

$$\neg \wedge s \ \text{(по (A1),(R1))},$$

что противоречит условию $s \in S$. □

Определение 2.7.9. *Предложение $\varphi \in L_A$ называется теоремой фрагмента L_A, если $\varphi \in \Gamma$ для любого механизма общезначимости Γ фрагмента L_A.*

Замечание: предикат "φ – теорема L_A" является в KPU Π_1-предикатом, но, вообще говоря, не является Δ_1-предикатом. Поэтому нельзя утверждать (в рамках KPU), что существует множество всех теорем фрагмента L_A.

Теорема 19. *(слабая теорема о полноте для счетных фрагментов) Пусть L_A – счетный фрагмент. Предложение $\varphi \in L_A$ общезначимо тогда и только тогда, когда φ – теорема L_A.*

Доказательство. Пусть φ – теорема L_A. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная система, $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ определено так же, как в примере 6 (i). $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ является механизмом общезначимости фрагмента L_A, поэтому $\varphi \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$, то есть $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Пусть теперь φ не является теоремой L_A. Это означает, что $\varphi \notin \Gamma_0$ для некоторого механизма общезначимости Γ_0. Пусть $\Gamma \supseteq \Gamma_0$ и S определены как в предложении 2.7.2. Тогда $\{\neg\varphi\} \in S$ по пункту (ii) этого предложения, а так как S является механизмом совместности, то $\neg\varphi$ имеет модель по теореме о существовании модели. □

Предыдущая теорема является "слабой" в том смысле, что одно Π_1-условие ($\models \varphi$) заменяется на другое Π_1-условие (φ – теорема L_A). Нашей дальнейшей целью будет получение "сильной" теоремы о полноте вида

$$\models \varphi \iff \exists P\,[P \text{ – доказательство } \varphi],$$

причем понятие доказательства должно быть Δ_1-определимым, и, грубо говоря, иметь такой же "размер", как и элементы L_A. Таким образом, будет установлена эквивалентность $\models \varphi$ некоторому Σ_1-условию.

Определение 2.7.10. *Упорядоченная пара P называется бесконечным доказательством, если выпролняется одно из следующих условий:*

(A1)– (A7) $P = \langle n,\varphi\rangle$, где $1 \leqslant n \leqslant 7$ и φ – частный случай аксиомы An из определения 2.7.8;

(R1) $P = \langle f,\psi\rangle$, где f – функция, $\mathrm{dom}(f) = \{0,1\}$, $f(0)$ – бесконечное доказательство P_0, причем $\mathrm{Pr}_2(P_0)$ имеет вид $(\varphi \to \psi)$, $f(1)$ – бесконечное доказательство P_1, причем $\mathrm{Pr}_2(P_1) = \varphi$;

(R2) $P = \langle P_0,(\varphi \to \forall v_\alpha \psi(v_\alpha))\rangle$, где P_0 – бесконечное доказательство, для которого $\mathrm{Pr}_2(P_0)$ имеет вид $(\varphi \to \psi(v_\alpha))$, причем v_α не входит свободно в φ;

(R3) $P = \langle f,(\psi \to \wedge\Phi)\rangle$, где f – функция, $\mathrm{dom}(f) = \Phi$, для любой $\varphi \in \Phi$ $f(\varphi)$ – непустое множество бесконечных доказательств и для каждого $P_0 \in f(\varphi)$ $\mathrm{Pr}_2(P_0) = (\psi \to \varphi)$.

Если P – бесконечное доказательство и $\varphi = \mathrm{Pr}_2(P)$, то P называется *доказательством формулы* φ.

Определение 2.7.10 может быть строго сформулировано в KPU рекурсией по $\mathrm{TC}(P)$, причем в итоге получается Δ_1-предикат. Таким образом,

$$\exists P(P \text{ – бесконечное доказательство } \varphi)$$

является Σ_1-предикатом относительно φ.

Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ – допустимое множество с константами $\wedge$, $\vee$,$\neg$,$\exists$,$\forall$, $=$, предикатными символами R,F,C,V и функциональными символами v,$\#$, для

которых справедливы определенные в начале главы аксиомы синтаксиса. Все предыдущие определения и результаты могут быть проинтерпретированы как в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, так и в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, причем для Δ_1-определений вследствие абсолютности результаты в обоих случаях эквивалентны. Например, для $\varphi \in \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ утверждение "φ – бесконечная формула"истинно в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда когда оно истинно (в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$). Аналогично, если $\mathfrak{N}$,$P \in \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$, то утверждения "$\mathfrak{N} \models \varphi$"и "$P$ – бесконечное доказательство φ"истинны в $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда они истинны (в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$).

Определение 2.7.11. *(i) Если* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}; A, \in, \ldots)$ *– допустимое множество и* L *– язык, являющийся* Δ_1*-множеством в* $\mathbb{A}$*, то*

$$L_{\mathbb{A}} = \{\varphi \in \mathbb{A} | \varphi \text{ – бесконечная формула } L_{\infty\omega}\}$$

$$= \{\varphi \in \mathbb{A} | \mathbb{A} \models \text{"}\varphi \text{ – бесконечная формула } L_{\infty\omega}\text{"}\}$$

называется допустимым фрагментом $L_{\infty\omega}$*, соответствующим* $\mathbb{A}$*.*

(ii) Если $P \in \mathbb{A}$ *и* P *– бесконечное доказательство, то* P *называется* $L_{\mathbb{A}}$*-доказательством.*

Тривиальная проверка показывает, что допустимый фрагмент $L_{\mathbb{A}}$ действительно является фрагментом в смысле определения 2.7.6.

Теорема 20. *Пусть* $L_{\mathbb{A}}$ *– допустимый фрагмент* $L_{\infty\omega}$*, и пусть* φ *– предложение* $L_{\mathbb{A}}$*. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\exists P$ (P *–* $L_{\mathbb{A}}$*-доказательство* φ*);*

(ii) $\exists P$ (P *– бесконечное доказательство* φ*);*

(iii) φ *– теорема* $L_{\mathbb{A}}$*, то есть содержится во всех механизмах общезначимости для* $L_{\mathbb{A}}$*.*

Замечание: этот список, вообще говоря, нельзя продолжить условием (iv), утверждающим, что φ содержится во всех механизмах общезначимости, являющихся элементами $\mathbb{A}$. Условие (iv), как правило, существенно слабее условия (iii).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидно.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть Γ – механизм общезначимости для $L_{\mathbb{A}}$. Рутинное доказательство индукцией по $\mathrm{TC}(P)$ показывает, что если P – доказательство φ,

то $\varphi \in \Gamma$ (так как Γ содержит аксиомы (A1) – (A7) и замкнуто относительно правил (R1) – (R3)).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Достаточно показать, что множество

$$\Gamma = \{\psi \in L_{\mathbb{A}} | \exists P \in \mathbb{A}(P \text{ – доказательство } \varphi)\}$$

является механизмом общезначимости для $L_{\mathbb{A}}$, так как в этом случае $\varphi \in \Gamma$, поскольку φ содержится во всех механизмах общезначимости. Итак, нужно показать, что Γ содержит аксиомы (A1) – (A7) и замкнуто относительно правил (R1) – (R3). Первое очевидно, проверим замкнутость относительно (R1) и (R3) (для (R2) доказательство аналогично).

(R1) Пусть φ,$(\psi \to \varphi) \in \Gamma$. Тогда существуют P_0,$P_1 \in \mathbb{A}$ такие, что $\mathrm{Pr}_2(P_0) = (\varphi \to \psi)$, $\mathrm{Pr}_2(P_1) = \varphi$. Пусть $f(0) = P_0$, $f(1) = P_1$. Тогда $P = \langle f,\psi\rangle \in \mathbb{A}$ и P является доказательством ψ, поэтому $\psi \in \Gamma$.

(R3) Именно в этом случае используются свойства допустимых множеств и самого понятия доказательства. Пусть $(\psi \to \wedge\Phi) \in L_{\mathbb{A}}$ и $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ для всех $\varphi \in \Phi$. Тогда для каждого $\varphi \in \Phi$ существует $P \in \mathbb{A}$, являющееся доказательством для $(\psi \to \varphi)$. По принципу сильного Σ-замещения для $\mathbb{A}$ существует функция $f \in \mathbb{A}$ такая, что $\mathrm{dom}(f) = \Phi$, и для каждого $\varphi \in \Phi$ $f(\varphi) \neq \varnothing$ и всякое $P \in f(\varphi)$ является доказательством $(\psi \to \varphi)$. Тогда $\langle f,(\psi \to \wedge\Phi)\rangle \in \mathbb{A}$ является доказательством для $(\psi \to \wedge\Phi)$, поэтому $(\psi \to \wedge\Phi) \in \Gamma$. □

Следствие 7. *Если $L_{\mathbb{A}}$ – допустимый фрагмент, то множество теорем фрагмента $L_{\mathbb{A}}$ является Σ_1-подмножеством в $\mathbb{A}$. Более того, соответствующая Σ_1-формула не содержит параметров и не зависит от $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Искомая Σ_1-формула – это $\exists P(P$ – доказательство $\varphi)$. □

Через $\vdash \varphi$ обозначим Σ_1-формулу $\exists P[P$ – доказательство формулы $\varphi]$. Используя теорему 20 и слабую теорему о полноте, получаем следующий важный результат.

Теорема 21. *(Теорема Барвайса о полноте) Пусть $L_{\mathbb{A}}$ – счетный допустимый фрагмент. Для любой формулы $\varphi \in L_{\mathbb{A}}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\models \varphi$,

(ii) $\vdash \varphi$,

(iii) в $\mathbb{A}$ *верно* $\vdash \varphi$.

Таким образом, множество всех общезначимых предложений фрагмента $L_{\mathbb{A}}$ *является* Σ_1*-множеством в* $\mathbb{A}$.

Отметим, что здесь не утверждается истинность предложения "$\models \varphi \leftrightarrow \vdash \varphi$" в допустимом множестве $\mathbb{A}$. Если бы это было так, то для $\varphi \in L_{\mathbb{A}}$ из того, что φ имеет модель, следовало бы, что φ имеет модель $\mathfrak{N} \in \mathbb{A}$. Однако это в большинстве случаев не так.

Важнейшим приложением теоремы о полноте является

Теорема 22. *(Теорема Барвайса о компактности) Пусть* $L_{\mathbb{A}}$ *– счетный допустимый фрагмент* $L_{\infty\omega}$*, и пусть* T *– множество предложений фрагмента* $L_{\mathbb{A}}$*, являющееся* Σ_1*-множеством в* $\mathbb{A}$*. Если всякое* $T_0 \subseteq T$*, являющееся элементом* $\mathbb{A}$*, имеет модель, то* T *также имеет модель.*

Доказательство. Обогатим, как обычно, язык L до языка $K = L \cup \{c_n | n < \omega\}$, но позаботимся чтобы K остался Δ_1-множеством в $\mathbb{A}$. Пусть $K_{\mathbb{A}} = L_{\mathbb{A}}(C)$ – фрагмент $L_{\mathbb{A}}$, стандартным образом ассоциированный с K. Таким образом, $K_{\mathbb{A}}$ есть множество всех предложений $K_{\infty\omega}$, которые являются элементами $\mathbb{A}$ и содержат только конечное количество констант из C. Воспользуемся теоремой о существовании модели для $K_{\mathbb{A}}$.

Пусть S – множество всех конечных множеств s предложений $K_{\mathbb{A}}$, таких, что всякое $T_0 \cup s$, где $T_0 \subseteq T$, $T_0 \in \mathbb{A}$, имеет модель. Заметим, что если $s \in S$ и $\varphi \in T$, то $s \cup \{\varphi\} \in S$, поэтому при построении модели для T можно воспользоваться расширенной теоремой о существовании модели, нужно лишь предварительно установить, что S является механизмом совместности. Проверим свойство $(C5)$ – наиболее трудный случай. Итак, предположим, что $\vee\Phi \in s \in S$, но $s \cup \{\varphi\} \notin S$ для всех $\varphi \in \Phi$. Это значит, что для каждого $\varphi \in \Phi$ существует $T_0 \subseteq T$, $T_0 \in \mathbb{A}$ такое, что $T_0 \cup s \cup \{\varphi\}$ не имеет модели. Пусть $\theta(x)$ – Σ_1-формула, орпеделяющая T в $\mathbb{A}$. По теореме о полноте для $K_{\mathbb{A}}$ в $\mathbb{A}$ справедливо Σ-предложение

$$\forall\varphi \in \Phi \exists T_0 \, [(\forall\psi \in T_0 \, \theta(\psi)) \wedge (\vdash (\wedge(T_0 \cup s) \rightarrow \neg\varphi))].$$

По принципу Σ-рефлексии существует множество $a \in \mathbb{A}$ такое, что в $\mathbb{A}$ справедлива релятивизация предыдущего предложения на a. Можно также считать, что a транзитивно. Пусть

$$T_1 = \{\psi \in a | \theta^{(a)}(\psi)\}.$$

По принципу Δ_0-выделения $T_1 \in \mathbb{A}$. Кроме того, $T_1 \subseteq T$, и для каждого $\varphi \in \Phi$

$$\models (\wedge(T_1 \cup s) \to \neg\varphi),$$

так как для некоторого $T_0 \subseteq T_1$

$$\models (\wedge(T_0 \cup s) \to \neg\varphi).$$

Но тогда $s \cup T_1$ не может иметь модели ввиду того, что $\vee\Phi \in s$. Это противоречит предположению $s \in S$. □

2.8 Допустимые множества вида $\mathbb{H}\mathrm{YP}(\mathfrak{M})$

Будем предполагать, что задан некоторый набор бинарных Σ-функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$ (в KPU), удовлетворяющих следующим условиям (далее используем обозначение $\mathcal{D}(b) = b \cup \{\mathcal{F}_i(x,y) | x,y \in b, 1 \leqslant i \leqslant N\}$):

i) $\mathcal{F}_1(x,y) = \{x,y\}$;

ii) $\mathcal{F}_2(x,y) = \cup x$;

iii) $\mathrm{KPU} \vdash \mathrm{sp}(\mathcal{F}_i(x,y)) \subseteq \mathrm{sp}(x) \cup \mathrm{sp}(y)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$;

iv) $\mathrm{KPU} \vdash (\mathrm{Tran}(b) \to \mathrm{Tran}(\mathcal{D}(b)))$;

v) для любой Δ_0-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (со свободными переменными среди $x_1, \ldots, x_n$) и для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ существует терм $\mathcal{F}$ от n аргументов, построенный с помощью функций $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$, такой, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \mathcal{F}(a, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \{x_i \in a | \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Существует много способов для построения функций, удовлетворяющих этим требованиям. В дальнейшем будет указан один из них.

Заметим, что $\mathcal{D}$ является Σ-функцией, поскольку таковыми являются все функции $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$. Определим с помощью Σ-рекурсии в KPU Σ-функцию $L(\cdot,\cdot)$ следующим образом:

$$L(a,0) = \mathrm{TC}(a),$$

$$L(a,\alpha+1) = \mathcal{D}(L(a,\alpha) \cup \{L(a,\alpha)\}), \text{ если } \alpha \text{ – ординал},$$

$$L(a,\lambda) = \cup_{\alpha<\lambda} L(a,\alpha), \text{ если } \lambda \text{ – предельный ординал}.$$

Определение 2.8.1. *Элемент x называется конструируемым из a (обозначаем это как $x \in L(a)$), если $x \in L(a,\alpha)$ для некоторого ординала α. Элемент x называется конструируемым (обозначаем это как $x \in L$), если x конструируем из $\varnothing$.*

Лемма 10. *Для любого множества a и любых ординалов α,β, в* KPU *доказуемы следующие утверждения:*

i) *если a транзитивно, то $a \in L(a,1)$;*
ii) *$L(a,\alpha)$ транзитивно;*
iii) *если $\alpha < \beta$, то $L(a,\alpha) \subseteq L(a,\beta)$;*
iv) *$L(a,\alpha) \in L(a,\alpha+1)$;*
v) *если $x,y \in L(a,\alpha)$, то $\mathcal{F}_i(x,y) \in L(a,\alpha+1)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$;*
vi) *если α – ординал, то $\alpha \in L(a,\beta)$ для некоторого ординала β;*
vii) *если p – праэлемент, то $p \in L(a)$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathrm{sp}(a)$.*

Доказательство. Пункты i),iii),iv) и v) следуют непосредственно из определения $L(a,\alpha)$. Пункт ii) устанавливается индукцией по α, используя пункт iv) предположения. Пункт vii) вытекает из того, что $p \in L(a,\alpha)$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathrm{sp}(a)$ (это доказывается индукцией по α, используя пункт iii) предположения). Остается доказать пункт vi), также индукцией по α. По индукционному предположению, имеем $\forall\gamma < \alpha\exists\delta(\gamma \in L(a,\delta))$. По принципу Σ-рефлексии существует ординал λ такой, что $\forall\gamma < \alpha\exists\delta < \lambda(\gamma \in L(a,\delta))$. Отсюда по пункту iii) получаем, что любой одинал $\gamma < \alpha$ принадлежит $L(a,\lambda)$, то есть $\alpha \subseteq L(a,\lambda)$. Применяя впервые пункт (v) предположения, получаем, что множество $b = \{x \in L(a,\lambda) | \mathrm{Ord}(x)\}$ принадлежит $L(a,\lambda')$ для некоторого $\lambda' \geqslant \lambda$. Поскольку $L(a,\lambda)$ транзитивно, множество b является ординалом β, причем $\alpha \leqslant \beta$. Так как $L(a,\lambda')$ также транзитивно, то $\alpha \in L(a,\lambda')$ (так как $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$). □

Определим релятивизацию $\varphi^{L(a)}$ формулы φ следующим образом:
– если $\varphi = U(x)$, то $\varphi^{L(a)} = (x \in \mathrm{sp}(a))$;
– если φ – атомарная формула, $\varphi \neq U(x)$, то $\varphi^{L(a)} = \varphi$;
– если $\varphi = (\varphi_1 * \varphi_2)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ то $\varphi^{L(a)} = (\varphi_1^{L(a)} * \varphi_2^{L(a)})$;
– если $\varphi = \neg\psi$ то $\varphi^{L(a)} = \neg\psi^{L(a)}$;
– если $\varphi = (Qx \in y)\psi$, $Q \in \{\forall,\exists\}$ то $\varphi^{L(a)} = (Qx \in y)\varphi^{L(a)}$;

– если $\varphi = \exists x\psi$ то $\varphi^{L(a)} = \exists x((x \in L(a)) \wedge \psi^{L(a)})$;
– если $\varphi = \forall x\psi$ то $\varphi^{L(a)} = \forall x((x \in L(a)) \to \psi^{L(a)})$.

Через KPU^+ будем обозначать теорию, аксиомы которой состоят из аксиом KPU и аксиомы $\exists x\forall y(y \in x \leftrightarrow U(y))$, утверждающей, что существует множество всех праэлементов.

Теорема 23. *Для любой аксиомы φ теории* KPU^+ *верно* $\mathrm{KPU} \vdash \varphi^{L(a)}$.

Доказательство. Релятивизации аксиом экзистенциональности и фундированности следуют из соответствующих нерелятивизованных аксиом. Релятивизации аксиом пары и объединения следуют из определения функций $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Выводимость релятивизаций аксиом Δ_0-выделения следует из пункта v) предположения о функциях $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$.

Рассмотрим схему аксиом Δ_0-ограниченности. Пусть $\varphi(x,y,z)$ – Δ_0-формула. Предположим, что $a_0 \in L(a)$, $z \in L(a)$ и $\forall x \in a_0 \exists y \in L(a)\varphi^{L(a)}(x,y,z)$. Для краткости не будем в дальнейшем упоминать о параметре z. По свойству (*) получаем, что $\forall x \in a_0 \exists \alpha(\exists y \in L(a,\alpha)\varphi(x,y))$. По принципу Σ-ограниченности существует ординал β такой, что

$$\forall x \in a_0 \exists \alpha < \beta(\exists y \in L(a,\alpha)\varphi(x,y)).$$

По пункту iii) леммы 10 имеем $\forall x \in a_0 \exists y \in L(a,\beta)\varphi(x,y))$. Снова используя свойство (*) и полагая $b = L(a,\beta)$, получаем, что

$$(\forall x \in a_0 \exists y \in b\varphi(x,y))^{L(a)},$$

что и требовалось.

Покажем, наконец, что в KPU доказуемо $(\exists b\forall x(x \in b \leftrightarrow U(x)))^{L(a)}$. По принципу Δ-выделения достаточно установить, что $(\exists b\forall x(U(x) \to x \in b))^{L(a)}$. Возьмем $b = \mathrm{TC}(a) = L(a,0)$. По определению, $b \in L(a,1)$, а $U(x)^{L(a)}$ есть $x \in \mathrm{sp}(a)$. Осталось заметить, что $\mathrm{sp}(a) \subseteq b$. □

Определение 2.8.2. $L(\mathfrak{M},\alpha) = (\mathfrak{M}; L(M,\alpha) \cup \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}, \in)$.

$L(\mathfrak{M},\alpha)$ является алгебраической системой сигнатуры $\sigma^* = \sigma_{\mathfrak{M}}(\in)$, но не обязательно является допустимым множеством (пересечение с $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ необходимо для удаления праэлементов). Будем называть допустимое множество $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ допустимым множеством *над* $\mathfrak{M}$, если $M \in A$.

Теорема 24. *Если существует допустимое множество* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ *над* $\mathfrak{M}$*, для которого* $o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}) = \alpha$*, то* $L(\mathfrak{M},\alpha)$ *является наименьшим допустимым множеством с такими свойствами. Иными словами,* $L(\mathfrak{M},\alpha)$ *– допустимое множество,* $L(\mathfrak{M},\alpha) \subseteq \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$*,* $M \in L(\mathfrak{M},\alpha)$ *и* $0(L(\mathfrak{M},\alpha)) = \alpha$*.*

Доказательство. Для всех ординалов $\beta < \alpha$, вследствие абсолютности, $L(M,\beta)$ обозначает одно и то же множество в $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ и в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. ПОэтому, в частности, $L(\mathfrak{M},\alpha) \subseteq \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. По теореме 23 $L(\mathfrak{M},\alpha)$ является допустимым множеством, причем $M \in L(\mathfrak{M},\alpha)$. Из пункта vi) леммы 10 следует, что $o(L(\mathfrak{M},\alpha)) = \alpha$. $\square$

Определим класс доустимых множеств, являющийся обобщением наследственно конечных надстроек. Пусть κ – бесконечный кардинал. Определим

$$H_\kappa(M) = \{a \in \mathbb{V}_M | \text{ мощность } \mathrm{TC}(a) \text{ меньше } \kappa\}.$$

В частности, $H_\omega(M) = HF(M)$. Для системы $\mathfrak{M}$ определим систему $H_\kappa(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}; H_\kappa(M), \in)$. Так же, как и для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, легко доказать следующий результат.

Теорема 25. *Для любого регулярного кардинала* κ $H_\kappa(\mathfrak{M})$ *является допустимым множеством. В частности, оно будет допустимым над* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда* $\kappa > \mathrm{card}(M)$*.*

Отметим, что для сингулярных кардиналов утверждение теоремы также верно, однако доказательство для этого случая не является тривиальным.

Следующее определение является одним из важнейших в теории допустимых множеств. Подобно тому, как $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ есть наименьшее допустимое множество $\mathbb{A}$ с условием $M \subseteq A$, $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ определяется как наименьшее допустимое множество $\mathbb{A}$ с условием $M \in A$.

Определение 2.8.3. *(следующее допустимое множество)*

(i) $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}; A, \in)$*, где* $A = \bigcap\{B | (\mathfrak{M}; B, \in)$ *– допустимое множество над* $\mathfrak{M}\}$*.*

(ii) $O(\mathfrak{M}) = o(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}))$*.*

Теорема 26. *Имеет место*

(i) $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ *– наименьшее допустимое множество над* $\mathfrak{M}$*;*

(ii) $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) = L(\mathfrak{M},\alpha)$*, где* $\alpha = O(\mathfrak{M})$*.*

Доказательство. Нужно лишь показать, что $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ действительно является допустимым множеством, поскольку оно очевидно будет подмножеством во всех допустимых множествах, содержащих M как элемент. Рассмотрим допустимые множества $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ с условием $M \in A$ (такие множества существуют по теореме 25). Пусть α – наименьший ординал вида $o(\mathbb{A}_{\mathfrak{M}})$, где $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$ – допустимое множество над $\mathfrak{M}$. Применим теорему 24 для $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}}$. □

Следствие 8. *Ординал α является допустимым тогда и только тогда, когда $L(\alpha)$ – (чистое) допустимое множество.*

Следующий результат, который приводится здесь без доказательства, объясняет смысл обозначения $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$.

Теорема 27. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная система конечной сигнатуры, и пусть $S \subseteq M^n$ – n-местное отношение на M. Тогда*

i) $S \in \mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда S – Δ^1_1-отношение на $\mathfrak{M}$;

ii) S – Σ_1-множество в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда S – Π^1_1-отношение на $\mathfrak{M}$.

Отметим, также без доказательства, еще один интересный результат. Система $\mathfrak{M}$ вычислимой сигнатуры σ называется *рекурсивно насыщенной*, если для всякого рекурсивного множества $\Phi(x,v_1,\ldots,v_n)$ формул сигнатуры σ, со свободными переменными среди $x,v_1,\ldots,v_n$, и любых $m_1,\ldots,m_n \in M$ из локальной совместности множества $\Phi(x,m_1,\ldots,m_n)$ в $\mathfrak{M}$ следует его совместность.

Теорема 28. *Пусть $\mathfrak{M}$ – система конечной сигнатуры. $O(\mathfrak{M}) = \omega$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена.*

Приступим теперь к задаче определения функций $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_N$. Наиболее сильным требованием для этих функций является требование v): для любой Δ_0-формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ существует терм $\mathcal{F}$ от n аргументов, построенный с помощью функций $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_N$, такой, что

$$\mathrm{KPU} \vdash \mathcal{F}(a,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \{x_i \in a | \varphi(x_1,\ldots,x_n)\}.$$

Будем в первую очередь заботиться о выполнении этого требования.

По определению,

$$\mathcal{F}_1(x,y) = \{x,y\},$$

$$\mathcal{F}_2(x,y) = \cup x.$$

Из этих функций с помощью композиции получаются следующие функции:

$$\{x\} = \mathcal{F}_1(x,x),$$

$$x \cup y = \cup\{x,y\} = \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(x,y),y),$$

$$s(x) = x \cup \{x\}$$

$$\langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\},$$

$$\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle x_1,\langle x_2,\ldots x_n\rangle\rangle.$$

Функция $\mathcal{F}_2$ соответствует связке $\vee$ в Δ_0-формулах. Для отрицания необходимо ввести функцию

$$\mathcal{F}_3(x,y) = x \setminus y.$$

Из нее с помощью композиции получается функция $x \cap y = x \setminus (x \setminus y) = \mathcal{F}_3(x,\mathcal{F}_3(x,y))$, соответствующая связке $\wedge$ в Δ_0-формулах.

Наличие в Δ_0-формулах кванторов приводит нас к необходимости ввести следующие, более сложные функции:

$$\mathcal{F}_4(x,y) = x \times y,$$

$$\mathcal{F}_5(x,y) = \mathrm{dom}(x) = \{\mathrm{Pr}_1(z) | z \in x, z \text{ – упорядоченная пара}\},$$

$$\mathcal{F}_6(x,y) = \mathrm{rng}(x) = \{\mathrm{Pr}_2(z) | z \in x, z \text{ – упорядоченная пара}\},$$

$$\mathcal{F}_7(x,y) = \{\langle u,v,w\rangle | \langle u,v\rangle \in x, w \in y\},$$

$$\mathcal{F}_8(x,y) = \{\langle u,w,v\rangle | \langle u,v\rangle \in x, w \in y\}.$$

Осталось только ввести функции, соответствующие атомарным формулам:

$$\mathcal{F}_U(x,y) = \{z \in x | x \text{ – праэлемент}\},$$

$$\mathcal{F}_=(x,y) = \{\langle v,u\rangle \in y \times x | u = v\},$$

$$\mathcal{F}_\in(x,y) = \{\langle v,u\rangle \in y \times x | u \in v\},$$

$$\mathcal{F}_R(x,y) = \{\langle p_n,\ldots,p_1,v\rangle | \langle p_n,\ldots,p_1\rangle \in x, R(p_1,\ldots,p_n), v \in y\}$$

для всех предикатных символов $R(x_1,\ldots,x_n)$ нашей сигнатуры.

Имея построенные таким образом функции $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_K$, можно установить следующий результат, более общий чем требование v).

Лемма 11. *Для всякой Δ_0-формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, все свободные переменные которой находятся среди $x_1,\ldots,x_n$, существует терм $\mathcal{F}_\varphi$, составленный из функций $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_K$, для которого*

$$\mathrm{KPU} \vdash \mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \{\langle x_n,\ldots,x_1\rangle \in a_n \times \ldots \times a_1 | \varphi(x_1,\ldots,x_n)\}.$$

Доказательство. Пусть $\sigma^* = \sigma \cup \{U,\ \in\}$, где $\sigma = \{R_1,\ldots,R_l\}$ – конечная предикатная сигнатура, а переменные, используемые в формулах, принадлежат множеству $\{x_1,x_2,\ldots\}$. Запись $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ всюду далее означает, что все свободные переменные этой формулы содержатся среди $x_1,\ldots,x_n$. Формулу φ сигнатуры σ^* будем называть *упорядоченной*, если для всякого вхождения в φ квантора $Qx_i \in x_j$ индекс i является наибольшим среди индексов свободных переменных в области действия этого квантора. С помощью переименования связанных переменных легко показать, что

(a) всякая Δ_0-формула сигнатуры σ^* логически эквивалентна упорядоченной Δ_0-формуле с теми же свободными переменными.

Будем называть формулу $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ термальной, или *t-формулой*, если существует терм $\mathcal{F}_\varphi$, для которого выполняется утверждение леммы. Строго говоря, это определение должно зависеть также и от n, однако далее будет показано, что данная формулировка корректна. Наша цель – индукцией по сложности показать, что всякая Δ_0-формула является t-формулой.

(b) Если $\mathrm{KPU} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Это утверждение очевидно. Из него следует, что можно ограничиться рассмотрением только упорядоченных Δ_0-формул.

(c) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Действительно, $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = a_n \times \mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_{n-1})$.

(d) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $\psi(x_1,\ldots,x_{n+1})$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Заметим, что $\{\varnothing\} = \{\mathcal{F}_3(a_1,a_1)\} = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_3(a_1,a_1),\mathcal{F}_3(a_1,a_1))$, поэтому можно использовать $\{\varnothing\}$ в термах. Имеем

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{rng}(\mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_n,\{\varnothing\})).$$

(e) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $\psi(x_1,\ldots,x_m)$ и ψ – t-формула, то φ – также t-формула.

Действительно, при $n > m$ это следует из (c) индукцией по $n-m$, при $m > n$ – из (d) индукцией по $m-n$. При $n = m$ доказывать нечего.

(f) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ – t-формула, то $\neg\varphi$ – также t-формула.

Имеем $\mathcal{F}_{\neg\varphi}(a_1,\ldots,a_n) = (a_n \times \ldots \times a_1) \setminus \mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n)$.

(g) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ – t-формулы, то $\varphi \wedge \psi$ – также t-формула.

Имеем $\mathcal{F}_{\varphi\wedge\psi}(a_1,\ldots,a_n) = \mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) \cap \mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_n)$.

(h) Множество t-формул замкнуто относительно логических связок.

Это следует из (b),(e),(f) и (g).

(i) Если $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ – t-формула, и $\varphi(x_1,\ldots,x_{n+1})$ есть $[\psi]^{x_n}_{x_{n+1}}$, то φ – также t-формула.

Если $n = 1$, определим $\mathcal{F}_\varphi(a_1,a_2) = \mathcal{F}_\psi(a_2) \times a_1$. Если $n > 1$, определим

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_{n+1}) = \mathcal{F}_8(\mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_{n-1},a_{n+1}),a_n)$$

$$= \{\langle x_{n+1},\ldots,x_1\rangle | x_n \in a_n \text{ и } \langle x_{n+1},x_{n-1},\ldots,x_1\rangle \in \mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_{n-1},a_{n+1})\}.$$

(j) Если $\psi(x_1,x_2)$ – t-формула и $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $[\psi]^{x_1,x_2}_{x_{n-1},x_n}$, то φ – также t-формула.

Это утверждение имеет смысл только при $n \geqslant 2$ и нуждается в доказательстве только при $n > 2$. В этом случае определим

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \mathcal{F}_7(\mathcal{F}_\psi(a_{n-1},a_n),a_{n-2} \times \ldots \times a_1)$$

$$= \{\langle x_n,\ldots,x_1\rangle \in a_n \times \ldots \times a_1 | \langle x_n,x_{n-1}\rangle \in \mathcal{F}_\psi(a_{n-1},a_n)\}.$$

Из утверждений (k) – (v) будет следовать, что все атомарные формулы являются t-формулами.

(k) Для всякого n, если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $U(x_n)$, то φ является t-формулой.

Действительно, $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \mathcal{F}_U(a_n,a_n) \times a_{n-1} \times \ldots \times a_1$.

(l) $(x_1 = x_2)$ является t-формулой (по определению функции $\mathcal{F}_=$).

(m) $(x_n = x_{n+1})$ является t-формулой (по пунктам (l) и (j)).

(n) $(x_n = x_m)$ является t-формулой для всех $m > n$.

Это легко показать индукцией по m, используя (m) как базу индукции и (i) как индукционный переход.

(p) $(x_n = x_m)$ является t-формулой для всех n,m.

Для $n < m$ это утверждение (n), для $n = m$ возьмем $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = a_n \times \ldots \times a_1$, для $n > m$ заметим, что $(x_n = x_m)$ тогда и только тогда, когда $(x_m = x_n)$, и воспользуемся пунктами (b) и (n).

(q) $(x_1 \in x_2)$ является t-формулой (по определению функции $\mathcal{F}_\in$).

(r) $(x_{n+1} \in x_{n+2})$ является t-формулой (по пунктам (q) и (j)).

(s) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $(x_i \in x_j)$, то φ является t-формулой.

Пусть $\psi(x_1,\ldots,x_{n+2})$ есть формула $((x_i = x_{n+1}) \wedge (x_j = x_{n+2}) \wedge (x_{n+1} \in x_{n+2}))$. Она является t-формулой по пунктам (p),(r),(e) и (q). Поэтому можно определить

$$\mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_n,a_i,a_j)$$

$$= \{\langle x_{n+1},\ldots,x_1\rangle \in a_j \times a_i \times a_n \times \ldots \times a_1 | (x_i = x_{n+1}),(x_j = x_{n+2}),(x_i \in x_j)\}.$$

Теперь воспользуемся функцией $\mathcal{F}_6$:

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{rng}(\mathrm{rng}(\mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_n,a_i,a_j))).$$

(t) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_{k+m})$ есть $R(x_{k+1},\ldots,x_{k+m})$, где R – m-местный предикатный символ сигнатуры σ, $k > 1$, то φ является t-формулой.

Действительно, $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_{k+m}) = \mathcal{F}_R(a_{k+m} \times \ldots \times a_{k+1}, a_k \times \ldots \times a_1)$.

(u) Если $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $R(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, где R – m-местный предикатный символ сигнатуры σ, то φ является t-формулой.

Пусть $\psi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m})$ есть формула $(R(x_{n+1},\ldots,x_{n+m}) \wedge (x_{i_1} = x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge (x_{i_m} = x_{n+m}))$. Она является t-формулой по пунктам (t), (p), (e) и (g). Определим

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{rng}^n(\mathcal{F}_\psi(a_1,\ldots,a_n,a_{i_1},\ldots,a_{i_m})).$$

(v) Все атомарные формулы сигнатуры σ^* являются t-формулами.

Это следует из предыдущих утверждений. Кроме того, ранее было показано, что множество t-формул замнкнуто отоносительно логических связок. Осталось разобрать случай ограниченных кванторов.

(w) Если $\psi(x_1,\ldots,x_{n+1})$ – t-формула, и $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть формула $\exists x_{n+1} \in x_j \psi(x_1,\ldots,x_{n+1})$, то φ – также t-формула.

Пусть $\theta(x_1,\ldots,x_{n+1})$ есть $(x_{n+1} \in x_j)$, тогда $\psi \wedge \theta$ – t-формула, обозначим ее $\rho(x_1,\ldots,x_{n+1})$. Заметим, что

$$\mathcal{F}_\rho(a_1,\ldots,a_n, \cup a_j)$$

$$= \{\langle x_{n+1},\ldots,x_1\rangle | x_{n+1} \in x_j, x_i \in a_i \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ и } \psi(x_1,\ldots,x_{n+1})\}.$$

Поэтому можно определить $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{rng}(\mathcal{F}_\rho(a_1,\ldots,a_n,\cup a_j))$.

(x) Если $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ – t-формула, и $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $\exists x_k \in x_j\psi(x_1,\ldots,x_k)$, где $k > n$, то φ – также t-формула.

Доказательство аналогично предыдущему, за исключением того, что rng применяется $k-n$ раз.

(y) Если $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ – t-формула, и $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ есть $\forall x_k \in x_j\psi(x_1,\ldots,x_k)$, где $k > n$, то φ – также t-формула.

Действительно, это следует из (b), (f) и (x), поскольку

$$\forall x_k \in x_j\psi \leftrightarrow \neg\exists x_k \in x_j\neg\psi.$$

Таким образом, из (v), (h), (x) и (y) получаем

(z) Все упорядоченные Δ_0-формулы являются t-формулами.

□

Следствие 9. *Функции $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_K$ удовлетворяют требованию v).*

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ – Δ_0-формула. Покажем, что существует терм $\mathcal{F}$ такой, что

$$\mathcal{F}(a,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \{x_i \in a | \varphi(x_1,\ldots,x_n)\}.$$

Действительно,

$$\mathcal{F}(a,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$
$$= \mathrm{dom}(\mathrm{rng}^{n-i}(\mathcal{F}_\varphi(\{x_1\},\ldots,\{x_{i-1}\},a,\{x_{i+1}\},\ldots,\{x_n\}))).$$

□

Для того, чтобы удовлетворить требование транзитивности, определим, для всех $n \geqslant 2$, функции $\mathcal{G}_n^1, \mathcal{G}_n^2$, и функции $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3$ следующим образом:

$$\mathcal{G}_n^1(x,y) = \begin{cases} \langle x_n,\ldots,x_1,y\rangle, & \text{если } x = \langle x_n,\ldots,x_1,y\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_n^2(x,y) = \begin{cases} \{x_n,\langle x_{n-1},\ldots,x_1,y\rangle\}, & \text{если } x = \langle x_n,\ldots,x_1,y\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_1(x,y) = \langle x,y\rangle;$$

$$\mathcal{H}_2(x,y) = \begin{cases} \langle u,y,v\rangle, & \text{если } x = \langle u,v\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_3(x,y) = \begin{cases} \{u,\langle y,v\rangle\}, & \text{если } x = \langle u,v\rangle, \\ \varnothing, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение 2.8.4. *Пусть J – максимальная местность предикатов сигнатуры σ. Набор функций $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_N$ состоит из функций $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_K$, функций $\mathcal{G}_n^1,\mathcal{G}_n^2$ для всех $n \leqslant J$, и функций $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3$.*

Теорема 29. *Набор функций $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_N$ удовлетворяет требованиям* i) – v).

2.9 Синтаксические критерии наследственно вычислимых свойств моделей

Для бесконечных формул не существует естественным образом определяемой пренексной нормальной формы, вместо него используется другой тип нормальных форм. Формула из $L_{\omega_1\omega}$ находится в *нормальной форме для бесконечных формул*, если она является Σ_α-формулой или Π_α-формулой для некоторого счетного ординала α. Классы Σ_α-формул и Π_α-формул определяются трансфинитной индукцией следующим образом.

Классы Σ_0-формул и Π_0-формул совпадают и состоят из конечных бескванторных формул. Для ординала $\alpha > 0$ класс Σ_α-формул определяется так: формула φ является Σ_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является счетной дизъюнкцией формул вида $\exists u\psi$, где ψ есть Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. Аналогично, формула φ является Π_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является счетной конъюнкцией формул вида $\forall u\psi$, где ψ есть Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$.

Классы *вычислимых* Σ_0-*формул* и Π_0-*формул* совпадают и состоят из конечных бескванторных формул. Для вычислимого ординала $\alpha > 0$ класс *вычислимых* Σ_α-*формул* определяется так: формула $\varphi(\bar{x})$ является *вычислимой* Σ_α-*формулой* в том и только том случае, когда она является дизъюнкцией в.п. множества формул вида $\exists\bar{u}\psi$, где ψ есть вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$, а $\bar{u}$ содержит все свободные переменные формулы ψ, не входящие в $\bar{x}$

(возможно и некоторые переменные из $\bar{x}$). Аналогично, формула $\varphi(\bar{x})$ является *вычислимой* Π_α*-формулой* в том и только том случае, когда она является конъюнкцией в.п. множества формул вида $\forall \bar{u}\psi$, где ψ есть вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$, а $\bar{u}$ содержит все свободные переменные формулы ψ, не входящие в $\bar{x}$.

Следующая важная теорема была получена Мэннэсом и Слэмэном, затем Эшем и Найт, и, независимо, Чизхолмом.

Теорема 30. *Для вычислимой системы* $\mathfrak{A}$ *и отношения* R *на* $\mathfrak{A}$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) R *определима в* $\mathfrak{A}$ *с помощью вычислимой* Σ_α*-формулы;*

(2) в любой копии $\mathfrak{B}$ *системы* $\mathfrak{A}$ *образ отношения* R *является* $\Sigma_\alpha(\mathfrak{B})$*-определимым.*

Идея доказательства состоит в следующем. Предполагая, что выполнено условие (2), построим "генерическую"копию $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$. По предположению, образ R в $\mathfrak{B}$ является $\Sigma_\alpha(\mathfrak{B})$-определимым. Выражающее этот факт предложение должно быть "вынуждаемым"вследствие генеричности $\mathfrak{B}$, откуда и получается Σ_α-формула для R.

Начнем с детального описания конструкции вынуждения. Пусть σ – сигнатура системы $\mathfrak{A}$, и пусть B – бесконечное вычислимое множество новых константных символов, которое будет носителем системы $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathcal{F}$ – множество конечных разнозначных функций из A в B. Это множество будет множеством *условий вынуждения*. На $\mathcal{F}$ существует естественный частичный порядок – отношение включения $\subseteq$. В дальнейшем будем обозначать элементы из $\mathcal{F}$ символами p,q,.... В ходе доказательства будет построена специальная последовательность условий вынуждения, объединение которой будет разнозначной функцией из A на B. Система $\mathfrak{B}$ с носителем B будет определена так, чтобы $\mathfrak{A} \equiv_F \mathfrak{B}$.

Нам необходим особый *язык вынуждения*, позволяющая описывать свойства строящихся генерической копии $\mathfrak{B}$ и обогащения $(\mathfrak{B}, F(R))$. Нужно, например, определять условия вида "$F(R) = W_e^{\Delta_\alpha^0(\mathfrak{B})}$". Существуют различные варианты задания языка вынуждения. Так, например, можно использовать предикатный язык с сигнатурой, полученной добавлением к σ символа отношения R, функционального символа F для изоморфизма, и константных символов для элементов системы $\mathfrak{A}$. В данном доказательстве будет использоваться пропозициональный язык вынуждения P, в котором пропозициональные символы

будут соответствовать атомарным предложениям сигнатуры $\sigma \cup \{R\} \cup B$. Также будем рассматривать подязык P', пропозициональные символы которого соответствуют атомарным предложениям сигнатуры $\sigma \cup B$.

Пусть S – множество вычислимых бесконечных формул языка P, S' – множество вычислимых бесконечных формул языка P'. Покажем, каким образом пропозициональные формулы из S или S' описывают системы $\mathfrak{B}$ и $(\mathfrak{B},F(R))$. Рассматривая $(\mathfrak{B},F(R))$ как систему сигнатуры $\sigma \cup \{R\} \cup B$, получим систему $\mathfrak{B}^*$ для языка P, в которой означивания пропозициональных переменных определяются атомарной диаграммой исходной системы. Аналогичным образом получается система для P'. Таким образом, для $\varphi \in P$

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff (\mathfrak{B},F(R)) \models \varphi,$$

где в левой части φ понимается как пропозициональная формула, а в правой как формула исчисления предикатов подходящей сигнатуры.

Рассмотрим некоторые наиболее важные формулы. Для любых $n,e \in \omega$ существует вычислимая Σ_1-формула $\varphi \in S'$ такая, что

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff n \in W_e^{\mathfrak{B}}.$$

Более того, для любых $n,e \in \omega$ и любого вычислимого ординала α (отождествляемого с некоторым обозначением в некотором пути в дереве O) существует вычислимая Σ_α-формула из S', соответствующая утверждению

$$n \in W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})}.$$

Будем использовать для этой формулы обозначение $n \in W_e^{D_\alpha}$. Аналогично, существует вычислимая $\Pi_{\alpha+1}$-формула, соответствующая утверждению

$$W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})} = F(R).$$

Будем использовать для этой формулы обозначение $W_e^{D_\alpha} = F(R)$.

Итак приступим к определению механизма вынуждения. Определим отношение "p вынуждает φ обозначаемое через $p \Vdash \varphi$, для $\varphi \in S$ и $p \in \mathcal{F}$ индукцией по сложности формулы φ. Хотя φ и является проппозициональной формулой, мы учитываем, что ее пропозициональные переменные соответствуют атомарным предложениям с констентами из $\mathfrak{B}$, поэтому имеет смысл говорить о "константах"формулы φ.

(1) Если φ – конечная формула, то $p \Vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда все константы формулы φ принадлежат $\mathrm{dom}(p)$ и при отображении p формула φ истинна в $(\mathfrak{A},R)$ (отметим, что для формул, содержащих отрицание, данное определение отличается от стандартного определения отношения вынуждения),

(2) $p \Vdash \bigvee_i \varphi_i$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \varphi_i$ для некоторого $i \in \omega$,

(3) $p \Vdash \bigwedge_i \varphi_i$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in \omega$ и любого $q \supseteq p$ существует $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash \varphi_i$.

В следующих далее леммах формулируются осеновные свойства вынуждения. Для вычислимой $\Sigma_\alpha(\Pi_\alpha)$-формулы φ через $\sim \varphi$ будем обозначать вычислимую $\Pi_\alpha(\Sigma_\alpha)$-формулу, логически эквивалентную $\neg\varphi$, которая получается стандартным способом – занесением в $\neg\varphi$ отрицания вглубь формулы. Будем говорить, что p *решает* φ, если либо $p \Vdash \varphi$, либо $p \Vdash \sim \varphi$.

Лемма 12. *Для любого $p \in \mathcal{F}$ и любой $\varphi \in S$ существует $q \supseteq p$ такое, что q решает φ.*

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Если φ – конечная формула, то она содержит лишь конечное число пропозициональных переменных, каждая из которых, понимаемая как предложение ислисления предикатов, содержит лишь конечное число констант из B. Если $q \supseteq p$ таково, что $\mathrm{dom}(q)$ содержит все эти константы, то q решает φ.

(2) Пусть φ – вычислимая Σ_α-формула, то есть

$$\varphi = \bigvee_i \varphi_i,$$

где для любого $i \in \omega$ φ_i – вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. По индукционному предположению, утверждение леммы верно для всех φ_i. Имеем $\sim \varphi = \bigwedge_i \sim \varphi_i$. Если никакое расширение p не вынуждает φ, то, по определению вынуждения, для всех $i \in \omega$ и всех $q \supseteq p$ верно $q \nVdash \varphi_i$. По индукционному предположению, существует $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash \sim \varphi_i$. По определению, это означает, что $p \Vdash \sim \varphi$.

(3) Пусть φ – вычислимая Π_α-формула, то есть

$$\varphi = \bigwedge_i \varphi_i,$$

где для любого $i \in \omega$ φ_i – вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. По индукционному предположению, утверждение леммы верно для всех φ_i. Имеем

$\sim\varphi = \bigvee_i \sim\varphi_i$. Если p не вынуждает φ, то, по определению вынуждения, для некоторого $i \in \omega$ и некоторого $q \supseteq p$ не существует $r \supseteq q$ такого, что $r \Vdash \varphi_i$. По индукционному предположению, для этих i и q существует $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash\sim \varphi_i$. По определению, это означает, что $r \Vdash\sim \varphi$. □

Лемма 13. *Если $p \Vdash \varphi$ и $q \supseteq p$, то $q \Vdash \varphi$.*

Доказательство. Легко провести индукцией по сложности формулы φ. □

Лемма 14. *Для любой формулы $\varphi \in S$ и любого условия p невозможно, чтобы одновременно $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash\sim \varphi$.*

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Если φ – конечная формула, то утверждение очевидно.

(2) Пусть

$$\varphi = \bigvee_i \varphi_i,$$

и утверждение леммы верно для всех φ_i. Если $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash\sim \varphi$, то, по определению и по предыдущей лемме, существуют $i \in \omega$ и $q \supseteq p$ такие, что $q \Vdash \varphi_i$, что противоречит индукционному предположению.

(3) Пусть

$$\varphi = \bigwedge_i \varphi_i,$$

и утверждение леммы верно для всех φ_i. Если $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash\sim \varphi$, то, по определению и по предыдущей лемме, существуют $i \in \omega$ и $q \supseteq p$ такие, что $q \Vdash \varphi_i$, что противоречит индукционному предположению. □

Множество условий $D \subseteq \mathcal{F}$ называется *плотным*, если для всякого $p \in \mathcal{F}$ найдется $q \supseteq p$ такое, что $q \in D$. Например, плотными являются следующие множества:

$$D_\varphi = \{p \,|\, p \text{ решает } \varphi\},\ \varphi \in S,$$

$$D'_a = \{p \,|\, a \in \mathrm{rng}(p)\},\ a \in A.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – семейство всех плотных множеств такого вида. *Полной последовательностью вынуждения* (сокращенно *п.п.в.*) называется последовательность $(p_n)_{n\in\omega}$ условий вынуждения, такая, что $p_n \subseteq p_{n+1}$ для любого $n \in \omega$, и для любого $D \in \mathcal{D}$ существует $n \in \omega$ такое, что $p_n \in D$. Так как $\mathcal{D}$ счетно, легко убедиться, что такие последовательности существуют.

Зафиксируем произвольную п.п.в. $(p_n)_{n\in\omega}$, и покажем как на ее основе получить генерическую копию системы $\mathfrak{A}$.

Предложение 2.9.1. *Объединение $\cup_n p_n$ является взаимно однозначным отображением из B на A.*

Доказательство. Так как каждое p_n является разнозначной функцией, то $\cup_n p_n$ является разнозначной функцией из некоторого подмножества B в A. Так как $\mathcal{D}$ содержит все множества вида D'_a, то множеством значений функции $\cup_n p_n$ является все множество A. Так как $\mathcal{D}$ содержит все множества вида $D_{b=b}$, то областью определения функции $\cup_n p_n$ является все множество B. □

Пусть F – функция, обратная к $\cup_n p_n$, тогда F есть биекция из A на B. Рассмотрим систему $\mathfrak{B}$, которая определяется из условия $\mathfrak{A} \cong_F \mathfrak{B}$ – генерическую копию системы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим также обогащение $(\mathfrak{B},F(R))$, по которому образуем пропозициональную систему $\mathfrak{B}^*$ (состоящую из атомарных предложений, истинных в $(\mathfrak{B},F(R))$, точнее таких $\varphi \in P$, что $(\mathfrak{B},F(R)) \models \varphi$). Отметим, что конечная формула $\varphi \in S$ является одновременно бескванторным предложением сигнатуры $\sigma \cup \{R\} \cup B$, поэтому

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff (\mathfrak{B},F(R)) \models \varphi.$$

Лемма 15. *(истинность и вынуждение) Для любой формулы $\varphi \in S$*

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi \iff \exists n\ p_n \Vdash \varphi.$$

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Пусть φ – конечная формула. Имеем $\mathfrak{B}^* \models \varphi$ тогда и только тогда, когда для всех $n \in \omega$ таких, что $\mathrm{dom}(p_n)$ содержит все константы, входящие в φ, выполняется $p_n \Vdash \varphi$.

(2) Пусть $\varphi = \bigvee_i \varphi_i$, и условие леммы выполняется для всех формул φ_i. Имеем $\mathfrak{B}^* \models \varphi \Leftrightarrow \exists i \mathfrak{B}^* \models \varphi_i \Leftrightarrow \exists i \exists n\ p_n \Vdash \varphi_i \Leftrightarrow \exists n\ p_n \Vdash \varphi$.

(3) Пусть $\varphi = \bigwedge_i \varphi_i$, и условие леммы выполняется для всех формул φ_i. Предположим, что $\mathfrak{B}^* \models \varphi$. Тогда $\mathfrak{B}^* \models \varphi_i$ для всех $i \in \omega$. Выберем $n \in \omega$ так, чтобы p_n решало φ. Если $p_n \Vdash\!\sim \varphi$, то для некоторого $i \in \omega$ имеем $p_n \Vdash\!\sim \varphi_i$. Но, по индукционному предположению, существует $m \in \omega$ такое, что $p_m \Vdash \varphi_i$. Вследствие монотонности можно считать, что $m = n$ (взяв наибольшее из этих чисел). Получили противоречие с леммой 14. Если же $p_n \Vdash \varphi$, то для любого

$i \in \omega$ существует $m \geqslant n$ такое, что p_m решает φ_i. Так как $p_n \Vdash \varphi$, то существует $q \supseteq p_m$ такое, что $q \Vdash \varphi_i$, а значит $p_m \Vdash \varphi_i$. По индукционному предположению получаем, что $\mathfrak{B}^* \models \varphi_i$. Поскольку это справедливо для всех $i \in \omega$, получаем, что $\mathfrak{B}^* \models \varphi$. □

До сих пор мы нигде не использовали S' – подмножество S, состоящее из формул, пропозициональные символы которых (элементы множества P') соответствуют атомарным предложениям, не содержащим R. Следующая лемма говорит о том, что для формул из S' вынуждение определимо в $\mathfrak{A}$.

Лемма 16. *(определимость вынуждения) Для любой формулы $\varphi \in S'$ и любого набора $\bar{b}$ элементов из $\mathfrak{A}$ существует вычислимая бесконечная формула $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ сигнатуры σ такая, что $\mathfrak{A} \models Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{a})$ тогда и только тогда, когда для условия вынуждения p, переводящего $\bar{b}$ в $\bar{a}$, справедливо $p \Vdash \varphi$. Кроме того, если φ – вычислимая $\Sigma_\alpha(\Pi_\alpha)$-формула, то такой же будет и формула $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$.*

Доказательство. Индукция по сложности формулы φ.

(1) Пусть φ – конечная формула. Если $\bar{b}$ содержит все константы из B, входящие в φ, то $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ есть конечная конъюнкция базисных формул сигнатуры σ (то есть атомарных формул и их отрицаний), утверждающая, что подстановка $\bar{b}$ вместо $\bar{x}$ делает формулу φ истинной. В противном случае возьмем $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ тождественно ложной.

(2) Пусть φ – вычислимая Σ_α-формула, то есть $\varphi = \bigvee_i \varphi_i$, и для любого i φ_i есть вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. Формулы $Force_{\bar{b},\varphi_i}(\bar{x})$ определены для любого $i \in \omega$. Имеем

$$Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x}) = \bigvee_i Force_{\bar{b},\varphi_i}(\bar{x}).$$

(3) Пусть φ – вычислимая Π_α-формула, то есть $\varphi = \bigwedge_i \varphi_i$, и для любого i φ_i есть вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$. Формулы $Force_{\bar{b},\bar{d},\varphi_i}(\bar{x})$ определены для любого $i \in \omega$ и любого набора $\bar{d}$. Тогда $Force_{\bar{b},\varphi}(\bar{x})$ есть конъюнкция по всем i и $\bar{b}_1$ формул вида

$$\forall u_1 \bigvee_{\bar{b}_2} \exists \bar{u}_2 Force_{\bar{b},\bar{b}_1,\bar{b}_2,\varphi_i}(\bar{x},\bar{u}_1,\bar{u}_2).$$

Здесь длины наборов переменнных $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ совпадают с длинами наборов $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ соответственно. □

Приступим к доказательству теоремы. Зафиксируем полную последовательность вынуждения $(p_n)_{n\in\omega}$, и пусть F и $\mathfrak{B}$ есть соответственно изоморфизм и копия $\mathfrak{A}$, построенные по этой последовательности описанным выше способом. Нам нужно найти вычислимую Σ_α-формулу, определяющую отношение R в $\mathfrak{A}$, используя тот факт, что $F(R)$ является $\Sigma_\alpha(\mathfrak{B})$-определимым. Итак, $F(R) = W_e^{\Delta^0_\alpha(\mathfrak{B})}$ для некоторого $e \in \omega$. По лемме 15 существует $n \in \omega$ такое, что

$$p_n \Vdash W_e^{D_\alpha} = F(R).$$

Пусть p_n – функция переводящая набор $\bar{d}$ в набор $\bar{c}$. Из определения вынуждения следует, что $a \in R$ тогда и только тогда, когда существуют $q \supseteq p_n$ и $b \in B$ такие, что $q(b) = a$ и $q \Vdash b \in W_e^{D_\alpha}$.

По лемме 16, для любых b и $\bar{b}_1$ из B существует вычислимая Σ_α-формула $Force_{\bar{d},b,\bar{b}_1,b\in W_e^{D_\alpha}}(\bar{c},x,\bar{u})$ сигнатуры σ такая, что

$$\mathfrak{A} \models Force_{\bar{d},b,\bar{b}_1,b\in W_e^{D_\alpha}}(\bar{c},a,\bar{a}_1)$$

тогда и только тогда, когда для условия q, переводящего $\bar{d},b,\bar{b}_1$ в $\bar{c},a,\bar{a}_1$, выполняется $q \Vdash b \in W_e^{D_\alpha}$. Пусть $\varphi(\bar{c},x)$ – дизъюнкция по всем $b,\bar{b}_1$ из B формул вида

$$\exists \bar{u} Force_{\bar{d},b,\bar{b}_1,b\in W_e^{D_\alpha}}(\bar{c},x,\bar{u}).$$

Тогда формула $\varphi(\bar{c},x)$ определяет R в $\mathfrak{A}$, причем легко привести ее к искомому виду вычислимой Σ_α-формулы. Теорема доказана.

Глава 3. Вычислимые функционалы в семантике Монтегю

3.1 Введение

При построении формальной семантики предложений естественного языка в моделях интенсиональной логики Монтегю центральную роль играют пространства семантических сущностей e (entities). Вместе с пространством истинностных значений t (truth values), пространство семантических сущностей e определяет иерархию функционалов конечных типов (функций, функций от функций и т.д.), используемых для интерпретации частей речи (нарицательное существительное, переходный и непереходный глагол и т.п.). Для построения конструктивных моделей логики Монтегю автором используются вычислимые функционалы конечных типов, определенные на аппроксимационных пространствах (доменах) Ершова-Скотта.

В натуральной логике ван Бентема изучаются логические следствия предложений естественного языка с использованием исключительно синтаксических методов и определенного на нарицательных существительных и непереходных глаголах отношения “частное-общее”. Функциональный подход к интерпретации частей речи при этом также является основным и опирается на исчисление Ламбека и категориальные грамматики Айдукевича - Бар-Хиллела. При этом пространство сущностей не используется, а базисными являются синтаксические типы n (names) и s (sentences). Стоит отметить, что в семантике Монтегю синтаксическому типу n соответствует несколько принципиально различных семантических типов, построенных из базисных типов e и t (например, t/e для нарицательных существительных и $t/(t/e)$ для имен собственных).

В данной главе предложен подход, объединяющий семантику интенсиональной логики Монтегю и синтаксический вывод в натуральной логике ван Бентема. Его суть заключается в согласовании отношения “специализация-аппроксимация” на пространстве сущностей с отношением “частное-общее” на множестве синтаксических объектов. Это позволяет построить исчисление, расширяющее натуральную логику и доказать его корректность на классе моделей, содержащем все конструктивные модели логики Монтегю. В качестве следствия

построен класс предложений естественного языка с универсальной квантификацией, проверка истинности которых в таких моделях алгоритмически разрешима.

В тексте используются результаты исследований, начатых в [9, 13, 11, 2]. Теория типов и функционалы конечных типов играют важную роль в интенсиональной логике Монтегю при формализации основных грамматических категорий естественных языков. В работах Монтегю, как и в работах других исследователей в этой области математической лингвистики, насколько известно автору, вопросы алгоритмической сложности объектов и конструкций этой теории не рассматривались. Функционалы конечных типов (функции, функции от функций и т.п.) являются сложными объектами и задача их конструктивной интерпретации также достаточно сложна. С другой стороны, изучение алгоритмических аспектов математической лингвистики важно с точки зрения компьютерной лингвистики. В работе [2] построена серия конструктивных (обобщенно вычислимых) моделей интенсиональной логики Монтегю, основанных на понятиях обобщенной вычислимости, эффективной определимости в допустимых множествах и аппроксимационных пространств Ершова-Скотта.

Предложена модификация модели, введенной в [2]. Данная модификация основана на понятии ранга множества и учитывает внутреннее строение сущностей (их свойства). Показано, что при соответствующих определениях предпорядка на сущностях и пространства истинностных значений построенная модель изоморфна векторной модели, также введенной в [2]. В силу определения построенная модель оказывается более “компактной” в том смысле, что ранги используемых элементов в общем случае оказываются меньше.

Кроме того, исследуются способы эффективной интерпретации семантики возможных миров в моделях функционалов конечных типов. Понятие возможного мира и связанное с ним понятие интенсионала являются ключевыми в анализе семантики предложений естественных языков, и именно они дают наибольшие трудности при построении эффективных интерпретаций семантики Монтегю. Предложены интерпретации для двух моделей, проведен анализ некоторых предложений английского языка, использующий эти интерпретации.

Исследуется также способ вывода логических следствий из предложений естественных языков. За основу берутся идеи из работ по натуральной логике [4, 6, 7]. Ключевым оказывается понятие монотонности, которое вместе с

предпорядком на сущностях, а также анализом синтаксической структуры предложения, позволяет автоматически получать логические следствия. На основе этого строится исчисление, доказывается теорема о корректности. Исчисление затем применяется в рассмотренных моделях функционалов конечных типов на Σ-формулах, соответствующих предложениям естественных языков, для логического вывода из них новых предложений.

3.2 Основные понятия

Наследственно конечные надстройки являются "простейшими" примерами моделей теории KPU, предложенной С. Крипке, Р. Платеком, Дж. Барвайсом и Ю. Л. Ершовым для формализации понятия обобщенной вычислимости с помощью Σ-определимости в допустимых множествах (см. [1, 9, 18]).

Для произвольного множества M определим множество $HF(M)$ наследственно конечных множеств над M следующим образом:

$HF_0(M) = \varnothing$;

$HF_{n+1}(M) = \mathcal{P}_\omega(M \cup HF_n(M))$, $n < \omega$

(здесь $\mathcal{P}_\omega(X)$ – множество всех конечных подмножеств множества X);

$HF(M) = \bigcup\limits_{n<\omega} HF_n(M)$.

Если $\mathfrak{M}$ – структура предикатной сигнатуры σ, на множестве $M \cup HF(M)$ можно определить структуру $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{U, \varnothing, \in\}$ ($U, \varnothing, \in$ – символы, не входящие в σ) со следующей интерпретацией сигнатурных символов:

$U^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$;

$P^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = P^{\mathfrak{M}}$, $P \in \sigma$;

$\varnothing^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = \varnothing \in HF_0(M)$;

$\in^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = \in \cap((M \cup HF(M)) \times HF(M))$.

Класс Δ_0-*формул* сигнатуры σ' определяется как наименьший класс, содержащий атомарные формулы и замкнутый относительно $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$, а также ограниченных кванторов $\forall x \in y$ и $\exists x \in y$ ($\forall x \in y\, \varphi$ и $\exists x \in y\, \varphi$ являются сокращениями для формул $\forall x(x \in y \to \varphi)$ и $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$, соответственно).

Класс Σ-*формул* сигнатуры σ' определяется как наименьший класс, содержащий Δ_0-формулы и замкнутый относительно $\vee$, $\wedge$, ограниченных кванторов $\forall x \in y$, $\exists x \in y$, и $\exists x$. Как обычно, множество называется Σ-*определимым*, если оно определяется некоторой Σ-формулой с параметрами, и Δ-*определимым*, если оно и его дополнение являются Σ-определимыми.

3.2.1 Σ-предикаты конечных типов

Все определения текущего параграфа можно найти в [12].

Пусть $\mathbb{A}$ – KPU-модель. Для всякого множества $a \in A$, определим множества $p_l^* a = \{b \mid \exists c(\langle b,c\rangle \in a)\}$, $p_r^* a = \{b \mid \exists c(\langle c,b\rangle \in a)\}$. Для всякого $B \subseteq A$, определим $B^* = \{b \mid b \subseteq B \,\&\, b \in A\}$.

Определение 3.2.1. Четверка $\mathcal{B} = \langle B, \leq, Cons, \sqcup\rangle$ называется f-*базой* над $\mathbb{A}$, если выполнены следующие условия:

- B – Δ-подмножество модели $\mathbb{A}$;
- $\leq$ – Δ-предпорядок на B;
  обозначим через $[B]$ фактор-множество множества B по отношению эквивалентности $\equiv$, определенному предпорядком $\leq$ ($b_0 \equiv b_1 \Leftrightarrow b_0 \leq b_1 \,\&\, b_1 \leq b_0$); через $[b]$ обозначим элемент из $[B]$ – клас эквивалентности элемента $b \in B$; если $C \subseteq B$, то $[C] = \{[b] \mid b \in C\}$; сохраним обозначение $\leq$ для предпорядка, индуцированного предпорядком $\leq$ на $[B]$;
- $Cons$ – Δ-подмножество $B^* \setminus \{\emptyset\}$, и для $b_* \in B^*$ выполнено
$$b_* \in Cons \Leftrightarrow (\exists b \in B)(\forall b' \in b_*)(b' \leq b);$$
- $\sqcup : Cons \to B$ – Σ-функция такая, что $[\sqcup b_*]$ для любого $b_* \in Cons$ является точной верхней гранью подмножества $[b_*] \subseteq [B]$ в $\langle [B], \leq\rangle$.

Определение 3.2.2. Если $\mathcal{B}_0 = \langle B_0, \leq_0, Cons_0, \sqcup_0\rangle$ и $\mathcal{B}_1 = \langle B_1, \leq_1, Cons_1, \sqcup_1\rangle$ – f-базы над $\mathbb{A}$, то *прямым произведением* $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ f-баз $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ называется f-база $\langle B_0 \times B_1, \leq^*, Cons^*, \sqcup^*\rangle$, где $\leq^*$, $Cons^*$, $\sqcup^*$ определены так:

- $\langle b_0,b_1\rangle \leq^* \langle b_0',b_1'\rangle \leftrightharpoons b_0 \leq_0 b_0' \,\&\, b_1 \leq_1 b_1'$ для всех $b_0,b_0' \in B_0$ и $b_1, b_1' \in B_1$;
- $b_* \in Cons^* \Leftrightarrow p_l^*(b_*) \in Cons_0 \,\&\, p_r^*(b_*) \in Cons_1$ для всех $b_* \in (B_0 \times B_1)^*$;

– $\sqcup^* b_* \leftrightharpoons \langle \sqcup_0 p_l^*(b_*), \sqcup_1 p_r^*(b_*)\rangle$ для всех $b_* \in Cons^*$.

Определение 3.2.3. Четверка $\mathcal{B} = \langle B, b_0, \leq, \sqcup\rangle$ называется *f^*-базой* над $\mathbb{A}$, если $\langle B, \leq, B^* \setminus \{\emptyset\}, \sqcup\rangle$ является f-базой над $\mathbb{A}$, $[b_0]$ – наименьший элемент в $\langle [B], \leq\rangle$ и $\sqcup\emptyset = b_0$.

Понятие f^*-базы играет ключевую роль при определении функционального произведения, так как множество значений функции в общем случае может быть устроено произвольным образом.

Определение 3.2.4. Пусть $\mathcal{B}_0 = \langle B_0, \leq_0, Cons_0, \sqcup_0\rangle$ – f-база, и пусть $\mathcal{B}_1 = \langle B_1, b_1, \leq_1, \sqcup_1\rangle$ – f^*-база. *Функциональным произведением* $F(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ f-базы $\mathcal{B}_0$ и f^*-базы $\mathcal{B}_1$ назовем f^*-базу $\langle (B_0 \times B_1)^*, \emptyset, \leq, \sqcup\rangle$, где $\leq$ и $\sqcup$ определены так:

– $f_0 \leq f_1 \leftrightharpoons \forall b_0 \in p_l^* f_0 (\sqcup_1 \{b_1 \mid \exists b_0' \in p_l^* f_0 (b_0' \leq_0 b_0 \,\&\, \langle b_0', b_1\rangle \in f_0)\} \leq_1$
$\leq_1 \sqcup_1 \{b_1 \mid \exists b_0' \in p_l' f_1 (b_0' \leq_0 b_0 \,\&\, \langle b_0', b_1\rangle \in f_1)\})$ для $f_0, f_1 \in (B_0 \times B_1)^*$;

– $\sqcup f_* = \cup f_*$ для $f_* \in ((B_0 \times B_1)^*)^*$.

Определение 3.2.5. Для любой f-базы $\mathcal{B} = \langle B, \leq, Cons, \sqcup\rangle$ определяется *семейство $I_\Sigma(\mathcal{B})$ Σ-идеалов $\mathcal{B}$* – непустых Σ-подмножеств $C \subseteq B$ таких, что:

– $c \in C, b \in B, b \leq c \Rightarrow b \in C$;

– $c \in C^* \Rightarrow c \in Cons \,\&\, \sqcup c \in C$.

На множестве Σ-идеалов $I_\Sigma(\mathcal{B})$ определим топологию базисом $V_b \leftrightharpoons \{C \mid C \in$
$\in I_\Sigma(\mathcal{B}), b \in C\}, b \in B$. Множество $I_\Sigma(\mathcal{B})$ вместе с введенной топологией будем называть пространством Σ-идеалов f-базы $\mathcal{B}$. Пространство $I_\Sigma(\mathcal{B})$ является отделимым (T_0-пространством).

Пусть $\mathcal{B}_0$ – f-база, $\mathcal{B}_1$ – f^*-база. По любому идеалу I f-базы $F(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ можно определить некоторую непрерывную функцию $f_I : I_\Sigma(\mathcal{B}_0) \to I_\Sigma(\mathcal{B}_1)$. А именно, пусть $I_0 \in I_\Sigma(\mathcal{B}_0)$. Полагаем

$$f_I(I_0) \leftrightharpoons \{b_1 \mid b_1 \in B_1, (\exists c^* \in I)(\exists b_0 \in I_0)\exists b_1' (b_1 \leq_1 b_1' \,\&\, \langle b_0, b_1'\rangle \in c^*)\}.$$

Если $\{\langle b_0, b_1\rangle\} \in I, b_0 \in I_0$, то $b_1 \in f_I(I_0)$. Кроме того, отображение $I \to f_I$ из $I_\Sigma(F(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1))$ в $C(I_\Sigma(\mathcal{B}_0), I_\Sigma(\mathcal{B}_1))$ (множество всех непрерывных отображений пространства $I_\Sigma(\mathcal{B}_0)$ в пространство $I_\Sigma(\mathcal{B}_1)$) является разнозначным.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, =, P_1(A), \cup \restriction P_1(A)\rangle$, где $P_1(A) \leftrightharpoons \{\{a\} \mid a \in A\}$. Эта четверка является f-базой, причем $I_\Sigma(\mathcal{A}) = P_1(A)$.

Пусть α – произвольный ординал в $\mathbb{A}$, $\mathcal{B}_\alpha = \langle \alpha, \emptyset, \subseteq, \cup \restriction \alpha \rangle$. Эта четверка является f^*-базой, причем $I_\Sigma(\mathcal{B}_\alpha) = (\alpha + 1) \setminus \emptyset$. Далее рассматривается f^*-база $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$.

Определение 3.2.6. Множество *типов* T вместе с его собственным подмножеством PT определяется так:

- $\boldsymbol{o} \in T \setminus PT, B \in PT \subseteq T$;
- если $\tau_0, \tau_1 \in T(PT)$, то $(\tau_0 \times \tau_1) \in T(PT)$;
- если $\tau_0 \in T, \tau_1 \in PT$, то $(\tau_0 \to \tau_1) \in PT$.

Определение 3.2.7. Для каждого типа $\tau \in T$ *f-база* $\mathcal{F}_\tau$ определяется так:

- $\mathcal{F}_{\boldsymbol{o}} \leftrightharpoons \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_B \leftrightharpoons \mathcal{B}$;
- $\mathcal{F}_{(\tau_0 \times \tau_1)} \leftrightharpoons \mathcal{F}_{\tau_0} \times \mathcal{F}_{\tau_1}$;
- $\mathcal{F}_{\tau_0 \to \tau_1} \leftrightharpoons F(\mathcal{F}_{\tau_0}, \mathcal{F}_{\tau_1})$.

Если $\tau \in PT$, то $\mathcal{F}_\tau$ – f^*-база.

Определение 3.2.8. *Σ-предикатом типа* $\tau \in T$ на A называется любой элемент из $I_\Sigma(\mathcal{F}_\tau)$.

Лемма 3.2.1. *Для любого $n > 0$ существует естественное взаимно однозначное соответствие между Σ-предикатами типа $\boldsymbol{o}^n \to B$ и n-местными Σ-предикатами на A.*

Предложение 3.2.1. *Отображение $F : \Sigma(A) \to \Sigma(A)$ является ограничением некоторого Σ-оператора тогда и только тогда, когда F – непрерывное отображение в сильной топологии и существует Σ-функция $f : A \to A$ такая, что $F(Q_{u,a}) = Q_{u,f(a)}$ для всех $a \in A$.*

Предложение 3.2.2. *Для семейства $S \subseteq \Sigma(A)$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *S соответствует Σ-предикат типа $((\boldsymbol{o} \to B) \to B)$.*
2. *Существует Σ-формула $\Phi(P^+)$ сигнатуры $\sigma \cup \langle P^1 \rangle$ такая, что*
$$S = \{Q \mid Q \in \Sigma(A), \langle \mathbb{A}, Q \rangle \vDash \Phi(P)\}.$$

Предложение 3.2.3. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие между Σ-предикатами типа $((\boldsymbol{o} \to B) \to (\boldsymbol{o} \to B))$ и одноместными Σ-операторами.*

3.2.2 Интенсиональная логика Монтегю

Все определения текущего параграфа можно найти в [5].

Пусть s,e и t – некоторые фиксированные объекты (не являющиеся упорядоченными парами или тройками).

Определение 3.2.9. Множество *типов* $Type$ определяется так:
- $t \in Type$, $e \in Type$;
- если $a \in Type$, $b \in Type$, то $(a \to b) \in Type$;
- если $a \in Type$, то $(s \to a) \in Type$.

В языке интенсиональной логики IL содержится счетное число констант каждого типа $a \in T$ и счетное число переменных каждого типа $a \in T$. Моделью интенсиональной логики IL называется упорядоченная пятерка $\langle A, W, T, \leq, F\rangle$ такая, что A,W,T – непустые множества, $\leq$ – линейный порядок на T, F – функция, определенная на множестве всех констант IL с областью значений, описанной в определении ниже. Множества W и T соответствуют множествам возможных миров и временной шкале соответственно.

Определение 3.2.10. Множество *возможных денотатов* типа $\sigma \in T$ определяется так:
- $D_e = A$, $D_t = \{0,1\}$;
- $D_{(a\to b)} = D_b^{D_a}$ (множество всех отображений из D_a в D_b);
- $D_{(s\to a)} = D_a^{W\times T}$.

Через S_a обозначим множество $D_{(s\to a)}$. Функция F сопоставляет каждой константе типа a некоторый элемент из S_a, который называется интенсионалом этой константы. Элементы из D_a называются экстенсионалами объектов типа a. Функция F является означиванием констант при проверке истинности формул интенсиональной логики.

Конечные типы, описанные в определении 3.2.9, используются для интерпретации различных частей речи естественного языка. Некоторые категории и типы интенсиональной логики и их соответствия в английском языке представлены в таблице 1.

Экстенсионал (множество денотатов) типа a – это множество значений части речи, интерпретируемой типом a, после перевода ее в язык интенсио-

Имя категории	Грамматический эквивалент	Соответствующий тип	Основные выражения
e	нет	e	нет
t	предложения	t	нет
IV	непереходные глаголы	$(e \to t)$	walk (гулять),talk (разговаривать)
CN	нарицательныесуществительные	$(e \to t)$	man (мужчина),woman (женщина)
TV	экстенсиональныепереходные глаголы	$(e \to (e \to t))$	love (любить),find (искать)
CN/CN	экстенсиональныеприлагательные	$((e \to t) \to (e \to t))$	tall (высокий),young (молодой)
CN/CN	экстенсиональныенаречия	$((e \to t) \to (e \to t))$	rapidly (быстро),slowly (медленно)
T	существительные фразы и имена собственные	$((s \to (e \to t)) \to t)$	John (Джон), ninety (90), he (он)
t/t	определителипредложения	$((s \to t) \to t)$	necessarily (необходимо), possibly (возможно)
IV/t	глаголы, образующие придаточные предложения	$((s \to t) \to (e \to t))$	believe (полагать),assert (утверждать)

Таблица 1 — **Категории и типы некоторых выражений**

нальной логики. Следовательно, интенсионал типа a – это функция, ставящая в соответствие паре $W \times T$ некоторый экстенсионал этого типа.

Так, например, непереходным глаголам соответствует тип $(e \to t)$ (характеристические функции или одноместные предикаты), а именам собственным соответствует тип $((s \to (e \to t)) \to t)$ – "свойство быть свойством" (или набор свойств, истинных для индивида, названного некоторым именем) (в дальнейшем изложении мы не рассматриваем интенсиональные переходные глаголы, которые имеют тип $[(s \to ((s \to (e \to t)) \to t)) \to (e \to t)]$). Также имеет смысл рассматривать чисто экстенсиональные части речи (например, экстенсиональные переходные глаголы или прилагательные) для упрощенного анализа предложений естественных языков.

В работе [2] было установлено соответствие между объектами допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ и типами, используемыми в интенсиональной логике, которое указано в следующей таблице

Имя категории	Грамматический эквивалент	Соответствующий тип	Соответствие в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
e	нет	e	множества $\{a\}$ для $a \in \mathbb{HF}(\mathbb{R})$
t	предложения	t	нет
IV	непереходные глаголы	$(e \to t)$	одноместные Σ-предикаты
CN	нарицательныесуществительные	$(e \to t)$	одноместные Σ-предикаты
TV	экстенсиональныепереходные глаголы	$(e \to (e \to t))$	двухместные Σ-предикаты
CN/CN	экстенсиональныеприлагательные	$((e \to t) \to (e \to t))$	Σ-операторы
CN/CN	экстенсиональныенаречия	$((e \to t) \to (e \to t))$	Σ-операторы
T	существительные фразы и имена собственные	$((s \to (e \to t)) \to t)$	Σ-определимые семейства двухместных Σ-предикатов
t/t	определителипредложения	$((s \to t) \to t)$	Σ-определимые семейства Σ-предикатов на $P_1(\mathbb{R})$
IV/t	глаголы, образующие придаточные предложения	$((s \to t) \to (e \to t))$	Σ-операторы

Таблица 2 — **Типы интенсиональной логики и объекты в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$**

3.3 Ранговая модель интенсиональной логики

В обозначениях [5] моделью интенсиональной логики является упорядоченная пятерка $\langle A, W, T, \leq, F\rangle$. Далее рассматриваются обобщенно вычислимые модели интенсиональной логики, построенные с помощью вычислимых функционалов конечных типов. В таких моделях множеству A (типу сущностей e) соответствует f-база $\mathcal{A}$, пространству истинностных значений (типу t) соответствует f^*-база $\mathcal{B}$, множествам W и T, используемым для образования интенсиональных типов (состояниям s) соответствует f-база $\mathcal{W}$. Означиванию F соответствует вся иерархия функционалов конечных типов, порожденных тройкой $\langle\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{W}\rangle$ в соответствии с классическими типами, рассматриваемыми в интенсиональной логике. Таким образом, будем говорить, что тройка $\langle\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{W}\rangle$ задает (обобщенно вычислимую) модель интенсиональной логики.

Напомним, что через $P_1(X)$ обозначается множество всех одноэлементных подмножеств X, т.е. $P_1(X) = \{\{x\}|x \in X\}$. В [2] была введена модель интенсиональной логики, состоящая из f-базы

$$\mathcal{A}_0 = \langle X, = , P_1(X), \cup\rangle$$

для $X = HF(\mathbb{R}) \cup \mathbb{R}$, соответствующей пространству сущностей, f^*-базы

$$\mathcal{B} = \langle\{0,1\}, 0, \leq , \max\rangle,$$

соответствующей пространству истинностных значений, а также f-базы

$$\mathcal{W} = \langle W, = , P_1(W), \cup\rangle$$

для $W = P_1(\mathbb{R})$, соответствующей пространству возможных миров. Сущностями в ней являются одноэлементные подмножества X, а их теоретико-множественная структура не учитывается: в качестве предпорядка на сущностях рассматривается тривиальное равенство, а сами сущности являются, условно говоря, просто “точками” без какой-либо информации. Пространство истинностных значений этой модели можно интуитивно трактовать как “0 значит, что свойство отсутствует, но, возможно, появится в будущем” и “1 значит, что свойство присутствует навсегда”.

Кроме того, была описана модель, состоящая из f-базы

$$\mathcal{A}_{vec} = \langle(\mathbb{R} \cup \{\bot\})^{<\omega}, \leq_{vec} , Cons_{vec}, \sqcup_{vec}\rangle,$$

где $\alpha_1 \leq_{vec} \alpha_2$, если и только если $lh(\alpha_1) \leq lh(\alpha_2)$ и для всех $i \leq lh(\alpha_1)$ верно $\alpha_1(i) \leq \alpha_2(i)$, при этом считаем, что $\bot \leq a$ для любого $a \in \mathbb{R}$ и для a,$b \in \mathbb{R}$ несравнимы при $a \neq b$, f^*-базы

$$\mathcal{C} = \langle \{0,1,\bot,\top\},\bot, \leq ,\sqcup\rangle,$$

где $\bot < 0$, $\bot < 1$, $0 < \top$, $1 < \top$, а 0 и 1 несравнимы, и аналогичной первому случаю f-базы

$$\mathcal{W} = \langle W, = ,P_1(W),\cup\rangle$$

для $W = P_1(\mathbb{R})$. В ней сущности - это упорядоченные наборы, а координаты наборов соответствуют свойствам (из категорий IV и CN) сущностей. Кроме того, считаем, что задана некоторая кодировка, говорящая, является i-я позиция упорядоченного набора бинарным или континуальным свойством.

Тройку $\langle \mathcal{A}_0,\mathcal{B},\mathcal{W}\rangle$ будем называть *простейшей моделью*, а тройку $\langle \mathcal{A}_{vec},\mathcal{C},\mathcal{W}\rangle$ – *векторной моделью* (для краткости в дальнейшем будем опускать пространство возможных миров). В этом разделе будет рассмотрена некоторая модификация простейшей модели. В ней будет учитываться строение сущностей (т.е. элементы, которые содержатся в них как в множествах). Сущность $\{a\}$,$a \in HF(\mathbb{R})$, будет определяться набором своих свойств, которые кодируются множеством $\{a_1 \in HF(\mathbb{R}) \,|\, a_1 \in a\}$. Будет введено отношение предпорядка на сущностях, а также изменено пространство истинностных значений. Отношение предпорядка и пространство истинностных значений будут введены в соответствии с векторной моделью интенсиональной логики, поэтому полученная модель (которую и назовем ранговой моделью интенсиональной логики) будет изоморфна ей.

3.3.1 Предварительное описание

Рассмотрим простейшую модель $\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{B}\rangle$. Укажем возможный способ интерпретации свойств сущностей в данной модели. Рассмотрим $a \in HF(\mathbb{R})$: пусть $a = \{a_1, \ldots ,a_k\}$. Элементы $a_1, \ldots ,a_k$ можно рассматривать как свойства объекта $\{a\}$ из базовых категорий IV и CN. Эти свойства можно декодировать, исходя из рангов элементов и некоторой их численной характеристики.

Положим $CN = \{cn_1, \ldots, cn_n, \ldots\}$, $IV = \{iv_1 \ldots, iv_n, \ldots\}$. Все свойства IV бинарные (либо выполняются, либо нет), однако свойства CN могут быть как бинарные, так и принимать произвольное значение из вещественных чисел (например, такие свойства как рост или вес), поэтому будем рассматривать две различные категории CN_{bin} и CN_{cont}. Укажем (возможную) кодировку свойств натуральными числами. Если связать с каждой категорией и элементом этой категории число ($IV \mapsto 1, iv_n \mapsto n; CN_{bin} \mapsto 2, (cn_{bin})_n \mapsto n, (cn_{bin})_n \mapsto n; CN_{cont} \mapsto 3, (cn_{cont})_n \mapsto n$), то с помощью функции Кантора $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ по числу $n \in \mathbb{N}$ можно восстановить категорию и элемент этой категории. Пусть, например, $IV = \{walk, talk\}$, $CN_{bin} = \{man, woman\}$ (считаем, что они пронумерованы в порядке перечисления). Так как $c(1,2) = 8$, а $c(2,1) = 7$, получим, что числу 8 соответствует категория IV и свойство $talk$, а числу 7 категория CN и свойство man. Численное значение непрерывных свойств можно кодировать, например, с помощью максимального вещественного числа, содержащегося в носителе элемента a. Более общо, будем считать, что задана некоторая абстрактная Σ-функция $Val : A \to \mathbb{R}$, определяющая значение для непрерывных свойств.

В качестве примера рассмотрим следующую модель:

– $IV = \{talk\}$;

– $CN_{bin} = \{human, male\}$;

– $CN_{cont} = \{height, speed\}$.

И следующее соответствие:

– $walk \mapsto c(1,1)$;

– $human \mapsto c(2,1)$, $male \mapsto c(2,2)$;

– $height \mapsto c(3,1)$, $speed \mapsto c(3,2)$.

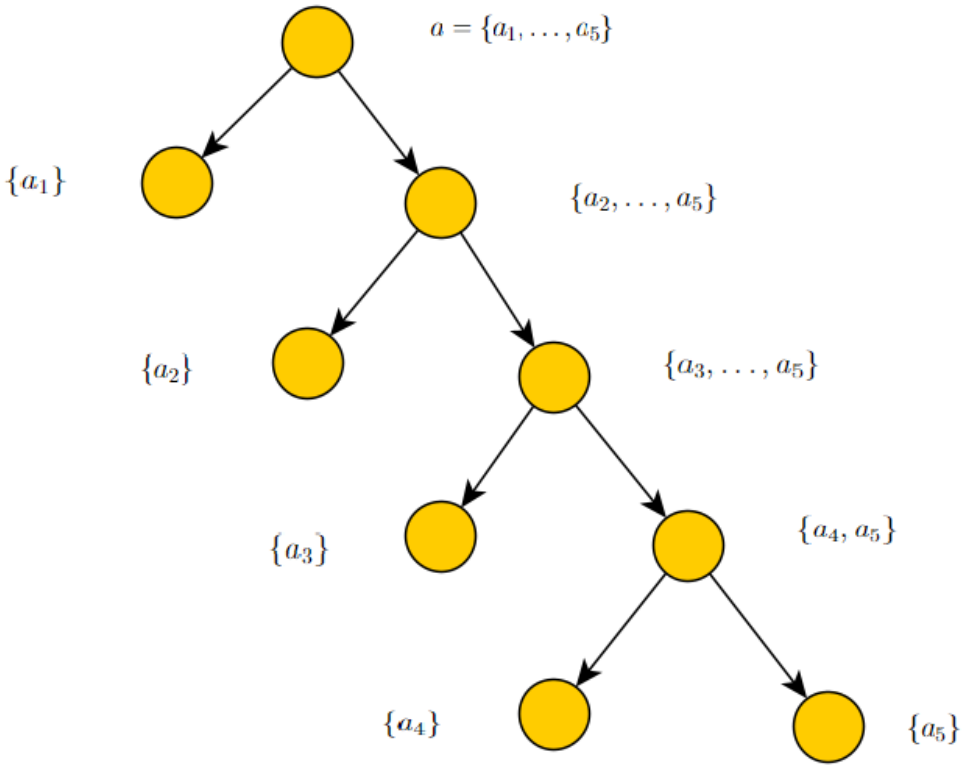
Предположим, что для некоторого элемента $a = \{a_1, \ldots, a_5\} \in HF(\mathbb{R})$ задано следующее соответствие:

– $rnk(a_1) = c(1,1)$;

– $rnk(a_2) = c(2,1)$, $rnk(a_3) = c(2,2)$;

– $rnk(a_4) = c(3,1), Val(a_4) = 180$, $rnk(a_5) = c(3,2), Val(a_5) = 6$.

Элемент $a = \{a_1, \ldots, a_5\}$ можно визуализировать с помощью графа следующим образом:



Тогда, просматривая каждую вершину графа (например, поисками в ширину или глубину), можно заключить, что

– $a_1 \sim walk$;
– $a_2 \sim human$, $a_3 \sim male$;
– $a_4 \sim height = 180$, $a_5 \sim speed = 6$.

Используя это соответствие, можно определить Σ-предикаты и Σ-операторы следующим образом:

– $(a \in human) \Leftrightarrow (\exists x \in a)(rnk(x) = c(2,1))$;
– $(a \in male) \Leftrightarrow (\exists x \in a)(rnk(x) = c(2,2))$;
– $(a \in man) \Leftrightarrow (a \in male \ \& \ a \in human)$;
– $(a \in tall(man)) \Leftrightarrow (a \in man \ \& \ (\exists x \in a)(rnk(x) = c(3,1) \ \& \ Val(x) \geq 185))$;
– $(a \in slowly(walk) \Leftrightarrow (a \in walk \ \& \ (\exists x \in a)(rnk(x) = c(3,2) \ \& \ Val(x) \leq 3))$.

3.3.2 Изоморфизм ранговой и векторной моделей

Рассуждения в подразделе выше приводились в рамках простейшей модели. Векторная (или онтологическая) модель интенсиональной логики использует другой подход для сравнения сущностей и определения пространства истинностных значений.

Обозначим за Nat множество ординалов в $HF(\mathbb{R})$. Предположим, что задана некоторая кодировка категорий IV и CN (например, как указано в предыдущем подразделе). т.е. существует частичная Σ-функция $\nu : Nat \to Nat^2$, которая позволяет по числу эффективно определить категорию и свойство из этой категории, причем ее область определения является Δ-множеством, а также некоторая Σ-функция $Val : HF(\mathbb{R}) \to Nat$, которая определяет численные характеристики свойств из CN_{cont}. Соответственно, существуют Δ-формулы $\varphi_{bin}(x)$ и $\varphi_{cont}(x)$ такие, что $\varphi_{bin}(x) \Leftrightarrow$ "x соответствует бинарному свойству" и $\varphi_{cont}(x) \Leftrightarrow$ "x соответствует непрерывному свойству". Укажем (следуя определению векторной модели), как в ранговой модели можно интерпретировать наличие, отсутствие или неизвестность свойства. Если $x \in a$ для $a \in HF(\mathbb{R})$, то:

- если $0 \in x$, то считаем, что свойство (определяемое рангом элемента x) отсутствует;
- если $0 \notin x$, то считаем, что свойство присутствует;
- если элемент ранга n отсутствует в a, то считаем, что нам неизвестно о наличии этого свойства.

С учетом сказанного необходимо исключить часть элементов из $HF(\mathbb{R})$, чтобы не допускать неоднозначность интерпретации. А именно, исключить все элементы, которые содержат в себе (как множества) разные элементы одинакового ранга, а также элементы, чей ранг не принадлежит области определения кодирующей функции ν. Таким образом, будем рассматривать множество S такое, что

$$a \in S \Leftrightarrow \forall x \in a[\forall y \in a(rnk(x) \neq rnk(y)) \,\&\, rnk(x) \in dom(\nu)].$$

S является Δ-множеством. Обозначим за $rnk^*(a)$ множество рангов элементов из a, т.е. $rnk^*(a) = \{n \in Nat : \exists x \in a(rnk(x) = n)\}$. На множестве S введем

Δ-предпорядок $\leq_1$ следующим образом:

$$a_1 \leq_1 a_2 \Leftrightarrow rnk^*(a_1) \subseteq rnk^*(a_2) \,\&\, \forall x \in a_1[(0 \in x \to \exists y \in a_2(rnk(x) = rnk(y) \,\&$$

$$\&\, 0 \in y)) \,\&\, (0 \notin x \,\&\, \varphi_{cont}(x) \to \exists y \in a_2(rnk(x) = rnk(y) \,\&\, Val(x) = Val(y)))].$$

Отношение эквивалентности, определяемое этим предпорядком, позволяет считать равными элементы с одинаковыми свойствами, но в которых эти свойства определены разными элементами. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать множества классов эквивалентности $[S]$ и (индуцированный на нем) порядок $\leq_1$.

Напомним, что элементами множества $Cons$ для векторной модели будут конечные цепи из $(\mathbb{R} \cup \{\bot\})^{<\omega}$. Функция $\sqcup$ определяется очевидно. Обозначим их за $Cons_{vec}$ и $\sqcup_{vec}$ соответственно. В качестве множества $Cons$ для ранговой модели будем также рассматривать конечные цепи (из $[S]$), а функция $\sqcup$ определяется аналогично векторной. Обозначим их за $Cons_{rnk}$ и $\sqcup_{rnk}$ соответственно. Порядки на векторной и ранговой моделях будем также обозначать за $\leq_{vec}$ и $\leq_{rnk}$. Рассмотрим f-базы

$$\mathcal{A}_0 = \langle [S], \leq_{rnk}, Cons_{rnk}, \sqcup_{rnk} \rangle,$$

$$\mathcal{A}_{vec} = \langle (\mathbb{R} \cup \{\bot\})^{<\omega}, \leq_{vec}, Cons_{vec}, \sqcup_{vec} \rangle$$

и отображение $\beta : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_{vec}$, определяемое следующим образом: элементу $a \in [S]$ соответствует упорядоченный набор α длины $rnk(a) - 1$ такой, что для всех $i \leq lh(\alpha)$:

- если $i \notin rnk^*(a)$, то $\alpha(i) = \bot$;
- если $\exists x \in a(rnk(x) = i \,\&\, 0 \in x)$, то $\alpha(i) = 0$;
- если $\exists x \in a(rnk(x) = i \,\&\, 0 \notin x \,\&\, \varphi_{cont}(x))$, то $\alpha(i) = Val(x)$;
- иначе $\alpha(i) = 1$.

Покажем, что β – биекция. Покажем инъективность. Пусть $a_1, a_2 \in [S]$ и $a_1 \neq a_2$, $\beta(a_1) = \alpha_1, \beta(a_2) = \alpha_2$. Либо $rnk^*(a_1) \neq rnk^*(a_2)$, либо $rnk^*(a_1) = rnk^*(a_2)$. Первое сразу влечет $\alpha_1 \neq \alpha_2$, так как найдется элемент x ранга i такой, что $x \in a_1$ и $x \notin a_2$, поэтому в силу определения отображения β верно $\alpha_1(i) \neq \alpha_2(i)$ (либо $\alpha_2(i)$ вовсе не определено и $lh(\alpha_1) \neq lh(\alpha_2)$). Пусть $rnk^*(a_1) = rnk^*(a_2)$. Тогда обязательно выполняется один из следующих пунктов:

- $\exists x \in a_1 \exists y \in a_2(rnk(x) = rnk(y) \,\&\, 0 \in x \,\&\, 0 \notin y)$;
- $\exists x \in a_1 \exists y \in a_2(rnk(x) = rnk(y) \,\&\, \varphi_{cont}(x) \,\&\, Val(x) \neq Val(y))$.

Из каждого пункта сразу следует $\alpha_1 \neq \alpha_2$, поэтому β является инъекцией. Покажем сюръективность. Пусть $\alpha \in (\mathbb{R} \cup \{\bot\})^{<\omega}$. Рассмотрим элемент $a \in [S]$ такой, что для всех $i \leq lh(\alpha)$:

- если $\alpha(i) = \bot$, то $i \notin rnk^*(a)$;
- если i соответствует континуальному свойству и $\alpha(i) \neq \bot$, то $\exists x \in a(rnk(x) = i \,\&\, Val(x) = \alpha(i))$;
- если $\alpha(i) = 0$, то $\exists x \in a(rnk(x) = i \,\&\, 0 \in x)$;
- иначе $\exists x \in a(rnk(x) = i \,\&\, 0 \notin x)$.

Указанные условия однозначно определяют элемент $a \in [S]$ такой, что $\beta(a) = \alpha$, поэтому β является сюръекцией.

Покажем теперь, что отображение β сохраняет порядок. Пусть $a_1, a_2 \in S$, $a_1 \leq_{rnk} a_2$, $\beta(a_1) = \alpha_1, \beta(a_2) = \alpha_2$. Так как $a_1 \leq_{rnk} a_2$, то $lh(\alpha_1) \leq lh(\alpha_2)$. Пусть $i \leq lh(\alpha_1)$. Если $\alpha_1(i) = \bot$, то $\alpha_1(i) \leq \alpha_2(i)$. Если $\alpha_1(i) = 0$, то по определению отображения β верно $\exists x \in a_1(rnk(x) = i \,\&\, 0 \in x)$, а по определению порядка $\leq_1$ получаем, что $\exists y \in a_2(rnk(x) = rnk(y) \,\&\, 0 \in y)$, что дает $\alpha_2(i) = 0$. Если теперь i соответствует континуальному свойству, то по определению отображения β верно $\exists x \in a_1(rnk(x) = i \,\&\, \varphi_{cont}(x) \,\&\, Val(x) = \alpha_1(i))$, что дает $\exists y \in a_2(rnk(x) = rnk(y) \,\&\, \varphi_{cont}(x) \,\&\, Val(y) = \alpha_1(i))$ и поэтому $\alpha_1(i) = \alpha_2(i)$. Итого для всех $i \leq lh(\alpha_1)$ верно $\alpha_1(i) \leq \alpha_2(i)$ и по определению порядка $\leq_{vec}$ получаем, что $\alpha_1 \leq_{vec} \alpha_2$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 3.3.1. *Существует изоморфизм между f-базами $\mathcal{A}_0 = \langle [S], \leq_{rnk}, Cons_{rnk}, \sqcup_{rnk} \rangle$ и $\mathcal{A}_{vec} = \langle (\mathbb{R} \cup \{\bot\})^{<\omega}, \leq_{vec}, Cons_{vec}, \sqcup_{vec} \rangle$.*

Если в качестве пространства истинностных значений взять

$$\mathcal{C} = \langle \{0, 1, \bot, \top\}, \bot, \leq, \sqcup \rangle,$$

то получаем следующее

Следствие 3.3.1. *Иерархии вычислимых функционалов конечных типов для ранговой модели вида $\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{C} \rangle$ и векторной модели вида $\langle \mathcal{A}_{vec}, \mathcal{C} \rangle$ эквивалентны.*

Кроме того, из определения указанного изоморфизма видно, что он является Σ-функцией.

Ранги упорядоченных наборов из праэлементов зависят только от длины набора. Действительно, справедливо следующее (более общее) утверждение

Лемма 3.3.1. *Если* $\mathbb{A}$ *– допустимое множество и* $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{A}$, $n \geq 2$, *то* $rnk(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle) = \sup\{\sup\limits_{i=\overline{1,n-1}}\{rnk(a_i)+2i\}, rnk(a_n)+2(n-1)\}$.

Доказательство. Индукция по n. При $n=2$ утверждение верно.

$n \to n+1$: так как $\langle a_1,\ldots,a_{n+1}\rangle = \langle a_1, \langle a_2,\ldots,a_{n+1}\rangle\rangle$, то

$$rnk(\langle a_1,\ldots,a_{n+1}\rangle) = \sup\{rnk(a_1)+2, \sup_{i=\overline{2,n}}\{rnk(a_i)+2i\}, rnk(a_{n+1})+2n\} =$$

$$= \sup\{\sup_{i=\overline{1,n}}\{rnk(a_i)+2i\}, rnk(a_{n+1})+2n\}.$$

□

Отсюда, если $r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{R}\cup\{\bot\}$, то $rnk(\langle r_1,\ldots,r_n\rangle) = 2(n-1)$. В ранговой модели, в силу определения, ранг элемента, соответствующего упорядоченному набору длины n, не превышает n. Таким образом, уже при $n>2$ получаются элементы меньших рангов. В общем случае ранги элементов ранговой модели будут значительно меньше, так как если $r_i = \bot$, то элемент ранга i отсутствует в соответствующем объекте ранговой модели. Кроме того, в силу введенного отношения эквивалентности при определении ранговой модели, большая часть наполнения наследственно конечной надстройки становится несущественной. В частности, так как ранг (но не содержимое) однозначно определяет некоторое свойство, достаточно ограничиться рассмотрением всего лишь одного праэлемента.

3.4 Интерпретация семантики возможных миров

В этом разделе будет показано, как по возможному миру, задаваемому вещественным числом (точнее, множеством $w = \{r\}$, где $r \in \mathbb{R}$) можно разумным образом определить Δ-подмножество в $HF(\mathbb{R})$ и f-базу на этом Δ-подмножестве, которая будет являться интерпретацией возможного мира w. Имея такие f-базы для всех возможных миров, при рассмотрении вопросов истинности формул (в зависимости от возможного мира) можно переходить от использования универсального означивания, которое в зависимости от возможного мира сопоставляет переменной то или иное значение, к проверке истинно-

сти формул в построенных f-базах, которые уже существенно меньше исходной структуры. Кроме того, это позволяет рассмотреть всю иерархию вычислимых функционалов конечных типов уже на структуре, соответствующей возможному миру.

Будут приведены различные интерпретации для моделей

$$\mathcal{A}_0 = \langle X, = , P_1(X), \cup \rangle,$$

где $X = HF(\mathbb{R})$, и

$$\mathcal{A}_{vec} = \langle (\mathbb{R} \cup \{\perp\})^{<\omega}, \leq , Cons_{vec}, \sqcup_{vec} \rangle$$

в силу их принципиальных различий.

3.4.1 Кодирование счетных множеств вещественных чисел

Здесь укажем, как по вещественному числу $r \in \mathbb{R}$ в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ можно задать счетное Δ-определимое множество вещественных чисел. Для этого понадобится несколько вспомогательных Σ-функций, определяемых (Σ-рекурсией по ординалам) следующим образом:
$f_1 : Nat \to \mathbb{R}$, $f_1(0) = 0$, $f_1(n+1) = f(n) + 1$.
$f_2 : \mathbb{R} \times Nat \to \mathbb{R}$, $f_2(r,0) = r$, $f_2(r,n+1) = \frac{f_2(r,n)}{10}$.
$pr : \mathbb{R} \times Nat \to Nat$, $pr(r,0) = a_0 \Leftrightarrow a_0 \in Nat \,\&\, f_1(a_0) \leq r \leq f_1(a_0) + 1$,
$pr(r,n+1) = a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} \in Nat \,\&\, \frac{f_1(a_{n+1})}{10^n} \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{f_1(a_i)}{10^i} \leq \frac{f_1(a_{n+1})}{10^n} + 1$.
Функция f_1 сопоставляет натуральному числу (ординалу) вещественное число (праэлемент), соответствующий этому натуральному числу. Функция f_2 делит вещественное число r на 10 в степени n, а функция pr определяет натуральное число, соответствующее n-ой цифре в десятичном представлении вещественного числа r. По функции pr можно определить (Σ-рекурсией) Σ-функцию $f_3 : \mathbb{R} \times Nat \to Nat$, нумерующую последовательность из первых n чисел в десятичном представлении вещественного числа, т.е. если $r = a_0,a_1 \ldots a_{n-1} \ldots$, то $f_3(r,n)$ есть номер последовательности натуральных чисел $\langle a_0, \ldots a_{n-1} \rangle$.

Пусть задано некоторое натуральное число k, которое указывает на то, сколько знаков в десятичной записи вещественных чисел рассматривать. Будем называть это число порядком аппроксимации вещественных чисел. Пусть $r \in \mathbb{R}$.

Определим Δ-множество $S_{\{r\}}$ следующим образом:

$$x \in S_{\{r\}} \Leftrightarrow \exists l(f_3(x,k) = l \,\&\, \forall i \leq k(pr(x,i) = pr(r,p_l^i)) \,\&\, \exists n(n \in Nat \,\&$$

$$\& \, f_1(n) = x \cdot 10^k),$$

$$x \notin S_{\{r\}} \Leftrightarrow \exists l(f_3(x,k) = l \,\&\, \exists i \leq k(pr(x,i) \neq pr(r,p_l^i)) \vee \exists n(n \in Nat \,\&$$

$$\& \, f_1(n) < x \cdot 10^k < f_1(n) + 1),$$

где p_l – l-ое простое число. Таким образом, во множество $S_{\{r\}}$ попадут все вещественные числа вида $a_0,a_1 \ldots a_{k-1}$, у которых i-я цифра в десятичном представлении равна p_l^i-ой цифре в десятичном представлении числа r, где число l есть номер последовательности $\langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle$. Кроме того, зададим Σ-функцию $\nu_{\{r\}} : S_{\{r\}} \to Nat$ так: $\nu(x) = n \Leftrightarrow x \in S_{\{r\}} \,\&\, \forall i \leq k(pr(x,i) = pr(r,p_n^i))$. Эта функция нумерует множество $S_{\{r\}}$.

3.4.2 Интерпретация семантики возможных миров для простейшей модели

Рассмотрим простейшую модель

$$\mathcal{A}_0 = \langle X, =, P_1(X), \cup \rangle,$$

где $X = HF(\mathbb{R})$. Возможный мир задается элементом из $P_1(\mathbb{R})$, т.е. множеством вида $w = \{r\}$ для $r \in \mathbb{R}$. Определим по возможному миру w Δ-множество S_w, как в предыдущем разделе. По нему построим Δ-множество H_w следующим образом:

$$x \in H_w \Leftrightarrow sp(x) \subseteq S_w,$$

где $sp(x)$ – носитель элемента x. Ясно, что это также Δ-множество. Тогда на множестве H_w можно определить f-базу

$$\mathcal{H}_w = \langle H_w, =, P_1(H_w), \cup \rangle,$$

которую и будем считать f-базой, соответствующей возможному миру w.

Интуитивно можно рассматривать вещественные числа как некоторое изначальное “наполнение” структуры $\mathcal{A}$, которая содержит в себе информацию о

всех возможных мирах сразу. Над этим наполнением в дальнейшем строятся множества из $HF(\mathbb{R})$, т.е. объекты нашей структуры $\mathcal{A}$. Выбирая вещественное число r и рассматривая задаваемое им множество $S_{\{r\}}$, мы выбираем часть из всего наполнения структуры $\mathcal{A}$ и рассматриваем объекты, построенные на этой части, которые и являются объектами возможного мира $w = \{r\}$.

3.4.3 Интерпретация семантики возможных миров для векторной модели

Приведем интерпретацию возможных миров для векторной модели вида

$$\mathcal{A}_{vec} = \langle (\mathbb{R} \cup \{\bot\})^{<\omega}, \leq_{vec}, Cons_{vec}, \sqcup_{vec} \rangle.$$

Аналогично рассматриваем в качестве возможного мира множество $w = \{r\}$ и строим по нему Δ-множество S_w. По множеству S_w определим Δ-множество H_w следующим образом (предполагая, что рассматриваются только упорядоченные наборы):

$$x \in H_w \Leftrightarrow \forall i \leq lh(x)[\exists r(r \in S_w \,\&\, \nu_w(r) = i \,\&\, x(i) \in S_{\{r\}}) \vee$$

$$\vee (i \notin pr_r^*(\nu_w) \,\&\, \text{“}x(i) \text{ принимает любое допустимое для себя значение”})],$$

где формула в кавычках в конце записывается как в разделе 1 с использованием Σ-формул φ_{bin} и φ_{cont}. Ясно также, что дополнение множества H_w есть Σ-множество, поэтому оно действительно является Δ-множеством. Сужения порядка $\leq_{vec}$, множества $Cons$ и функции $\sqcup$ на H_w позволяет корректно определить f-базу

$$\mathcal{H}_w = \langle H_w, \leq_{vec} \cap (H_w)^2, Cons_{vec} \cap (H_w)^*, \sqcup_{vec} \rangle,$$

которую будем считать интерпретацией возможного мира w.

Алгоритм построения носителя для возможного мира заключается в том, что по возможному миру $w = \{r\}$ строится счетное множество вещественных чисел S_w. Далее мы считаем, что каждое число $r_1 \in S_w$ вместе со своим номером $i = \nu_w(r_1)$ и аналогичным счетным множеством вещественных чисел $S_{\{r_1\}}$ задает множество допустимых значений для всех i-х координат упорядоченных наборов. Далее в множество H_w помещаются все такие упорядоченные набо-

ры, значения координат которых принадлежат множествам своих допустимых значений. Множество H_w и считается множеством объектов в возможном мире w.

Замечание 3.4.1. *Зачастую для анализа временных процессов необходимо рассматривать временные интервалы (вида* (r_1,r_2)*, где* $r_1 \leq r_2$ *– вещественные числа). Используя построенные выше* Σ*-функции для кодирования вещественных чисел и замечание о порядке аппроксимации вещественных чисел, а также некоторый способ кодирования упорядоченных пар вещественных чисел (например, паре* $r_1 = x{,}x_1x_2\ldots, r_2 = y{,}y_1y_2\ldots$ *соответствует число* $r = 0{,}xyx_1y_1x_2y_2\ldots$*) получим, что существуют* Σ*-предикаты* $cint(r)$ $int(r,r_1,r_2)$ *истинные тогда и только тогда, когда вещественное число* r *кодирует некоторый интервал и когда вещественное число* r *кодирует интервал* (r_1,r_2) *соответственно. Далее, следуя уже определенным конструкциям, положим* $S^{int}_{\{r\}} = S_{\{r_1\}} \cup S_{\{r_2\}}$ *в качестве возможного мира для интервала* (r_1,r_2)*, задаваемого числом* r*. При необходимости использования временных интервалов или точки во времени возможный мир* $w = \{r\}$ *может трактоваться одним или другим способом.*

3.4.4 Анализ времен Past Simple, Future Simple и Present Continuous английского языка

Приведем примеры использования интерпретации возможных миров. Рассмотрим предложения

(1) Michele barked,

(2) Michele will bark,

(3) Michele is barking,

а также

(4) Michele barks.

Ясно, что на возможных мирах можно определить Δ-формулой отношение порядка, согласованное с порядком на вещественных числах (т.е. $w_1(=\{r_1\}) \leq w_2(=\{r_2\}) \Leftrightarrow r_1 \leq r_2$). В [2] был приведен анализ предложений английского языка с использованием интенсионалов объектов. В данном подходе будем считать m переменной с определенным множеством ее возможных значений (экстенсионалов), из которого она получает значение при том или ином означивании. При этом каждому Σ-множеству S в $HF(\mathbb{R})$ соответствует некоторое Σ-множество $S_w \subseteq S$ в H_w (носителе f-базы $\mathcal{H}_w$, соответствующей возможному миру w). Это Σ-множество получается аналогично тому, как Σ-множества получались по Σ-идеалам функционального произведения $F(\mathcal{A},\mathcal{B})$, с заменой f-базы $\mathcal{A}$ на f-базу $\mathcal{H}_w$. Тогда Σ-множество S_w можно считать интерпретацией наиболее общего Σ-множества S в возможном мире w.

Следовательно, предложение (1) истинно в модели $\mathcal{A}$ и возможном мире $w = \{r\}$, если

$$\mathcal{A} \models \exists w_1(=\{r_1\})\exists r_2 r_3(int(r_1,r_2,r_3)\,\&\, r_3 < r\,\&\, m \in S^{int}_{w_1}\,\&\, bark'_{w_1}(m))$$

(при означивании γ), где $bark'(x)$ – Σ-предикат, соответствующий глаголу to bark. Иными словами, предложение (1) истинно в момент времени r, если существует временной интервал (r_2,r_3) такой, что $r_3 \leq r$ и в этом временном интервале истинно предложение (4). Аналогичным образом, с заменой порядка, трактуется и предложение (2). Предложение (3) истинно в модели $\mathcal{A}$ и возможном мире $w = \{r\}$, если

$$\mathcal{A} \models \exists w_1(=\{r_1\})\exists r_2 r_3(int(r_1,r_2,r_3)\,\&\, r_2 < r < r_3\,\&\, m \in S^{int}_{w_1}\,\&\, bark'_{w_1}(m)).$$

В случае предложения (3) возможный мир w, относительно которого проверяется истинность предложения, при необходимости также может быть интервалом.

Анализу алгоритмических аспектов интервальной семантики для времен группы Perfect в английском языке и грамматической категории вида в русском языке посвящены, в частности, работы [23, 13].

3.5 Логические следствия предложений естественных языков

В данном разделе будет построено исчисление, позволяющее получать логические следствия предложений английского языка, и доказана теорема о корректности для него. Построение исчисления основано на работах [4, 6, 7] по натуральной логике, идеи из которых будут применены к моделям интенсиональной логики и Σ-определимости. Логические следствия можно получать, исходя из понятия монотонности объектов и порядка на них. Так, например, если объект a является монотонным в предложении s и для некоторого объекта b выполнено $a \leq b$ (о том, как здесь понимается отношение $\leq$, будет сказано далее), то после замены a на b в предложении s мы получаем его логическое следствие. При этом монотонность объекта a как функции и его монотонность при вхождении в предложение могут отличатся. Кроме того, один и тот же объект может входить монотонно или антитонно (или нейтрально, т.е. ни монотонно, ни антитонно) в разные предложения в зависимости от его синтаксической структуры. Стоит отметить, что в рассматриваемых нами моделях интенсиональной логики, в виду подхода к вычислимым функционалам, все они являются непрерывными и, как следствие, монотонными.

Например, кванторы *every* и *some* трактуются как объекты типов

$$((e \to t) \xrightarrow{-} ((e \to t) \xrightarrow{+} t))$$

и

$$((e \to t) \xrightarrow{+} ((e \to t) \xrightarrow{+} t))$$

соответственно. т.е. квантор всеобщности является антитонным по первому аргументу и монотонным по второму, а квантор существования является монотонным по обоим аргументам. Поэтому в предложениях

$$\text{Every dog}^{\downarrow}\ \text{runs}^{\uparrow}$$

и

$$\text{Some dog}^{\uparrow}\ \text{runs}^{\uparrow}$$

мы имеем указанные полярности (стрелками обозначаются монотонные или антитонные вхождения). При этом объекты *dog* и *run* (типа $(e \to t)$) в зависимо-

сти от определения порядка на сущностях могут быть либо монотонными, либо нейтральными.

Прежде чем переходить к конкретным деталям, докажем следующую техническую лемму, дающую частичное описание объектов типа $(e \to t)$ в рассматриваемых далее моделях.

Лемма 3.5.1. *Пусть* $\mathbb{A}$ *–* KPU*-модель,* $\mathcal{B}_0 = \langle B_0, \leq_0, Cons, \sqcup \rangle$ *и* $\mathcal{B}_1 = \langle B_1, b_1, \leq_1, \sqcup \rangle$ *–* f *и* f^**-базы над* $\mathbb{A}$ *соответственно,* $\mathcal{B}_0$ *содержит единицу (ординал) и наибольший элемент* $\top$*, причем все элементы (кроме* b_1 *и* $\top$*) несравнимы. Пусть* R *– замкнутое вверх относительно* $\leq$ Σ*-множество. Тогда* $I_R = (\{\langle b,1\rangle \mid b \in R\} \cup \{\langle b,b_1\rangle \mid b \in B_0\})^*$ *есть* Σ*-идеал функционального произведения* $F(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$*.*

Доказательство. Пусть $g \in I_R$, $f \in (B_0 \times B_1)^*$ и $f \leq g$. Покажем, что

$$f \subseteq \{\langle b,1\rangle \mid \exists b \in R\} \cup \{\langle b,b_1\rangle \mid b \in B_0\}.$$

Пусть $\langle b,\varepsilon\rangle \in f$. Если $\varepsilon = b_1$, то $\langle b,\varepsilon\rangle \in \{\langle b,b_1\rangle \mid b \in B_0\}$. Случай $\varepsilon \neq 1$ невозможен, так в силу $f \leq g$ необходимо, чтобы $\varepsilon \in pr_r^* g$ или $\top \in pr_r^* g$. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда, так как $f \leq g$, существует $b_0 \leq b$ такой, что $\langle b_0,1\rangle \in g$. В силу замкнутости вверх множества R получаем, что $b \in R$ и $\langle b,\varepsilon\rangle \in \{\langle b,1\rangle \mid b \in R\}$. □

Для произвольных f,f^*-баз не всегда можно определить естественное взаимно-однозначное соответствие между Σ-множествами и Σ-идеалами функционального произведения. Однако эта лемма позволяет определить соответствие в одну сторону и рассматривать класс замкнутых вверх Σ-множеств в качестве объектов типа $(e \to t)$. Так, например, в векторной модели естественно рассматривать множества вида $R_i = \{\alpha \mid \alpha(i) = 1\}$ для фиксированного $i \in \mathbb{N}$, соответствующего бинарному свойству.

Далее, если не оговорено иное, будем рассматривать Σ-формулы с одной переменной (возможно, с одним параметром).

3.5.1 Предпорядок на Σ-формулах

В работах по натуральной логике при построении исчисления используется следующая модель: на объектах предпорядком является равенство, на истин-

ностных значениях $\{0,1\}$ верно $0 \leq 1$, на объектах f_1,f_2 функциональных типов $(a \to b)$ предпорядок вводится стандартным образом: $f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow \forall x(f_1(x) \leq f_2(x))$ (знаки $\leq$ понимаются в соответствующих пространствах). Это соответствует переходу от частного к более общему. Так, для объектов a,b типа $(e \to t)$ $a \leq b$ означает, что $\forall x(a(x) = 1 \to b(x) = 1)$. т.е. $dog \leq animal$ означает, что все сущности, являющиеся собакой, также являются животным.

В моделях вычислимых функционалов конечных типов предпорядки на сущностях и истинностных значениях могут выбираться произвольным образом, но порядок на объектах функциональных типов (Σ-идеалов), являющийся теоретико-множественным включением, аналогичен. Для Σ-идеалов I_0, I_1 включение $I_0 \subseteq I_1$, очевидно, означает, что все, что содержится в объекте I_0, также содержится в объекте I_1.

Так как Σ-идеалам функционального произведения $F(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$ естественным образом (и разнозначно) соответствуют непрерывные отображения пространств Σ-идеалов $I_\Sigma(\mathcal{B}_0)$ и $I_\Sigma(\mathcal{B}_1)$. Порядок на этих отображениях определяется так же поаргументно ($f_0 \sqsubseteq f_1 \Leftrightarrow \forall I_0 \in I_\Sigma(\mathcal{B}_0)(f_0(I_0) \subseteq f_1(I_0))$) и эквивалентен порядку на пространствах Σ-идеалов, т.е. если I_0,$I_1 \in I_\Sigma(F(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1))$, а f_{I_0},$f_{I_1} : I_\Sigma(\mathcal{B}_0) \to I_\Sigma(\mathcal{B}_1)$ соответствующие им отображения, то $I_0 \subseteq I_1 \Leftrightarrow f_{I_0} \sqsubseteq f_{I_1}$.

Это мотивирует следующий предпорядок на Σ-формулах:

Определение 3.5.1. *Пусть Φ,Ψ – Σ-формулы. Тогда в KPU-модели $\mathbb{A}$ полагаем $\Phi \leq \Psi$, если выполнено $\mathbb{A} \vDash \Phi \to \Psi$.*

Отношение эквивалентности, индуцированное этим предпорядком, есть "семантическая" эквивалентность: Σ-формулы эквивалентны (над $\mathbb{A}$), если их множества решений совпадают.

Если Φ – Σ-формула, то будем обозначать через I_Φ соответствующий Σ-идеал. Наоборот, если I – Σ-идеал (подходящего функционального произведения), то Φ_I – соответствующая ему Σ-формула (если соответствие сюръективное). Справедлива следующая лемма, связывающая порядки на Σ-формулах и Σ-идеалах:

Лемма 3.5.2.
1. *Пусть Φ,Ψ – некоторые Σ-формулы. Тогда в простейшей модели и в векторной модели $\Phi \leq \Psi$ влечет $I_\Phi \subseteq I_\Psi$.*
2. *Пусть I_0,I_1 – Σ-идеалы функционального произведения $F(\mathcal{A},\mathcal{B})$ простейшей модели. Тогда $I_0 \subseteq I_1$ влечет $\Phi_{I_0} \leq \Phi_{I_1}$.*

Доказательство. 1. Докажем для простейшей модели. Для векторной модели доказательство аналогично. Пусть $\Phi \leq \Psi$, тогда $\mathbb{A} \vDash \Phi \to \Psi$. Напомним (см. [12]), что

$$I_\Phi = (\{\langle a,1\rangle \,|\, a \in \Phi^{\mathbb{A}}[x]\} \cup \{\langle a,0\rangle \,|\, a \in A\})^*.$$

Пусть $f \in I_\Phi$. Достаточно показать, что

$$f \subseteq \{\langle a,1\rangle \,|\, a \in \Psi^{\mathbb{A}}[x]\} \cup \{\langle a,0\rangle \,|\, a \in A\}.$$

Тогда $f \in I_\Psi$. Если $\langle a_0,0\rangle \in f$, то $\langle a_0,0\rangle \in \{\langle a,0\rangle \,|\, a \in A\}$; если $\langle a_0,1\rangle \in f$, то $a_0 \in \Phi^{\mathbb{A}}[x]$, в силу истинности импликации $a_0 \in \Psi^{\mathbb{A}}[x]$, поэтому $\langle a_0,1\rangle \in \{\langle a,1\rangle \,|\, a \in \Psi^{\mathbb{A}}[x]\}$. Таким образом, $f \subseteq \{\langle a,1\rangle \,|\, a \in \Psi^{\mathbb{A}}[x]\} \cup \{\langle a,0\rangle \,|\, a \in A\}$.

2. Утверждение очевидно, если вспомнить, что (см. [12]) для $I \in I_\Sigma(F(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ соответствующая Σ-формула $\Phi_I(x)$ есть $\exists f(f \in I_0 \,\&\, \langle x,1\rangle \in f)$.

□

3.5.2 Полярности в Σ-формулах

Укажем здесь естественный алгоритм, позволяющий проставить в подформулах Σ-формулы Φ (без свободных вхождений переменных) полярности – монотонные или антитонные вхождения – и получить некоторое новое выражение Φ^p, которое будет использоваться в дальнейшем в правилах вывода.

Итак, пусть Φ – Σ-предложение. Сначала определим полярности для логических связок и кванторов. Для удобства записи будем полагать, что они действуют как функции на объектах типа $(e \to t)$. Это соответствует подходу Бенетта в интенсиональной логике (см. [5]), связанным с элиминацией базового типа e и рассмотрением вместо него типа $(e \to t)$ в качестве базового. Согласно [5], семантика обобщенных кванторов существования и всеобщности (через λ-нотацию) в интенсиональной логике Монтегю следующая:

– $\exists : \lambda P(\lambda Q \exists x(P(x) \,\&\, Q(x)))$;

– $\forall : \lambda P(\lambda Q \forall x(P(x) \to Q(x)))$.

Поэтому естественно ограничиться рассмотрением предложений сигнатуры σ, в которых под кванторами существования и всеобщности находятся формулы вида $\Phi_1 \,\&\, \Phi_2$ и $\Phi_1 \to \Phi_2$ соответственно. Таким образом, полагаем:

- $\&\ : ((e \to t) \overset{+}{\to} ((e \to t) \overset{+}{\to} t))$;
- $\vee : ((e \to t) \overset{+}{\to} ((e \to t) \overset{+}{\to} t))$;
- $\to$: $((e \to t) \overset{-}{\to} ((e \to t) \overset{+}{\to} t))$;
- $\neg : ((e \to t) \overset{-}{\to} t)$;
- $\exists : ((e \to t) \overset{+}{\to} ((e \to t) \overset{+}{\to} t))$;
- $\forall : ((e \to t) \overset{-}{\to} ((e \to t) \overset{+}{\to} t))$

Укажем схематично, как, исходя из полярностей связок и кванторов, по Φ построить выражение Φ^p. Если Φ является атомарной формулой, то Φ^p есть $\Phi^{\uparrow}$. Если Φ была построена из некоторых формул с помощью логических связок или кванторов, то полярности расставляются в соответствии с полярностями связок, кванторов и синтаксической структуры, при этом отрицание и негативная полярность меняют полярность формулы на противоположную. Например,

$$(\forall x \in a(\Phi_1(x,a) \to \Phi_2(x,a)))^p \leftrightharpoons \forall x \in a(\Phi_1^{\downarrow}(x,a) \to \Phi_2^{\uparrow}(x,a)),$$

если Φ_1 и Φ_2 являются атомарными,

$$(\forall x \in a(\Phi_1(x,a) \to \Phi_2(x,a)))^p \leftrightharpoons \forall x \in a(\neg\Psi_1^{\uparrow}(x,a) \to \Phi_2^{\uparrow}(x,a)),$$

если $\Phi_1 = \neg\Psi_1$, а Ψ_1 и Φ_2 являются атомарными, и

$$(\forall x \in a(\Phi_1(x,a) \to \Phi_2(x,a)))^p \leftrightharpoons \forall x \in a((\Psi_1^{\downarrow}(x,a) \,\&\, \Psi_2^{\downarrow}(x,a))^{\downarrow} \to \Phi_2^{\uparrow}(x,a)),$$

если $\Phi_1 \leftrightharpoons \Psi_1 \,\&\, \Psi_2$, а Φ_2 – атомарная. Аналогично можно выписать правила получения выражения Φ^p для всевозможных Φ. Для выражения Φ^p определим понятие подвыражения аналогично тому, как определяется понятие подформулы в исчислении предикатов.

3.5.3 Исчисление для моделей вычислимых функционалов конечных типов

Объекты типа $((e \to t) \to (e \to t))$ в естественном языке соответствуют прилагательным или наречиям (преобразователям объектов типа $(e \to t)$:

нарицательных существительных или непереходных глаголов). В моделях вычислимых функционалов им естественным образом соответствуют Σ-операторы (преобразователи Σ-множеств).

Однако не все Σ-операторы можно считать интерпретацией наречий или прилагательных. В естественном языке после применения прилагательного или наречия всегда получается меньший (или совпадающий) класс объектов: например, black dog $\leq$ dog или run slowly $\leq$ run (но при этом, например, разумно считать, что yellow sunflower = sunflower). Для произвольных же Σ-оператора и множества S не всегда верно $F(S) \subseteq S$.

Поэтому в дальнейшем при формулировке правил вывода, касающихся Σ-операторов, мы будем использовать следующее условие на пару Σ-формул $\Phi(x,y)$ и $\Psi(x)$:

$$\forall x(\exists z(\forall y \in z\Psi(y)\,\&\,\Phi(z,x)) \to \Psi(x)).$$

Обозначим эту формулу за $L(\Phi,\Psi)$. Если вспомнить, что левая часть импликации задает множество $F_\Phi(\Psi^{\mathbb{A}}[x])$ для Σ-оператора F_Φ в KPU-модели $\mathbb{A}$, то получим, что это правило гарантирует, что после применения Σ-оператора к Σ-множеству мы получим объект меньший либо равный исходному. Будем также формулу $(\exists z(\forall y \in z\Psi(y)\,\&\,\Phi(z,x))$ обозначать как $F_\Phi(\Psi)$, подразумевая, что в данном случае формула Φ от двух переменных.

В формуле $L(\Phi,\Psi)$ возникает универсальное замыкание, кроме того, в левой части импликации неявно присутствуют два отрицания Σ-формул. Указанная семантически формула сложна, и по паре формул $\langle\Phi,\Psi\rangle$ нельзя эффективно определить, выполняется ли $L(\Phi,\Psi)$. Пусть $S = \{\langle n,m\rangle \,|\, n,m \in \omega$ – геделевские номера Σ-формул Φ,Ψ таких, что $\mathbb{HF}(\mathbb{R}) \vDash L(\Phi,\Psi)\}$.

Предложение 3.5.1. *В $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ справедливы следующие утверждения:*

1. *S не является Σ-множеством.*
2. *S не является Π-множеством.*
3. *S является Π_2-множеством (т.е. определяется формулой вида $\forall x\exists y\Phi$, где Φ – Δ_0-формула).*

Доказательство. 1. Пусть S является Σ-множеством. Для пары Σ-формул Φ,Ψ формула $L(\Phi,\Psi)$ эквивалентна формуле

$$\forall x(\forall z(\exists y \in z\neg\Psi(y) \vee \neg\Phi(z,x)) \vee \Psi(x)).$$

Пусть $\mathcal{X}(x)$ – произвольная Δ_0-формула. Возьмем в качестве формул $\Phi(z,x)$ и $\Psi(x)$ (с геделевскими номерами n_1 и n_2) формулы $\neg\mathcal{X}(x)\vee z\neq z$ и $x\neq x$ соответственно. Для такой пары Φ,Ψ формула $L(\Phi,\Psi)$ есть

$$\forall x(\forall z(\exists y\in z(y=y)\vee(\mathcal{X}(x)\,\&\,z=z))\vee(x\neq x)).$$

Пусть $\mathbb{HF}(\mathbb{R})\vDash L(\Phi,\Psi)$ при некотором означивании γ. Тогда при любом означивании γ_x истинна формула $(\forall z(\exists y\in z(y=y)\vee(\mathcal{X}(x)\,\&\,z=z))\vee(x\neq x)$. Аналогично, при любом означивании γ_{xz} истинна формула $(\exists y\in z(y=y)\vee(\mathcal{X}(x)\,\&\,z=z)$. В частности, при $z=\emptyset$ получим, что при любом означивании γ_x истинна формула $\mathcal{X}(x)$. Таким образом, при означивании γ истинна формула $\forall x\mathcal{X}(x)$. Аналогичным образом, предположив, что $\mathbb{HF}(\mathbb{R})\nvDash L(\Phi,\Psi)$ при некотором означивании γ, получим, что при означивании γ ложна формула $\forall x\mathcal{X}(x)$. Таким образом, проверка истинности формулы $\forall x\mathcal{X}(x)$ сводима к проверке истинности формулы $L(\Phi,\Psi)$.

Так как S является Σ-множеством, проверка истинности формулы $L(\Phi,\Psi)$ эквивалентна проверке истинности некоторой Σ-формулы (от двух переменных) для значений n_1,n_2, т.е. проверка истинности (произвольного) $\forall$-предложения сводима к проверке истинности Σ-формулы. Отсюда получаем, что определимо Σ-формулой следующее множество пар натуральных чисел:

$$X=\{\langle n_1,n_2\rangle\,|\,n_1\text{ и }n_2\text{ – геделевские номера }\Delta_0\text{-формул }\Phi(x),\Psi(x)$$

$$\text{таких, что выполнено }\forall x(\Phi(x)\to\Psi(x))\}.$$

Иными словами, для Δ_0-множеств отношение $\subseteq$ определимо Σ-формулой (возьмем в качестве формулы $\mathcal{X}(x)$ формулу $\Phi(x)\to\Psi(x)$ и применим рассуждения выше). Чтобы прийти к противоречию и завершить доказательство, осталось указать пару Δ_0-множеств S_1,S_2 таких, что в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ верно $S_1=S_2$, а также некоторое допустимое множество $\mathbb{A}$, в котором $S_1\neq S_2$, и вложение $\varphi:\mathbb{HF}(\mathbb{R})\hookrightarrow\mathbb{A}$. Так как вложения сохраняют истинность Σ-формул, получим, что в $\mathbb{A}$ должно также выполняться $S_1=S_2$, поэтому приходим к противоречию.

Возьмем, например, в качестве S_1 и S_2 множества решений (в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$) формул $x^2=-1$ и $x^4=-1$ соответственно, а в качестве $\mathbb{A}$ структуру

$\mathbb{HF}(\mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Вложение в данном случае очевидно, при этом в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ верно $S_1 = S_2(= \emptyset)$, но в $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$ верно $S_1 \neq S_2$.

2. Пусть S является Π-множеством. Тогда получим, что проверка истинности формулы $\forall x\Psi(x)$ (для произвольной Σ-формулы Ψ) сводима к проверке истинности некоторой Π-формулы с использованием геделевского номера Ψ. Пусть $\Psi_1(x)$,$\Psi_2(x)$ – произвольные Δ_0-формулы. Если взять в качестве $\Psi(x)$ формулу $\exists y(\Psi_1(x) \rightarrow \Psi_2(x) \,\&\, \Psi_2(y) \,\&\, \neg\Psi_1(y))$, то получим, что для Δ_0-множеств в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ отношение $\subsetneq$ определимо Π-формулой по геделевским номерам формул, определяющих эти множества. Аналогично первому пункту (но теперь с указанием вложения допустимого множества в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, а не самого $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ в допустимое множество) придем к противоречию.
3. Пусть имеются геделевские номера n_1,n_2 Σ-формул Φ,Ψ. В силу существования универсального Σ-предиката, истинность формулы Ψ определима Σ-формулой по ее номеру n_2, а истинность формул $\neg\Phi$,$\neg\Psi$ определима Π-формулами по их номерам n_1,n_2. Следовательно, истинность формулы

$$\forall z(\exists y \in z \neg\Psi(y) \vee \neg\Phi(z,x)) \vee \Psi(x)$$

определима Π_2-формулой, как и истинность формулы

$$\forall x(\forall z(\exists y \in z \neg\Psi(y) \vee \neg\Phi(z,x)) \vee \Psi(x)),$$

поэтому множество S является Π_2-множеством.

□

Перейдем к построению исчисления (будем обозначать его как NL_Σ). Будем рассматривать Σ-формулы с учетом ограничения, указанного в разделе 5.2.

Единственной схемой аксиом исчисления будет:

$(Ax1)$ $\Phi \leq \Psi$, если Φ,Ψ – Σ-формулы и $\Phi \rightarrow \Psi$ есть теорема теории KPU.

Правилами вывода исчисления будут:

(I)

(R1) $\dfrac{\Phi}{\Phi \le \Phi}$ (R2) $\dfrac{\Phi \le \Psi, \Psi \le \mathcal{X}}{\Phi \le \mathcal{X}}$ (R3) $\dfrac{\Phi \le \Psi, \Phi \le \mathcal{X}}{\Phi \le \Psi \,\&\, \mathcal{X}}$ (R4) $\dfrac{\Psi \le \Phi, \mathcal{X} \le \Phi}{\Psi \vee \mathcal{X} \le \Phi}$

(R5) $$\frac{F_\Phi(\Psi), \Psi, L(\Phi,\Psi)}{F_\Phi(\Psi) \le \Psi}$$

для произвольных Σ-формул Φ,Ψ и $\mathcal{X}$.

Для второй группы правил будем считать Φ Σ-предложением.

(II)

(R6) $\dfrac{\Phi, \Psi^{\uparrow} \text{ – подвыражение в } \Phi^p, \Psi \le \mathcal{X}}{[\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}}}$ (R7) $\dfrac{\Phi, \Psi^{\downarrow} \text{ – подвыражение в } \Phi^p, \mathcal{X} \le \Psi}{[\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}}}$

Теорема 3.5.1. *(О корректности.) Если формула Φ доказуема в исчислении NL_Σ, то для произвольной KPU-модели $\mathbb{A}$ верно $\mathbb{A} \models \Phi$.*

Доказательство. Докажем, что правила $(R1) - (R7)$ сохраняют истинность. Для правил $(R1) - (R5)$ утверждение очевидно. Докажем для правила $(R6)$ индукцией по сложности формулы Φ. Для правила $(R7)$ аналогично.

Пусть Φ – атомарная. Тогда $\Phi \leftrightharpoons \Psi$ и $[\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}} \leftrightharpoons \mathcal{X}$, и так как $\Psi \le \mathcal{X}$, то $\mathbb{A} \models \mathcal{X}$.

Пусть $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \,\&\, \Phi_2$. Если $\Psi \leftrightharpoons \Phi_1$ или $\Psi \leftrightharpoons \Phi_2$, то $\mathbb{A} \models \Psi$ и $\mathbb{A} \models \mathcal{X}$, поэтому $\mathbb{A} \models [\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}}$. В противном случае получим, что либо $[\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}} \leftrightharpoons [\Phi_1]^{\Psi}_{\mathcal{X}} \,\&\, \Phi_2$, либо $[\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}} \leftrightharpoons \Phi_1 \,\&\, [\Phi_2]^{\Psi}_{\mathcal{X}}$. Тогда по предположению индукции либо $\mathbb{A} \models [\Phi_1]^{\Psi}_{\mathcal{X}}$, либо $\mathbb{A} \models [\Phi_2]^{\Psi}_{\mathcal{X}}$, что влечет $\mathbb{A} \models [\Phi]^{\Psi}_{\mathcal{X}}$. Для дизъюнкции доказательство аналогично.

Пусть $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \to \Phi_2$. Тогда $\Psi \leftrightharpoons \Phi_2$ (если Φ_2 не является отрицанием), либо $\Psi \leftrightharpoons \Phi_3$, если $\Phi_1 \leftrightharpoons \neg\Phi_3$, либо Ψ входит с полярностью $\uparrow$ в $\Phi_1^{\downarrow}$ или $\Phi_2^{\uparrow}$ (при расставлении в них полярностей как в подформулах формулы Φ). В двух первых случаях получаем требуемое в силу транзитивности импликации, а в третьем по предположению индукции.

Пусть $\Phi \leftrightharpoons \exists x(\Phi_1 \,\&\, \Phi_2)$ и $\mathbb{A} \models \exists x(\Phi_1 \,\&\, \Phi_2)[\gamma]$. Тогда $\mathbb{A} \models (\Phi_1 \,\&\, \Phi_2)[\gamma^x_a]$ для некоторого $a \in \mathbb{A}$. По предположению индукции $\mathbb{A} \models [\Phi_1 \,\&\, \Phi_2]^{\Psi}_{\mathcal{X}}[\gamma^x_a]$, что

эквивалентно $\mathbb{A} \vDash [\exists x(\Phi_1 \,\&\, \Phi_2)]^{\Psi}_{\mathcal{X}}[\gamma]$. Рассуждения в случаях с ограниченными кванторами аналогичны. □

Теорема о корректности позволяет, имея некоторую Σ-формулу (соответствующую некоторому предложению естественного языка), истинную в KPU-модели $\mathbb{A}$, и расставленные полярности в ней, по правилам вывода получать новые Σ-формулы (также соответствующие предложениям естественного языка), истинные в $\mathbb{A}$. Рассмотрим в качестве примера предложения

(1) Michele barks,

(2) Michele barks loudly

и

(3) Michele makes noise.

Предположим, что в модели $\mathfrak{A}$ выполнено предложение (2) (в варианте, предложенном в разделе 4.4, полярности расставляются только на подформулах, синтаксически соответствующих непосредственно предложению), а также $bark'(x) \leq makenoise'(x)$. По правилу $(R5)$ получим, что выводимо $barkloudly'(x) \leq bark'(x)$, следовательно, так как часть, соответствующая предложению, является атомарной формулой, по правилу $(R6)$ выводимо (и истинно в модели $\mathfrak{A}$) предложение Michele barks, а по правилам $(R2)$ и $(R6)$ предложение Michele makes noise (здесь $barkloudly'(x)$ – Σ-предикат, полученный по Σ-оператору $loud'$ и Σ-предикату $bark'$).

Рассмотрим теперь предложения

(4) Some puppy barks

и

(5) Some dog barks.

Эти предложения интерпретируются как $\exists x(puppy'(x) \,\&\, bark'(x))$ и $\exists x(dog'(x) \,\&\, bark'(x))$ соответственно. Предположим, что выводимо $puppy'(x) \leq dog'(x)$. С учетом сказанного о полярности квантора ∃, по правилу $(R6)$ получаем, что из предложения (4) выводимо предложение (5).

Литература

[1] J. Barwise. *Admissible Sets and Structures.* Springer Verlag, Heidelberg, 1975.

[2] A.S. Burnistov and A.I. Stukachev. Computable functionals of finite types in Montague semantics. *Lecture Notes in Computer Science*, z:x–y, 2022.

[3] D.R. Dowty. *Introduction to Montague Semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dodrecht, 1989.

[4] D.R. Dowty. The role of negative polarity and concord marking in natural language reasoning. *Semantics and Linguistic Theory*, 4:114–144, 1994.

[5] Yu.L. Ershov. *Definability and Computability.* Plenum, New York, 1996.

[6] H. Hu, Q. Chen, and L. Moss. Natural language inference with monotonicity. *In Proceedings of the 13th International Conference on Computational Semantics*, pages 8–15, 2019.

[7] I. Pratt-Hartmann and L.S. Moss. Logics for the relational syllogistic. *The Review of Symbolic Logic*, 2(4):647–683, 2009.

[8] A. I. Stukachev. Approximation spaces of temporal processes and effectivenes of interval semantics. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 1242:53–61, 2021.

[9] A. I. Stukachev. Approximation spaces of temporal processes and effectiveness of interval semantics. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 1242:53–61, 2021.

[10] A.I. Stukachev. Effective model theory: an approach via Σ-definability. *Lecture Notes in Logic*, 41:164–197, 2013.

[11] А.С. Бурнистов and А.И. Стукачев. О внутренней конструктивизируемости функциональных структур. *Алгебра и логика*, 61(1):23–41, 2022.

[12] Ю.Л. Ершов. *Определимость и вычислимость.* Научная книга, Новосибирск, 1996.

[13] А.И. Стукачев. Интервальные расширения порядков и темпоральные аппроксимационные пространства. *Сибирский математический журнал*, 62(4):894–910, 2021.

Глава 4. Темпоральные аппроксимационные пространства

4.1 Введение

В данной главе рассматриваются вопросы эффективной теории моделей и ее приложений. Определены так называемые темпоральные аппроксимационные пространства на линейных порядках, позволяющие с помощью формул динамической логики естественным образом анализировать свойства темпоральных процессов. В качестве структуры "конечных элементов" при этом используются именно интервальные расширения. Получены естественные примеры использования динамической логики для определения отношений на "бесконечных" элементах через их аппроксимации.

Найдены приложения полученных результатов в математической лингвистике, в частности, в задачах анализа семантики глагольных форм в естественных языках (например, в английском и русском). Для анализа текстовой информации, выражаемой предложениями естественных языков, одной из центральных является задача определения семантических значений глаголов, образующих рассматриваемые предложения. Кроме того, обсуждаются вопросы алгоритмической сложности такого типа задач в рамках формальной семантики естественных языков, предложенной Р. Монтегю. Полученные результаты позволяют анализировать семантику предложений естественных языков (в частности, английского), содержащих глаголы в произвольном времени, с использованием равномерных и конструктивных (алгоритмически реализуемых) методов. Алгоритмические аспекты интервальной семантики, насколько известно автору, ранее не исследовались специалистами в этой области. Полученные результаты можно считать примером применения методов обобщенной вычислимости в формальной семантике естественных языков.

4.2 Плотные линейные порядки и обобщенная конструктивизируемость

Понятие Σ-определимости, или эффективной интерпретируемости, является одним из центральных в эффективной теории моделей [4]. В данной работе используются модификации приведенного ниже определения из [1, 2], позволяющая рассматривать случай структур с бесконечными вычислимыми сигнатурами.

Определение 4.2.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры $\langle P_0^{n_0},\ldots,P_k^{n_k}\rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Структура $\mathfrak{M}$ называется Σ-*определимой в* $\mathbb{A}$, если существуют Σ-формулы

$$\Phi(x_0,y),\Psi(x_0,x_1,y),\Psi^*(x_0,x_1,y),\Phi_0(x_0,\ldots,x_{n_0-1},y),$$

$$\Phi_0^*(x_0,\ldots,x_{n_0-1},y),\ldots,\Phi_k(x_0,\ldots,x_{n_k-1},y),\Phi_k^*(x_0,\ldots,x_{n_k-1},y)$$

сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и $a\in A$ такие, что для $M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0,a)$ и $\eta \leftrightharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0,x_1,a)\cap M_0^2$ справедливо следующее: $M_0\neq\varnothing$, η является отношением конгруэнтности на структуре

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0; P_0^{\mathfrak{M}_0},\ldots,P_k^{\mathfrak{M}_0}\rangle,$$

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1})\cap M_0^{n_k}$ для всех k, $\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0,x_1,a)\cap M_0^2 = M_0^2\setminus\Psi^{\mathbb{A}}(x_0,x_1,a)$, $\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1},a)\cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k}\setminus\Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1})$ для всех k, и структура $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-структуре $\mathfrak{M}_0/\eta$.

В случае, когда структура $\mathfrak{M}$ имеет бесконечную вычислимую сигнатуру, будем отождествлять ее со структурой $(HF(M),\mathrm{Sat}_{\mathfrak{M}})$, где $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ – наименьшее допустимое множество над $\mathfrak{M}$, а $\mathrm{Sat}_{\mathfrak{M}}\subseteq\omega\times M^{<\omega}$ – интерпретация сигнатурных символов с учетом выбранной нумерации.

Для структур $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, через $\mathfrak{A}\leqslant_\Sigma\mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что структура $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Будем обозначать через $\mathfrak{A}\equiv_\Sigma\mathfrak{B}$ тот факт, что $\mathfrak{A}\leqslant_\Sigma\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\leqslant_\Sigma\mathfrak{A}$ (структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в этом случае называются Σ-*эквивалентными*). Возникающие таким образом полурешетки Σ-степеней структур (см. [4]) позволяют получить представление об относительной конструктивной сложности структур произвольной мощности.

Для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ действительных и комплексных чисел хорошо известно, что

$$\mathbb{C} \leqslant_\Sigma \mathbb{R}.$$

Существенным и нетривиальным усилением данного факта является следующий результат [1].

Теорема 31 (Ю. Л. Ершов, 1985)**.**

$$\mathbb{C} \leqslant_\Sigma \mathbb{L}$$

для любого плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ мощности континуум.

Данная теорема мотивирует проблему описания Σ-степеней (несчетных) плотных линейных порядков. В частности, для плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ важно найти примеры систем $\mathfrak{M}$, для которых

1) $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathbb{L}$, при этом $\mathbb{L}$ используется "существенно";
2) $\mathfrak{M}$ является "простой" и в то же время естественной и полезной для приложений.

Возможность для приложений возникает, в частности, когда $\mathbb{L}$ рассматривается как ось (шкала) времени. В данной работе приводятся примеры таких приложений в математической лингвистике. Как будет показано ниже, в отличие от результата Ю. Л. Ершова о поле комплексных чисел, в этом случае возникает зависимость от типа плотного линейного порядка.

Необходимо упомянуть следующие понятия, гипотезы и результаты, возникающие при исследовании конструктивных свойств плотных линейных порядков.

Определение 4.2.2 (Ю. Л. Ершов)**.** Пусть T – теория первого порядка.

1) T называется *регулярной*, если она разрешима и модельно полна;
2) T называется *c-простой* (конструктивно простой), если она разрешима, модельно полна, ω-категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

Гипотеза 4.2.1 (Ю. Л. Ершов, 1998)**.** Предположим, что теория первого порядка T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, для некоторой системы $\mathfrak{M}$, имеющей c-простую теорию. Тогда T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ для некоторого $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.

Формальным следствием этой гипотезы является

Гипотеза 4.2.2. Всякая c-простая теория имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ для некоторого $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.

Усилением требований, накладываемых на теорию, получается следующее

Определение 4.2.3. Теория первого порядка T называется *sc-простой*, если она разрешима, подмодельно полна, ω-категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

В [5] была установлена следующая

Теорема 32. Пусть T – sc-простая теория конечной сигнатуры. Тогда существует несчетная модель $\mathfrak{M}$ теории T, Σ-определимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.

Оказывается (см., например, [6]), что ослабление этих условий дает теории, не имеющие несчетных моделей, Σ-определимых в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками.

4.3 Интервальные расширения плотных линейных порядков

Теоретико-модельные обогащения и расширения структур (обогащение Морли, обогащение Скулема, расширение Маркера и т.д.) играют важную роль как в классической теории моделей, так и в обобщенной теории вычислимости над структурами [4]. Еще один естественный пример расширения дают следующие понятия.

Определение 4.3.1. Пусть $\mathbb{L} = (L, \leqslant)$ — плотный линейный порядок. Непустое множество $i \subseteq L$ называется *интервалом в* $\mathbb{L}$, если для любых $l_1, l_2, l_3 \in L$ таких, что $l_1, l_3 \in i$ и $l_1 \leqslant l_3$, из $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3$ следует, что $l_2 \in i$.

Определение 4.3.2. Пусть $\mathbb{L} = (L, \leqslant)$ — плотный линейный порядок. *Интервальным расширением* $\mathbb{L}$ называется структура

$$\mathcal{I}(\mathbb{L}) = (I(L), \leqslant, \subseteq),$$

где $I(L)$ — множество всех интервалов в $\mathbb{L}$, отношение $\subseteq$ на $I(L)$ интерпретируется как стандартное теоретико-множественное отношение включения, а отношение частичного порядка $\leqslant$ на множестве $I(L)$ индуцировано отношением $\leqslant$ структуры $\mathbb{L}$: для i_1,$i_2 \in I(L)$, полагаем $i_1 \leqslant i_2$ тогда и только тогда, когда, для любых $l_1 \in i_1$ и $l_2 \in i_2$, выполняется условие $l_1 \leqslant l_2$. Аналогично, для i_1,$i_2 \in I(L)$, полагаем $i_1 < i_2$ тогда и только тогда, когда, для любых $l_1 \in i_1$ и $l_2 \in i_2$, выполняется условие $l_1 < l_2$.

Элементы L будем отождествлять с интервалами вида $[l;l]$, $l \in \mathbb{L}$. Таким образом, $L \subseteq I(L)$, а значит интервальное расширение линейного порядка можно считать его расширением в теоретико-модельном смысле.

Следующие понятия являются стандартными и часто используются.

Определение 4.3.3. Пусть i_1,$i_2 \in I(L)$ – произвольные элементы (т.е. интервалы) интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$.

1. i_1 называется *подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2)$;
2. i_1 называется *собственным подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge (i_1 \neq i_2)$;
3. i_1 называется *начальным подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge \neg\exists i_3((i_3 \subseteq i_2) \wedge (i_3 < i_1))$;
4. i_1 называется *финальным подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge \neg\exists i_3(((i_3 \subseteq i_2) \wedge (i_1 < i_3))$;
5. i_1 называется *точечным интервалом*, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models \forall i_0((i_0 \subseteq i_1) \rightarrow (i_0 = i_1))$.

Отметим, что не всегда интервал, определяемый указанным выше образом (т.е., фактически, формулой логики второго порядка), является определимым в логике первого порядка с параметрами. В качестве примера достаточно рассмотреть интервал $(1,\sqrt{2})$ в порядках $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ и $(\mathbb{R}, \leqslant)$, соответственно. В первом случае этот интервал не является определимым, а во втором, вследствие насыщенности $\mathbb{R}$, он определим.

Определение 4.3.4. Линейный порядок $\mathbb{L}$ называется *непрерывным* (или *полным по Дедекинду*), если для любых A,$B \subset L$, таких, что $A \cup B = L$ и для любых $a \in A$ и $b \in B$ верно $a < b$, либо A имеет наибольший элемент, либо B имеет наименьший элемент.

Хорошо известно, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с естественным порядком является непрерывным, а множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел – нет.

Отметим, что свойство непрерывности, не выразимое предложением логики первого порядка в $\mathbb{L}$, выразимо в интервальном расширении $\mathcal{I}(\mathbb{L})$. А именно, пусть $At(i)$ – формула, означающая, что i – точечный (атомарный) интервал, $Left(i_1,i_2)$ – формула, означающая, что i_1 – начальный подинтервал i_2, а $Right(i_1,i_2)$ – формула, означающая, что i_1 – финальный подинтервал i_2. Тогда непрерывность $\mathbb{L}$ выражается в $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ следующим предложением, которое будем обозначать Cont:

$$\forall i_1 \forall i_2((\neg\exists i(At(i) \wedge (i \subseteq i_1) \wedge (i \subseteq i_2)) \wedge \forall i(At(i) \rightarrow ((i \subseteq i_1) \vee (i \subseteq i_2)))) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists i(At(i) \wedge (Right(i,i_1) \vee Left(i,i_2)))).$$

Определимым интервальным расширением плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ будем называть структуру

$$\mathcal{I}_d(\mathbb{L}) = (I_d(L), \leqslant, \subseteq),$$

где $I_d(L)$ есть множество интервалов, определимых (с параметрами) в $(\mathbb{L}, \leqslant)$ (то есть, учитывая свойство элиминации кванторов для плотных линейных порядков, с помощью их граничных точек).

Как легко убедиться, свойство определимости интервала выразимо в $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ формулой первого порядка. Будем обозначать через Def предложение, утверждающее, что все интервалы в $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ являются определимыми.

В следующей лемме показано, что Def является следствием Cont и аксиом плотного линейного порядка.

Лемма 17. Если $\mathbb{L}$ – непрерывный плотный линейный порядок, то $\mathcal{I}(\mathbb{L}) = \mathcal{I}_d(\mathbb{L})$.

Доказательство. Включение $I_d(L) \subseteq I(L)$ имеет место для любого плотного линейного порядка L, поэтому достаточно показать включение в обратную сторону.

Пусть $i \in I(L)$. Рассмотрим, например, случай, когда i ограничен как справа, так и слева, то есть существуют такие $a,b \in L$, что $a \leqslant i \leqslant b$. Рассмотрим множества $A(i) = \{a \in L | a \leqslant i\}$, $B(i) = \{b \in L | i \leqslant b\}$. Легко убедиться,

что $A(i)$ и $B(i)$ являются интервалами, неограниченными слева и справа, соответственно. Вследствие непрерывности $\mathbb{L}$, существует $a(i) \in L$, который либо является наибольшим элементом множества $A(i)$, либо является наименьшим элементом множества $L \setminus A(i)$. Аналогично, существует $b(i) \in L$, который либо является наименьшим элементом множества $B(i)$, либо является наибольшим элементом множества $L \setminus B(i)$. В зависимости от этого, получаем четыре возможные конфигурации для i: $(a(i); b(i))$, $[a(i); b(i))$, $(a(i); b(i)]$ или $[a(i); b(i)]$.

Случай, когда i ограничен только слева или только справа, рассматриваются аналогично. В этих случаях будем использовать (неформальные) записи $b(i) = = +\infty$ и $a(i) = -\infty$, соответственно. □

Несложно убедиться, что справедлива следующая

Лемма 18. Для произвольного плотного линейного порядка $\mathbb{L}_1$ и непрерывного плотного линейного порядка $\mathbb{L}_2$,

$$\mathcal{I}_d(\mathbb{L}_1) \equiv \mathcal{I}(\mathbb{L}_2)$$

(здесь и далее символ $\equiv$ обозначает элементарную эквивалентность).

Доказательство. Из предыдущей леммы непосредственно следует, что $\mathcal{I}(\mathbb{L}_2) = \mathcal{I}_d(\mathbb{L}_2)$, поэтому достаточно установить, что интервальные расширения $\mathcal{I}_d(\mathbb{L})$ и $\mathcal{I}_d(\mathbb{L}')$ элементарно эквивалентны для любых плотных линейных порядков $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$. Последнее вытекает из полноты теории плотно упорядоченных множеств (без концевых элементов) и интерпретируемости определимого интервального расширения в исходном порядке. □

Таким образом, $\mathcal{I}(\mathbb{R}) = \mathcal{I}_d(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{I}_d(\mathbb{Q})$, однако, как следует из приведенных выше рассуждений, $\mathcal{I}(\mathbb{Q}) \not\equiv \mathcal{I}_d(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{I}(\mathbb{Q}) \not\equiv \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Следствием предыдущей леммы является

Лемма 19. Если $\mathbb{L}$ – непрерывный плотный линейный порядок, то элементарная теория интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ является *sc*-простой.

Доказательство. Непосредственно вытекает из счетной категоричности и подмодельной полноты (свойства элиминации кванторов) элементарной теории плотного линейного порядка без концевых элементов, а также интерпретируемости определимого (а значит и обычного) интервального расширения в исходном порядке. □

Интервальные расширения над непрерывными плотными линейными порядками являются примерами структур с sc-простой теорией, которые интересны не с точки зрения их мощности, а вследствие использования в качестве базисных структур для аппроксимационных пространств, применяемых в приложениях.

Помимо интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$, будем также рассматривать порожденную этим расширением *интервальную булеву алгебру* $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ – наименьшую булеву алгебру (относительно стандартных теоретико-множественных операций), содержащую $\mathcal{I}(\mathbb{L})$. Частичный порядок $\leqslant$ естественным образом распространяется на элементы $\mathcal{B}(\mathbb{L})$.

В работах автора [7-10] (в [7-9] неявно) существенным образом было использовано понятие $s\Sigma$-сводимости.

Определение 4.3.5. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные системы. Система $\mathfrak{A}$ называется $s\Sigma$-*определимой* в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если $A \subseteq \mathrm{HF}(B)$ является Σ-определимым подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ и все сигнатурные отношения и функции системы $\mathfrak{A}$ являются Δ-определимыми в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$.

Понятие $s\Sigma$-сводимости относится к структурам, а не к их типам изоморфизма, и является существенно более сильным, чем отношение Σ-сводимости. Еще одна серия примеров использования этой сводимости получена в данной работе. Важно отметить, что в случае, когда в определении $s\Sigma$-сводимости в качестве $\mathfrak{A}$ рассматривается некоторое расширение $\mathfrak{B}$, носитель $B \subseteq A$ образует множество праэлементов в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$.

Для произвольной системы $\mathfrak{A}$, через $\mathfrak{A}_{\mathrm{Morley}}$ будем обозначать *морлизацию* системы $\mathfrak{A}$, то есть обогащение $\mathfrak{A}$ предикатами для всех определимых (без параметров) отношений (сигнатура такого отношения предполагается вычислимой и позволяющей по номеру предиката получить геделевский номер соответствующей формулы).

Теорема 33. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок.

1. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то $\mathcal{I}(\mathbb{L})_{Morley} \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$;
2. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то $\mathcal{B}(\mathbb{L}) \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из установленных выше лемм. Действительно, из того, что $\mathcal{I}(\mathbb{L}) = \mathcal{I}_d(\mathbb{L})$ а также из того, что $Th(\mathbb{L})$

является sc-простой, непосредственно вытекает, что

$$\mathcal{I}_d(\mathbb{L})_{\text{Morley}} \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}.$$

Действительно, (непустые) интервалы, не являющиеся элементами L, естественным образом представляются в $HF(L)$ наборами вида $\langle b_1,l_1,l_2,b_2\rangle$, $\langle b,l\rangle$ и $\langle l,b\rangle$, где $l,l_1,l_2 \in L, l_1 < l_2$ используются как границы односторонних и двусторонних интервалов, соответственно, а $b,b_1,b_2 \in \{0,1\}$ – как указатели на принадлежность граничной точки интервалу.

Для доказательства пункта 2 достаточно заметить, что каждый элемент булевой алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ является объединением конечного числа интервалов. □

В случае, когда плотный линейный порядок $\mathbb{L}$ не обладает свойством непрерывности, Σ-степень интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ может быть строго выше Σ-степени $\mathbb{L}$ в полурешетке Σ-степеней. В качестве простейшего примера можно рассмотреть множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с отношением естественного порядка: легко убедиться, что интервальное расширение $\mathcal{I}(\mathbb{Q})$ несчетно.

С другой стороны, в качестве примера плотного линейного порядка, не являющегося непрерывным, для которого интервальное обогащение имеет такую же Σ-степень, можно рассмотреть порядок, образованный суммой двух непрерывных порядков типа $\mathbb{R}$.

Что касается $s\Sigma$-степеней интервальных расширений, то справедливо

Предложение 4.3.1. Если плотный линейный порядок $\mathbb{L}$ не является непрерывным, то $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \not\equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \not\leqslant_{s\Sigma} \mathbb{L}$. Пусть существуют $A,B \subseteq L$, образующие "неопределимое" сечение в $\mathbb{L}$ (то есть ни A, ни B не определимы в $\mathbb{L}$ формулами логики первого порядка с параметрами). Если бы $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \leqslant_{s\Sigma} \mathbb{L}$, то множество A, состоящее из элементов $l \in L$ таких, что $l < B$, было бы Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$. Но это невозможно, так как Σ-определимые в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ (с параметрами) подмножества L исчерпываются объединениями конечного числа определимых в $\mathbb{L}$ интервалов. □

Свойства интервальных расширений плотных линейных порядков, не являющихся непрерывными, нуждаются в дополнительном анализе. Хотя в большинстве задач математической лингвистики предполагается, что шкалой вре-

мени является ось действительных чисел (то есть непрерывный плотный линейный порядок), изучение таких "нестандартных" моделей времени представляет, как минимум, теоретический интерес. Следующий результат является одним из предварительных в этом направлении. Из него следует, что элементарные теории таких систем могут быть сколь угодно сложными.

Теорема 34. Пусть $A \subseteq \omega$ – бесконечное множество. Существует плотный линейный порядок $\mathbb{L}_A \models \neg\mathrm{Cont}$, для которого

$$A \leqslant_m \mathrm{Th}(\mathcal{I}(\mathbb{L}_A))$$

(здесь $\leqslant_m$ обозначает отношение m-сводимости из классической теории вычислимости на натуральных числах).

Доказательство. Рассмотрим плотный линейный порядок

$$\mathbb{L}_A \leftrightharpoons \mathbb{Q} + \sum_{n\in A}(n\mathbb{R} + \mathbb{Q}),$$

в котором элементы множества A порождают соответствующие блоки указанной выше суммы в порядке возрастания.

Легко убедиться, что блоки типа $\mathbb{Q}$ и $n\mathbb{R}$ определимы в $\mathcal{I}(\mathbb{L}_A)$. Например, интервал типа $\mathbb{Q}$ определяется формулой $\Psi(i)$ вида
$\forall j((j \subseteq i) \to (At(j) \vee \exists j_1 \exists j_2((j = j_1 \cup j_2) \wedge (j_1 < j_2) \wedge \neg\exists l(Left(l,j_2) \vee Right(l,j_1)))))$

(здесь для удобства используется определимая в исходной сигнатуре операция объединения $\cup$). Интервал типа $\mathbb{R}$ определяется формулой $\Theta_1(i)$ вида Cont(i), означающей, что на i справедливо предложение Cont. Интервал вида $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ определяется формулой $\Theta_2(i)$ вида
$\exists j_1 \exists j_2(\mathrm{Cont}(j_1) \wedge \mathrm{Cont}(j_2) \wedge (i = j_1 \cup j_2) \wedge (j_1 < j_2) \wedge \neg\exists l(Left(l,j_2) \vee Right(l,j_1)))$,

и так далее. Индукцией по $n \geqslant 1$ эффективно определяется формула $\Theta_n(i)$, означающая, что i имеет тип $n\mathbb{R}$.

По определению $\mathbb{L}_A$, для любого $n \in \omega$,

$$n \in A \iff \mathcal{I}(\mathbb{L}_A) \models \exists i \Phi_n(i),$$

где $\Phi_n(i) \leftrightharpoons \exists j \exists j_1 \exists j_2((i = j_1 \cup j \cup j_2) \wedge (j_1 < j) \wedge (j < j_2) \wedge \Theta_n(j) \wedge \Psi(j_1) \wedge \Psi(j_2))$. □

В частности, если множество A не является вычислимым, то не является вычислимым и множество геделевских номеров предложений из $\mathrm{Th}(\mathcal{I}(\mathbb{L}_A)$. Таким образом, получаем

Следствие 10. Существует плотный линейный порядок $\mathbb{L} \models \neg\mathrm{Cont}$, для которого интервальное расширение $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ имеет неразрешимую теорию.

Для произвольного интервала $i \in I(L)$ определим множество $Gap(i)$ "точек разрыва" i как множество

$$\{\, (j_1,j_2) \mid (i = j_1 \cup j_2) \wedge (j_1 < j_2) \wedge \neg\exists l(Left(l,j_2) \vee Right(l,j_1)) \,\}$$

дедекиндовых сечений интервала i, не соответствующих точкам исходного порядка. На множестве $Gap(i)$ определим отношение линейного порядка $\leqslant$: $(j_1,j_2) \leqslant (j_1',j_2')$, если $j_1 \subseteq j_1'$.

Интервалы $i_1,i_2 \in I(L)$ называются *гомеоморфными* (обозн. $i_1 \simeq i_2$), если $(Gap(i_1), \leqslant) \cong (Gap(i_2), \leqslant)$.

Можно считать, что в непрерывных плотных линейных порядках любые два интервала гомеоморфны, поскольку $Gap(i) = \varnothing$ для любого интервала i.

Через $(\mathcal{I}(\mathbb{L}), \simeq)$ будем обозначать систему, являющуюся обогащением интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ отношением гомеоморфности $\simeq$.

Предложение 4.3.2. Если $Gap(i)$ конечно для любого $i \in I(L)$, то

$$(I(\mathbb{L}), \simeq) \equiv_{s\Sigma} \mathcal{I}(\mathbb{L}).$$

Доказательство. Для интервалов $i_1,i_2 \in I(L)$, $i_1 \simeq i_2$ тогда и только тогда, когда $|Gap(i_1)| = |Gap(i_2)|$, что выразимо Σ-формулой в $\mathbb{HF}(\mathcal{I}(\mathbb{L}))$. Аналогично, $i_1 \not\simeq i_2$ тогда и только тогда, когда $|Gap(i_1)| \neq |Gap(i_2)|$, что также выразимо Σ-формулой в $\mathbb{HF}(\mathcal{I}(\mathbb{L}))$. □

4.4 Аппроксимационные пространства темпоральных процессов

Еще один важный способ определения на интервальном расширении дополнительной структуры заключается в задании на исходном порядке семей-

ства подмножеств. Тот факт, что конкретный интервал $i \in I(L)$ является частью выбранного подмножества $P \subseteq L$, можно интерпретировать как наличие у i свойства P. В данной работе для анализа и использования таких структур используются аппроксимационные пространства.

Понятие аппроксимационного пространства [11, 12] позволяет формализовать процесс аппроксимации "сложных" объектов более "простыми". В данной работе рассматривается класс пространств, порожденных интервальными расширениями. При этом интервалы играют роль "конечных" объектов. Однако в таких пространствах не выполняются некоторые из ограничений, присутствующих в определениях из [11, 12]. Это обстоятельство вынуждает использовать класс аппроксимационных пространств максимально общего вида.

Определение 4.4.1. *Аппроксимационным пространством* называется упорядоченная тройка

$$\mathcal{X} = \langle X, F, \leqslant \rangle,$$

где X — топологическое T_0-пространство с топологией, соответствующей порядку специалиализации $\leqslant$ на X, а $F \subseteq X$ — базисное подпространство *конечных элеметов*.

Так же, как в [11, 12], обозначение $a \prec x$ подразумевает, что $a \leqslant x$ и $a \in F$.

В дальнейшем будут рассматриваться так называемые *структурированные* аппроксимационные пространства [13], то есть предполагается, что множество F является носителем некоторой структуры $\mathcal{F}$.

Одним из примеров структурированного аппроксимационого пространства является определяемое ниже аппроксимационное пространство темпоральных процессов над интервальным расширением. Элементы этого расширения (т.е. интервалы) соответствуют "конечным" элементам, аппроксимирующим темпоральные "процессы", понимаемые в самом широком смысле.

Определение 4.4.2. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок без концевых элементов. *Пространством темпоральных процессов* над $\mathbb{L}$ называется аппроксимационное пространство $\mathcal{T}(\mathbb{L}) = (P(L)\backslash\{\varnothing\}, \mathcal{I}(\mathbb{L}), \subseteq)$, где $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ — интервальное расширение $\mathbb{L}$, $P(L)$ — множество всех подмножеств L, а $\subseteq$ — стандартное отношение теоретико-множественного включения на $P(L)$.

Здесь нужно отметить, что исключение пустого множества (формально необходимого в классическом определении топологического пространства) мо-

тивировано соображениями удобства: во всех дальнейших рассуждениях случай пустого множества пришлось бы рассматривать отдельно.

В качестве плотного линейного порядка $\mathbb{L}$, порождающего пространство темпоральных процессов, в данной работе рассматривается произвольный плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего элементов. В формальной семантике для естественных языков множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, понимаемое как ось (шкала) времени, рассматривается как абстрактный непрерывный плотный линейный порядок, при этом его мощность не является существенной для рассуждений.

В приложениях, как правило, достаточно ограничиться рассмотрением "конечно порожденных" темпоральных пространств, когда определение на интервальном расширении дополнительной структуры заключается в выборе на исходном порядке конечного числа подмножеств. Как уже отмечалось, тот факт, что конкретный интервал $i \in I(L)$ является частью выбранного подмножества $P \subseteq L$, можно интерпретировать как наличие у i свойства P.

Определение 4.4.3. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок без концевых элементов. Для непустых множеств $P_1,\ldots,P_n \subseteq L$ $(n \geqslant 1)$, через $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_n)$ будем обозначать аппроксимационное пространство $(\{P_1,\ldots,P_n\} \cup \mathcal{I}(\mathbb{L}), \mathcal{I}(\mathbb{L}),\ \subseteq)$.

Одним из результатов данной работы является Σ-определимость отношения выполнимости для Δ_0^{DL}-формул над таким пространством в наследственно конечной надстройке над морлизацией структуры $(\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)$, где $P_1, \ldots, P_n \subseteq L$. Формулы динамической логики DL с ограниченными модальностями используются в дальнейшем для описания свойств процессов (или состояний), в частности, выражаемых глаголами в естественных языках.

Пусть σ — конечная предикатная сигнатура, содержащая, помимо прочего, бинарный предикатный символ $\subseteq$. Определим множество формул динамической логики DL_σ (с модальными скобками, как в [14], и в отличие от [15]) следующим образом. Формулы логики DL_σ имеют переменные двух типов — для конечных объектов и для произвольных, потенциально бесконечных, объектов, доступ к которым возможен только с помощью их конечных фрагментов. Будем обозначать эти множества FV и SV, соответственно. Для формулы θ, множества ее свободных переменных этих двух типов будем обозначать, соответственно, $FV(\theta)$ и $SV(\theta)$. Если θ — формула логики первого порядка, то все ее переменные, в том числе свободные, считаются конечными. Переменные,

обозначаемые прописными буквами (S,P,...), по умолчанию считаются переменными типа SV.

Определение 4.4.4. Множество Δ_0^{DL}-*формул логики* DL_σ определяется как наименьшее множество R, такое, что

1) если θ — формула логики первого порядка сигнатуры σ, то $\theta \in R$ (полагаем при этом $SV(\theta) \leftrightharpoons \varnothing$, $FV(\theta)$ – множество всех свободных переменных формулы θ);
2) если $\theta \in R$, $S \in SV$, $a \in FV$, то
$$[a|S]\theta \in R, \langle a|S\rangle\theta \in R$$
(полагаем при этом $SV([a|S]\theta) \leftrightharpoons SV(\theta) \cup \{S\}$, $FV([a|S]\theta) \leftrightharpoons FV(\theta) \setminus \{a\}$), аналогично для формулы $\langle a|S\rangle\theta$;
3) если $\theta \in R$, a,$s \in FV$, то
$$[a|s]\theta \in R, \langle a|s\rangle\theta \in R$$
(полагаем при этом $SV([a|s]\theta) \leftrightharpoons SV(\theta)$, $FV([a|s]\theta) \leftrightharpoons (FV(\theta) \setminus \{a\}) \cup \{s\}$), аналогично для формулы $\langle a|t\rangle\theta$;
4) если θ_0,$\theta_1 \in R$, то $\neg\theta_0 \in R$, $(\theta_0 \wedge \theta_1) \in R$, $(\theta_0 \vee \theta_1) \in R$ и $(\theta_0 \to \theta_1) \in R$.

Выражения $[a|S], \langle a|S\rangle, [a|s]$ и $\langle a|s\rangle$ будем называть *модальными скобками.*

Определение 4.4.5. Пусть $\mathcal{X} = (X,F,\leqslant)$ — структурированное аппроксимационное пространство над структурой $\mathcal{F} = (F,\sigma^{\mathcal{F}})$ сигнатуры σ. *Истинность* на $\mathcal{X}$ Δ_0^{DL}-формулы φ логики DL_σ при означивании $\gamma : SV(\varphi) \cup FV(\varphi) \to X$, с условием $\gamma(x) \in F$ для любого $x \in FV(\varphi)$, обозначаемое
$$\mathcal{X} \models \varphi \restriction \gamma,$$
определяется индукцией по сложности φ. Пусть, для $x \in FV$ и $a \in F$, $\gamma_a^x \leftrightharpoons (\gamma \setminus (\{x\} \times F)) \cup \{\langle x,a\rangle\}$, аналогично, для $S \in SV$ и $S_0 \in X$, $\gamma_{S_0}^S \leftrightharpoons (\gamma \setminus (\{S\} \times X)) \cup \{\langle S,S_0\rangle\}$. Полагаем

1) $\mathcal{X} \models [x|S]\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(S)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
2) $\mathcal{X} \models \langle x|S\rangle\theta(x) \restriction \gamma$, если существует $a \prec \gamma(S)$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
3) $\mathcal{X} \models [x|s]\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(s)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
4) $\mathcal{X} \models \langle x|s\rangle\theta(x) \restriction \gamma$, если существует $a \prec \gamma(s)$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
5) $\mathcal{X} \models (\forall x)\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \in F$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$,

и так далее (считаем, что предикатный символ $\leqslant$ интерпретируется в X стандартным образом).

Для удобства, переменные из множества FV будем разделять на три типа: переменные для обозначения произвольных непустых интервалов (i,i',...,i_0,i_1,...), переменные для обозначения точечных интервалов (l,l',...,l_0,l_1,...), и переменные для произвольных элементов из F (a,b,c,...,x,y,z). В аппроксимационных пространствах темпоральных процессов ограниченные модальности вида $[i|P]$ и $\langle i|P\rangle$, вместе с неограниченными модальностями вида $[i] = [i|L]$ и $\langle i\rangle = \langle i|L\rangle$, позволяют формулировать суждения о "возможных мирах", понимаемых как интервалах выбранного процесса (остальные процессы на данном интервале могут вести себя сколь угодно сложно, но "доступ" к ним, в свою очередь, возможен только посредством их подинтервалов). Атомарные интервалы (то есть интервалы вида $\{l\}$) дают точную и полную информацию обо всех процессах, происходящих в данный момент. Из этих соображений, а также для интерпретации определимости Δ_0^{DL}-формулами посредством определимости формулами логики первого порядка, рассмотрим следующее понятие.

Определение 4.4.6. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок без концевых элементов. *Атомарным пространством темпоральных процессов* над $\mathbb{L}$ называется аппроксимационное пространство $\mathcal{T}_0(\mathbb{L}) = (P(L) \setminus \{\varnothing\}, \mathbb{L}, \subseteq)$, где $P(L)$ — множество всех подмножеств L, $\mathbb{L}$ отождествляется с множеством точечных интервалов, а $\subseteq$ — стандартное теоретико-множественное отношение включения на $P(L)$.

Одним из основных результатов данной работы является использование алгоритмических свойств (а именно, разрешимости) элементарной теории плотных линейных порядков в задачах, связанных с интервальными моделями темпоральной логики Аллена и интервальной семантикой Монтегю глаголов в естественных языках. Понятие аппроксимационного пространства может быть использовано для точного описания таких задач. Напомним определение из [13].

Определение 4.4.7. Аппроксимационное пространство $\mathcal{X}_1$ *эффективно DL-сводится* к аппроксимационному пространству $\mathcal{X}_2$ ($\mathcal{X}_1 \leqslant_c^{DL} \mathcal{X}_2$), если $\mathcal{X}_1$ как структура является Δ_0^{DL}-определимой (в другой терминологии, Δ_0^{DL}-интерпретируемой) в аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}_2$, и

1) структура конечных элементов $\mathcal{F}_1$ Δ_0^{DL}-определима (Δ_0^{DL}-интерпретируема) в $\mathcal{X}_2$ внутри $\mathcal{F}_2$ (то есть множество, являющееся интерпретацией для F_1, является подмножеством F_2),
2) существует эффективная процедура, сопоставляющая каждой Δ_0^{DL}-формуле пространства $\mathcal{X}_1$ Δ_0^{DL}-формулу пространства $\mathcal{X}_2$, определяющую соответствующий предикат в данном представлении пространства $\mathcal{X}_1$ в пространстве $\mathcal{X}_2$.

Теорема 35. Если $\mathbb{L}$ — непрерывный плотный линейный порядок, то аппроксимационные пространства $\mathcal{T}(\mathbb{L})$ и $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$ эффективно DL-эквивалентны:

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \equiv_c^{DL} \mathcal{T}_0(\mathbb{L}).$$

Доказательство. Индукцией по сложности Δ_0^{DL}-формулы Φ построим Δ_0^{DL}-формулу Φ', для которой

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \models \Phi \iff \mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models \Phi'.$$

Случай, когда Φ является атомарной формулой вытекает из следующего замечания: для произвольных $P_1,P_2 \subseteq L$, отношение $P_1 \subseteq P_2$ определимо в $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$ формулой $[l_1|P_1]\langle l_2|P_2\rangle(l_1 = l_2)$, а отношение $P_1 \leqslant P_2$ – формулой $[l_1|P_1][l_2|P_2](l_1 \leqslant l_2)$.

Единственный нуждающийся в анализе тип формул – это формулы, образованные с использованием ограниченных модальностей. Произвольный интервал $i \in \mathcal{I}(\mathbb{L})(= \mathcal{I}_d(\mathbb{L})$ вследствие непрерывности $\mathbb{L})$ может иметь одну из следующих девяти конфигураций: $[l_1; l_2]$, $(l_1; l_2)$, $[l_1; l_2)$, $(l_1; l_2]$, $[l_1; +\infty)$, $(l_1; +\infty)$, $(-\infty; l_2]$, $(-\infty; l_2)$ и $(-\infty; +\infty)$, для некоторых $l_1,l_2 \in L$. Поэтому

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \models [i|P]\Theta(i,P) \iff \mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models [l_1|P][l_2|P](\Theta_{[]}(l_1,l_2,P) \wedge \Theta_{()}(l_1,l_2,P) \wedge \ldots),$$

где $\Theta_{[]}(l_1,l_2,P) = (([l_1; l_2] \subseteq P) \to \Theta^i_{[l_1;l_2]})$, $\Theta_{()}(l_1,l_2,P) = (((l_1; l_2) \subseteq P) \to \Theta^i_{(l_1;l_2)})$ и т.д.

Аналогично,

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \models \langle i|P\rangle\Theta(i,P) \iff \mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models \langle l_1|P\rangle\langle l_2|P\rangle(\Theta'_{[]}(l_1,l_2,P) \vee \Theta'_{()}(l_1,l_2,P) \vee \ldots),$$

где $\Theta'_{[]}(l_1,l_2,P) = (([l_1; l_2] \subseteq P) \wedge \Theta^i_{[l_1;l_2]})$, $\Theta'_{()}(l_1,l_2,P) = (((l_1; l_2) \subseteq P) \wedge \Theta^i_{(l_1;l_2)})$ и т.д.

Здесь, как обычно, $\Theta^i_{[l_1;l_2]}$ обозначает результат подстановки $[l_1; l_2]$ вместо всех вхождений i в Θ, с учетом того, что отношения $\subseteq$ и $\leqslant$ для определимых

интервалов сводятся к комбинациям отношений $\leqslant$ для их граничных точек. Запись вида $([l_1; l_2] \subseteq P)$ служит сокращением для формулы $[l]((l_1 \leqslant l \leqslant l_2) \to \langle l'|P\rangle(l = l'))$ и т.д.

Заметим также, что тип интервала определяется Δ_0^{DL}-формулами в $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$: например, $i \subseteq L$ является замкнутым интервалом вида $[l_1; l_2]$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}_0(\mathbb{L}) \models [l|i](l_1 \leqslant l \leqslant t_2) \wedge [l]((l_1 \leqslant l \leqslant l_2) \to \langle l'|i\rangle(l = l')).$$

Интервалы других типов (открытые и т.д.) могут быть определены аналогичным образом.

□

Непосредственно из предыдущей теоремы (точнее, ее доказательства) вытекает

Предложение 4.4.1. Пусть $\mathbb{L}$ – непрерывный плотный линейный порядок. Для любого $n \geqslant 1$ и любых $P_1, \ldots, P_n \subseteq L$,

$$\mathcal{T}(P_1, \ldots, P_n)_{\Delta_0^{DL}} \equiv_{s\Sigma} (\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)_{Morley},$$

где $(\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)_{Morley}$ — морлизация структуры $(\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)$, т.е. обогащение, полученное добавлением к сигнатуре символов для всех определимых формулами логики первого порядка отношений, а $\mathcal{T}(P_1 \ldots, P_n)_{\Delta_0^{DL}}$ — обогащение, полученное добавлением к сигнатуре символов для всех отношений, определимых Δ_0^{DL}-формулами.

Следствие 11. Если элементарная теория структуры $(\mathbb{L}, P_1 \ldots, P_n)$ является *sc*-простой, то существует эффективная равномерная процедура для проверки истинности Δ_0^{DL}-формул в $\mathcal{T}(P_1, \ldots, P_n)$.

В частности, если все процессы $P_1, \ldots, P_n$ являются элементами интервальной булевой алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ (т.е. каждый элемент есть объединение конечного числа интервалов), то условие из предыдущего следствия выполнено. Как правило, только этот частный случай и рассматривается в математической лингвистике для анализа глаголов.

Неформально, язык динамической логики над темпоральными аппроксимационными пространствами является удобным языком “высокого уровня” для работы с моделями темпоральной логики и анализа интервальной семантики

естественных языков. Этот язык эффективно интерпретируется в языке логики первого порядка над соответствующим линейным порядком, обогащенном одноместными предикатами для обозначения процессов. Получающиеся при этом формулы, в отличие от формул динамической логики, сложны для анализа и носят исключительно технический характер.

4.5 Приложения в темпоральной логике и формальной семантике естественных языков

Темпоральная логика Дж. Ф. Аллена [16] возникла как средство для анализа отношений между вычислительными процессами, возникающими при исполнении программ. Атомарные отношения этой логики формализуются в динамической логике следующим образом: для произвольных интервалов P_1,$P_2 \subseteq L$,

P_1 **before** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1][i_2|P_2](i_1 \leqslant i_2)$;
P_1 **after** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1][i_2|P_2](i_2 \leqslant i_1)$;
P_1 **while** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1]\langle i_2|P_2\rangle(i_1 = i_2)$;
P_1 **overlaps** P_2 соответствует отношению $\langle i_1|P_1\rangle\langle i_2|P_2\rangle(i_1 = i_2)$
(в другой версии, отношению $\langle i_1|P_1\rangle\langle i_2|P_2\rangle$((“$i_1$ – финальный подинтервал P_1”)$\wedge$ $\wedge$(“i_2 – начальный подинтервал P_2” $\wedge$ $(i_1 = i_2)$), где “i – начальный подинтервал P” есть сокращение для формулы $[i'|P]((i \subseteq i') \vee \langle i''|i\rangle(i'' < i'))$), и т.д..

Остальные атомарные отношения логики Аллена (**starts**, **finishes**, **meets** и т.п.) формализуются аналогичным образом. Отметим, что темпоральную связку **when** (“когда”) можно считать частным случаем связки **while**, учитывая при этом, что в данном случае имеется в виду точечный интервал.

Из интерпретируемости темпоральной логики Аллена в динамической логике и полученных в данной работе результатов о темпоральных аппроксимационных пространствах следует существование разрешающего алгоритма для данной логики в случае, когда в качестве временной шкалы выбирается непрерывный плотный линейный порядок. В качестве обзора результатов, посвященных выразительным возможностям и разрешимости (или неразрешимости) раз-

личных вариантов интервальных темпоральных логик, можно порекомендовать работу [17].

Темпоральные союзы в естественных языках, соответствующие атомарным отношениям логики Аллена, имеют аналогичную семантику и аналогичную формализацию в динамической логике. Важной особенностью, определяющей семантику сложных предложений естественных языков является согласование времен глаголов.

В качестве примера приложения пространств темпоральных процессов и их конструктивных представлений рассмотрим раздел математической лингвистики, посвященном интервальной семантике глаголов в естественных языках.

Полученные выше результаты (в частности, следствие 11) позволяют рассматривать семантику предложений естественных языков (в частности, английского), содержащих глаголы в произвольном времени, с использованием равномерных и конструктивных (алгоритмически реализуемых) методов. Алгоритмические аспекты интервальной семантики, насколько известно автору, ранее не исследовались специалистами в этой области. Полученные результаты можно считать примером применения методов обобщенной вычислимости в формальной семантике естественных языков.

В работах Р. Монтегю [18-21], американского специалиста по математической логике, возникло новое направление лингвистики, позднее получившее название “формальная семантика”. Оно объединяет понятия и методы логики и философии языка с целью построения единой теории формальной семантики естественных языков. Более точно, выделяются фрагменты естественных языков, допускающие такую формализацию и остающиеся достаточно выразительными. Одним из основных методов формальной семантики является анализ грамматических категорий времени и вида. В рамках этого подхода Р. Монтегю формализовал семантические значения глаголов в английском языке. Рассмотрим несколько примеров такой формализации. Вот как выглядит его семантический анализ для времени *Present Progressive*.

> Предложение (т.е. состояние) **John is walking** истинно в течение времени p тогда и только тогда, когда существует открытый интервал i такой, что p является подинтевалом i и для всех $t \in i$ состояние **John walks** истинно в момент времени t.

Интервальные расширения впервые были существенным образом использованы в работах американских лингвистов М. Беннетта и Б. Пати [22]. В качестве примера рассмотрим данное ими описание времени *Past Simple* (ниже приводятся буквальные цитаты с сохранением обозначений).

> Предложение (т.е., состояние) **John ate the fish** $(= \alpha)$ истинно на интервале i, если i является точечным интервалом, α относится к интервалу i', и существует интервал $i'' < i'$ такой, что $i'' < i$ и состояние **John eats the fish** истинно на интервале i''.

В качестве еще одного примера рассмотрим формальное описание времени *Present Perfect*.

> Предложение (т.е., состояние) **John has eaten the fish** $(= \alpha)$ истинно на интервале i, если i является точечным интервалом, α относится к интервалу i', i является подинтервалом интервала i' и существует интервал $i'' < i'$ такой, что либо i является правой границей интервала i'', либо $i'' < i$ и состояние **John eats the fish** истинно на интервале i''.

В приведенных выше примерах рассматриваются состояния **John walks**, **John is walking**, **John eats the fish**, **John ate the fish** и **John has eaten the fish**, вместе с точечным интервалом, понимаемым как "данный момент". Фактически, в этих примерах указаны определения сложных времен по времени *Present Simple*.

Легко построить Δ_0^{DL}-формулы сигнатуры $\langle \leqslant , \subseteq \rangle$, описывающие соответствующие отношения между этими процессами (точнее, состояниями) в пространстве темпоральных процессов $\mathcal{T}$. А именно, используя обозначения

1) "i – открытый интервал" для формулы

$$[i'|i]((\text{“}i' \text{ - точечный интервал”}) \to \langle i_1|i\rangle\langle i_2|i\rangle(i_1 < i' < i_2));$$

2) "i – ограниченный интервал" для формулы

$$\langle i_1\rangle\langle i_2\rangle[i'|i](i_1 \leqslant i \leqslant i_2);$$

3) "i_1 – левая граничная точка i_2" для формулы

$$(i_1 \leqslant i_2) \wedge \neg\langle i\rangle(i_1 < i < i_2);$$

4) "i_1 – правая граничная точка i_2" для формулы

$$(i_1 \leqslant i_2) \wedge (i_1 \subseteq i_2) \wedge ([i|i_1](i = i_1))$$

и т.д., получим формулы

$p \subseteq$ “**John is walking**” $\iff$
$\iff \langle i|$“**John walks**”$\rangle((p \subseteq i) \wedge$ (“i – открытый интервал”)),

$p \subseteq$ “**John ate the fish**” $\iff [i|$“**John eats the fish**”$](i < p)$,

$p \subseteq$ “**John has eaten the fish**” $\iff [i|$“**John eats the fish**”$](i \leqslant p)$.

Подобная формализация особенно полезна для анализа предложений, содержащих два и более глаголов, соответствующих процессам и состояниям, связанных темпоральными союзами (“before”, “after”, “while” и т.п.), соответствующим аналогичным связкам логики Аллена.

Стоит также отметить, что определения сложных времен через настоящее простое время дают примеры определения элементов аппроксимационного пространства темпоральных процессов, являющихся элементами X, а не только элементами F. Это отличает такой способ использования формул динамической логики в аппроксимационных пространствах от способов, целью которых является определимость подмножеств множества F (такие подмножества являются основным объектом исследования классической и обобщенной гиперарифметической вычислимости, см., например, [13]).

В русском языке глагольная система устроена принципиально иначе, так как отсутствует аналог английского времени *Present Simple*. Продемонстрируем пример использования динамической логики и интервальной семантики для предложений русского языка, содержащих темпоральные связки. Рассмотрим предложения

1 Ваня делал домашнюю работу, когда Петя пришел.

2 Ваня сделал домашнюю работу, когда Петя пришел.

Отметим, что синтаксическое различие между этими предложениями минимально (одна буква), а семантическое различие между ними весьма существенно. Формализация их темпоральных аспектов в динамической логике выглядит следующим образом. Первому предложению соответствует формула

$$\langle i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}\rangle\langle i_2|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}\rangle((i_2 \subseteq i_1) \wedge$$

$$\wedge(\text{“}i_1 \text{ – открытый инт.”})) \wedge [i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}]$$

$$[i_2|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}]((i_1 < t_{\text{наст}}) \wedge (i_2 < t_{\text{наст}}))$$

(здесь $t_{\text{наст}}$ обозначает момент речи). Второму предложению соответствует формула

$$\langle i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}\rangle[i_2|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}]$$

$$((i_2 \leqslant i_1) \wedge \langle i_3|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}\rangle(i_1 \leqslant i_3))\wedge$$

$$\wedge[i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}][i_2|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}]$$

$$((i_1 < t_{\text{наст}}) \wedge (i_2 < t_{\text{наст}})).$$

Такая интерпретация обусловлена тем, что глагол “делать” в первом предложении употреблен в несовершенном виде, а во втором – в совершенном. В русском языке несовершенный вид, как правило, указывает на интервал, а совершенный – на точку, являющуюся границей интервала.

4.6 Интервальная семантика для глаголов русского языка

Реализация понятий времени и вида в русском языке существенно отличается от реализации этих понятий в английском языке. В русском языке есть три времени (*настоящее*, *прошедшее* и *будущее*), и два вида: *совершенный* и *несовершенный*. Основная сложность для семантического анализа глаголов русского языка заключается в том, что эти две категории вида *независимы*, то есть не делятся на основную и производную. Не удается, в частности, воспользоваться следующей примитивной математической моделью. Пусть P и I — множества инфинитивов русских глаголов совершенного и несовершенного вида соответственно, а A — действующая из P в I функция, которая инфинитиву глагола совершенного вида ставит в соответствие инфинитив парного ему глагола несовершенного: $A(\textit{разбить}) = \textit{разбивать}$, $A(\textit{насЫпать}) = \textit{насыпАть}$ и т. д. Оказывается, что с одной стороны, для значительного числа элементов из P, соответствующих одновидовым глаголам совершенного вида (*закричать*, *притопывать* и т.п.), функция не будет давать результата, с другой, все элементы I, соответствующие одновидовым лексемам несовершенного вида (*жить*, *любить* и т.п.), не будут иметь прообраза в P. Такие “неприякаянные” глаголы не

удаётся адекватно разделить на небольшое число крупных групп, основываясь на семантических критериях.

4.7 Заключение

Полученные результаты показывают, что в плотных линейных порядках со свойством непрерывности эффективно интерпретируются достаточно важные с точки зрения возможных приложений структуры: интервальные расширения, интервальные булевы алгебры и т.п., что с единой точки зрения соответствует определимости в темпоральных аппроксимационных пространствах с помощью формул динамической логики. В случае, когда соответствующий плотный линейный порядок понимается как шкала (ось) времени, эти результаты, в совокупности с разрешимостью и свойством элиминации кванторов, можно использовать для алгоритмического анализа семантики предложений в естественных языках.

По аналогии с результатом Ю. Л. Ершова [1] об обобщенной конструктивизируемости поля комплексных чисел, естественным вопросом для дальнейшего исследования является рассмотрение упорядоченного поля действительных чисел в качестве (масштабированной) временной шкалы. В этом случае появляется возможность конструктивной интерпретации синтаксических конструкций вида “завтра”, “вчера”, “два дня назад” и т.п.. Несмотря на то, что элементарная теория поля действительных чисел является регулярной (т.е. модельно полной и разрешимой), такого сорта рассуждения требуют использования (выделения) множества натуральных чисел, что делает неразрешимой элементарную теорию полученной структуры.

Литература

[1] Ершов, Ю. Л.: Σ-определимость в допустимых множествах. Докл. АН СССР, **285**, N 4 (1985), 792–795.

[2] Ершов, Ю Л.: Определимость и вычислимость. Новосибирск, Научная книга (1996)

[3] Ershov, Yu. L.: Σ-definability of algebraic structures. In: Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, Recursive model theory (Stud. Logic Found. Math., **138**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 235–260.

[4] Stukachev, A. I.: Effective model theory via the Σ-definability approach. Lecture Notes in Logic, v. 41 (2013), 164–197.

[5] Стукачев, А. И.: Σ-определимость несчетных моделей c-простых теорий. Сибирский математический журнал, **51**, N 3 (2010), 649–661.

[6] Стукачев, А. И.: Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей. Алгебра и логика, **43**, N 4 (2004), 459–481.

[7] Stukachev, A. I.: Uniformization property in hereditary finite superstructures. Siberian Advances in Mathematics, **7**, N 1 (1997), 123–132.

[8] Стукачев, А. И.: Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней. Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 182–190.

[9] Stukachev, A. I.: A jump inversion theorem for the semilattices of Sigma-degrees of structures. Siberian Advances in Mathematics, **20**, N 1 (2010), 68–74.

[10] Стукачев, А. И.: О свойствах $s\Sigma$-сводимости. Алгебра и логика, **53**, N 5 (2014), 625–642.

[11] Ершов, Ю. Л.: Теория A-пространств. Алгебра и логика, **12**, N 4 (1973), 369–416.

[12] Ershov, Yu. L.: Theory of domains and nearby. Formal Methods in Programming and Their Applications. Lect. Notes Comput. Sci., **735** (1993), 1–7.

[13] Стукачев, А. И.: Обобщенно гиперарифметическая вычислимость над структурами. Алгебра и логика, **55**, N 6 (2016), 769–799.

[14] Harel, D.: First-Order Dynamic Logic. Lecture Notes in Computer Science, **68** (1979), 1–135.

[15] Ершов, Ю. Л.: Динамическая логика над допустимыми множествами. Докл. АН СССР, **273**, N 5 (1983), 1045–1048.

[16] Allen, J. F.: Maintaining Knowledge about Temporal Intervals. Communications of the ACM, **26** (1983), 832–843.

[17] Della Monica, D., Goranko, V., Montanari, A., Sciavicco, G.: Interval Temporal Logics: A Journey. Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (BEATCS), N 105 (2011), 73–99.

[18] Montague, R.: The proper treatment of quantification in ordinary English. In: Hintikka, J, Moravcsik, J., Suppes, P. (eds.), Approaches to Natural Language, D. Reidel Publishing Company, Dodrecht, 221–242 (1973)

[19] Montague, R.: English as a formal language. In: Visentini, B. (ed.), Linguaggi nella Societa a nella Tecnica, Edizioni di Comunita, Milan, 189–22 (1974)

[20] Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague, ed. by Richmond H. Thomason. New Haven, Yale University Press (1974)

[21] Dowty, D. R. et al.: Introduction to Montague Semantics. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company (1989)

[22] Bennett, M., Partee, B.: Toward the logic of tense and aspect in English. In: Partee, B. (ed.), Compositionality in formal semantics: selected papers by Barbara H. Partee, Blackwell Publishing Ltd. 59–109 (2004)

[23] Stukachev, A. I.: Approximation spaces of temporal processes and effectiveness of interval semantics. Advances in Intelligent Systems and Computing, **1242** (2021), 53–61.

Глава 5. Интервальная семантика для русского языка

5.1 Введение

Глагол, образующий предложение естественного языка (а сложное предложение образовано с помощью двух и более глаголов) обозначает, как правило, некий процесс или состояние. В каждом из случаев речь идет о протекании во времени, и именно темпоральный аспект процесса или состояния нуждается в формализации в первую очередь. Различия глагольных систем в русском и английском языках слишком существенны для непосредственного переноса результатов, полученных для английского языка. Требуется предварительно провести анализ особенностей русского глагола, важнейшей из которых является отсутствующая в английском языке категория вида.

В математической лингвистике в качестве оси (шкалы) времени чаще всего выбирается множество действительных чисел с естественным порядком. Важным свойством этого линейного порядка является *плотность*, т.е. существование для любой пары различных точек точки, расположенной строго между ними. Еще одним важным для интервальной семантики свойством такого порядка является *непрерывность* (точное определение будет дано ниже).

5.2 Плотные линейные порядки и обобщенная конструктивизируемость

Понятие Σ-определимости, или эффективной интерпретируемости, является одним из центральных в эффективной теории моделей [18]. В данной работе используется естественная модификация приведенного ниже определения, позволяющая рассматривать структуры с вычислимыми бесконечными сигнатурами (эту версию определение можно найти в [18]).

Определение 5.2.1 ([9])**.** Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k} \rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Структура $\mathfrak{M}$ называется Σ-*определимой в*

$\mathbb{A}$, если существуют Σ-формулы

$$\Phi(x_0,y),\Psi(x_0,x_1,y),\Psi^*(x_0,x_1,y),\Phi_0(x_0,\ldots,x_{n_0-1},y),$$

$$\Phi_0^*(x_0,\ldots,x_{n_0-1},y),\ldots,\Phi_k(x_0,\ldots,x_{n_k-1},y),\Phi_k^*(x_0,\ldots,x_{n_k-1},y)$$

сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и $a \in A$ такие, что для $M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0,a)$ и $\eta \leftrightharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0,x_1,a) \cap M_0^2$ справедливо следующее: $M_0 \neq \varnothing$, η является отношением конгруэнтности на структуре

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0; P_0^{\mathfrak{M}_0},\ldots,P_k^{\mathfrak{M}_0}\rangle,$$

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k}$ для всех k, $\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0,x_1,a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0,x_1,a)$, $\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1},a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0,\ldots,x_{n_k-1})$ для всех k, и структура $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-структуре $\mathfrak{M}_0/\eta$.

Для структур $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, через $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, наименьшем допустимом множестве над $\mathfrak{B}$. Будем обозначать через $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$ тот факт, что $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$. Естественным образом определяются понятия Σ-степени структуры и полурешетки Σ-степеней (см., например, [18]).

Большая серия результатов [18] посвящена положению Σ-степеней плотных линейных порядков (в первую очередь несчетных) в полурешетках Σ-степеней структур. Возможность для приложений результатов такого рода в математической лингвистике возникает, когда плотный линейный порядок рассматривается как ось (шкала) времени.

5.3 Темпоральные модели в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ и $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$

Пусть $\mathbb{L} = (L, \leqslant)$ – плотный линейный порядок. *Темпоральной моделью над* $\mathbb{L}$ будем называть обогащение $\mathbb{L}$ вида $(L, \leqslant ,P_0,P_1,\ldots,P_n,\ldots)$, где $P_n \subseteq L$ для всех $n \in \omega$ (эти множества будем называть *процессами* или *состояниями*).

Аналогично, пусть $\mathbb{R}$ – упорядоченное поле действительных чисел. *Темпоральной моделью над* $\mathbb{R}$ будем называть обогащение $\mathbb{R}$ вида $(\mathbb{R},P_0,P_1,\ldots,P_n,\ldots)$, где $P_n \subseteq \mathbb{R}$ для всех $n \in \omega$ (эти множества также будем называть *процессами* или *состояниями*).

Для темпоральных моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ над $\mathbb{R}$ будем говорить, что $\mathfrak{A}$ $s\Sigma$-сводится к $\mathfrak{B}$ над $\mathbb{R}$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$) если ... .

5.4 Формульные аппроксимационные пространства

Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры σ, и пусть семейство $\mathcal{S}(\mathfrak{M})$ состоит из всех подмножеств M, определимых формулами сигнатуры σ с произвольным числом параметров. Для всякого $n \in \omega$, определим семейство $\mathcal{F}_n(\mathfrak{M})$, состоящее из всех подмножеств M, определимых формулами сигнатуры σ с не более, чем n параметрами:
$\mathcal{F}_n(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons \{\{m \,|\, \mathfrak{M} \models \varphi(m,m_1,\ldots,m_n)\} \,|\, \varphi(x,x_1,\ldots,x_n) \in Form_\sigma, m_1,\ldots,m_n \in M\}$.

В качестве порядка специализации рассмотрим отношение теоретико-модельного включения $\subseteq$.

Аппроксимационные пространства

$$\mathcal{X}_n(\mathfrak{M}) = (\mathcal{S}(\mathfrak{M}),\mathcal{F}_n(\mathfrak{M}), \subseteq),$$

где $n \in \omega$, называются *формульными.*

Определение 5.4.1. *Аппроксимационное пространство* $\mathcal{X} = (X,F, \leqslant)$ *называется* Σ-определимым *в допустимом множестве* $\mathbb{A}$, *если* $\mathcal{X}$ *как структура* Σ-*определима в* $\mathbb{A}$ *и существует* Σ-*параметризация всех* $Delta_0^{DL}$-*определимых подможеств:*

$$\Delta_0^{DL}(\mathcal{X}) \ \Sigma\text{-}определимо\ в\ \mathbb{A}.$$

Предложение 5.4.1. *Если* $\mathfrak{M}$ — *структура с с-простой теорией, то формульные аппроксимационные пространства* Σ-*определимы в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

5.5 Интервальные расширения и темпоральные процессы

Для произвольного плотного линейного порядка $\mathbb{L} = (L, \leqslant)$ определим его интервальное расширение $\mathcal{I}(\mathbb{L}) = (I(L), \leqslant, \subseteq)$ следующим образом. Непустое множество $i \subseteq L$ называется *интервалом в* $\mathbb{L}$, если для любых $l_1, l_2, l_3 \in L$ таких, что $l_1, l_3 \in i$ и $l_1 \leqslant l_3$, из $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3$ следует, что $l_2 \in i$. Пусть $I(L)$ – множество всех интервалов в $\mathbb{L}$. Элементы L можно рассматривать как интервалы вида $[l, l]$, $l \in \mathbb{L}$. Таким образом, $L \subseteq I(L)$.

Отношение $\leqslant$ структуры $\mathbb{L}$ индуцирует отношение частичного порядка $\leqslant$ на множестве $I(L)$. А именно, для элементов $i_1, i_2 \in I(L)$, полагаем $i_1 \leqslant i_2$ тогда и только тогда, когда, для любых $l_1 \in i_1$ и $l_2 \in i_2$, выполняется условие $l_1 \leqslant l_2$. Аналогичным образом можно определить отношение $<$ на $I(L)$. Отношение $\subseteq$ на $I(L)$ интерпретируется как стандартное теоретико-множественное отношение включения.

Таким образом, интервальное расширение плотного линейного порядка является его расширением в теоретико-модельном смысле.

Отметим, что не всегда интервал, определяемый указанным выше образом (т.е., фактически, формулой логики второго порядка), является определимым в логике первого порядка с параметрами. В качестве примера достаточно рассмотреть интервал $(1, \sqrt{2})$ в порядках $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ и $(\mathbb{R}, \leqslant)$, соответственно. В первом случае этот интервал не является определимым, а во втором, вследствие насыщенности $\mathbb{R}$, он определим.

Определение 5.5.1. Линейный порядок $\mathbb{L}$ называется *непрерывным*, если для любых $A, B \subset L$, таких, что $A < B$ и $A \cup B = L$, либо A имеет наибольший элемент, либо B имеет наименьший элемент.

Хорошо известно, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с естественным порядком является непрерывным, а множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел – нет.

Следующие понятия являются стандартными.

Определение 5.5.2. Пусть $i_1, i_2 \in I(L)$ – произвольные элементы (т.е. интервалы) интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$.

1. i_1 называется *подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2)$;
2. i_1 называется *собственным подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge (i_1 \neq i_2)$;
3. i_1 называется *начальным подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge \neg\exists i_3((i_3 \subseteq i_2) \wedge (i_3 < i_1))$;
4. i_1 называется *финальным подинтервалом* i_2, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models (i_1 \subseteq i_2) \wedge \neg\exists i_3(((i_3 \subseteq i_2) \wedge (i_1 < i_3))$;
5. i_1 называется *точечным интервалом*, если
   $\mathcal{I}(\mathbb{L}) \models \forall i_0((i_0 \subseteq i_1) \rightarrow (i_0 = i_1))$.

Помимо интервального расширения $\mathcal{I}(\mathbb{L})$, будем также рассматривать порожденную этим расширением *интервальную булеву алгебру* $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ – наименьшую булеву алгебру (относительно стандартных теоретико-множественных операций), содержащую $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ Частичный порядок $\leqslant$ естественным образом распространяется на элементы $\mathcal{B}(\mathbb{L})$.

Определение 5.5.3 ([18, 20])**.** Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные системы. Система $\mathfrak{A}$ называется $s\Sigma$**-определимой** в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если $A \subseteq \mathrm{HF}(B)$ является Σ-определимым подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ и все сигнатурные отношения и функции системы $\mathfrak{A}$ являются Δ-определимыми в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$.

Для произвольной системы $\mathfrak{A}$, через $\mathfrak{A}_{\mathrm{Morley}}$ будем обозначать *морлизацию* системы $\mathfrak{A}$, то есть обогащение $\mathfrak{A}$ предикатами для всех определимых (без параметров) отношений (сигнатура такого отношения предполагается вычислимой и позволяющей по номеру предиката получить геделевский номер соответствующей формулы). Следующая теорема играет ключевую роль при доказательстве разрешимости интервальной семантики глаголов в естественных языках.

Теорема 36. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок.

1. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то $\mathcal{I}(\mathbb{L})_{Morley} \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$;
2. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то $\mathcal{B}(\mathbb{L}) \equiv_{s\Sigma} \mathbb{L}$.

Понятие аппроксимационного пространства [6, 8] определяется ниже в наиболее общем виде. В дальнейшем, однако, рассматривается достаточно узкий класс аппроксимационных пространств, порожденных интервальными расширениями.

Определение 5.5.4. *Аппроксимационным пространством* называется упорядоченная тройка

$$\mathcal{X} = \langle X, F, \leqslant \rangle,$$

где X — топологическое T_0-пространство, $F \subseteq X$ — базисное подпространство *конечных элементов*, и $\leqslant$ — порядок специализации на X.

Так же, как в [6, 8], обозначение $a \prec x$ подразумевает, что $a \leqslant x$ и $a \in F$.

В дальнейшем будут рассматриваться так называемые *структурированные* аппроксимационные пространства [21, 22], то есть предполагается, что множество F является носителем некоторой структуры $\mathcal{F}$.

Одним из примеров структурированного аппроксимационого пространства является определяемое ниже аппроксимационное пространство темпоральных процессов над интервальным расширением. Элементы этого расширения (т.е. интервалы) соответствуют "конечным" (или "простым") элементам, аппроксимирующим темпоральные процессы прцессы произвольной сложности.

Определение 5.5.5. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок. *Пространством темпоральных процессов* над $\mathbb{L}$ называется аппроксимационное пространство $\mathcal{T}(\mathbb{L}) = (P(L) \setminus \{\varnothing\}, \mathcal{I}(\mathbb{L}), \subseteq)$, где $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ — интервальное расширение $\mathbb{L}$, $P(L)$ — множество всех подмножеств L, а $\subseteq$ — стандартное отношение теоретико-множественного включения на $P(L)$.

В качестве плотного линейного порядка $\mathbb{L}$, порождающего пространство темпоральных процессов, в данной работе рассматривается произвольный плотный линейный порядок без наибольшего и наименьшего элементов. В формальной семантике для естественных языков множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, понимаемое как ось (шкала) времени, рассматривается как абстрактный плотный линейный порядок со свойством непрерывности, при этом его мощность не является существенной для рассуждений.

В приложениях, как правило, достаточно ограничиться рассмотрением конечно порожденных темпоральных пространств.

Определение 5.5.6. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок, Для непустых множеств $P_1, \ldots, P_n \subseteq L$ $(n \geqslant 1)$, через $\mathcal{T}(P_1, \ldots, P_n)$ будем обозначать аппроксимационное пространство $(\{P_1, \ldots, P_n\} \cup \mathcal{I}(\mathbb{L}), \mathcal{I}(\mathbb{L}), \subseteq)$.

Определенный в [21] вариант динамической логики обладает выразительными возможностями, достаточными для формализации используемых в интервальной семантике понятий. Пусть σ — конечная предикатная сигнатура, содержащая, помимо прочего, бинарный предикатный символ $\subseteq$. Множество формул динамической логики DL_σ (с модальными скобками, как в [11], и в отличие от [7]) определяется следующим образом. Формулы логики DL_σ имеют переменные двух типов — для конечных объектов и для произвольных, потенциально бесконечных, объектов, доступ к которым возможен только с помощью их конечных фрагментов. Будем обозначать эти множества FV и SV, соответственно. Для формулы θ, множества ее свободных переменных этих двух типов будем обозначать, соответственно, $FV(\theta)$ и $SV(\theta)$. Если θ — формула логики первого порядка, то все ее переменные, в том числе свободные, считаются конечными. Переменные, обозначаемые прописными буквами (S,P,...), по умолчанию считаются переменными типа SV.

Определение 5.5.7 ([21])**.** Множество Δ_0^{DL}*-формул логики* DL_σ определяется как наименьшее множество R, такое, что

1) если θ — формула логики первого порядка сигнатуры σ, то $\theta \in R$ (полагаем при этом $SV(\theta) \leftrightharpoons \varnothing$, $FV(\theta)$ – множество всех свободных переменных формулы θ);
2) если $\theta \in R$, $S \in SV$, $a \in FV$, то
$$[a|S]\theta \in R, \langle a|S\rangle\theta \in R$$
(полагаем при этом $SV([a|S]\theta) \leftrightharpoons SV(\theta) \cup \{S\}$, $FV([a|S]\theta) \leftrightharpoons FV(\theta) \setminus \{a\}$), аналогично для формулы $\langle a|S\rangle\theta$;
3) если $\theta \in R$, a,$s \in FV$, то
$$[a|s]\theta \in R, \langle a|s\rangle\theta \in R$$
(полагаем при этом $SV([a|s]\theta) \leftrightharpoons SV(\theta)$, $FV([a|s]\theta) \leftrightharpoons (FV(\theta) \setminus \{a\}) \cup \{s\}$), аналогично для формулы $\langle a|t\rangle\theta$;
4) если θ_0,$\theta_1 \in R$, то $\neg\theta_0 \in R$, $(\theta_0 \wedge \theta_1) \in R$, $(\theta_0 \vee \theta_1) \in R$ и $(\theta_0 \to \theta_1) \in R$.

Выражения $[a|S]$, $\langle a|S\rangle$, $[a|s]$ и $\langle a|s\rangle$ будем называть *модальными скобками.*

Определение 5.5.8 ([21])**.** Множество Σ_1^{DL}*-формул логики* DL_σ определяется как наименьшее множество Q, такое, что

если θ – Δ_0^{DL}-формула логики DL_σ, $S \in SV$, то $\theta \in Q$ и $(\exists S)\theta \in Q$ (при этом полагаем $SV((\exists S)\theta) \leftrightharpoons SV(\theta) \setminus \{S\}$, $FV((\exists S)\theta) \leftrightharpoons FV(\theta)$).

Аналогично определяется множество Π_1^{DL}-*формул логики* DL_σ. Множество всех формул логики DL_σ получается из класса Δ_0^{DL} формул логики DL_σ замыканием относительно логических связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, модальных скобок, а также кванторов по переменным всех типов.

Определение 5.5.9 ([21]). Пусть $\mathcal{X} = (X,F,\leqslant)$ — структурированное аппроксимационное пространство над структурой $\mathcal{F} = (F,\sigma^{\mathcal{F}})$ сигнатуры σ. Определим понятие *истинности* на $\mathcal{X}$ формулы φ логики DL_σ при означивании $\gamma : SV(\varphi) \cup FV(\varphi) \to X$, с условием $\gamma(x) \in F$ для любого $x \in FV(\varphi)$, обозначаемое

$$\mathcal{X} \models \varphi \restriction \gamma,$$

индукцией по сложности φ. Пусть, для $x \in FV$ и $a \in F$, $\gamma_a^x \leftrightharpoons (\gamma \setminus (\{x\} \times F)) \cup \{\langle x,a\rangle\}$, аналогично, для $S \in SV$ и $S_0 \in X$, $\gamma_{S_0}^S \leftrightharpoons (\gamma \setminus (\{S\} \times X)) \cup \{\langle S,S_0\rangle\}$. Полагаем

1) $\mathcal{X} \models [x|S]\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(S)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
2) $\mathcal{X} \models \langle x|S\rangle\theta(x) \restriction \gamma$, если существует $a \prec \gamma(S)$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
3) $\mathcal{X} \models [x|s]\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(s)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
4) $\mathcal{X} \models \langle x|s\rangle\theta(x) \restriction \gamma$, если существует $a \prec \gamma(s)$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;
5) $\mathcal{X} \models (\exists S)\theta(S) \restriction \gamma$, если существует $S_0 \in X$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_{S_0}^S$;
6) $\mathcal{X} \models (\forall x)\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \in F$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$,

и так далее (считаем, что предикатный символ $\leqslant$ интерпретируется в X стандартным образом).

В случае динамической логики над темпоралными аппроксимационными процессами, для удобства, переменные из множества FV будем разделять на три типа: переменные для обозначения произвольных непустых интервалов (i,i',...,i_0, i_1,...), переменные для обозначения точечных интервалов (l,l',..., l_0,l_1,...), и переменные для произвольных элементов из F (a,b,c,...,x,y,z). В аппроксимационных пространствах темпоральных процессов ограниченные модальности вида $[i|P]$ и $\langle i|P\rangle$, вместе с неограниченными модальностями вида $[i] = [i|L]$ и $\langle i\rangle = \langle i|L\rangle$, позволяют формулировать суждения о "возможных мирах", понимаемых как интервалах выбранного процесса (остальные процессы на данном интервале могут вести себя сколь угодно сложно, но "доступ" к ним,

в свою очередь, возможен только посредством их подинтервалов). Атомарные интервалы (то есть интервалы вида $\{l\}$) дают точную и полную информацию обо всех процессах, происходящих в данный момент. Из этих соображений, а также для интерпретации определимости Δ_0^{DL}-формулами посредством определимости формулами логики первого порядка, рассмотрим следующее понятие.

Определение 5.5.10. Пусть $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок. *Атомарным пространством темпоральных процессов* над $\mathbb{L}$ называется аппроксимационное пространство $\mathcal{T}_0(\mathbb{L}) = (P(L) \setminus \{\varnothing\}, \mathbb{L}, \subseteq)$, где $P(L)$ — множество всех подмножеств L, $\mathbb{L}$ отождествляется с множством точечных интервалов, а $\subseteq$ — стандартное теоретико-множественное отношение включения на $P(L)$.

5.6 Алгоритмические аспекты анализа темпоральных процессов

Определение 5.6.1. Аппроксимационное пространство $\mathcal{X}_1$ Δ^{DL}-*сводится* к аппроксимационному пространству $\mathcal{X}_2$ ($\mathcal{X}_1 \leqslant_{DL} \mathcal{X}_2$), если $\mathcal{X}_1$ как структура Δ^{DL}-определимо в аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}_2$, и

1) структура конечных элементов $\mathcal{F}_1$ Δ^{DL}-определима в $\mathcal{X}_2$ внутри $\mathcal{F}_2$,
2) существует эффективная процедура, сопоставляющая каждой Δ_0^{DL}-формуле пространства $\mathcal{X}_1$ Δ_0^{DL}-формулу пространства $\mathcal{X}_2$, определяющую соответствующий предикат в данном представлении пространства $\mathcal{X}_1$ в пространстве $\mathcal{X}_2$.

Теорема 37. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то аппроксимационные пространства $\mathcal{T}(\mathbb{L})$ и $\mathcal{T}_0(\mathbb{L})$ эффективно DL-эквивалентны:

$$\mathcal{T}(\mathbb{L}) \equiv_{DL} \mathcal{T}_0(\mathbb{L}).$$

Предложение 5.6.1. Если $\mathbb{L}$ непрерывен, то для любого $n \geqslant 1$ и любых $P_1, \ldots, P_n \subseteq L$

$$\mathcal{T}(P_1, \ldots, P_n)_{\Delta_0^{DL}} \equiv_\Sigma (\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)_{Morley}.$$

Здесь $(\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)_{Morley}$ — морлизация структуры $(\mathbb{L}, P_1, \ldots, P_n)$, т.е. обогащение, полученное добавлением к сигнатуре символов для всех определимых формулами логики первого порядка отношений, а $\mathcal{T}(P_1 \ldots, P_n)_{\Delta_0^{DL}}$ — обогащение,

полученное добавлением к сигнатуре символов для всех отношений, определимых Δ_0^{DL}-формулами.

На самом деле, имеет место более общая

Теорема 38 (о нормальной форме)**.** Пусть $(X,F, \leqslant)$ – F-атомное аппроксимационное пространство Существует эффективная процедура, сопоставляющая Δ_0^{DL}-формуле $\Phi(P_1,\ldots,P_n,X)$ в $(X,F, \leqslant)$ и определимым в $\mathcal{F}$ множествам $\hat{P}_1,\ldots,\hat{P}_n$ формулу первого порядка, определяющую в $\mathcal{F}$ множество $\hat{X}$.

Следствие 12. Если элементарная теория структуры $(\mathbb{L},P_1\ldots,P_n)$ является подмодельно полной и разрешимой, то существует эффективная равномерная процедура для проверки истинности Δ_0^{DL}-формул в $\mathcal{T}(P_1,\ldots,P_n)$.

В частности, если все процессы $P_1,\ldots,P_n$ являются элементами интервальной булевой алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{L})$, порожденной $\mathcal{I}(\mathbb{L})$ (т.е. каждый элемент есть объединение конечного числа интервалов), то условие из предыдущего следствия выполнено. Как правило, только этот частный случай и рассматривается в математической лингвистике для анализа глаголов.

Неформально, язык динамической логики над темпоральными аппроксимационными пространствами является удобным языком “высокого уровня” для работы с моделями темпоральной логики и анализа интервальной семантики естественных языков. Этот язык эффективно интерпретируется в языке логики первого порядка над соответствующим линейным порядком, обогащенном одноместными предикатами для обозначения процессов. Однако получающиеся при этом формулы сложны для анализа и носят исключительно технический характер.

5.7 Приложения в темпоральной логике и формальной семантике английского языка

Основные отношения темпоральной логики Дж.Ф. Аллена [1] формализуются в динамической логике следующим образом: для произвольных темпоральных процессов $P_1, P_2 \subseteq T$,

P_1 **before** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1][i_2|P_2](i_1 \leqslant i_2)$;

P_1 **after** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1][i_2|P_2](i_2 \leqslant i_1)$;

P_1 **while** P_2 соответствует отношению $[i_1|P_1]\langle i_2|P_2\rangle(i_1 = i_2)$;

P_1 **overlaps** P_2 соответствует отношению $\langle i_1|P_1\rangle\langle i_2|P_2\rangle(i_1 = i_2)$

(или, в другой версии, отношению $\langle i_1|P_1\rangle\langle i_2|P_2\rangle$((“$i_1$ – правый подинтервал P_1)$\wedge$ $\wedge$(“i_2 – левый подинтервал P_2” $\wedge$ $(i_1 = i_2)$), где “i – левый подинтервал P” есть сокращение для формулы $[i'|P]((i \subseteq i') \vee \langle i''|i\rangle(i'' < i')))$,

и т.д..

При образовании сложных предложений в естественных языках, помимо логических связок часто используются и *темпоральные* связки (“до”, “после”, “когда” и т.п.). Отношения между процессами и состояниями, соответствующими глаголам таких предложений, формализуются в динамической логике так же, как и темпоральной логике Аллена. Однако в естественных языках большое значение имеет форма глагола (время, вид и т.п.), причем в разных языках эти категории выражаются особым образом. Далее рассматриваются два языка: английский и русский.

В работах Р. Монтегю [13, 14, 15], американского специалиста по математической логике, возникло направление математической лингвистики, позднее получившее название “формальная семантика”. Оно объединяет понятия и методы математической логики и философии языка с целью построения единой теории формальной семантики естественных языков. Более точно, выделяются фрагменты естественных языков, допускающие такую формализацию и остающиеся достаточно выразительными. Одним из основных методов формальной семантики является анализ грамматических категорий времени и вида. В рамках этого подхода Р. Монтегю формализовал семантические значения глаголов в английском языке. Рассмотрим несколько примеров такой формализации. Вот как выглядит семантический анализ времени *Present Progressive*.

> Предложение (т.е. состояние) **John is walking** истинно в течение времени p тогда и только тогда, когда существует открытый интервал i такой, что p является подинтевалом i и для всех $t \in i$ состояние **John walks** истинно в момент времени t.

Интервальные расширения впервые были существенным образом использованы в работах американских лингвистов М. Беннетта и Б. Парти [2]. В качестве примера рассмотрим данное ими описание времени *Past Simple*.

Предложение (т.е., состояние) **John ate the fish** ($= \alpha$) истинно на интервале i, если i является точечным интервалом, α относится к интервалу i', и существует интервал $i'' < i'$ такой, что $i'' < i$ и состояние **John eats the fish** истинно на интервале i''.

В качестве еще одного примера рассмотрим формальное описание времени *Present Perfect*.

Предложение (т.е., состояние) **John has eaten the fish** ($= \alpha$) истинно на интервале i, если i является точечным интервалом, α относится к интервалу i', i является подинтервалом интервала i' и существует интервал $i'' < i'$ такой, что либо i является правой границей интервала i'', либо $i'' < i$ и состояние **John eats the fish** истинно на интервале i''.

В приведенных выше примерах рассматриваются состояния **John walks**, **John is walking**, **John eats the fish**, **John ate the fish** и **John has eaten the fish**, вместе с точечным интервалом, понимаемым как "данный момент". Фактически, в этих примерах указаны определения сложных времен по времени *Present Simple*. Таким образом, приведенные выше результаты позволяют рассматривать семантику предложений английского языка, содержащих глаголы в произвольном времени, с использованием равномерных и конструктивных методов рассуждений.

Действительно, легко построить Δ_0^{DL}-формулы сигнатуры $\langle \leqslant, \subseteq \rangle$, описывающие соответствующие отношения между этими процессами (точнее, состояниями) в пространстве темпоральных процессов $\mathcal{T}$. Используя обозначения

1) "i – открытый интервал" для формулы
$$[i'|i](\langle i_0|i'\rangle(i_0 \neq i') \vee \langle i_1|i\rangle\langle i_2|i\rangle(i_1 < i' < i_2));$$

2) "i – ограниченный интервал" для формулы
$$\langle i_1\rangle\langle i_2\rangle[i'|i](i_1 \leqslant i \leqslant i_2);$$

3) "i_1 – левая граница i_2" для формулы
$$(i_1 \leqslant i_2) \wedge \neg\langle i\rangle(i_1 < i < i_2);$$

4) "i_1 – правая граничная точка i_2" для формулы
$$(i_1 \leqslant i_2) \wedge (i_1 \subseteq i_2) \wedge ([i|i_1](i = i_1))$$

и т.д., получим формулы

$$p \subseteq \text{“}\textbf{John is walking}\text{”} \iff \langle i|\text{“}\textbf{John walks}\text{”}\rangle((p \subseteq I) \wedge (\text{“}i \text{ – открытый инт.”})),$$

$$p \subseteq \text{“}\textbf{John ate the fish}\text{”} \iff [i|\text{“}\textbf{John eats the fish}\text{”}](i < p),$$

$$p \subseteq \text{“}\textbf{John has eaten the fish}\text{”} \iff [i|\text{“}\textbf{John eats the fish}\text{”}](i \leqslant p).$$

Определение сложных времен по времени *Present Simple* является ключевым методом для определения семантики глагольных конструкций в английском языке. Особенно это важно при согласовании времен в сложных предложениях.

В русском языке глагольная система устроена принципиально иначе. Как будет показано ниже, аналог английского времени *Present Simple* в русском языке отсутствует. Но перед этим продемонстрируем пример использования динамической логики и интервальной семантики в этом случае. Рассмотрим два предложения русского языка:

1 Ваня делал домашнюю работу, когда Петя пришел.

2 Ваня сделал домашнюю работу, когда Петя пришел.

Отметим, что синтаксическое различие между этими предложениями минимально (одна буква), а семантическое различие между ними весьма существенно. Формализация их темпоральных аспектов в динамической логике выглядит следующим образом. Первому предложению соответствует формула

$$\langle i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}\rangle\langle i_2|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}\rangle((i_2 \subseteq i_1) \wedge$$

$$\wedge(\text{“}i_1 \text{ – открытый инт.”})) \wedge [i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}]$$

$$[i_2|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}]((i_1 < t_{\text{наст}}) \wedge (i_2 < t_{\text{наст}}))$$

(здесь $t_{\text{наст}}$ обозначает момент речи). Второму предложению соответствует формула

$$\langle i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}\rangle[i_2|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}\rangle$$

$$((i_2 \leqslant i_1) \wedge \langle i_3|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}\rangle(i_1 \leqslant i_3)) \wedge$$

$$\wedge[i_1|\text{“}\textbf{Ваня делает д.р.}\text{”}][i_2|\text{“}\textbf{Петя приходит}\text{”}]$$

$$((i_1 < t_{\text{наст}}) \wedge (i_2 < t_{\text{наст}})).$$

Такая интерпретация обусловлена тем, что глагол “делать” в первом предложении употреблен в несовершенном виде, а во втором – в совершенном. В русском языке несовершенный вид, как правило, указывает на интервал, а совершенный – на точку, являющуюся границей интервала.

5.8 Анализ глагольной системы русского языка

Грамматические категории глагола не были в центре внимания Р. Монтегю – в своей работе “Proper treatment of quantification in ordinary English” [13] он посвятил анализу английской системы времен лишь небольшой фрагмент текста. Его последователи, в том числе такие важные в истории развития формальной семантики авторы, как Д. Даути [4, 5] и Б. Парти [2], постарались интегрировать этот фрагмент грамматической системы в “единую органичную и математически точную теорию” о семантике естественного языка, фундамент которой заложил Монтегю [13, 14, 15]. Основные результаты формальной семантики получены в первую очередь на материале английского языка, и идеи, касающиеся глагольных категорий, не исключение.

Главное изменение, которое последователи Монтегю внесли в анализ видовременной парадигмы глагола, – переход от точек к интервалам при формулировании правил истинности предложений. Такой подход, например, применил Даути в исследовании английского прогрессива. М. Беннетт и Б. Парти в [2] предложили на основе интервальной семантики эскизное описание всех личных глагольных форм (finite verb forms) английского языка.

Несмотря на то, что большинство работ в рамках формальной семантики посвящено феноменам английского, со времён Монтегю исследователи стремятся создать аппарат описания лингвистических значений, применимый к любым естественным языкам (основам семантики Монтегю для фрагмента русского языка посвящена монография И.А.Герасимовой[25]). Однако те, кто пытается применить формально-семантический инструментарий, разработанный в первую очередь в рамках англоязычной традиции, к новому лингвистическому материалу, нередко сталкиваются с серьёзными затруднениями. Формальный метаязык, удовлетворительно описывающий фрагменты английского, оказыва-

ется неприменим к семантике явлений другого языка. Русская глагольная система, а именно аспектуально-временные формы, как раз представляют собой такой проблематичный объект изучения.

Вид, безусловно, является грамматической категорий русского глагола как минимум с точки зрения обязательности (в русском языке не существует "безвидовых" (aspectless) глагольных форм). С другой стороны, все или даже большинство глаголов русского языка не удаётся разбить на видовые пары, поэтому эту категорию нельзя однозначно отнести к словоизменительным, то есть таким, значениями которых отличаются формы одной и той же лексемы внутри парадигмы (таковы, например, падеж и число существительных или глагольное время). Это не позволяет выделить "базовую" глагольную форму, через описание значения которой был бы построен анализ всех остальных форм. В формально-семантических исследованиях английского языка со времён Монтегю эту роль выполняет время *Present Simple*, образовать которую можно у любой английской глагольной лексемы.

Для контаргументации к точке зрения, согласно которой вид — словоизменительная категория, можно прибегнуть к простой математической модели. Пусть P и I — множества инфинитивов русских глаголов совершенного и несовершенного вида соответственно, а A — действующая из P в I функция, которая инфинитиву глагола совершенного вида ставит в соответствие инфинитив парного ему глагола несовершенного вида: $A(\textit{разбить}) = \textit{разбивать}$, $A(\textit{насЫпать}) = \textit{насыпАть}$ и т. д. Очевидно, что с одной стороны, для значительного числа элементов из P, соответствующих одновидовым глаголам совершенного вида, функция не будет давать результата, с другой, все элементы I, соответствующие одновидовым лексемам несовершенного вида, не будут иметь прообраза в P. Как было отмечено выше, такие "неприкаянные" глаголы не удаётся адекватно разделить на небольшое число крупных групп, основываясь на семантических критериях. Если же применить подобную модель к категориям, словоизменительный статус которых не подвергается сомнению, то есть рассмотреть функцию, которая форме лексемы X с реализованной в ней граммемой a категории C, ставит в соответствие форму той же лексемы, но с граммемой b, результаты окажутся иными. К примеру, для рода или падежа русских прилагательных она, как представляется, не будет иметь исключений, а при применении к падежу имён существительных в общую картину не впишется

только достаточно небольшое число лексем, имеющих дефектные падежные парадигмы. Если же рассмотреть в качестве a полную форму прилагательного, а в качестве b — краткую, то всё множество прилагательных, для которых функция не даёт результата, будет представлено двумя группами лексем с неполной парадигмой, выделяемыми на семантических основаниях (относительные и притяжательные), а также небольшим числом качественных прилагательных с дефектной парадигмой (ср. *голубой*) (термины "дефектная парадигма" и "неполная парадигма" не синонимичны ([27], стр. 119)). "Смешанная" точка зрения, согласно которой вид — словоизменительная категория для парных глаголов, но классифицирующая для всех остальных, представляется ещё менее приемлемой, чем предыдущая, так как расщепляет единую категорию вида на две, имеющие разные статусы. С этой точки зрения в рамках одной и той же части речи сосуществуют две категории, обладающие тождественным планом содержания и одинаково влияющие на грамматические характеристики глагольных форм. Подобный подход ставит под сомнение не только целостность вида, но и целостность глагола как части речи, среди объединяющих признаков которой — общность грамматических категорий. Итак, наиболее разумным решением представляется рассматривать глагольный вид как классифицирующую категорию.

Итак, можно выделить два основных положения относительного глагольной категории вида. Во-первых, она разбивает множество всех глаголов на два непересекающихся класса лексем, то есть имеет *классифицирующий статус*. Во-вторых, элементы бинарной видовой оппозиции не составляют иерархии: они *равноправны*. Последнее положение, строго говоря, вытекает из первого, однако представляется достаточно важным, чтобы обратить на него внимание. Определив статус рассматриваемой категории, и тем самым обосновав важность изучения двух составляющих видового противопоставления как одинаково сложных, ни один из которых не находится в зависимости от другого, можно выдвинуть гипотезу об основном значении элементов оппозиции. Если сформулировать её в общих чертах, то она будет звучать следующим образом: центральным для семантики граммемы несовершенного вида является указание на наличие временного *интервала*, на котором протекает действие, называемое глагольной лексемой, тогда как граммема совершенного вида сообщает о существовании *точки* — границы действия. В тех немногих обнаруженных случаях или классах

случаев, которые, на первый взгляд, не согласуются с гипотезой, противоречие может быть объяснено, как будет показано далее, либо особенностями режима интерпретации, либо некоторыми иными соображениями. Понятия, взятые из арсенала темпоральной логики и связанных с ней формально-лингвистических исследований, удобны для описания общей гипотезы, представления данных, поддерживающих её, а также для рассмотрения частных случаев.

5.9 Режимы интерпретации

В математической логике важные результаты были получены важные результаты о так называемых *формульных структурах* – структурах, элементами которых являются синтаксические объекты: формулы и т.п. Свойства таких синтаксических объектов (в частности, семантические свойства) могут, в свою очередь, выражаться синтаксически. В качестве примера можно привести допустимые фрагменты бесконечных логик, рассматриваемые в теореме Барвайса о компактности.

Рассматривая систему глагольных форм французского языка, Э. Бенвенист в [24] предложил различать два плана сообщения (plans d'énonciation): *речевой* (plan du discours) и *исторический* (plan de l'histoire). К первому относятся речевые произведения, в которых можно проследить явную зависимость от обстоятельств их порождения: прежде всего, наличие говорящего и слушающего, а также момента речи как грамматической точки отсчёта (бытовые диалоги, переписка, новостные репортажи, дневниковые записи). Второй же, соответственно, включает в себя повествования, напрямую не соотносимые с коммуникативной ситуацией (большая часть художественных произведений, исторических описаний). Такое разделение кажется крайне полезным для понимания функционирования глагольных категорий, связанных со временем, однако оно практически не учитывается в формальных моделях, которые пользуются системой Рейхенбаха [16] в том или ином виде.

Е. В. Падучева в [26] справедливо замечает, что в русском языке некоторые глагольные формы принимают различные значения в зависимости от плана сообщения. В своей работе она использует другую пару терминов с близ-

ким содержанием – речевой и нарративный режим интерпретации, первый из которых соответствует плану речи, второй – историческому плану (в данном тексте применяется именно это терминология) ([26], стр. 286-287). Например, одна и та же форма настоящего времени может быть использована совершенно по-разному:

0а. Вы слышали, что молодой аристократ пишет последний том своей саги?

0б. В третьей части романа молодой аристократ пишет последний том своей саги и издаёт его.

Вопросительные предложения характерны для ситуации диалога, в которой шифтерное местоимение *вы* референтно адресату, следовательно, (0) а. практически однозначно относится к речевому режиму интерпретации. Форма настоящего времени глагола несовершенного вида *писать* позволяет определить, что на момент произнесения (0) а. последний том ещё не написан, но писатель над ним работает.

Стоит заметить, что в английском языке наблюдается схожая ситуация: словоизменительная парадигма глагола не обладает особыми средствами для отдельных режимов интерпретации. Очевидно, что это так же, как и в русском, отражается в изменении значения финитных глагольных форм в целом и граммем реализованных в них категорий в частности, в зависимости от того, в каком из двух режимов они употреблены, что, безусловно, влияет на значение всего высказывания, частью которого они являются.

Однако утверждать, что семантическая теория, описывающая значения высказываний, относящихся к нарративному режиму интерпретации, обязана радикальным образом отличаться от той, которая нацелена на значения высказываний речевого режима, не совсем корректно. Скорее следует говорить о том, что такая теория должна принимать во внимание следующее соображение: для того, чтобы определить содержание многих языковых единиц и категорий, встречающихся в тексте (к примеру, глагольного времени, личных местоимений первого и второго лица), необходимо восстановить информацию о системе точек отсчёта, относительно которых они принимают свои значения. Подобные сведения, как правило, могут быть получены из контекста рассматриваемых высказываний.

Как уже было указано ранее, подавляющее большинство прозаических художественных произведений в целом выдерживается в нарративном режиме ин-

терпретации. Исключения могут составлять такие особые жанры, как дневниковый роман, но, речевой режим в них, строго говоря, является лишь имитацией, так как коммуникативная ситуация – творческий конструкт, созданный писателем. В остальных случаях доминирование нарративного режима нарушается тогда, когда в тексте представлена прямая речь персонажей, в которой почти неизбежно появляются шифтерные языковые единицы, а такие категории, как глагольное время, уже не могут быть интерпретированы как не связанные ни с каким с актом коммуникации. Для подобных явлений целесообразно ввести понятие внутритекстовой речевой ситуации: с одной стороны, в ней имеются явные сходства с речевым режимом интерпретации (присутствуют фигуры адресата и адресанта, грамматическая точка отсчёта совпадает с моментом произнесения высказывания и т. д.), с другой, все референты относятся к вымышленному миру повествования, даже если оно написано в реалистическом ключе. Речевая ситуация описана внутри текста, вплетена в нарратив наряду с персонажами, действиями и обстоятельствами, составляющими реальность художественного произведения, но не связанными напрямую с реальностью объективной. Иначе говоря, набор значений, которые могут приниматься “‘языковыми переменными”, принадлежит не внеязыковой действительности, но нарративному миру текста. Из этого разумно сделать предположение, что при детальном изучении внутритекстовых речевых ситуаций полезным инструментом анализа может служить семантика возможных миров.

Интересно рассмотреть различия в реализации значений при речевом и нарративном режимах интерпретации на примере английской глагольной формы *Present Perfect Simple*. О. Есперсен называет английский перфект “ретроспективным настоящим” (retrospective present), “соединяющим событие из прошлого с настоящим либо как продолжающееся до текущего момента, либо как такое, результат которого сохраняется в текущий момент” ([12], стр. 191). Подобная специфика перфектного значения объясняет особый интерес к этой глагольной форме в рамках рассуждения о режимах интерпретации, так как само определение текущего момента, грамматической точки отсчёта, зависит от типа повествования, к которому относится рассматриваемый текст или его фрагмент. Фраза *Reduction has improved all except 'the Trolls' (Упрощение улучшило всё, кроме “Троллей”)* (имеется в виду иллюстрация к роману “Хоббит”) взято из переписки Дж. Р. Р. Толкина с издателями его книг. Таким образом, его

необходимо рассматривать в речевом режиме интерпретации, в качестве грамматической точки отсчёта в котором выступает момент порождения, в данном случае – написания, предложения. Форма *has improved* в таком контексте обозначает действие, которое адресант воспринимает как недавно завершившееся с некоторым видимым результатом.

Предложение *For who of the living has descended into the pits of Utumno? (Ибо кто из живущих спускался в глубины Утумно?)* найдено на страницах "Сильмариллиона" того же автора. Художественное произведение, написанное от третьего лица, требует, как правило, применения к своим фрагментам нарративного режима интерпретации. Грамматическая точка отсчёта отождествляется с некоторым абстрактным моментом повествования, не имеющим прямого отношения ко времени написания той или иной части текста. Форма *has descended* в составе приведённого риторического вопроса соотносит (отсутствующий) результат действия не с каким-либо реальным моментом речи, а с тем участком линии повествования, на котором сфокусировано внимание читателя, когда он видит эти строки.

Итак, приведённые примеры иллюстрируют важность концепта режимов интерпретации для анализа содержания глагольных категорий аспекта и времени, в первую очередь потому, что именно режимами интерпретации обусловлена реализация различных значений одной и той же финитной формы. Анализ глагольных форм через призму режимов интерпретации может способствовать развитию более системного подхода к изучению таких частных и переносных значений глагольных граммем, которые нередко рассматриваются как периферийные и не вписываются в общую картину. Подводя итог краткому рассуждению о реализации значений глагольных форм в разных режимах интерпретации, нельзя не отметить, что естественно выбрать речевой режим в качестве исходного, основного, так как именно в нём "предложение интерпретируется в условиях канонической, т. е. полноценной коммуникативной ситуации" ([26], стр. 286). В последующей части работы высказывания рассматриваются именно в этом режиме интерпретации, если не указано иное.

5.10 Глагольный вид в русском языке

Бинарная категория вида в русском выражает достаточно широкий спектр значений, для которых в английском используется большее число дифференцированных форм. Так, настоящее время несовершенного вида может быть аналогом как *Present Simple* в хабитуальном значении (1), так и *Present Progressive* (2).

1a. This gentleman from Providence writes bizzare stories

1b. Этот господин из Провиденса пишет причудливые истории.

2a. The old queen is writing a letter to the governor general.

2b. Старая королева пишет письмо генерал-губернатору.

Как уже отмечалось, если попытаться сформулировать основное содержательное различие между двумя элементами бинарной категории вида в русском языке, то это может звучать следующим образом: центральным для семантики граммемы несовершенного вида является указание на наличие временного интервала, на котором протекает действие, называемое глагольной лексемой, тогда как граммема совершенного вида сообщает о существовании точки – границы действия.

Такой вывод следует в первую очередь из наблюдений за сочетаемостью разных видовых форм с лексемами и конструкциями, выражающих те или иные темпоральные значения. Фазовые глаголы, к примеру, указывающие на определённый этап в событии, обозначаемом глагольной группой, не могут использоваться с лексемами совершенного вида, представляющими событие как точку (3).

3a. Купец начал / продолжил / закончил пересчитывать вырученные за месяц деньги.

3b. *Купец начал / продолжил / закончил пересчитать вырученные за месяц деньги.

Вторая важная сочетаемостная характеристика – способность присоединять обстоятельства, выраженные именными группами с вершиной в винительном падеже или сочетанием количественного числительного в винительном падеже и именной группы и обозначающие некоторый временной промежуток: всю ночь, год, сто лет, целую неделю и т. д. В качестве сирконстантов такие кон-

струкции могут распространять только глагольные группы с вершиной, представленной лексемой несовершенного вида:

4a. Две зимы скитальцы жили в покинутом убежище отшельника.

4b. Половину месяца фольклорист будет заниматься сбором материала.

4c. *Целую ночь хозяин таверны накормил гостей.

4d. *Тысячу дней выучит монах язык исчезнувшего племени.

По-видимому, распространять глагольные группы с вершиной совершенного вида подобные обстоятельственные конструкции способны только в качестве актанта (обязательного элемента описания ситуации), к тому же для достаточно небольшой и чётко выделенной группы глаголов (перфективные дериваты с префиксом *про-*: протанцевать, проходить, проболтать): ср. пару “Весь спектакль юноши проболтали” и “Юноши проболтали”, в которой второе предложение воспринимается как неполное. В целом такую избирательность рассматриваемых выражений по отношению к видовой принадлежности глагола можно трактовать следующим образом: они характеризуют длину интервала протекания действия, а в лексемах совершенного вида указания на такой интервал не обнаруживается.

Итак, если опираться на идеи интервальной семантики, сформулированные исследователями в первую очередь в результате работы с английской глагольной системой, то в отношении содержания глагольной категории вида в русском языке можно выделить следующие предположения. Центральным для семантики граммемы несовершенного вида является указание на наличие *временного интервала*, на котором протекает действие, называемое глагольной лексемой, тогда как граммема совершенного вида сообщает о существовании *точки* – границы действия. В тех немногих обнаруженных случаях или классах случаев, которые, на первый взгляд, не согласуются с гипотезой, противоречие может быть объяснено, как будет показано далее, либо особенностями режима интерпретации, либо некоторыми иными соображениями.

Рассуждая о фазовых глаголах английского языка, авторы “Toward the Logic of Tense and Aspect in English” относят их к “глаголам высшего порядка” (higher-order verbs) ([2], стр. 74), однако чёткого определения этого понятия не даётся. Подобные словоформы выступают вершинами глагольной группы и в английском, и в русском предложении, согласуясь с подлежащим (ср. Leonard stop-s playing. Леонард заканчива-ет играть). Говоря о синтактике таких гла-

голов в английском языке, Парти и Беннетт утверждают, что часть из них сочетаются с инфинитивами, часть – с формой *Present Participle*, а некоторые способны соединяться с обеими формами без изменений в значении. Русские глаголы высшего порядка управляют преимущественно инфинитивом. Фазовые глаголы (начать, закончить, продолжить и т. п.) – подмножество таких лексем, которое представляет интерес в данном исследовании из-за одного сочетаемостного свойства: в русском языке они способны управлять только инфинитивами глаголов несовершенного вида.

Фазовые глаголы, как это ясно из самого их названия, обозначают некоторую стадию, этап развития действия, обозначаемого управляемым ими инфинитивом. Невозможность употребления с ними лексем совершенного вида согласуется с представлением о центральном элементе семантики этого члена видовой оппозиции: у точки, обозначающей абсолютную границу, нельзя выделить какую-либо фазу. Сочетания вида “*начал уничтожить” или “*закончил защитить” представляют своего рода “грамматический оксюморон”, недопустимый в системе русского языка. Управляя инфинитивом несовершенного вида, фазовый глагол “ограничивает” исходный интервал, на котором протекает действие, причём фазовый глагол несовершенного вида выделяет некоторую его часть, а совершенного вида – абсолютную границу действия. Это можно увидеть, если сравнить конструкции

5а. наблюдать,

5б. начинать наблюдать,

5в. начать наблюдать,

5г. заканчивать наблюдать,

5д. закончить наблюдать.

Пусть I – временной интервал, на котором протекает действие, обозначаемое лексемой наблюдать, тогда значения фазовых глаголов можно описать следующим образом. В конструкции (5) б. выделяется подинтервал I_1, который является начальным для I. Сочетание фазового глагола и формы несовершенного вида указывает на заключительный интервал I_2. В (5) в. и д. говорится о начальной и конечной границе интервала соответственно. Сопоставление (5) б. с в. и г. с д. позволяет увидеть, что противопоставление точки и интервала как основная оппозиция в видовой семантике распространяется и на фазовые глаголы.

Контекст способен актуализировать наличие двух абсолютных границ процесса, названного глаголом совершенного вида, – начальной и конечной. Наиболее распространённый пример такой ситуации – сочетание сказуемого с обстоятельством, выраженным комбинацией предлога за и конструкции, обозначающей отрезок времени:

6а. Лиам освоил ирландский за три года.

6б. Дирижабль доставит команду авантюристов на остров за два часа.

Некоторые глаголы совершенного вида не подвержены подобной актуализации в силу того, что их лексическое значение несовместимо с идеей наличия как начальной, так и конечной абсолютной границы. Сюда относятся, к примеру, лексемы, синонимичные сочетанию фазового глагола “начать” с инфинитивом глагола несовершенного вида: запеть (начать петь), завопить (начать вопить), запрыгать (начать прыгать) и т. п. Смысловое тождество и контекстуальная взаимозаменяемость этих единиц позволяют рассматривать их как два способа выражения одних и тех же значений. Таким образом, совершенный вид и префикс *за-* выступают как синтетическое средство, играющее ту же роль, что и фазовый глагол в аналитической конструкции, – маркера начальной границы процесса.

Интересно, что если существование обеих абсолютных границ действия эксплицитно не сообщается, то граммема совершенного вида, как правило, указывает на конечную точку предельного процесса.

7. В конце июня 1630 года войска Густава Адольфа захватили Померанию.

Очевидно, что конструкция “в конце июня” служит в данном примере для локализации во времени момента, в который провинция перешла под контроль армии шведского короля. С другой стороны, это никак не противоречит тому факту, что начальная граница действия, результатом которого стал захват Померании, относится к началу июня: граммема совершенного вида в примере не содержит указания на неё.

Особый интерес представляют предложения, в которых присутствует обстоятельство, обозначающее временную дистанцию между абсолютными границами процесса, но глагольная часть сказуемого выражена формой глагола несовершенного вида:

8а. Мой знакомый флибустьер откапывает клад за полчаса.

На первый взгляд, возникает противоречие с представлением о том, что грамме-ма несовершенного вида не несёт указания на наличие границ процесса, однако следует более детально разобрать такие выражения. Если обратить внимание на глагольную часть сказуемого в них, то можно заметить, что в этой функ-ции выступают только такие лексемы, которые могут входить в видовые пары или по меньшей мере имеют однокоренной коррелят совершенного вида, мак-симально близкий по смыслу. Следовательно, каждому предложению можно сопоставить аналогичное, заменив финитную форму несовершенного вида на форму соответствующего парного глагола:

8б. Мой знакомый флибустьер откопал клад за полчаса;

8в. Мой знакомый флибустьер откопает клад за полчаса.

Чтобы определить особенности семантики граммемы несовершенного ви-да в рассматриваемых случаях, необходимо выяснить содержательную связь между двумя группами таких предложений.

В выявлении искомой корреляции поможет ответ на следующий вопрос: что подразумевает участник коммуникации, когда использует предложение ти-па (8) а.? Во-первых, представляется необходимым, чтобы говорящий был уве-рен, что событие, описываемое в (8) б., имело место в прошлом, и, скорее всего, более одного раза. Во-вторых, адресантом предполагается, что оно случится и в будущем (этой мысли соответсвует (8) в., и, предположительно, может по-вторяться. Таким образом, ситуация воспринимается как типичная, происходя-щая периодечески. Употребляя предложение (8) а., говорящий рассматривает действие, обозначенное глагольной группой “откапывает клад за полчаса”, как характерное, постоянное свойство субъекта – референта именной группы “мой знакомый флибустьер”. Анализ пропозициональной установки позволяет прий-ти к тому, что предложения типа (8) а. семантически сложнее предложений типа (8) б. и в., более того, в содержательном отношении (8) а. включает в себя значение (8) б. и в.

На основании сказанного выше можно утверждать, что несовершенный вид в предложениях типа (8) а. выступает в функции так называемого хаби-туального аспекта, который обозначает повторяющиеся ситуации, в некотором смысле превращающиеся в характеристику субъекта ([3], стр. 96-97). Абсолют-ные границы же и временная дистанция между ними определяются для каж-

дой единичной “повторяющейся ситуации”, которая описывается предложением с финитной формой глагола совершенного вида в составе сказуемого.

Хабитуальное значение несовершенного вида в рассмотренных примерах можно трактовать следующим образом: граммема указывает на существование крупного интервала, которому принадлежат пары точек – абсолютных границ предельного процесса, совершающегося регулярно.

Большинство парных глаголов несовершенного вида могут, в зависимости от контекста, употребляться для обозначения как предельных процессов, протекающих на некотором временном интервале, так и действий, происходящих с определённой степенью регулярности. Ср. пары предложений:

9а. Сейчас квинтет исполняет народную песню буров;

9б. Квинтет постоянно исполняет народную песню буров в конце выступления.

10а. Этнограф наблюдает за тем, как шаман проводит ритуал вызова дождя.

10б. Шаман проводит ритуал вызова дождя несколько раз в год.

Стоит также отметить, что в примерах (9) б. и (10) б., как и в (8) а., глаголы, употреблённые в хабитуальном аспекте, обозначают периодически повторяющиеся завершённые события, однако контекст не актуализирует наличие начальной и конечной границ и не показывает временную дистанцию между ними.

Формулируя основное значение видовых граммем русских глаголов, в некотором смысле можно говорить об особом типе референции. Её объектом выступают не индивиды, как в случае с именными группами, анафорическими и дейктическими личными местоимениями, но *временные интервалы* (для несовершенного вида), на которых протекают процессы, заключённые в лексическом значении глаголов, или *точки* – абсолютные границы таких процессов. Зависящие от видовой принадлежности особенности сочетаемости глаголов с конструкциями, содержание которых связано с временными промежутками, поддерживают справедливость подобного взгляда. Значения видов, воспринимаемые как переносные (например, выражение завершённого действия формой несовершенного вида в нарративном режиме интерпретации:

11. В Титаномахии боги-олимпийцы побеждают своих противников-титанов и заключают их в Тартар,

как представляется, обусловлены теми или иными отклонениями от описанной модели референции.

Литература

[1] Allen, J.F.: Maintaining Knowledge about Temporal Intervals. Communications of the ACM, **26** (1983), 832–843.

[2] Bennett, M., Partee, B. H.: Toward the Logic of Tense and Aspect in English. In Partee B. H., Compositionality in formal semantics: selected papers by Barbara H. Partee. Blackwell Publishing, 59–109 (2004)

[3] Dahl, O., Tense and Aspect Systems. Oxford: Blackwell (1985)

[4] Dowty, D. R.: Word Meaning and Montague Grammar. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company (1979)

[5] Dowty, D. R. et al.: Introduction to Montague Semantics. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company (1989)

[6] Ershov, Yu.L.: The theory of A-spaces. Algebra and Logic., **12** (1973), 209–232.

[7] Ershov, Yu. L.: Dynamic logic over admissible sets. Soviet Math. Dokl., **28** (1983), 739–742.

[8] Ershov, Yu.L.: Theory of domains and nearby. Formal Methods in Programming and Their Applications. Lect. Notes Comput. Sci., **735** (1993), 1–7.

[9] Ershov, Yu. L.: Definability and Computability. Plenum, New York (1996)

[10] Ershov, Yu. L.: Σ-definability of algebraic structures. In: Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, Recursive model theory (Stud. Logic Found. Math., **138**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 235–260.

[11] Harel, D.: First-Order Dynamic Logic. Lecture Notes in Computer Science, **68** (1979), 1–135.

[12] Jespersen, O.: Essentials of English Grammar. Routledge (2006)

[13] Montague, R.: The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English. In: Jaakko Hintikka, Julius Moravcsik, Patrick Suppes(eds.):Approaches to Natural Language. Dordrecht, 1973. pp. 221–242.

[14] Montague, R.: English as a Formal Language, in B. Visentini, et al. (eds.), Linguaggi nella Societa a nella Tecnica. Milan, 1970. (Reprinted in Montague, 1974.)

[15] Montague, R.: Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague, ed. by Richmond Thomason. New Haven: Yale University Press, 1974.

[16] Reichenbach, H.: Elements of symbolic logic. Berkley (1947)

[17] Stukachev, A.I.: Σ-definability of uncountable models of c-simple theories. Siberian Math. Journal, **51**, N 3 (2010), 649–661.

[18] Stukachev, A.I.: Effective model theory via the Σ-definability approach. Lecture Notes in Logic, v. 41 (2013), 164–197.

[19] Stukachev, A.I.: On processes and structures. Lecture Notes in Computer Science. **7921** (2013), 393–402.

[20] Stukachev, A.I.: On properties of $s\Sigma$-reducibility. Algebra and Logic, **53**, N 5 (2014), 625–642.

[21] Stukachev, A.I.: Generalized hyperarithmetical computability on structures. Algebra and Logic, **55**, N 6 (2016), 623–655.

[22] Stukachev, A.I.: Processes and structures in approximation spaces. Algebra and Logic, **56**, N 1 (2017), 93–109.

[23] Stukachev, A.I.: Approximation spaces of temporal processes and effectiveness of interval semantics. Advances in Intelligent Systems and Computing, **1242** (2021), 53–61.

[24] Бенвенист, Э.: Общая лингвистика. М.: Прогресс (1974)

[25] Герасимова, И. А.: Формальная грамматика и интенсиональная логика. М.: ИФ РАН (2000)

[26] Падучева, Е.В.: Семантические исследования (Семантика времени и вида в русском языке; Семантика нарратива). М.: Языки русской культуры (1996)

[27] Плунгян, В.А.: Общая морфология: Введение в проблематику. М.: Едиториал УРСС (2003)

[28] Рыжков, А.М.: Аспект и время в русской глагольной системе в сравнении с английской с точки зрения формальной семантики. МНСК-2018: Прикладная лингвистика. Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции. НГУ, Новосибирск (2018), 27–28.

[29] Стукачев, А.И.: Интервальные расширения и темпоральные аппроксимационные пространства. Сибирский математический журнал, т. 62, N4 (2021), 894–910.

Глава 6. Категориальные грамматики

6.1 Введение

Теория категориальных грамматик занимается методами описания искусственных (включая формальные) и естественных языков, связанными с типизацией. Обращаясь к истокам категориальных грамматик, везде встречается математик и лингвист Йегошуа Бар-Хиллел, который внёс большой вклад в создание и развитие этих грамматик.

Но перед тем, как углубиться в категориальную грамматику, следует для начала рассмотреть личность самого Бар-Хиллела, а также две его достаточно известные работы - “Основания теории множеств” и “Эскиз теории семантической информации”, поскольку это привело Бар-Хиллела к необходимости ввести термин категориальной грамматики при работе с искусственными и естественными языками.

Биографическая справка о Бар-Хилллеле. Йегошуа Бар-Хиллел, израильский логик, математик и лингвист, родился 8 сентября 1915 года в Вене, но вскоре вместе со своей семьёй переехал в Берлин. В 1933 в возрасте 18 лет эмигрировал в Палестину, где женился на Суламифи Ашкенази до начала войны [1].

Бар-Хиллел принимал участие в военных действиях: во время Второй мировой войны служил в Еврейской бригаде Британской армии; также участвовал в Арабо-израильской войне 1947-1949 годов. В результате ранения потерял глаз.

Несмотря на тяжёлую молодость, он получил диплом доктора философии в Еврейском университете, где изучал математику под руководством Абрахама Френкеля, в соавторстве с которым впоследствии написал книгу: “Основания теории множеств” [4], которая будет рассмотрена далее.

“Логический синтаксис языка”, написанный Рудольфом Карнапом в 1934 году оказал сильное влияние на дальнейшую деятельность Бар-Хиллела. После продолжительной переписки он продолжил свою научную деятельность под руководством Карнапа в Чикагском университете, а в 1952 году написал в соавторстве с ним работу “Эскиз теории семантической информации” [5].

Вскоре Бар-Хиллел получил место в Массачусетском технологическом институте, где работал в области машинного перевода. В 1952 году он организовал первую Международную конференцию по машинному переводу, где предложил использовать для описания синтаксической структуры естественных языков категориальные грамматики, разработанные польскими логиками Станиславом Лесьневским и Казимежем Айдукевичем применительно к формальным языкам математики.

Однако впоследствии Бар-Хиллел выражал сомнение в том, что главная цель машинного перевода - выполнение высококачественного автоматического перевода естественного языка — вообще достижима. И в 1959 году выступил с официальным заявлением об этом. В качестве примера он привел проблему нахождения правильного перевода для слова pen в следующем контексте:

John was looking for his toy box. Finally he found it. The box was in the pen. John was very happy.

Джон искал свою игрушечную коробку. Наконец он её нашёл. Коробка была в манеже. Джон был очень счастлив.

Pen в данном случае должно переводиться не как “ручка” (в значении инструмент для письма), а как “детский манеж” (play-pen). Выбор того или иного перевода в этом случае и в ряде других обусловлен знанием внеязыковой действительности (или контекста как говорят сейчас), а это знание слишком обширно и разнообразно, чтобы вводить его в компьютер. Однако Бар-Хиллел не отрицал идею машинного перевода как таковую, а считал перспективным направлением разработку машинных систем, ориентированных на использование их человеком-переводчиком, как “человеко-машинный симбиоз”.

Это выступление самым неблагоприятным образом отразилось на развитии машинного перевода в США. В 1966 г. специально созданная Национальной Академией наук комиссия ALPAC (Automatic Language Processing Advisory Committee), основываясь, в том числе и на выводах Бар-Хиллела, пришла к заключению, что машинный перевод нерентабелен: качество машинного перевода не оправдывало его стоимость, а для нужд перевода технических и научных текстов человеческих ресурсов было достаточно [3]. Бар-Хиллел был также одним из первых исследователей в области информационного поиска [1].

В 1953 году Бар-Хиллел вернулся в Еврейский университет на факультет философии, где преподавал до самой своей смерти. Среди его учеников бы-

ло множество израильских философов и лингвистов, в том числе Аса Кашер и Авишай Маргалит. В 1953 году он основал алгебраическо-вычислительную лингвистическую группу, а восемь лет спустя совместно с Перлесом и Шамиром доказал лемму о накачке, иногда называемую леммой Бар-Хиллела.

К заслугам Бар-Хиллела можно также отнести основание Факультета Философии Науки в Иерусалимском университете. С 1966 по 1968 годы Бар-Хиллел был председателем Отделения Логики, Методологии и Философии Науки Международного Объединения Истории и Философии Науки [1].

Основные работы Бар-Хиллела относятся к логическим и математическим аспектам общей теории языка, математической лингвистике и автоматическому переводу. Бар-Хиллел предложил использовать для описания синтаксической структуры естественных языков категориальные грамматики, разработанные польскими логиками С. Лесьневским и К. Айдукевичем применительно к формальным языкам математики. Работы Бар-Хиллела по автоматическому переводу способствовали уяснению лингвистических (особенно семантических) трудностей автоматизации перевода [2].

6.2 Основания теории множеств

В ходе развития теории множеств, которая является основой построения большинства математических дисциплин, возникли чрезвычайно сложные проблемы непротиворечивости. Книга представляет собой наиболее полный из существующих обзор исследований, вызванных к жизни этой проблематикой; в ней описываются и сравниваются между собой все важнейшие системы аксиоматической теории множеств. Большое внимание уделено приложению идей и методов математической логики в различных направлениях исследований по основаниям математики (логицизм, интуиционизм, формализм).

Книга состоит из пяти глав: I Антиномии, II Аксиоматические основания теории множеств. Аксиома выбора, III Теоретико-типовые подходы, IV Интуиционистские концепции математики, V Математический и семантический подходы.

Первая глава рассматривает антиномии (или парадоксы) теории множеств, так как в данной теории доказуемы два противоречащих друг другу предложения или одно сложное предложение, имеющее вид эквивалентности между двумя взаимно противоречащими предложениями, даже если аксиомы теории выглядят истинными, а правила вывода — верными. К логическим антиномиям относятся:

Антиномии Рассела: S есть элемент S в том и только в том случае, когда S не есть элемент S, - противоречие, выведенное из правдоподобных предположений последовательностью бесспорных на вид рассуждений;

Антиномия Кантора про множества и мощности множества: множество всех подмножеств U имеет большую мощность, чем само U, что парадоксально, так как U по определению является множеством, содержащим все множества;

Антиномия Бурали-Форти: вполне упорядоченное множество W всех порядковых чисел имеет порядковое число большее каждого элемента W, то есть большее любого порядкового числа.

К семантическим антиномиям, описанным в книге, относятся:

Антиномия Ришара: элемент r, отличный от любого элемента множества R, не может быть однозначно определен конечной последовательностью русских слов, хотя именно это и происходит с использованием последовательности русских слов;

Антиномия Греллинга: слова “русское” и “многосложное” обладают свойствами, которые они называют, но это не применимо к “однозначное”, “холодное”, “синее”;

Лжец: к данной антиномии относятся фразы по типу “Я всегда лгу”. Это предложение является истинным только в том случае, когда является ложным.

Проблемы семантических антиномий, зачастую игнорируемые математиками, являются не чисто методологической проблемой, имеющей косвенное отношение к собственно математике, а “служит скорее отправным пунктом для исследований, оказывающих громадное и непосредственное влияние на современную математику”.

Вторая глава посвящена *аксиоме выбора* — одному из наиболее важных принципов теории множеств, согласно которому “для всякого семейства непустых множеств существует функция выбора, ставящая в соответствие каждому множеству один его элемент” (выбирающая из каждого множества этого

семейства ровно по одному элементу). Аксиома выбора была введена в силу того факта, что имевшиеся к тому времени “наивные” принципы рассуждений в теории множеств не позволяли ответить на очень многие простые вопросы о множествах (например, на вопрос о сравнении мощностей двух произвольных множеств).

Третья глава рассматривала различные подходы к определению семантических категорий. Среди прочих Бар-Хиллел и Френкель описывали онтологию Лесневского, e-оператор гильбертовского подхода, системы Хвистека и Майхилла, многозначные логики. Особое внимание было уделено интуитивному пониманию условий осмысленности выражений естественных языков, на основе которого и производится разделение на категории. Пример такого подхода можно увидеть в следующей таблице:

Категория	Русский язык	Теория множеств
n	Джон, поэт	x, y
s	Джон — [1]) поэт	$F(x)$, $x \in y$
s/n	... — поэт [1])	$F(\ )$, ... $\in y$
s/nn	... — [1]) ---	... $\in$ ---, ... $\subset$ ---
s/s	Неверно, что ...	$\sim(\ )$, $(\Lambda x)(\ )$
s/ss	... тогда и только тогда, когда ---	... $\equiv$ ---
n/n	Отец ... [2])	$C(\ )$
n/nn	Произведение ... [2]) и--- [2])	... $\cap$ ---
n/s	Тот, который ... [3])	$\hat{x}(\ )$
s/ns	Вот ..., который --- [4])	$(\Lambda\ )(\ )$
$s/n/\ /s/n$	с достоинством (во фразе ‘Джон с достоинством удалился’)	
$s/nn/\ /s/nn$		/(как часть символа ‘$\notin$’)

В четвёртой главе рассматривались интуиционистские концепции математики. Самым основным из положительных интуиционистских принципов, общим для всех оттенков интуиционизма является интуиция положительного целого числа, или построение по математической индукции. Математическая индукция является также прообразом тех конструкций, с которыми интуиционизм отождествляет математическую деятельность. Важная роль, которую отводят математической индукции интуитивисты всех направлений, объясняется тем обстоятельством, что посредством конечных процедур могут быть получены лишь предложения конечного характера, истинность или ложность которых можно в

принципе установить с помощью конечного числа испытаний. Но большинство предложений арифметики не таковы, они носят трансфинитный характер.

Также интересно отметить высказывание Кронекера, одного из первых интуиционистов в математике: “Натуральные числа создал бог, а всё остальное (в математике) есть творение человека”. Последняя глава задаётся вопросом “Можно ли и должно ли формализовать интуитивные теории, описанные ранее?”.

Многие математики, и особенно представители других наук, выражают серьезные сомнения, стоит ли формализовать (даже если это в принципе и возможно) математические (и иные) теории, считая, что плоды формализации не оправдывают усилий, ценой которых она достается.

Данный вопрос, как пишут Бар-Хиллел и Френкель, трудно обсуждать абстрактно, потому что “только формализация позволяет так формулировать многие важные проблемы, чтобы попытки их решения можно было рассматривать всерьез”.

В книге было приведено два решения этой проблемы:

формализация интуиционистской логики, позволившая многим математикам и логикам, не придерживающимся интуиционистских взглядов, выработать свое отношение к существу этих взглядов;

формализация цермеловского понятия “определенности”.

6.3 Эскиз теории семантической информации

Йегошуа Бар-Хиллел был одним из первых, кто отметил отсутствие трактовки семантической составляющей информации в математической теории коммуникации. Его личная теория, изложенная в книге «Эскиз теории семантической информации» (1952), написанной в соавторстве с Р. Карнапом, предполагала изначальное существование разума и языка, которые, однако, нельзя было объяснить в информационных терминах.

В 1947 г. Карнап и Бар-Хиллел, базируясь на идеях и методах символической логики, логической семантики, разрабатывают первую семантическую (логико-семантическую) концепцию в теории информации, рассматривающую

понятие “информация” с учетом его значения. Бар-Хиллел отделил понятие “высказывания” (как самой информации) от процедуры “передачи высказывания” (непосредственно передачи информации), указав, что “понятие семантической информации не имеет, собственно, ничего общего с коммуникацией” [5].

С другой стороны, в 1952 г. Карнап и Бар-Хиллел разграничили понятие семантического содержания информации от семантической проблемы коммуникации, сформулированной Уивером, под которой понималась проблема точности передачи желаемого значения. В отличие от количественной теории информации Шеннона, опирающейся на частотную вероятность, логико-семантическая теория информации Карнапа – Бар-Хиллела базируется на понятии “логическая вероятность” в терминологии Бар-Хиллела или “вероятность 1” и “вероятность 2”, у Карнапа.

Основная идея логико-семантической теории информации Карнапа - Бар-Хиллела основывается на том, что то или иное высказывание является более содержательным с информационной точки зрения, если оно исключает большее количество возможностей (альтернатив), тем самым снижая неопределенность. В основе семантической трактовки информации об объекте, согласно Карнапу и Бар-Хиллелу, лежит данное в терминах логической вероятности понятие «описание состояния», переданное высказыванием i, а все логически возможные состояния, исключаемые i, формируют класс элементов содержания (содержание i, или cont(i), - класс описаний возможных состояний, где cont(i) - мера семантического содержания).

Количество семантической информации оценивается через понятие логической вероятности, причем предполагается, что вероятностная мера произвольного внутренне непротиворечивого высказывания (как элемента информации) равна сумме всех вероятностных мер тех описаний состояний, которые соответствуют данному высказыванию. При этом чем больше логическая вероятность высказывания, тем меньше мера его содержания [5].

На протяжении достаточно длительного времени (вплоть до начала 80х годов XX в.) логико-семантический подход Карнапа - Бар-Хиллела к оценке информации был общепринятым [6].

Однако их подход имел значительный недостаток: всякое сообщение рассматривалось как элемент информации, но не проводилось разграничений истинности и ложности информации, которое является важной характеристикой

информационного сообщения с научной точки зрения. Более того, ложное информационное сообщение рассматривается как более информативное, т.е. имеющее более широкое семантическое содержание (по Р. Карнапу, информативность логически ложного высказывания равна 1). Так как “семантическо-информационное содержание высказывания определяется не тем, что содержит данное высказывание, но тем, что оно исключает”. Таким образом, в рамках логико-семантической теории информации Карнапа - Бар-Хиллела логически истинное высказывание не содержит никакой информации. Позднее, анализируя данное противоречие, Л. Флориди назвал его “парадоксом Бар-Хиллела - Карнапа”, а предложенную концепцию определил как “теорию слабой/нечеткой семантической информации” (TWSI - Theory of Weakly Semantic Information) [6].

Существует несколько способов преодоления “парадокса Бар-Хиллела - Карнапа”:

ограничение области применения логико-семантической теории информации Карнапа - Бар-Хиллела лишь областью “истинных высказываний”;

признание того, что «ложное информационное сообщение» имеет нулевую информативность;

придание «ложному информационному сообщению» бесконечного информационного значения [6].

6.4 Категориальные грамматики

Категориальная грамматика - это семейство формализмов (формальных систем, используемых в качестве средства представления знаний) в синтаксисе естественного языка, синтаксические составляющие которых объединяются как функции или в соответствии с отношением функция-аргумент. Большинство версий категориальной грамматики анализируют структуру предложения с точки зрения составляющих (в отличие от зависимостей) и, следовательно, являются грамматиками структуры фраз (в отличие от грамматик зависимостей). Категориальная грамматика устанавливает тесную взаимосвязь между синтаксисом и семантикой, поскольку она обычно рассматривает синтаксические категории как соответствующие семантическим типам [7].

Основные идеи категориальной грамматики восходят к работам Казимежа Айдукевича (в 1935 году) и Иегошуа Бар-Хиллела (в 1953 году) [8].

Понятие категориальной грамматики было введено Бар-Хиллелом в 1960 г. с целью построения механической процедуры синтаксического анализа предложений. Для этого в грамматиках должна быть разработана такая система кодирования синтаксических классов (словоформ и словосочетаний), чтобы комбинирование двух классов, а также выделение класса результирующего сочетания можно было определить непосредственно из исходных классов. Сущность категориальных грамматик состоит в том, что для реализации синтаксического кода все синтаксические классы делятся на два типа: элементарные синтаксические классы и операторы.

Категориальной грамматикой называется упорядоченная четвёрка

$$K = \langle T, H, I, R \rangle,$$

где T - конечное множество символов, называемое терминальным или основным словарем (словарь словоформ);

H - конечный набор элементарных категорий, из которых строятся категории K следующим образом:

1) всякая элементарная категория H есть категория K;

2) если φ и ψ - категории K, то слова $\varphi\psi$ и φ/ψ - категории в H.

Запись $\varphi\psi$ читается как "φ под ψ" , а запись φ/ψ - как "φ над ψ".

I — "отмеченная", или "главная", категория. Это конечный символ K, роль которого в некотором смысле противоположна роли начального символа S в порождающей грамматике. Из S развертывается порождающая цепочка, а к I свертывается распознаваемая цепочка;

R — конечное множество синтаксических правил грамматики. Каждому основному символу из T множество R ставит в соответствие конечное число категорий. Содержательно эти правила можно представлять себе как задание в словаре при словах их синтаксических классов (нескольких в случае омонимии: течь - существительное или глагол) [9].

Категориальная грамматика состоит из двух частей: лексикона, который присваивает набор типов (также называемых категориями) каждому базовому символу, и некоторых правил вывода, которые определяют, как тип строки символов следует из типов составляющих символов. Преимущество этого заклю-

чается в том, что правила вывода могут быть зафиксированы раз и навсегда, так что спецификация грамматики конкретного языка полностью определяется лексиконом.

Категориальная грамматика имеет некоторые общие черты с бестиповым лямбда-исчислением. В то время как лямбда-исчисление имеет только один тип функции, категориальная грамматика обычно имеет два типа функций, один тип, который применяется слева, и один справа.

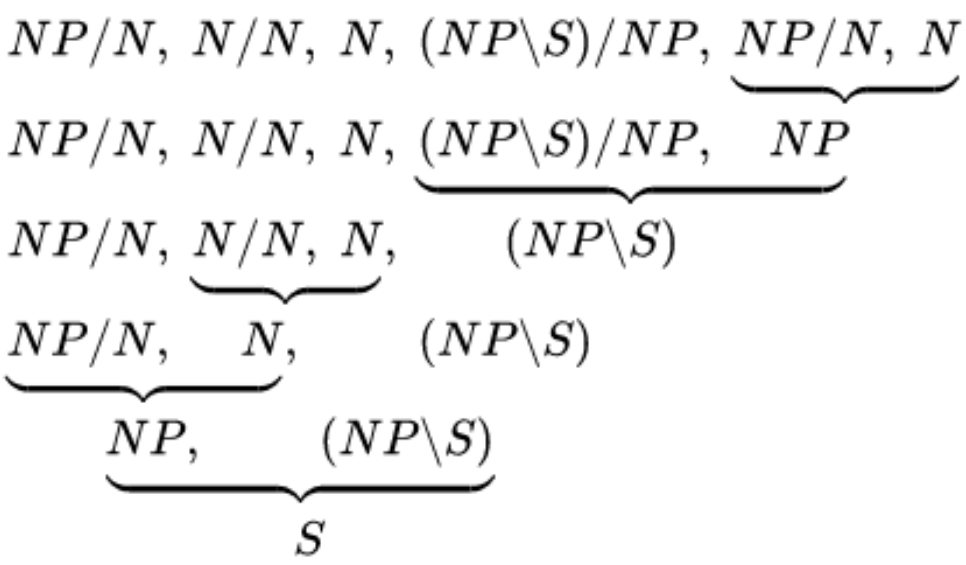
Первый и самый простой вид категориальной грамматики называется базовой категориальной грамматикой, или иногда AB-грамматика (в честь Айдукевича и Бар-Хиллела). Учитывая набор примитивных типов Prim, пусть Tp(Prim) - набор типов, построенных из примитивных типов.

Такая грамматика для английского языка может иметь три основных типа (N, NP и S), присваивая исчисляемым существительным тип N, полным именным фразам тип NP и предложениям тип S. Тогда прилагательное могло бы иметь тип N/N, потому что если за ним следует существительное, то вся фраза является существительным. Аналогично, определитель имеет тип NP/N, потому что он образует полную именную фразу, когда за ним следует существительное. Непереходные глаголы имеют тип NP\S, а переходные глаголы - тип (NP\S)/NP. Тогда строка слов является предложением, если она имеет общий тип S [9].

Например, возьмем строку “the bad boy made that mess”. В данном примере “the” и “that” являются определителями, “boy” и “mess” - существительными, “bad” - прилагательным, а “made” - переходным глаголом. И последовательность типов в строке записывается так, как показано ниже:

the	bad	boy	made	that	mess
NP/N,	N/N,	N,	$(NP\backslash S)/NP$,	NP/N,	N

Функции и соответствующие аргументы можно “свернуть” в соответствии с правилами вывода:



Тот факт, что результатом является S, означает, что строка представляет собой предложение, в то время как последовательность сокращений показывает, что ее можно разобрать как ((the (bad boy)) (made (that mess))). Категориальные грамматики этой формы (имеющие только правила применения функций) эквивалентны по порождающей способности контекстно-свободным грамматикам и, таким образом, часто считаются неадекватными для теорий синтаксиса естественного языка [9].

Другим привлекательным аспектом категориальных грамматик является то, что часто легко присвоить им композиционную семантику, сначала назначив типы интерпретации всем базовым категориям, а затем связав все производные категории с соответствующими типами функций. Интерпретация любого компонента тогда является просто значением функции в качестве аргумента. С некоторыми изменениями в обработке интенсиональности и количественной оценки этот подход может быть использован для охвата широкого спектра семантических явлений.

6.5 Заключение

Категориальные грамматики были разработаны в первой половине XX века Казимиром Айдукевичем и Иегошуа Бар-Хиллелом. Бар-Хиллел был тем, кто ввёл понятие категориальной грамматики как набор формальных систем,

используемых в качестве средства представления знаний в синтаксисе естественного языка, синтаксические составляющие которых объединяются как функции или в соответствии с отношением функция-аргумент.

Это послужило только началом для изучения категориальных грамматик, впоследствии над этим работал Иоахим Ламбек, который представил синтаксическое исчисление, формализующее конструкторы типов функций наряду с различными правилами для комбинации функций.

Однако всплеск интереса к нему произошел в 1970-х годах после работы Ричарда Монтегю, чья грамматика предполагала аналогичный взгляд на синтаксис. Это продолжает оставаться основной парадигмой, особенно в рамках формальной семантики.

Категориальную грамматику Бар-Хиллела стоит рассматривать как базу и точку отсчёта для изучения категориальных грамматик. И вклад этого математика, логика и лингвиста в области работы с искусственными и естественными языками нельзя недооценивать.

6.6 Список литературы

1. Биография Йегошуа Бар-Хиллела // PeopleLife. https://www.peoplelife.ru/119698
2. Бар-Хиллел // Большая советская энциклопедия. https://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/157229/Бар
3. Андреева Е. В. История машинного перевода. https://www.langust.ru/etc/history.shtml disappointment
4. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. под ред. Есенина-Вольпина. “Мир”, М.: 1966, 557 с.
5. Carnap R., Bar-Hillel Y. On the outline of a theory of semantic information // Language and Information. – P. 221–274 (первая публикация; Carnap R., Bar-Hillel Y. An outline of theory of semantic information // Techn. Report of Res. Lab. Electr. – 1952. – No. 247.
6. Зеркаль О.В. Семантическая информация и подходы к ее оценке. Часть 1. Семантико-прагматическая и логико-семантическая концеп-

ции // Философия науки №1 (60) – 2014. – 17 С. https://www.sibran.ru /upload/iblock/d98/ d987704c533aa54 dbc25a00975c18ceb.pdf

7. Grammar, categorial // Rncyclopedia of Mathematics. https://encyclopediaofmath.org/wiki /Grammar,categorial
8. Категориальные грамматики, или: Композиционность повсюду (в синтаксисе, семантике и прагматике). Общие положения. https://vuzlit.com /916363/ kategorialnye grammatiki kompozitsionnost povsyudu sintaksi se semantike pragmatike
9. Категориальная грамматика. https://present5.com/ kategorialnaya-grammatika- studentka - gruppy-dki-2- belyaeva-darya- aleksandrovna/

Глава 7. Монотонность в натуральной логике и языке

7.1 Введение

С середины XX в. в математическом языке начинают использоваться новые символы - кванторы. Квантор - это общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката. В математической логике наиболее употребительны квантор всеобщности $\forall$ (перевернутая буква A из английского словосочетания “for All”) и квантор существования $\exists$ (перевернутая буква E из английского слова “Exists”). Функцией кванторов является сокращение записи утверждений и определений, а также представление записи в более наглядном и понятном виде [Агарева, Селиванов, 2008, с. 37]. Однако кванторов существования и всеобщности логики предикатов недостаточно для семантического анализа разнообразия квантификации в естественных языках, так как квантифицированные формулы отличаются от синтаксической структуры квантифицированных предложений в естественном языке. Например, фраза “Ваня ударил Петю” будет переводиться как $\exists x \exists y(Name(x, Vanya) \wedge Name(x, Petya) \wedge Hit(x, y)$, то есть “Существует такой объект, имя которого Ваня, и такой объект, имя которого Петя, такие, что первый объект ударил второго”. В тоже время предложения “В комнате сидит Иван” и “В комнате сидит некий Иван” получают одинаковую логическую интерпретацию, в то время как это не соответствует их смыслу.

Этот подход в логическом отношении трактует имена собственные и нарицательные как логические сущности одного рода, однако не получается в рамках логического языка задавать определения для тех или иных имен: предложение “Москва - столица России” переводится формулой $\exists x \exists y(Name(x, Moscow) \wedge Name(y, Russia) \wedge Capital(x, y)$, которая в свою очередь не может быть использована, для вывода из предложения “Ваня поехал в Москву” предложения “Ваня поехал в столицу” (потому что неизвестно, та же ли самая Москва здесь имеется в виду) [Андреев, Митрофанова, Соколов, 2014, с. 20].

7.2 Теория обобщенных кванторов в работах Монтегю

1. Развитие теории обобщенных кванторов

Начало развития теории обобщенных кванторов связывают с работой А. Мостовского. Он предпринял попытку построения формального исчисления с использованием нестандартных кванторов и пришел к выводу, что такая система неполна, то есть не удается построить исчисление с обобщенными кванторами, в котором все истинные утверждения были бы выводимы. Многие обобщенные кванторы оказались необычными, и для работы с ними требовалось развитие особых подходов.

При определении обобщенных кванторов А.Мостовский обратился к теории моделей, чтобы описать действие квантора. Следует задать подмножества множества присваиваний значений переменным, отличающихся только значением переменной, связанной квантором: $M \models \forall x\psi(x, b_1, \ldots, b_n)$ тогда и только тогда, когда $M \models \psi(a, b_1, \ldots, b_n)$ для каждого $a \in D$, где D - домен интерпретации. Можно определить такое множество явным образом как $\psi(x, b_1, \ldots, b_n)^M = \{a \in D | M \models \psi(a, b_1, \ldots, b_n)\}$. Таким образом, обобщенный квантор Q можно определить как отображение, которое сопоставляет произвольному непустому множеству, представляющему связанные этим квантором переменные, множество Q_D подмножеств домена интерпретации D такое, что $M \models Qx\varphi(x, b_1, \ldots, b_n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x, b_1, \ldots, b_n)^M \in Q_D$. Исходя из этого определения, получается, что $\forall_D = \{D\}$, $\exists_D = \{a \subseteq D | a \neq \varnothing\}$. Можно также определить другие кванторы, например, $\exists_{\geqslant 5}$ со значением "существует не менее пяти", для которого $(\exists_{\geqslant 5})_D = \{a \subseteq D \,|\, |a| \geqslant 5\}$.

Этот подход позволяет определить кванторы, которые связывают больше, чем одну переменную, в более чем одной формуле. Стоит рассмотреть частный случай — квантор, связывающий одну переменную в двух формулах. Если квантор связывает одну переменную в одной формуле, говорят, что он относится к типу <1>, если квантор связывает одну переменную в двух формулах, то его относят к типу <1, 1>. Ричард Монтегю в своей работе "The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English" (далее PTQ) рассматривал, в частности, употребление кванторов в естественном языке. Он анализировал семантику ан-

глийских слов every и some и строил формализм второго порядка, ограничиваясь привычными символами логических кванторов $\forall$ и $\exists$.

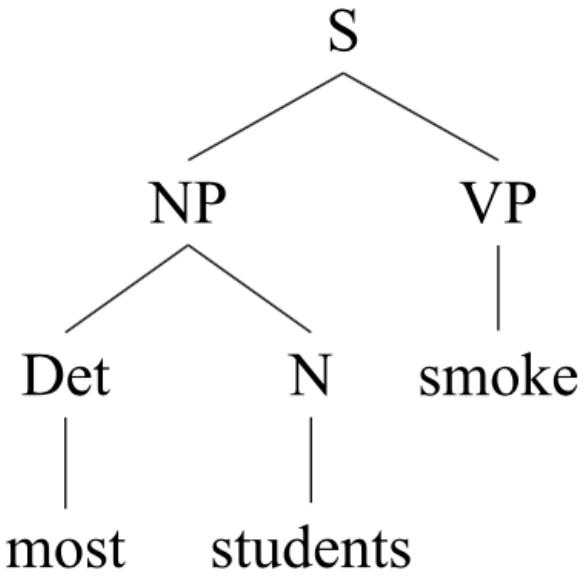
В основе теории Р. Монтегю - принцип композициональности, введенный Г.Фреге: “Значение сложного выражения есть функция значений его частей и того способа, каким они соединены синтаксически”. Взаимодействие синтаксиса и семантики, по Р. Монтегю, выглядит следующим образом: синтаксис - это алгебра форм, семантика - это алгебра значений, и должен существовать гомоморфизм из синтаксической алгебры в семантическую алгебру. Для него композициональность - это такой гомоморфизм. Обратимся к механизму квантификации в PTQ Р. Монтегю. Его подход часто называют quantifying-in, то есть квантификацией путем подстановки. Рассмотрим основные положения из PTQ. Синтактико-семантический интерфейс реализуется как гомоморфизм алгебр (отображение из “алгебры синтаксиса” в “алгебру семантики”, сохраняющее алгебраическую структуру). “Синтаксическая алгебра” - это множество строк или цепочек слов и некоторый набор n-местных операций над этими строками, например, конкатенация, добавление или замена отдельных слов, причем некоторые операции могут рассматриваться как «схемы операций», то есть набор операций теоретически может быть бесконечным. Множество строк замкнуто относительно этих операций. Образ «синтаксической алгебры» при некотором гомоморфизме алгебр - “семантическая алгебра”, то есть это отображение ставит в соответствие строкам некоторые объекты, являющиеся их семантическим представлением, а синтаксическим операциям - операции семантической композиции. В подходе, принятом в PTQ, в качестве семантического представления выступают выражения интенсиональной логики, для которой, в свою очередь, строится денотационная семантика [Андреев, Митрофанова, Соколов, 2014, с. 55].

Подход Р. Монтегю к формализации основывался на следующих соображениях. Множество индивидов можно задать с помощью характеристической функции, к которой, в свою очередь, может быть применена η-редукция: $\lambda x.Px = P$, что позволяет трактовать символ P как интенсионал, а множество индивидов как экстенсионал. Остановимся подробнее на определении этих понятий. Интенсионал и экстенсионал - это понятия семантики, обозначающие значение и смысл языкового выражения.

Интенсионал - это термин, обозначающий содержание понятия, то есть совокупность признаков, характеризующих предмет, обозначаемый этим понятием.

Экстенсионал - это термин, обозначающий объем понятия, то есть совокупность предметов, обозначаемых этим понятием. Особое развитие метод интенсионала и экстенсионала получил в работах Р. Монтегю, который перенес понятие интенсионала в лингвистику. Интенсионал языковой единицы понимается им как функция, устанавливающая ее экстенсионал. Интенсионал выступает при этом и как семантическое правило интерпретации языковых выражений. Интенсионалы естественного языка изменяются, однако они не являются чем-то субъективно-психологическим и могут успешно анализироваться с использованием формальных методов [Анкин, Смирнова].

Традиционный подход к толкованию выражения “Джон умен” в терминах теории множеств - “Джон из числа умных” (денотат слова Джон - индивид, а частные признаки служат основой для определения подмножеств индивидов). Р. Монтегю, напротив, трактует это выражение следующим образом: “Быть умным - один из признаков Джона” (отдельные признаки - индивиды, а имя - множество признаков в экстенсиональной трактовке или предикатный символ в интенсиональной трактовке). Тогда универсальный квантор можно определить, как пересечение экстенсионалов, а квантор существования - как объединение экстенсионалов. Тогда, например, семантическое представление выражения “every man” можно задать как $\lambda P.\forall x(Man(x) \rightarrow P(x))$ (множество признаков, задаваемое характеристической функцией $\lambda x.Man(x)$, есть подмножество множества признаков, задаваемого характеристической функцией $\lambda x.P(x)$. Характерная особенность данного подхода заключается в том, что он позволяет трактовать именные группы (NP) [Андреев, Митрофанова, Соколов, 2014, с. 51-52], как подмножества множеств домена, то есть как кванторы типа $\langle 1 \rangle$. Ричард Монтегю работал в теории типов, но примерно в 1980 году ряд лингвистов и логиков начали применять модельно-теоретические рамки логики с обобщенными кванторами к семантике естественного языка. Рассмотрим структуру простого английского предложения, субъектом которого является квантифицированная NP:



Подлежащее (NP) состоит из определителя и существительного (N). И существительное, и глагольная фраза (VP) имеют множества в качестве расширений, и поэтому определитель воспринимается как обозначение бинарного отношения между множествами, то есть тип квантора <1,1>. Высказывание most students smoke имеет в основе (дискурсивную) вселенную (допустим, множество людей в конкретном университете), но значение выражений most, every, at least five и подобных им не привязано к конкретным вселенным.

7.3 Обобщенные кванторы в естественном языке

Далее рассмотренную выше теорию применили к явлениям естественного языка Дж. Барвайс и Р. Купер в своей работе “Обобщенные кванторы и естественный язык”, основные положения которой относятся к идеям Р. Монтегю. В этой работе была предпринята попытка систематического анализа семантики обобщенных кванторов применительно к предложениям естественного языка. Авторы замечают, что многие выражения с кванторными словами нельзя выразить в логике первого порядка, синтаксис выражений логики не соответствует синтаксису языка. Обобщая, они используют идею того, что стандартные логические кванторы используются с целью приписывания свойств, например, непустота, конечность множествам, поэтому авторы характеризуют как кванторные

любые свойства множеств, которые в естественном языке выражаются, по наблюдениям Дж. Барвайса и Р. Купера, именными фразами (типа “каждый человек”, “большинство женщин”, “пятеро детей” и даже собственными именами). Обращаясь к теории обобщенных кванторов, Дж. Барвайс и Р. Купер рассматривают широкий класс кванторных выражений, относя к ним, помимо some и every, артикли, имена собственные, выражения с числительными [Драгалина-Черная, 2012, с. 44-46].

Особое внимание исследователи обратили на кванторы типа <1> и <1,1>. Слова some и most были определены как кванторы типа <1,1>, именные группы, например, most players - как кванторы типа <1>. Образование именной группы с помощью присоединения существительного к детерминативу (обязательный показатель при существительном, выражающий грамматическое значение определенности (артикли, некоторые местоименные прилагательные) [Ефремова, 2014]) соответствует образованию путем фиксации значения одного из аргументов исходного квантора другого квантора с числом аргументов, уменьшенным на единицу. Такая трактовка именных групп имеет ряд положительных качеств:

Она отвечает принципу композициональности. Как квантор, выражение “трое студентов” образовано путем фиксации одного из аргументов квантора трое, поэтому значение именной группы очевидно основано на значении ее составных частей;

Можно построить сложные кванторные выражения из кванторов одного типа, что подтверждает ожидания синтаксического характера, например, выражение “Иван” и “трое студентов” оказывается верным квантором типа <1>.

В работах Дж. Барвайса и Р. Купера было проведено важное исследование, они рассмотрели свойства обобщенных кванторов в естественном языке и в том числе проанализировали их по признаку монотонности.

Они определяют квантор Q типа <1,1> как возрастающий (или убывающий) по правому аргументу (обозначается MON и MON), если для любого домена интерпретации D и подмножеств A, B, B’ D, B’ B’ (B’ B) выполняется QD (A, B) QD(A, B’). Возрастающий или убывающий квантор называется монотонным. Стоит отметить, что такое свойство, как монотонность является важным в формальной семантике, так как большинство несоставных именных групп в английском языке монотонны, почти все их них детерминативы (кван-

торы типа <1,1>) монотонны по правому аргументу, имена собственные возрастают. Рассмотрим квантор most, который возрастает по правому аргументу, но он немонотонный по левому: из утверждения most of the houses are painted yellow следует most of the houses are painted, но не следует most of the houses are yellow.

С помощью такого анализа можно исследовать некоторые лингвистические явления. Допустим, обратим внимание на выражение с there is в английском языке, с которым чаще всего употребляются только симметричные кванторы, например, сравним выражение there are at least five restaurants around the corner и *there are most restaurants around the corner. Рассмотрим свойство монотонности более подробно с помощью понятий и определений, которые ввел Йохан ван Бентем.

7.4 Монотонность обобщенных кванторов в работах Йохана ван Бентема

Понятие монотонность также становится одним из ключевых в работах профессора прикладной логики Амстердамского университета Йохана ван Бентема. В последние годы появилось множество работ, связанных с семантикой, рассуждениями и познанием, большая часть которых связана с тем, как говорящие понимают, учатся и рассуждают с квантифицированными выражениями. Одно из основных направлений исследований касается монотонности. Дж. Барвайс и Р. Купер отметили повсеместное распространение монотонных кванторов в естественных языках и предложили способ показать, что монотонные квантификаторы легче обрабатывать, чем немонотонные, и что возрастающие квантификаторы легче, чем убывающие. Они также предположили, что для проверки их гипотезы можно использовать психологические эксперименты [Barwise, Cooper, 1981, с.162].

Предположение исследователей рассмотрел Йохан ван Бентем в работе Essays in logical semantics [Van Benthem, 1986], где он ввел понятие счетной сложности и показал, что при некоторых предположениях кванторы с мини-

мальной счетной сложностью — это именно те квантификаторы, которые обладают определенным сильным свойством монотонности.

Монотонность также вовлечена в то, что ван Бентем назвал “одношаговым” (“one-step reasoning”) рассуждением, которое, вероятно, легко доступно говорящим. Поведение монотонности основных детерминативов уже показывает, как такие рассуждения обрабатываются. Маркировка правых возрастающих (убывающих) кванторов типа $\langle 1,1 \rangle$ с помощью a + (a -) справа, и аналогично для левой монотонности, при этом обозначает, что квантор не возрастает и не убывает, рассмотрим некоторые примеры:

-every+ +some+ -no- most+ exactly three

Обратим внимание на “donkey sentence” с most, точные условия истинности таких предложений трудно определить, так как возможны несколько вариантов прочтения (в литературе проблемные случаи, когда в рамках одного предложения неопределенная дескрипция, не связывая анафорическое (содержание которого определенным образом зависит от содержания некоторого другого выражения, связывающего это местоимение и называющейся его антецедентом) местоимение, оказывается при этом его анафорическим антецедентом получили название “donkey-sentences” или “donkey-предложения” из-за считающихся парадигмальными примеров предложений об осле и его хозяине, известных еще со времен Средневековья [Куслий, 2014, с. 201]):

Most Americans who know a foreign language speak it at home

Most Americans who know a foreign language speak it at home or at work

Несмотря на то, что возможно несколько вариантов прочтения (Например, if most Americans who know three foreign languages speak at least one of them at home? Or must they speak all three, or in general most of the foreign languages they know, at home?) говорящие быстро делают такой вывод, по-видимому, поскольку most - квантор, возрастающий справа (аргумент VP speak it at home распространяется на speak it at home или at work), независимо от того, что именно означает подлежащее именной фразы (одинаковое в обоих предложениях).

Как и исчисление монотонности, изучение силлогистических фрагментов является частью системы, которую несколько условно называют Натуральной логикой, что приводит к появлению хорошо управляемых подсистем более знакомых логик, в том смысле, что они ближе к естественному языку и вычис-

лительно более проработаны. Йохан ван Бентем рассматривает возможность построения Натуральной логики, представляющей собой систему рассуждений, основанную непосредственно на лингвистической форме, а не на логических артефактах.

Йохан ван Бентем определяет обобщенный квантор как любой функтор (знак для обозначения операции, в результате которой образуется имя или высказывание) Q, присваивающий каждому универсуму E бинарное отношение QE между подмножествами E.

В классической логике Аристотель сосредоточился на значении некоторых определителей естественного языка: all, some, no, not all, взаимные логические отношения которых графически выражаются в известном Логическом квадрате (в некотором смысле Аристотель открыл логику, изучая монотонность. Каждый из четырех аристотелевских кванторов обладает сильными свойствами монотонности, и, более того, многие достоверные силлогизмы можно рассматривать как утверждения этих свойств), который ван Бентем в дальнейшем использует для наглядного определения монотонности кванторов (логический квадрат):



Рассмотрим четыре возможных случая с бинарным обобщенным квантором Q и двумя предикатными аргументами A и B [Van Benthem J, 1984, с.443-446]:

↑MON Q(A, B) и A⊆C, тогда Q(C, B)

↓MON Q(A, B) и C⊆A, тогда Q(C, B)

MON↑ Q(A, B) и B⊆C, тогда Q(A, C)

MON↓ Q(A, B) и C⊆B, тогда Q(A, C)

Например, универсальный квантификатор all - нисходящий монотонный в своей левой части и восходящий в своей правой части ↓MON↑ (Рассмотрим силлогизм, называемый Barbara:

all BC

all AB

———

all AC

который указывает, что квантор all является (то, что мы будем называть) монотонно возрастающим в правом аргументе (а также, что он убывает в левом аргументе) и силлогизм:

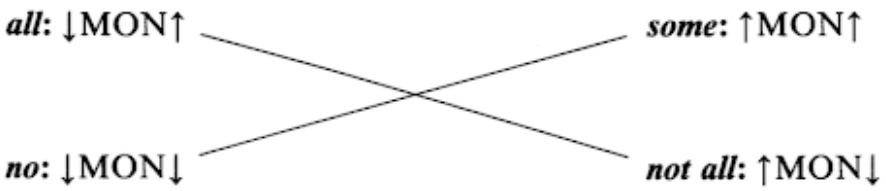
no BC

all AB

———

no AC

можно прочитать как утверждение, что квантор no является монотонно убывающим по левому аргументу). Соответственно, все традиционные кванторы, представленные в Логическом квадрате, вдвойне монотонны, что отображено ниже:



7.5 Монотонность и polarity sensitivity

Изучение Йоханом ван Бентемом механизмов монотонности кванторов привело к изучению другого явления естественного языка - полярной чувстви-

тельности (polarity sensitivity), которая, как утверждают некоторые лингвисты, включает в себя монотонность центральным образом, создание алгоритмов того, как маркеры полярности назначаются узлам деревьев анализа предложений (относительно данной грамматики), или как включить такие маркеры непосредственно в обозначения типов. Помимо своей роли в выводе, такие маркеры могут также объяснить, а иногда даже предсказать распределение элементов отрицательной полярности в языках, так как естественные языки содержат выражения, которые встречаются только в отрицательном контексте или имеют особый смысл только в отрицательном контексте, например, ever, any, yet, а также многочисленные идиомы, такие как lift a finger, budge an inch, give a damn (NPI).

В языках также есть элементы положительной полярности (PPIs), которые встречаются только в положительных контекстах или имеют определенную интерпретацию только в положительных контекстах. Например, фразы would rather, already, someone и something являются элементами положительной полярности [Peters, Westerståhl, 2006, с. 196].

7.6 Анализ кванторов в английском и русском языках

Роль детерминантов и кванторов в умозаключениях является одним из центральных объяснений теории обобщенных кванторов. Один из важных вопросов заключается в том, как информация, выраженная в естественном языке, сохраняется или теряется при манипулировании моделями. Свойство монотонности основано на увеличении или уменьшении числа сущностей в соответствующих множествах A (CN (common noun или noun)-интерпретация) и B (VP-интерпретация). В этом разделе курсовой работы сначала будет проведен анализ примеров из английского языка и составлена таблица монотонности для некоторых кванторов, потом такой же анализ будет проведен для русского языка.

В английском языке квантификатор - это слово или словосочетание, используемое для обозначения количества, объема или степени. Они могут исполь-

зоваться с существительным (как определитель) или без существительного (как местоимение).

Рассмотрим на примере: some men walk, добавление большего числа людей, которые ходят в этот пример не изменит первоначального значения. Однако, если у нас есть фраза: no man walks, добавление большего числа тех, кто ходит в интерпретацию может очень изменить ее, потому что некоторые люди могут оказаться мужчинами. Аналогично для первого случая, если мы добавим больше мужчин, мы сохраним информацию о том, что some men walk. Однако во втором случае, если добавим больше мужчин, то информация о том, что ни один мужчина не ходит (no man walks), не сохраняется. Эти факты описываются путем приписывания определителям, которые допускают такое добавление в A или B, свойство быть соответственно левым монотонно возрастающим (в A) или правым монотонно возрастающим (в B).

Аналогом возрастающих определителей являются монотонно убывающие определители, также в A (слева) или B (справа). Например, рассмотрим фразу few men walk и ограничим множество мужчин подмножеством, утверждение few men walk все равно остается верным, так как тогда ходит только меньшее число; поэтому few является определителем монотонно убывающим слева. В то время как в утверждении: no men walk возьмем подмножество тех, кто ходит, то это подмножество не может содержать ни одного мужчины, поэтому информация о том, что никто из мужчин не ходит, сохраняется, и “no” является правым монотонно убывающим квантором [Partee, ter Meulen, 2012, с.381-383].

Вопросы, возникающие при рассмотрении примеров, связаны с тем, что в системе английского языка лексема man проявляет свойства полисеманта (Macmillan Online Dictionary предлагает десять основных значений: adult male human (an ambitious young man); people in general (a man likes to have some time to himself)), при этом в русском языке семантический компонент человек уступает по уровню полисемии англоязычному аналогу, однако также относится к интегральным семам [Лунькова, Фролова, 2022, 671-673]. Определение поведения монотонности определителей и других кванторов в естественных языках в основном не вызывает затруднений.

Рассмотрим некоторые определите английского языка, которые монотонны справа:

Квантор с указанием монотонности	Примеры предложений
at most (three) ↓MON↓	At most four students came to the opening At most four students came to the opening wearing a tie
most MON↑	Most professors came to the funeral → Most professors came to the funeral or attended the service
every ↓MON↑	Every linguist is British → Every linguist is European Every phonologist is happy → Every linguist is happy
some ↑MON↑	Some linguist is British → Some linguist is European Some phonologist is happy → Some linguist is happy
no ↓MON↓	No semanticist is a musician → No semanticist is a violinist No animal is in the room → No cat is in the room
exactly k MON	Exactly two semanticists are British | Exactly two semanticists are European Exactly two animals are brown | Exactly two cats are brown

Таблица 3 — **Монотонность некоторых кванторов английского языка**

MON↑: all, every, a, some, several, the, both, at least four, more than ten, infinitely many, most, many, John's, most children's, at least four of the seven;

MON↓: no, not all, at most three, fewer than eleven, finitely many, few, no students', at most three of the eight.

Однако, существуют кванторы, которые монотонно не возрастают и не убывают справа, например:

Не монотонны ни MON↑, ни MON↓: exactly five, all but nine, some but not all, at least two and no more than ten, an odd number of, between 20 and 40 percent of the, exactly two students.

Левая монотонность определителя и других квантиреляционных денотатов часто называется устойчивой (persistence) в восходящем случае и неустойчивой (anti-persistent) в обратном:

↑MON: a, some, several, not all, at least four, more than ten, infinitely many, some of John's;

↓MON: all, every, no, at most three, fewer than eleven, finitely many, no students;

Не являются ни устойчивыми, ни неустойчивыми: the, both, exactly five, some but not all, at least two and no more than ten, either fewer than five or else more than a hundred, an odd number of, between 20 and 40 percent of the, most, more than two-thirds of the, at most half of the, the eight, John's, exactly two students', at least four of the seven.

В таблице ниже представлены некоторые обобщенные кванторы английского языка с примерами. При этом немонотонность квантора справа будем обозначать MON .

Йохан ван Бентем предположил, что монотонность - это важное явление в одношаговом рассуждении людей. В своей работе Monotonicity and processing load [Geurts, van Der Slik, 2005] Барт Гетс и Фран ван дер Слик провели среди студентов исследование и оказалось, что даже если задействованные квантификаторы нетривиальны, с точки зрения логики, умозаключения о монотонности могут быть очень простыми. Вот основные выводы, касающиеся выражений, содержащих кванторные слова:

Сложные выражения, все части которых возрастающие (монотонны справа и слева), легче обрабатывать, чем соединения, части которых имеют смешанные профили монотонности. В частности, убывающие кванторы, построенные из кванторов ‘at most n’, ‘fewer than’, сложнее других;

Возрастающие умозаключения проще, чем убывающие;

Семантика естественного языка не является отраслью психологии. Скорее, они рассматривают лингвистическое значение как тему, лежащую на пересечении нескольких дисциплин, одной из которых является психология. Поэтому следует ожидать, что семантика имеет непосредственное отношение к психологии человека. Результаты, представленные в работе, иллюстрируют, как семантическая теория может быть применена к поведенческим данным.

В русском языке в роли обобщенных кванторов чаще всего выступают местоименные слова различной грамматической природы, которые участвуют в референции по-разному. Это проявляется во всех аспектах: в логической и синтаксической семантике, в грамматических признаках и функциональном качестве. По этим признакам местоимения делятся на три логико-семантических разряда: дейктические, анафорические и кванторные. В отличие от других классификаций местоимений, представление выделяет разряды по способности и степени их участия в конкретных случаях относительно действительности. Кроме того, для каждого функционального местоименного разряда характерна своя специфическая сфера функционирования.

Кванторные местоимения всегда соотносятся с целым классом лиц, объектов или понятий, поэтому можно отметить, что они осуществляют соотнесение объекта, выраженного местоимением, с классом понятий в тексте или дискурсе. При этом индивидуальность и персональность объекта принципиально не важны.

Квантор с указанием монотонности	Примеры предложений
некоторый ↑MON↑	Некоторые люди хорошо плавают → Некоторые люди плавают Некоторые студенты хорошо плавают → Некоторые люди хорошо плавают
ни один ↓MON↓	Ни один человек не поет → Ни один человек не поет арии Ни один человек не плавает хорошо → Ни один спортсмен не плавает хорошо
ровно k MON	Ровно пять человек живут в Москве | Ровно пять человек живут в России Ровно пять человек плавают хорошо | Ровно пять мужчин плавают хорошо
всякий ↓MON↑	Всякий студент бегает быстро → Всякий студент бегает Всякий студент хочет путешествовать | Всякий человек хочет путешествовать
не всякий ↑MON↓	Не всякий человек любит играть в настольные игры → Не всякий человек любит играть в “Монополию” Не всякий здоровый человек ходит в походы → Не всякий человек ходит в спортзал
большинство MON↑	Большинство студентов ходят на лекции → Большинство студентов ходят на лекции или семинары Большинство преподавателей ходят на лекции | Большинство студентов ходят на лекции

Таблица 4 — **Монотонность некоторых кванторов русского языка**

Кванторные местоимения имеют стилистически маркированную функциональную сферу: они соотносят тексты с мыслительными категориями либо с целыми классами множеств, поэтому часто используются в текстах как средство абстрагирования, обобщения или символизации содержания.

Кроме того, кванторные местоимения, в отличие от дейктических и анафорических, делают текст символичным. Они обозначают реальность через ее вхождение в определенный класс. При этом совершенно неважными являются отличительные признаки этой реальности: она значима только как элемент определенного множества [Урунова, Азитова, 2019 с.125-127].

Перед тем как рассмотреть примеры использования обобщенных кванторов в русском языке, определим, что кванторы монотонные справа (изменяется только глагольная группа — правый элемент кванторного отношения) обозначаются, как:

Возрастающий справа, то есть его истинность сохраняется при увеличении экстенсионала глагольной группы и не сохраняется при его уменьшении (множество индивидов, которые бегают быстро является собственным подмножеством индивидов, которые вообще бегают);

Убывающий справа, то есть его истинность сохраняется при уменьшении экстенсионала глагольной группы и не сохраняется при его увеличении (множество индивидов, которые не бегают быстро является собственным подмножеством индивидов, которые вообще бегают);

Немонотонный справа, то есть его истинность не сохраняется ни при увеличении, ни при уменьшении экстенсионала глагольной группы.

Кванторы бывают и монотонными слева. Для этого нужно уменьшать или увеличивать экстенсионал именной группы.

Согласно наблюдению М.А. Кронгауза, в русском языке каждый лексически сочетается с именем, соотносящимся с некоторым множеством, а всякий - с именем, соотносящимся с некоторым свойством [Кронгауз, 2001, с. 174]. Он приводит в качестве примера следующие предложения: Каждая из жен султана Мохаммеда вне подозрений и Всякая жена султана Мохаммеда вне подозрений. Первое предложение подразумевает гарем и конкретное преступление. Утверждается, что все жены султана имеют алиби. Второе предложение означает, что из свойства “быть женой султана Мохаммеда” следует свойство “быть вне подозрений”, независимо от того, кто обладает первым свойством.

Помимо этого, кванторы в русском языке могут проходить не по индивидам из множеств и не по свойствам, задающим эти множества, а функционировать как бинарные, разделяя универсум не на индивиды, а на упорядоченные пары: “Все счастливые семьи похожи друг на друга, каждая несчастливая семья несчастлива по-своему”.

При этом, сравнивая примеры, приведенные в Таблице 1 и Таблице 2, можно сделать вывод, что монотонность обобщенных кванторов в английском языке эквивалентна русским вариантам:

most - большинство;

every - всякий (каждый);

some - некоторый ;

no - ни один;

exactly k - ровно k.

7.7 Заключение

Наиболее существенным различием в актах квантификации в русском и английском языках становится то, что в отличие от русского языка в английском языке есть артикли: определенный артикль the, неопределенный артикль a(an), а также так называемый нулевой артикль, то есть значимое отсутствие артикля (I like ice-cream - вообще люблю мороженое). В русском языке артикли отсутствуют, подразумеваемая, что информация об объекте речи - определенном или неопределенном, обычно улавливается в речевой ситуации. Для внесения

определенности и уточнения количественной характеристики объекта используются многочисленные кванторные определители типа каждый, любой, всякий, некоторый, избранный, какой-то, никакой, данный, все, существует, имеется.

7.8 Список литературы

1. Barwise J., Cooper R. Generalized quantifiers and natural language//Linguistics and philosophy. – 1981. – С. 159-219.
2. D'Alfonso D. Generalized quantifiers: logic and language. – 2011.
3. Geurts B., van Der Slik F. Monotonicity and processing load //Journal of semantics. – 2005. – Т. 22. – №. 1. – С. 97-117.
4. Montague R. The Proper Treatment of Quantification in Ordinary Englis // Approaches to Natural Language. Dordrecht, 1973.
5. Partee B. B. H., ter Meulen A. G., Wall R. Mathematical methods in linguistics. – Springer Science and Business Media, 2012. – Т. 30.
6. Peters S., Westerståhl D. Quantifiers in language and logic. – OUP Oxford, 2006.
7. Van Benthem J. Questions about quantifiers //The Journal of Symbolic Logic. – 1984. – Т. 49. – №. 2. – С. 443-466.
8. Van Benthem J. et al. Essays in logical semantics. – Dordrecht : Reidel, 1986.
9. Westerståhl, Dag, "Generalized Quantifiers The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/generalized-quantifiers/>
10. Андреев А.В., Митрофанова О.А., Соколов К.В. Введение в формальную семантику: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ. РИО. Филологический факультет, 2014. – 88 с.
11. Агарева О. Ю., Селиванов Ю. В. Элементы математической логикй: учеб. пособие. – М. : МАТИ, 2008. 52 с.
12. Анкин. Д.В., Смирнова Е. Д. – Интенсионал и экстенсионал / Гуманитарный портал: Концепты [Электронный ресурс] // Центр гумани-

тарных технологий, 2002–2022 (последняя редакция: 18.11.2022). URL: https://gtmarket.ru/concepts/7194.

13. Герасимова И. А. Формальная грамматика и интенсиональная логика. – ИФ РАН, 2000. – 156 с.
14. Драгалина-Черная Е. Г. Онтологии для Абеляра и Элоизы. – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики 2012. – 232 с.
15. Словарь Ефремовой Т., Ефремова Т. Ф. Новый словарь русского языка. Толково-словообразовательный. 2005-2014 //URL: http://www. efremova. info/(дата обращения: 10.05. 2023). – 2018.
16. Лунькова, Л. Н. – Оппозитивная семантика в английских и русских фразеологических единицах на примере ФЕ с семантическим компонентом MAN и ЧЕЛОВЕК / Л. Н. Лунькова, Ю. И. Фролова // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Теория языка. Семиотика. Семантика. – 2022. – Т. 13, № 3. – С. 666-677.
17. Кронгауз М. А. Семантика. – Издательство Академия, 2005.
18. Куслий П. С. – Анафора и ее семантический анализ как проблема для философии языка //Философия науки и техники. – 2014. – Т. 19. – №. 1. – С. 200-221.
19. Урунова Р. Д., Азитова Г. Ш. К вопросу об особенностях кванторных местоимений //Известия Волгоградского государственного педагогического университета. – 2019. – №. 6 (139). – С. 124-128.

Глава 8. Темпоральная система Райхебаха

8.1 Введение

Ханс Райхенбах – известный немецкий философ, педагог и математик. Его труды до сих пор пользуются популярностью. Будучи исследователем в области эмпирической философии, Райхенбах уделял много внимания вопросам логики и изучению времени. Данная глава включает в себя биографию Райхенбаха, описание деятельности Венского кружка, который во многом повлиял на идеи ученого, описание Берлинского кружка, который большую часть идей перенял от Венского, однако имеет свои отличия, описание трехзначной логики Райхенбаха, а также описание его схемы для системы времен английского языка.

8.2 Биография Райхенбаха

Ханс Райхенбах (26 сентября 1891 – 9 апреля 1953) – выдающийся философ науки, педагог и сторонник логического эмпиризма. В 1928 году он основал в Берлине Общество эмпирической философии (Gesellschaft für empirische Philosophie), также известное как “Берлинский кружок”.

Ханс был вторым сыном еврейского торговца Бруно Райхенбаха, который принял протестантизм. Он женился на Сельме Менцель, школьной учительнице, которая происходила из длинной линии протестантских профессионалов, восходящих к Реформации. Его старший брат Бернард сыграл значительную роль в левом коммунистическом движении. Его младший брат Герман был музыкальным педагогом.

После окончания средней школы в Гамбурге Ханс Райхенбах изучал гражданское строительство в Высшей технической школе Штутгарта, а также физику, математику и философию в различных университетах, включая Берлин,

Эрланген, Геттинген и Мюнхен. Среди его учителей были Эрнст Кассирер, Дэвид Гильберт, Макс Планк, Макс Борн и Арнольд Зоммерфельд.

Райхенбах получил степень доктора философии в Университете Эрлангена в 1915 году, а его диссертация по теории вероятностей, озаглавленная “Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für die mathematische Darstellung der Wirklichkeit” (“Концепция вероятности для математического представления реальности”) под руководством Пола Хензеля и Макса Нетера, была опубликована в 1916 году.

Райхенбах служил во время Первой мировой войны на русском фронте, в радиотехнических войсках немецкой армии. В 1917 году он был освобожден от действительной службы из-за болезни и вернулся в Берлин. Работая физиком и инженером, Райхенбах посещал лекции Альберта Эйнштейна по теории относительности в Берлине с 1917 по 1920 год.

В 1920 году Райхенбах начал преподавать в Высшей технической школе Штутгарта в качестве приват-доцента. В том же году он опубликовал свою первую книгу (которая была принята в качестве его хабилитации по физике в Высшей технической школе Штутгарта) о философских следствиях теории относительности, теории относительности и априорном знании (Relativitätstheorie und Erkenntnis Apriori), в которой критиковалось кантовское понятие синтетического априори. Впоследствии он опубликовал книги "Аксиоматизацию теории относительности"(1924), "От Коперника до Эйнштейна"(1927) и "Философию пространства и времени"(1928), в последней из которых изложен логический позитивистский взгляд на теорию относительности.

В 1926 году с помощью Альберта Эйнштейна, Макса Планка и Макса фон Лауэ Райхенбах стал доцентом физического факультета Берлинского университета. Он получил известность благодаря своим методам преподавания, его курсы были открыты для обсуждения и дебатов. В то время это было крайне необычно.

В 1928 году Райхенбах основал так называемый “Берлинский кружок” (ответвление от Венского кружка). Среди его членов были Карл Густав Гемпель, Рихард фон Мизес, Дэвид Гильберт и Курт Греллинг. В 1930 году он и Рудольф Карнап начали редактировать журнал Erkenntnis.

Когда Адольф Гитлер стал канцлером Германии в 1933 году, Рейхенбах был немедленно отстранен от должности в Берлинском университете в соответствии с правительственными “расовыми законами” из-за его еврейского проис-

хождения. Сам Райхенбах не исповедовал иудаизм, а его мать была немецкой протестанткой, но, тем не менее, у него были проблемы. После этого он эмигрировал в Турцию, где возглавил кафедру философии в Стамбульском университете. Он вел междисциплинарные семинары и курсы по научным дисциплинам, а в 1935 году опубликовал книгу“Теорию вероятностей”.

В 1938 году с помощью Чарльза У. Морриса Райхенбах переехал в Соединенные Штаты, чтобы занять должность профессора в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе на философском факультете. Райхенбах помог сделать Калифорнийский университет в Лос-Анджелесе ведущим философским факультетом в Соединенных Штатах в послевоенный период. Во время своего пребывания там он опубликовал несколько своих самых известных книг, в том числе “Философские основы квантовой механики” в 1944 году, “Элементы символической логики” в 1947 году и “Расцвет научной философии” (его самая популярная книга) в 1951 году.

Рейхенбах неожиданно скончался от сердечного приступа 9 апреля 1953 года. В то время он жил в Лос-Анджелесе и работал над проблемами философии времени и природы научных законов. В рамках этого он предложил трехчастную модель времени в языке, включающую время речи, время события и, что особенно важно, время отсчета, которое с тех пор используется лингвистами для описания времен. Результатом этой работы стали две книги, опубликованные посмертно: “Направление времени и номологические утверждения” и “Допустимые операции”.

8.3 Венский кружок

Венский кружок логического эмпиризма представлял собой группу талантливых философов и ученых, привлеченных из естественных и социальных наук, логики и математики, которые регулярно встречались с 1924 по 1936 год в Венском университете под председательством Морица Шлика. Манифест 1929 констатирует научное мировоззрение Венского кружка, которое характеризуется, по существу, двумя чертами. Во-первых, оно эмпиристское и позитивистское:

есть знание только из опыта. Во-вторых, это научное мировоззрение отмечено использованием определенного метода, а именно логического анализа.

Логический анализ — метод прояснения философских проблем; он широко использует символическую логику и отличает эмпиризм Венского кружка от более ранних версий. Задача философии состоит в прояснении — методом логического анализа — проблем и утверждений.

Логический анализ показывает, что есть два разных вида утверждений; один вид включает утверждения, сводимые к более простым утверждениям об эмпирически данном; другой вид включает утверждения, которые нельзя свести к утверждениям об опыте, и поэтому они лишены смысла. Метафизические высказывания относятся ко второму роду и потому бессмысленны. Поэтому многие философские проблемы отвергаются как псевдопроблемы, возникающие из-за логических ошибок, в то время как другие интерпретируются как эмпирические утверждения и, таким образом, становятся предметом научных исследований.

Одним из источников логических ошибок, лежащих в основе метафизики, является двусмысленность естественного языка. «Обыденный язык, например, использует одну и ту же часть речи, существительное, для вещей («яблоко»), а также для качеств («твердость»), отношений («дружба») и процессов («сон»), вводит в вещное представление о функциональных понятиях». Другим источником ошибок является «представление о том, что мышление может либо привести к знанию за счет своих собственных ресурсов без использования какого-либо эмпирического материала, либо, по крайней мере, прийти к новому содержанию путем вывода из заданного положения вещей». Синтетическое знание априори отвергается Венским кружком. Математика, которая на первый взгляд кажется примером обязательно достоверного синтетического знания, полученного только из чистого разума, вместо этого носит тавтологический характер, то есть ее утверждения являются аналитическими утверждениями, которые, таким образом, сильно отличаются от синтетических утверждений Канта. Единственными двумя видами утверждений, принятых Венским кружком, являются апостериорные синтетические утверждения (т. е. научные утверждения) и априорные аналитические утверждения (т. е. логические и математические утверждения).

Конечной целью, которую преследовал Венский кружок, была единая наука, то есть построение «конститутивной системы», в которой каждое правомер-

ное утверждение сводится к понятиям низшего уровня, относящимся непосредственно к данному опыту. «Стремление состоит в том, чтобы связать и согласовать достижения отдельных исследователей в различных областях науки». Из этой цели следует поиск ясности, аккуратности и символического языка, устраняющего проблемы, возникающие из-за двусмысленности естественного языка.

Отношение Венского кружка к метафизике хорошо выражено Карнапом в статье «Устранение метафизики посредством логического анализа языка». Язык состоит из словаря, т. е. набора значимых слов, и синтаксиса, т. е. совокупность правил, регулирующих образование предложений из слов словаря. Псевдовысказывания, т. е. последовательности слов, на первый взгляд напоминающие высказывания, но в действительности не имеющие значения, образуются двояко: либо в них встречаются бессмысленные слова, либо они образуются неверным синтаксическим способом. Согласно Карнапу, в метафизике встречаются псевдоутверждения обоих видов.

Слово W имеет смысл, если выполняются два условия. Во-первых, должен быть зафиксирован способ появления W в его элементарной форме предложения (т. е. простейшей форме предложения, в которой W может встречаться). Во-вторых, если W встречается в элементарном предложении S, необходимо дать ответ на следующие вопросы (которые, по Карнапу, являются эквивалентной формулировкой одного и того же вопроса):

- Из каких предложений можно вывести S и какие предложения можно вывести из S?

- При каких условиях S считается истинным, а при каких — ложным?

- Как проверяется S?

- В чем смысл S?

Пример, предложенный Карнапом, касается слова «членистоногие». Форма предложения «вещь x является членистоногом» является элементарной формой предложения, которая образована от «x является животным», «x имеет сегментированное тело» и «x имеет сочлененные ноги». И наоборот, эти предложения являются производными от «предмет x является членистоногим». Таким образом определяется значение слова «членистоногие».

По мнению Карнапа, многие слова метафизики не удовлетворяют этим требованиям и потому бессмысленны. В качестве примера Карнап рассматривает слово «принцип». Это слово имеет определенное значение, если предполо-

жить, что предложение «x есть начало y» эквивалентно предложению «y существует благодаря x» или «y возникает из x». Последнее предложение совершенно ясно: y возникает из x, когда за x неизменно следует y, и неизменная связь между x и y поддается эмпирической проверке. Но такая интерпретация значения «принципа» не удовлетворяет метафизиков. Они утверждают, что никакое эмпирическое отношение между x и y не может полностью объяснить значение «x есть принцип y», потому что есть что-то, что не может быть постигнуто посредством опыта, что-то, для чего нельзя указать эмпирический критерий. Именно отсутствие какого-либо эмпирического критерия лишает смысла слово «принцип», когда оно встречается в метафизике.

Однако есть псевдовысказывания, в которых встречаются только осмысленные слова; эти псевдоутверждения сформированы контрсинтаксическим способом. Примером может служить последовательность слов «Цезарь — простое число»; каждое слово имеет определенное значение, но последовательность не имеет значения. Проблема в том, что «простое число» — это предикат чисел, а не предикат людей. В примере очевидна бессмыслица; однако в естественном языке правила грамматики не запрещают образование аналогичных бессмысленных последовательностей слов, которые не так легко обнаружить. В грамматике естественных языков любая последовательность вида «x есть y», где x — существительное, а y является предикатом, приемлема. На самом деле в грамматике нет различия между предикатом, которым можно утверждать о людях, и предикатом, которым можно утверждать о числах. Таким образом, «Цезарь — это простое число» имеет правильную форму, в отличие, например, от «Цезарь есть и», которая имеет неправильную форму. В логически конструированном языке определяется различие между различными видами предикатов, и псевдоутверждения типа «Цезарь — простое число» имеют неправильную форму.

По Карнапу, метафизика, хотя и не имеет теоретического содержания, но имеет содержание: метафизические псевдоутверждения выражают отношение человека к жизни, и в этом роль метафизики. Он сравнивает его с таким искусством, как лирическая поэзия; метафизик работает посредством теоретического; он смешивает искусство с наукой, отношение к жизни со знанием и, таким образом, производит неудовлетворительную и неадекватную работу. «Метафизики — это музыканты без музыкальных способностей».

8.4 Берлинский кружок

Берлинский кружок был создан в конце 1920-х Гансом Райхенбахом, Куртом Греллингом и Вальтером Дубиславом и состоял из философов и ученых, таких как Карл Густав Гемпель, Давид Гильберт и Рихард фон Мизес. Его первоначальное название было Die Gesellschaft für empirische Philosophie, что можно перевести как «общество эмпирической философии». Вместе с Венским кружком они издавали журнал Erkenntnis («Знание») под редакцией Рудольфа Карнапа и Ганса Райхенбаха и организовали несколько конгрессов и коллоквиумов по философии науки, первая из которых состоялась в Праге в 1929 г.

Берлинский кружок имел много общего с Венским кружком, но философия кружков различалась по некоторым вопросам, таким как вероятность и конвенционализм. Райхенбах настаивал на том, чтобы называть свою философию логическим эмпиризмом, чтобы отличить ее от логического позитивизма Венского кружка.

Члены Берлинского кружка особенно активно анализировали философские и логические следствия достижений современной физики, особенно теории относительности. Кроме того, они отрицали состоятельность метафизики и традиционной философии и утверждали, что многие философские проблемы действительно бессмысленны.

После подъема нацизма несколько членов группы эмигрировали в другие страны, в том числе Райхенбах, который переехал в Турцию в 1933 году, а затем в Соединенные Штаты в 1938 году.

После эмиграции в разные страны группа фактически прекратила свое существование, но не без влияния на широкий круг философов 20-го века, особенно ее метод оказал влияние на аналитическую философию и футурологию.

8.5 Трехзначная логика Райхенбаха

В двузначных логиках рассматриваются высказывания, которые могут принимать лишь два значения: И либо Л (1 либо 0). Однако оказывается, что

некоторые явления требуют для своего описания употребления высказываний, принимающих более двух значений. Например, значением высказывания можно считать одно из трех значений: истина, неопределенность (нейтрально) и ложь, обозначаемые соответственно И, Н и Л или 1, $\frac{1}{2}$ и 0.

В двузначной логике отрицание истины есть ложь, а отрицание лжи определяется как истина. Для трехзначной логики уже на этапе определения отрицания интуитивно неясно, как, например, ввести отрицание неопределённости. Рассмотрим, как это сделал Райхенбах.

Райхенбах построил свою логику для описания явлений квантовой механики. По его мнению, говорить об истинном или ложном высказывании правомерно лишь тогда, когда возможно осуществить их проверку. Если нельзя ни подтвердить истинность высказывания, ни опровергнуть его с помощью проверки, то такое высказывание должно оцениваться третьим значением – неопределенность. К числу таких высказываний относятся высказывания о ненаблюдаемых объектах в микромире.

Райхенбах обозначал «истину» как 1, «неопределённость» – 2, «ложность» – 3. Тавтология принимает значение 1. В логике Райхенбаха введены три отрицания:

– циклическое отрицание;

– диаметральное отрицание;

– полное отрицание.

Эти операции вводятся по следующей таблице.

P	Ц.о.(P)	Д.о.(P)	П.о.(P)
1	2	3	2
2	3	2	1
3	1	1	1

В логике Райхенбаха кроме указанных операций, введены ещё альтернативная импликация, квазиимпликация и альтернативная эквивалентность.

Для циклического отрицания не имеет место закон двойного отрицания, а имеет место закон тройного отрицания. Также для циклического отрицания не имеет место закон исключённого третьего, а имеет место закон исключённого четвёртого. Для диаметрального отрицания сохраняется закон двойного отрицания, но не имеет место закон исключённого третьего.

Сам Райхенбах так пишет о значении трехзначной логики для квантовой механики: «Введение третьего значения истинности не делает все высказывания квантовой механики трехзначными. Рамки трехзначной логики достаточно широки, чтобы включать класс истинно-ложных формул. Когда мы хотим все высказывания квантовой механики ввести в состав трехзначной логики, то руководящей идеей будет: поместить в истинно-ложный класс те высказывания, которые мы называем законами квантовой механики».

8.6 Схема Райхенбаха для системы времен английского глагола

Термин “время” может быть определен как вторичная грамматическая категория, которая служит для определения местоположения события или ситуации во времени. Это объясняет, например, разницу в предложениях Джон уходит / Джон ушел. Она включает в себя два аспекта: морфологический аспект, а именно систему времен, закодированных в морфологии глагола, и семантический аспект, касающийся временного расположения события или событий, изображенных в одном или нескольких предложениях: “значение” различных времен.

Времена – не единственное доступное средство определения местоположения событий во времени. Дополнительной возможностью является использование других лингвистических элементов, например, временных наречий, таких как “вчера” или “скоро”, или предложных фраз, таких как “до” или “через две недели”. Но эти выражения не имеют того же статуса, что и время: они являются лексическими, а не грамматическими выражениями темпоральности, и, тогда как в прототипических предложениях (по крайней мере, в английском или немецком языках) время является типичной чертой, появление временного наречия или предложной фразы таковым не является. Тем не менее, теория времени также должна учитывать проблемы, возникающие из-за взаимодействия грамматических и лексических признаков времени и темпоральности.

Следующие правила построения фраз являются возможным способом описания английской глагольной группы:

VP -> Verb + NP

Verb -> Aux + V

V -> take, walk, read

Aux -> C(M) (have+en) (be+ing)

M -> will, can, may, shall, must

В линеаризованной форме эти правила дают следующую последовательность:

[[[C (M) (have+en) (be+ing)]Aux V]Verb NP]VP

Заключенные в квадратные скобки и, следовательно, необязательные элементы вспомогательного комплекса обозначают модальный вспомогательный (M), вспомогательный have в сочетании с причастием прошедшего времени и вспомогательный be в сочетании с причастием настоящего времени.

На основе этой формулы можно определить различные английские времена. Таким образом, английские времена являются результатом последовательного применения или объединения одного или нескольких из параметров:

- время — время является либо [+прошедшим], либо [–прошедшим] и единственным обязательным элементом каждого конечного глагольного комплекса (кроме глагола)

- модальности — использование модальных глаголов will или shall в сочетании с [–past] используется для определения местоположения события в будущем;

- совершенности — совершенность образуется с помощью вспомогательного have и причастия прошедшего времени ('en') следующего глагольного элемента

- прогрессивности — прогрессивность образована с помощью вспомогательного be и причастия настоящего времени ('ing') следующего глагольного элемента.

Преимущество приведенного выше представления заключается в том, что вербальная группа представлена как сложная конструкция и может быть проанализирована соответствующим образом. Совершенно очевидно, что “время” в очень строгом смысле включает в себя только два значения: прошедшее или не прошедшее. Другие времена формируются с такими параметрами, как аспект или совершенность.

Как упоминалось выше, времена служат для определения местоположения событий во времени. Они могут быть повторно представлены в виде се-

мантических операторов или функций, расположенных над предложениями и обозначающих точку во времени или промежуток времени, в течение которого предложению может быть присвоено значение истинности. Поскольку этот момент времени или временной промежуток обычно соотносится со временем произнесения предложения, время можно рассматривать как дейктическую категорию.

Времена дейктические в том смысле, что они определяют временные отношения по отношению ко времени акта речи. Этот акт или момент речи (или, точнее, время, когда произносится высказывание) отныне будет сокращаться S, время, когда происходит изображаемое событие, будет обозначаться E. Между E и S возможны два временных отношения: одно является последовательным в том смысле, что E предшествует S или наоборот; это отношение выражается тире; другое является одновременным в том смысле, что E и S происходят в одно и то же время или что S включено в E и обозначается запятой. Таким образом, довольно простая временная система, включающая только два момента времени, может быть описана следующим образом:

E—S – прошлое (E происходит до S)

S—E – будущее (E происходит после S)

E,S – настоящее (E совпадает во времени с S)

В английском языке не все времена можно описать так просто. Например, John will leave/is leaving/leaves London on Monday - S—E, однако имеет три разных времени: simple future, present progressive и simple present. Существенные затруднения вызывает время present perfect. Можно увидеть значительную разницу в значении между предложениями с настоящим совершенным и простым прошедшим.

His sister has been an invalid all her life

His sister was an invalid all her life

В то время как второе предложение ясно указывает на то, что “его сестра” мертва в S, первое предложение этого не делает. Этот пример показывает один очень важный аспект настоящего совершенного: время, в котором произносится предложение, каким-то образом тесно связано с настоящим.

Отношение E—S, представленное прошедшим временем, нуждается в более детальном обсуждении.

John left on Monday (simple past)

John had left on Monday (past perfect)

В обоих случаях E предшествует S. Но второе предложение отличается по смыслу тем, что оно подразумевает, что изображенное событие уже имело место до понедельника.

Прошедшее совершенное интересно и по другой причине:

The boy had eaten the ice–cream at 7 o'clock.

Это предложение может иметь два значения: либо акт приема пищи происходит в 7 часов, либо мальчик закончил есть мороженое в это время, но с помощью простой системы, описанной выше, эта двусмысленность не может быть учтена.

Одним из очень важных нововведений временной системы Райхенбаха является тот факт, что в отличие от бинарной структуры, представленной выше, она включает в себя три момента времени: E, S и то, что Райхенбах назвал "точкой отсчета" или "точкой указания (референции)" (сокращенно R). Введение момента R в первую очередь было мотивировано временами "настоящее совершенное" (present perfect) и "прошедшее совершенное" (past perfect).

В этой системе есть три момента времени (S, E и R) и два типа отношений между этими точками времени (одновременность и приоритет). Важнейшей особенностью является то, что эти типы отношений могут иметь место только между R и S, с одной стороны, и R и E, с другой стороны, — отношение между S и E имеет более косвенный характер, как будет видно далее. Следовательно, точка отсчета R может рассматриваться как своего рода центр для всей системы. Отношения между S и R, с одной стороны, и E и R, с другой стороны, следующие:

S,R - настоящее

S—R - будущее

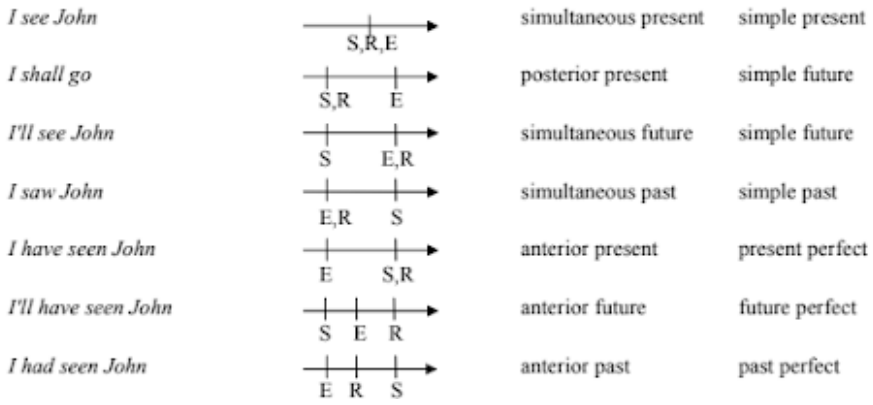
R—S - прошедшее

E,R – одновременное (simultaneous)

E—R – предшествующее (anterior)

R—E – последующее (posterior)

Одним из важных аспектов этой системы является тот факт, что все возможные времена определяются с использованием точки отсчета — даже такие, как простое прошлое или настоящее.

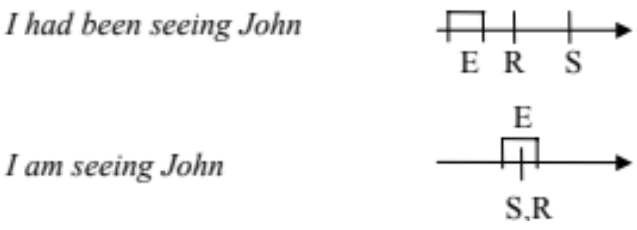


Различие между posterior present и simultaneous future, которые оба соответствуют простому будущему нуждается в некотором объяснении. В своей книге 1947 года Райхенбах использует примеры “I will leave now” и “I will leave tomorrow”, чтобы провести различие между ними:

Posterior Present: R, выраженный now, относится к настоящему времени;

Simultaneous Future: R, выраженный через tomorrow, относится к будущему времени.

Что касается признака [progressive], Райхенбах утверждает, что в английском языке используется причастие настоящего времени, чтобы “указать, что событие охватывает определенный отрезок времени”. Он называет эти времена “расширенными временами” и представляет их так, как показано в следующих примерах:



В системе Райхенбаха существуют три точки во времени и два типа отношений между этими точками. Эти отношения могут иметь место либо между E и R, либо между S и R. Таким образом, связь между S и E является косвенной: она опосредована R. Это означает, что все времена, а не только “сложные” времена (такие как прошедшее совершенное), являются конструкциями трех моментов времени. Одно из преимуществ этого предположения будет показано в связи с различием между простым прошедшим и прошедшим совершенным. Точка отсчета может быть явной и представлена различными означает — про-

тотипически с помощью временных наречий или предложных фраз, — но оно также может быть скрытым. Хотя S, R и E называются “точками (моментами) времени”, мы будем рассматривать их как интервалы.

Система Райхенбаха допускает 13 времен, в то время как английская временная система (исключая аспект) состоит из 6 времен. Времена Райхенбаха соответствуют “традиционным” английским временам, но при этом нет взаимно однозначного сопоставления. В отличие от систем, производных от морфологических времен одного языка, система Райхенбаха более независима, поскольку она функционирует как своего рода автономная логическая конструкция, лежащая в основе морфологических времен. Эта независимость проявляется в том факте, что система Райхенбаха содержит комплексы, которые морфологически не реализованы в английском языке, но могут быть реализованы в других языках.

Несмотря на это, система Райхенбаха обладает рядом преимуществ, одним из которых является представление простого прошлого и совершенного настоящего. Как было указано выше, связь между простым прошедшим и настоящим совершенным в английском языке является сложной, поскольку они обладают определенными свойствами, но различаются по своему синтаксическому поведению.

В той или иной форме аспекты системы Райхенбаха в настоящее время включены во многие теории, занимающиеся синтаксисом и семантикой временных систем. Было внесено довольно много предложений, касающихся модификации и совершенствования этой системы, однако она является базисом для остальных.

8.7 Список литературы

1. Ханс Райхенбах. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/HansReichenbach
2. Ханс Райхенбах. URL: https://iphlib.ru/library/collection/newphilenc/document/ HASHe582c4684b9930e2c8eae5
3. Берлинский кружок. URL: https://ru.zahn-info-portal.de/wiki/BerlinCircle

4. Венский кружок. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/ ViennaCircle «Reichenbach's Theory of Tense and it's Application to English» Susanne Hackmack
5. Трехзначная система Райхенбаха. URL: https://bstudy.net/704800/ filosofiya/ trehznachnayasistemareyhenbaha
6. Аналитическая философия. URL: https://sv-scena.ru/Buki/ Analitichyeskaya- filosofiya.45.html

Глава 9. Ситуационная семантика Барвайса-Перри

9.1 Введение

Ситуационная семантика – это теория, разработанная Джоном Барвайсом и Джоном Перри в начале 1980-х годов. Первая версия данной теории была предложена в виде небольшого очерка математиком Джоном Барвайсом и доведена им до законченного вида совместно с философом Джоном Перри. Первоначально теория была изложена в статье [2], а затем в одноименной книге [3].

Барвайс и Перри в своих трудах затрагивают тему «смысла». Смысл существует не только в словах и предложениях, но и в ситуации и отношении к ней тех, кто в ней участвует. Авторы представляют трактовку важных нововведений в области естественной семантики, утверждая, что стандартный взгляд на логику (выведенный Фреге, Расселом и работами по математике и логике) не подходит для некоторых случаев, в которых он применяется. В [3] они излагают основы реалистической теоретико-модельной семантики естественного языка, объясняют основные идеи теории и противопоставляют их идеям конкурирующих теорий.

Ситуационная семантика Барвайса-Перри представляет собой один из возможных вариантов теоретико-модельной семантики, в основе которой лежит такое понятие модели, которое больше соответствует идее «ситуации», чем идее «возможного мира».

9.2 Понятие ситуационной семантики

Ситуационная семантика – это теория значения, основанная на том, что авторы называют экологическим реализмом, где смысл находится во взаимодействии живых существ и их среды. Значения, согласно данной теории, возникают из повторяющихся отношений между ситуациями и отношений, на которые

должны настроиться организмы, чтобы выжить. Люди являются теми организмами, которые в большей степени заинтересованы в использовании языка, т.к. он показывает единообразие в ситуациях, которые мы можем распознать. Знание человеческого языка определяет умение использовать сложную связь между событиями высказывания (или дискурсивными ситуациями) и другими аспектами объективной реальности. Эта связь в конечном счете зависит от того, как языковое сообщество использует язык, т. е. от конвенциональных ограничений в этом сообществе.

Ситуация – это частичная модель, которая содержит некоторые сущности и некоторую спецификацию их признаков и отношений между ними. Это то, что Барвайс и Перри называют “актуальный мир "здравого смысла“, который отражается языком, мир, состоящий из объектов, имеющих некоторые признаки и стоящих в определённых отношениях друг к другу». Спецификации являются неполными, поскольку наше знание о мире с необходимостью является неполным.

Элементы теории ситуационной семантики:

множество A, содержащее элементы a, b, c,. . .;

множество отношений $R = R_0,R_1,\dots R_n$, где R_n состоит из n-местных отношений;

множество L пространственно-временных местоположений $l,l_1,\dots$.

Ситуация s характеризуется своим местоположением l и своим типом $s =< l, s >$. Тип представляет, какие объекты находятся в каких отношениях в данном месте. Эти типы представляются с помощью частичных функции от отношений $r \in R_n$ и последовательностей $(a_1,\dots,a_n)$ значений 1 (истина) и 0 (ложь).

Возьмем частичную функцию s_0, определенную таким образом:

s_0 (awake, Jackie) = 1

s_0 (awake, Molly) = 0,

(Jackie и Molly – собаки авторов подхода). Она будет реализовываться в тех ситуациях, когда собака первого автора бодрствует, а собака второго спит, независимо от того, что делает собака читателя, если она у него есть. s_0 реализуется в s = <l, s>, если $s_0 \subseteq s$. В данном случае используется S для множества типов ситуаций $s, s_0, s_1, \dots$ и $S(= L \times S)$ для множества ситуаций $s, s_0, s_1, \dots$.

Ход событий σ является частичной функцией из множества местоположений L в множество S. Таким образом, каждый ход событий также является набором ситуаций (не более одной в любом заданном месте l). Если $l \in domain(\sigma)$, используется σ_l для типа ситуации $\sigma(l)$. Σ используется для обозначения множества всех ходов событий.

Общий ход событий – это ход событий, определенный для всех местоположений. Среди них выделяется один как действительный ход событий σ^*. Ситуация s = <l, s> актуальная, если $s \subseteq \sigma$. Так происходит, если тип s является частью или всем тем, что на самом деле имеет место в l.

(Реалистическое) предложение – это множество $P \subseteq \Sigma$, удовлетворяющее свойству монотонности: $\sigma \in P$ и $\sigma \subseteq \sigma'$ влечет $\sigma' \in P$.

«Реалистичный» в данном случае используется, чтобы подчеркнуть, что это конструкции реальных объектов, свойств и мест, а не вещей в чьей-то голове.

Отправной точкой семантики ситуаций является то, что вневременные изъявительные высказывания описывают или обозначают типы ситуаций, а временные изъявительные высказывания обозначают пропозиции, наборы ходов событий.

Пример вневременного высказывания: «Земля вращается вокруг Солнца».

Пример временного высказывания: «Сегодня Саше исполнилось пять лет».

Термин «утверждение» используется для того, чтобы показать, что предложению типа «Я сижу» может быть сопоставлено столько разных утверждений, сколько может быть говорящих и сколько раз его произнести. Предложение имеет фиксированное «значение», а разные утверждения будут описывать разные события. То есть разные утверждения будут иметь разные «интерпретации».

9.3 Теория значения

Согласно теории значения значение – это отношение между различными типами ситуаций, а лингвистическое значение, в частности, – это отношение

между высказываниями или высказываниями и описываемыми ситуациями (называемые интерпретациями высказываний).

Приведем пример. Значение простого повествовательного предложения представляет собой условное ограничение между утверждениями, сделанными с помощью этого предложения, и их интерпретациями (описываемыми ситуациями).

Рассмотрим другой пример. Для этого возьмем следующие предложения:

«I am sitting» («Я сижу»).

«Sandy is sitting» («Сэнди сидит»).

«She was sitting» («Она сидела»).

Значения этих предложений можно привести к следующему виду:

NP PROG VP

где NP∈I, Sandy, she, PROG∈am, are, is, was, were, VP = sit, а именно:

$[[\alpha]](d, c, \sigma)$ т.и т.т., когда $\sigma_1(P, a) = 1$

где d,c[[PROG]] = l, d,c[[VP]] = P, [[NP]] = a. Высказывание a описывает ход событий σ только в том случае, если a сидит (в соответствующем времени) в предполагаемом месте 1 в ходе событий σ. d,c$[[\alpha]]$ – это предложение, монотонный набор ходов событий.

Данное выражение a с одним значением $[[\alpha]]$ может использоваться в разных обстоятельствах с разными интерпретациями. Важность значения (интерпретации) частично основывается на двух взаимосвязанных фактах: эффективность и относительность.

Эффективность: Такое слово, как я (I), например, может быть использовано для обозначения любого человека. Это позволяет использовать данное выражение снова и снова для разных целей. Однако предложение, описывающее данную ситуацию с точки зрения одного человека, в общем случае не будет описывать ту же ситуацию с какой-либо другой точки зрения.

Относительность: разные выражения с разными значениями могут использоваться в разных обстоятельствах с одной и той же интерпретацией. Например, для того, чтобы описать факт, что «Сэнди сейчас сидит» («Sandy is sitting now»), то завтра можно будет сказать: «Сэнди сидела» («Sandy was sitting»).

Можно сказать, что значение – это функция дискурсивной ситуации и связей с интерпретацией.

9.4 Отношения в предложении

Утверждения, сделанные с предложениями следующего типа, Барвайс и Перри называют отчетами об отношении:

«Agnes saw me jump in the fountain» («Агнес видела, как я прыгнул в фонтан»).

«Agnes saw that I was sitting in the fountain» («Агнес видела, что я сижу в фонтане»).

«Agnes knew that I was hot and tired» («Агнес знала, что мне было жарко и я устал»).

«Agnes said that I was drunk» («Агнес сказала, что я пьян»).

«The policeman believed what Agnes said» («Полицейский поверил словам Агнес»).

Например, третье высказывание будет выражать отношение между Агнес и тем фактом, что мне было жарко и я устал. Последнее представляет собой комплекс, включающий «меня», два свойства и местонахождение. Такой подход к установкам иллюстрирует то, что Дональд Дэвидсон называет «семантической невинностью» [4].

В случае сообщений об отношениях от первого лица в настоящем времени предложение используется в качестве встроенного предложения в отчете. Авторы считают, что в целом предложения, которые мы используем, чтобы сообщить об установках других, или они сами используют, чтобы сообщить о своих прошлых установках, не являются предложениями, которые они использовали бы или использовали бы для выражения этих установок.

Рассмотри пример.

Сэнди сказала: «Я сижу».

Сэнди сказала: «Я верю, что сижу».

О вере Сэнди из 2 предложения кто-то другой скажет: «Она верила, что сидит», а не «Она верила, что я сижу». То же самое относится и к другим глаголам отношения (AV).

Отношение – это отношение к предложениям. Отчет об отношении NP AVα получает пропозицию P, используя вложенное предложение α, интерпретация которого с точки зрения говорящего (d, c) есть P.

Агент a (=d,c[[NP]]) должен был бы использовать некоторое выразительное предложение α', интерпретация которого относительно его собственной точки зрения (d', c') также будет P:

P = d,c[[α]] = d,c[[α']]

Отношения — это отношения к предложениям, значениям предложений, смыслам предложений или ментальным представлениям, которые считаются чем-то вроде значений предложений. Отчет об отношении NP AVα сообщает об отношении агента к предложению α или к мысленной репрезентации, так или иначе связанной с α.

Предложение используется "невинно" не для обозначения того, к чему оно обычно относится, а для обозначения самого себя, своего значения или смысла.

Ситуационная семантика и семантическая невинность решают проблему логической эквивалентности. Логически эквивалентным предложениям даже в одной и той же дискурсивной ситуации не приписывается одна и та же пропозиция; разные предметы дают разные наборы типов ситуаций. С точки зрения семантики ситуаций, логически эквивалентная фраза должна использоваться для предложений, истинных в одних и тех же типах ситуаций или ходах событий, а не в тех, которые удовлетворяют более слабому условию истинности в одних и тех же тотальных типах или ходах событий.

Возьмем следующие предложения:

«Mary said that I was in danger» («Мэри сказала, что я в опасности»).

«Mary said "You are in danger."» («Мэри сказала: «Ты в опасности»).

«Mary said "He is in danger."» («Мэри сказала: «Он в опасности»).

«Mary said "Watch out!"» («Мэри сказала: «Осторожно!»).

Ни одно из них не может однозначно определяться через другое, однако пропозиция одна:

$$\{\sigma | \sigma_1(indanger, \alpha_d) = 1\}.$$

Рассмотрим другие примеры. Для этого возьмем следующую ситуацию: I walk into Alfred's study where he sits with his dog Clarissa. He says "Be careful. The dog has fleas.". («Я захожу в кабинет Альфреда, где он сидит со своей собакой Клариссой. Он говорит: "Будь осторожен. У собаки блохи".)

Ситуация, в которой мы находимся, ясно дает понять, что он имеет в виду Клариссу (= [[the dog]] (s_0)).

Пропозиция:

$$\{s_1|s_1(\text{есть блохи, Кларисса}) = 1\}.$$

Если я ему верю, то я верю не в то, что существует уникальная собака, у которой есть блохи, а в то, что у этой конкретной собаки есть блохи. Рассмотрим немного измененную ситуацию. Сейчас в комнате несколько собак. Указывая на Клариссу, Альфред говорит: «Это собака, которая кусается».

Здесь определенное описание собаки, которая кусается, используется не для того, чтобы выделить Клариссу, а для того, чтобы приписать ей свойство быть единственной собакой, которая кусается.

Пропозиция:

$$\{s_1|\text{Кларисса} = [[\text{собака, которая кусает}]](s_1)\}.$$

Ситуационная семантика радикально отличается от других систем в понятиях истинности. Семантические значения, которые она приписывает произнесенным предложениям, – это не истинностные значения, а ситуации. С другой стороны, понятие истины, которое мы находим в ситуационной семантике, приходит с определенной концепцией истины, причем такой, которая вряд ли встретит всеобщее согласие. Истина для Барвайса и Перри - это, опять же, просто еще одно единообразие ситуаций, как и ложность.

Рассмотрим довольно тривиальную истину для следующей ситуации: «Пола использовала машину Джона или не использовала его машину» Предположим, что Джон понятия не имеет, кто такая Пола, и не имеет с ней никакой связи. Тогда, согласно ситуационной семантике, для того, чтобы сообщить Джону, что он верит в эту самую правду, не обязательно, чтобы это сообщение было истинным. Чтобы это сообщение было истинным, Джон должен быть связан либо с ситуацией, в которой Пола использовала его машину, либо с ситуацией, в которой она этого не делала, следовательно, в любом случае, с ситуацией, в которой фигурирует Пола, что, по гипотезе, не так.

При разработке семантической теории основная идея авторов состояла в том, чтобы ограничиться наследственно конечными теоретико-множественными объектами, построенными из объектов, отношений и местоположений, находящихся в нашем распоряжении. В конечном итоге они определяют

σ_1 (says, a, P) = 1, где

σ – ход событий

a – агент

P – предложение

как

$\exists$ d, e, ψ[σ_1(says, d, c, ψ) = 1 и d,c[[ψ]] = P] (и σ_1(says, a, p) = 0, иначе)

Это позволяет избежать пропозиций в качестве аргументов типов ситуаций. В работе также игнорируются вопросы времени и места, чтобы иметь дело с типами ситуаций, а не с ходом событий.

9.5 Недостатки теории

Авторы приводят четыре проблемы, которые указывают на недостатки теории.

Логика отношений. Есть ряд фактов, связанных с установками, которые требуют семантического объяснения. Пример:

если α видит A и B, то α видит A и α видит B.

если α видит A или B, то α видит A или α видит B.

если α видит A, то A.

если α видит A(t_1) и $t_1 = t_2$, то α видит A(t_2).

Непрозрачность. Объяснение нарушает первоначальную философию Фреге и Рассела в отношении установок — утверждение, что замена соотнесенных выражений не сохраняет истинностную ценность в сообщениях об установках. В конце концов, если наша версия предсказывает вышеприведенное (iv), она будет делать аналогичные заявления для всех отношений. Принимая установки за отношения к реальным объектам, свойствам и отношениям, мы обязуемся утверждать, что они в некотором смысле прозрачны.

Отсутствующие объекты отношений. Объяснение приняло объекты установок за пропозиции. В связи с видением и высказыванием это философски неудовлетворительно. При видении теряется связь с тем, что действительно было увидено, а при говорении теряется связь с тем, что действительно было

произнесено. Предположим, что говорящий a в дискурсивной ситуации d и со связями c говорит

b said that A.

A само по себе вообще не может служить действительным высказыванием b. Но, конечно же, из истинности следует, что b действительно что-то произнес, что существует некоторое предложение B, произнесенное b, такое, что из места дискурса d' и связей c', d,c[[A]] = d,c[[B]] и c(сказал) = $l_{d'}$.

Когнитивное содержание установок. В описании отсутствует тот факт, что отношения имеют какое-то отношение к разуму (или мозгу) и познанию. Точно так же, как высказывание требует от агента произнести что-то осмысленное, а видение требует, чтобы агент видел что-то своими глазами. Так, вера и знание требуют, чтобы агент находился в осмысленном когнитивном состоянии. Частью того, что дают нам отчеты об отношении, является информация о когнитивном состоянии агента. Вот что делает отчеты об отношении полезными для объяснения и предсказания того, что люди будут делать. Люди со схожими представлениями, убеждениями и желаниями ведут себя одинаково.

Эти четыре проблемы взаимосвязаны. Они требуют осмысления того, что именно мы делаем, когда пытаемся построить семантическую теорию глаголов отношения.

Некоторые другие исследователи также отмечают, что ситуационная семантика является «объективистской» семантикой, т.е. то, что есть в ситуации, то реально в мире. Критика данного положения состоит в том, что не всё, что есть в мире, есть в ситуации [5].

9.6 Различия с другими теориями

В настоящее время распространено предположение, что ситуации имеют внутреннюю структуру [4]. Барвайс и Перри не разделяли это предположение. Они настаивали на том, что, напротив, такая структура навязывается ситуациями из внешней перспективы, путем настройки на сходства и единообразия в разных ситуациях. Индивиды, свойства, отношения, местоположение в пространстве-времени – это однородности, которые позволяют нам объединять си-

туации в группы и классифицировать их. Основное различие между ситуационной семантикой и традиционной системой Фреге заключается в том, что первая рассматривает значение как отношение, а вторая - как абстрактную вещь или сущность.

Есть и другое, связанное с этим различие: первая рассматривает значение как независимую и автономную сущность; таким образом, если бы не было языков или других устройств для их выражения, значения все равно бы существовали. Для вторых, напротив, смысл не является отделимой сущностью, поскольку он сводится к тому, как ситуации соотносятся с другими ситуациями и несут информацию о них; без этих самых ситуаций отношения, которые существуют между ними и которые составляют смысл, также не существовали бы [4].

Ситуационная семантика также отходит от принятых взглядов, когда речь заходит о том, к чему относятся предложения и каковы их семантические значения. После Фреге принято считать, что семантические значения (референция, расширение, денотация) предложений являются истинностными значениями. Фреге считал, что на уровне референции "все конкретное стирается и пришел к мнению, что все истинные предложения имеют одну и ту же референцию, как и все ложные. В ситуационной семантике, опять же, не предложения (или не полностью интерпретированные предложения, или пропозиции) имеют референцию, а высказывания и другие конкретные ситуации. Более того, то, к чему отсылает высказывание предложения, – это не истинностное значение, а одна или несколько (других) ситуаций, а именно ситуация (или ситуации), описываемая высказыванием.

9.7 Заключение

Ситуационная семантика претендует на то, что с её помощью возможно дать объяснение логики человеческого восприятия, в частности логики зрительного восприятия. Это представляет особый интерес в связи с тем, что человеческое восприятие очевидно необъективно, в то время как ситуационная семантика представляет собой версию объективистской семантики — семантики, в

которой значение определяется в терминах способности символов соответствовать объективному миру прямо, без какого-либо опосредующего человеческого понимания, которое выходило бы за пределы или не согласовывалось бы с тем, что в полном смысле вне нас.

Ситуации, в отличие от миров, не являются полными в том смысле, что каждое предложение или его отрицание имеет место в мире. Согласно ситуациям и установкам, значение – это отношение между дискурсивной ситуацией, связывающей ситуацией и описываемой ситуацией. Ситуация Барвайса и Перри может быть понята как составная часть мира, наблюдаемая с определённой точки зрения. Ситуации отличаются от возможных миров в интенсиональной семантике, в которой возможные миры являются полными спецификациями всех сущностей в мире и всех их признаков и отношений между ними.

9.8 Список литературы

1. Barwise J., Perry J. Semantic Innocence and Uncompromising Situations // The Foundations of Analytic Philosophy, 1981. – P. 387-403.
2. Barwise J., Perry J. Situations and Attitudes // The Journal of Philosophy. Vol. 78, № 11: Seventy- Eighth Annual Meeting of the American Philosophical Association Eastern Division. 1981 P. 668–691.
3. Barwise J., Perry J. Situations and Attitudes. Cambridge; L., 1983.
4. Davidson D. On Saying That, The Logic of Grammar (Encino, Calif.: Dickenson), Originally published in Synthese (1968/69), 1975. – P. 130-146.
5. Partee B. H. Compositionality in Formal Semantics, 2004. – 342 p.
6. Stojanovic I. Situation Semantics // Identity, Language and Mind: An Introduction to the Philosophy of John Perry, CSLI Publications, 2012. – P. 67-86.

Глава 10. Пропозициональные установки (Propositional Attitudes)

10.1 Введение

Пропозициональные установки (propositional attitudes) — это такие отношения, как вера, страх, надежда, понимание и предположение, которые можно принять, как отношение к пропозиции (утверждению). Их можно отождествить с ментальным состоянием, которое обычно имеет условие истинности в силу своей репрезентативности [1]. Термин «пропозициональные установки» исходит от Бертрана Рассела, который утверждал, что мы можем думать о содержании пропозициональной установки как о пропозиции, к которой она направлена. Чаще всего используются такие виды пропозициональных установок, как вера, желание и намерение, однако существует бесчисленное количество других: надежды, страхи, желания, сожаления и т.д. [2].

Предложения, сообщающие о пропозициональном отношении, касаются когнитивных отношений, которые люди имеют к пропозициям. Примером парадигмы является предложение «Джилл считает, что Джек сломал свою корону». Можно утверждать, что «верит», «надеется» и «знает» являются глаголами пропозициональной установки и, когда за ними следует часть, включающая полное предложение, выражающее пропозицию (предложение с «что»), образуют предложения, сообщающие о пропозициональной установке. Пропозициональные установки часто считаются фундаментальными единицами мышления, и их содержание, будучи предложениями, истинно или ложно с точки зрения человека. Агент может иметь разные пропозициональные отношения к одному и тому же предложению (например, «S считает, что ее мороженое холодное» и «S опасается, что ее мороженое холодное») [3].

Приписывание когнитивных отношений предложениям может принимать и другие формы. Например, «Джек верит в то, что сказала Джилл» и «Джек верит во все, во что верит Джилл» — оба являются приписыванием пропозициональной установки, даже если за глаголом установки не следует предложение с «что» [3].

Некоторые предложения могут содержать глаголы пропозициональных установок, однако не содержать связи с пропозицией (например, «John fears this dog (Джон боится этой собаки)»). Возможность анализирования таких предложения очень спорна, так как Джон может бояться этой собаки только в случае, если есть некое X такое, что Джон опасается, что данная собака сделает X [2]. Некоторые философы и лингвисты также утверждают, что такие предложения, например, как «Джилл хотела, чтобы Джек упал», «Джек и Джилл ищут воду» и «Джек боится Джилл», следует анализировать как пропозициональную установку. Но такой взгляд является спорным [3].

Чаще всего обсуждение пропозициональных установок сосредотачивается на вере, желании и намерении, так как эти установки играют центральную роль в объяснении рационального поведения. Например, посещение супермаркета объясняется желанием купить продукты, а щёлкание выключателем – намерением включить свет и верой в то, что можно осветить комнату, щёлкнув выключателем. Можно предположить, что рациональное поведение можно всегда объяснить, как результат подходящего убеждения вместе с подходящим желанием. Некоторые философы (например, Грайс и Шиффер) использовали пропозициональные установки для объяснения фактов о значении. Они считают, что значения предложений каким-то образом вытекают из содержания релевантно связанных убеждений и намерений. Грубо говоря, то, что я подразумеваю под предложением S, схвачено содержанием, скажем, убеждения, которое я выражаю, говоря S [2].

10.2 История

Веские соображения, сформулированные Готтлобом Фреге в 1892 году, показывают, что слова в рамках пропозиционального отношения не могут функционировать так, как они работают вне этой языковой среды. Фреге представляет свою загадку как задачу об отношении между познавательной ценностью выражений и их обычной референцией, утверждая, что они должны быть различны. Проблему Фреге можно сформулировать как вопрос об атрибуциях пропозициональных установок [3].

Фреге считает, что правильные атрибуты пропозициональной установки должны указывать на то, как индивиды представлены агентом (способ агента представления референта), и что появление референтного выражения в рамках пропозициональной установки относится к способу репрезентации объекта, а не к обычному референту выражения. Обычный смысл выражения — то, как выражение указывает на своего референта, — становится частью условий истинности для предложения, в котором встречается выражение, если это выражение используется в контексте убеждения. В этой языковой среде выражения относятся к своим обычным значениям [3].

Фреге придерживается двух разных тезисов о терминах в рамках глаголов пропозициональной установки: что они относятся к способу репрезентации объекта агентом и что они относятся к обычному смыслу. Фреге объединяет эти положения, утверждая, что обыденный смысл есть способ представления объекта. Глаголы пропозиционального отношения вызывают сдвиг в ссылке; вхождения выражений в пределах их объема относятся к тому, что Фреге называет их обычным смыслом. В рамках глагола отношения выражения относятся к тому, что они выражают, когда находятся вне сферы действия глагола отношения. Утверждение Фреге о том, что глаголы пропозициональной установки вызывают сдвиг референции, позволяет ему сохранить принцип подстановки [6].

Решение этой проблемы Фреге подвергалось критике с нескольких сторон. Некоторые обвиняют его в нарушении семантической чистоты, считая, что выражение имеет одну и ту же референцию во многих языковых средах. Однако простое решение Фреге сталкивается с другими, более серьезными проблемами. Во-первых, объяснение кажется несостоятельным, когда мы пытаемся распространить его на другие типы предложений, сообщающих об отношении. Один из наиболее распространенных способов обращения к людям — это использование индексальных и указательных падежей, таких как «я», «ты», «это», «она» и «они». Трудно согласовать использование таких терминов с теорией Фреге, которая требует, чтобы способ представления был семантическим значением единичного термина в предложении пропозициональной установки.

С другой стороны, Бертран Рассел предложил то, что можно было бы назвать теорией мышления, основанной на знакомстве, согласно которой некоторые из наших мыслей непосредственно связаны с людьми, которых они ка-

саются. Рассел утверждал, что существуют логически собственные имена, которые вносят свой вклад только в свои референты в пропозиции, выраженные предложениями, содержащими их в подлежащем положении. Таким образом, он утверждал, что предложения, содержащие логически собственные имена, выражают единичные пропозиции. В отличие от самого Рассела, неорасселианцы утверждают, что единичное мышление возможно даже для сущностей, для которых возможна неправильная идентификация.

Одно из направлений неорасселианства – наивные расселианцы – настаивают на том, что фундаментальные условия истинности для атрибуции убеждений включают только объекты и свойства, а не то, как эти элементы представлены.

Кримминс и Перри придерживаются метафизики мыслей и мышления, аналогичной стандартной наивной расселлианской, описанной выше. Разница между точками зрения касается того, является ли информация, семантически закодированная высказываниями предложений, сообщающих об отношении, чувствительной или нечувствительной к различиям в способах понимания предложения.

По мнению Ричарда, предложения выражают то, что он называет аннотированными матрицами Рассела (RAM). Они представлены в виде кортежей пар лингвистических выражений и их «расселовских интерпретаций». Эти пары называются аннотациями. RAM служат как семантическим содержанием предложений, так и содержанием убеждений. Взгляд Ричарда не является вариантом неорасселизма. Это потому, что, по его мнению, содержание пропозициональных установок не является единичными пропозициями [5].

И версия Ричарда, и модифицированная неорасселовская сталкиваются с серьезной проблемой: проблемой конфликтующих ограничений. Ричард в 1995 году отмечает по этому поводу, что, когда в контексте действуют конфликтующие ограничения, релевантное предложение является истинным в контексте только в том случае, если оно истинно при каждом разрешении конфликта.

Существует еще две проблемы, представленные Крипке и Ричардом. Крипке утверждает, что ссылка на имя определяется не идентифицирующими описаниями, которые говорящий ассоциирует с именем, а скорее реальными связями между использованием имен и объектов. Рассуждая таким образом, Крипке, среди прочих, проложил путь к ныне широко (хотя и не повсеместно) при-

нятой теории прямой референции имен собственных [4]. Марк Ричард выделил проблему, которая, по-видимому, показывает, что кажущаяся некореектность подстановки не ограничивается некорректностью в рамках глаголов установки. Это ставит под сомнение идею о том, что кажущиеся интуитивные представления о некорректности подстановки можно объяснить, утверждая, что глаголы пропозициональной установки создают интенсиональные контексты, будучи чувствительными не только к обычному референтному содержанию терминов в пределах их объема [5].

Проблемы Крипке и Ричарда, как и проблема Фреге, предоставляют больше данных, которые должно учитывать любое адекватное объяснение отношения, приписывающего предложения. В конечном счете, любое такое объяснение должно согласовываться с более широкой теорией человеческого взаимодействия. Люди сообщают о своих убеждениях, они соглашаются, когда разделяют убеждения, и убеждения играют роль в мотивации и объяснении действий. Любая оценка атрибуций убеждений должна говорить о том, какой вклад во все это вносит пропозициональное отношение, приписывающее предложения, и анализ должен разделять этот вклад на его семантические и прагматические аспекты.

10.3 Пропозициональные установки и философия языка

Основной причиной исследования пропозициональных установок является их отношение к пропозициям (декларативным предложениям). Пропозиции тесно связаны со значениями и также являются тем, что истинно или ложно в первой инстанции, поэтому можно вывести следующую точку зрения:

(1) Пропозициональные установки – бинарные отношения, определяемые глаголами установок, такими как «верит» или «говорит»,

(2) Использование (повествовательного) предложения выражает пропозицию, за исключением случаев, когда предложение семантически дефектно, как, например, предложения с пустыми именами,

(3) Предложения имеют условия истинности и, следовательно, значения истинности и модальные свойства, такие как необходимость. Предложение наследует их от предложения, которое оно выражает,

(4) При использовании APA 'a Vs, что S', V является глаголом установки, 'что S' называет пропозицию, выраженную S; приписывание истинно при условии, что то, что a называет, связано с пропозицией отношением, которое выбирает V.

(5) Существует аксиоматизируемое объяснение, приписывающее типу предложения S и контексту использования с пропозицию, выраженную посредством S, используемую в c. Это предложение и есть то, что названо в с этим S.

(6) Значение предложения задается правилом, которое позволяет сказать, учитывая соответствующую неязыковую информацию о контексте или употреблении (например, кто говорит, который сейчас час), какую пропозицию выражает предложение.

(1)-(4) основаны на представлениях Фреге и Рассела о языке, истине и мышлении, тогда как (5) обобщена из работ Тарского, Монтегю, Рассела и Фреге как основоположников современной философии языка. (1)–(5) также можно назвать реляционной оценкой установок и их приписыванием. Это короткий шаг от реляционного подхода к идее, что, когда предложение используется (буквально) для передачи информации, передаваемая информация является пропозицией, которую выражает предложение. Учитывая, что роль семантической теории в значительной степени состоит из объяснения того, как предложения используются для передачи информации, из этого следует, что значительная часть семантики будет связана с объяснением ассоциации объектов пропозициональных установок с предложениями и их употреблениями. (6) было популяризировано Дэвидом Капланом [1].

Некоторые отвергают значение реляционного отношения импликации, что семантика связана с тем, что сказано. Но даже несогласные так или иначе признают важность другой проблемы, связанной с приписыванием установок. Это то, что Макс Крессуэлл назвал гиперинтенсиональностью APA: выражения, которые имеют один и тот же интенсионал возможных миров — и поэтому, в общем, могут быть заменены друг другом вне APA и цитатного контекста — не могут быть заменены таким образом в APA. Эта аномалия является второй причиной важности APA для философии языка [1].

Эту проблему вполне можно разделить на две подзадачи. Во-первых, то, что в противном случае кажется логическими законами, по-видимому, не рабо-

тает применительно к АРА. Если аргумент от А к В логически верен, то 'Если А, то А' и 'Если А, то В' логически эквивалентны, каким бы неубедительным ни было доказательство последнего. Таким образом,

Я знаю, что если А, то В

может исходить из

Я знаю, что если А, то А

путем замены логических эквивалентов. Но мало кто думает, что пары, связанные таким образом, должны быть эквивалентны по истинностному значению. Таким образом, первая проблема гиперинтенсиональности состоит в том, чтобы объяснить, какие преобразования в рамках глаголов отношения являются логически обоснованными [1].

Общеизвестно, что имена собственные одного и того же предмета взаимозаменяемы в модальных контекста, но не в рамках глаголов отношения. Например,

Одиль думает, что Твен мёртв

Одиль думает, что Клеменс мёртв

не нуждаются в подтверждении истинности. Однако если говорить о выражениях, таких как, например, 'yell' (кричать – злобно) и 'shout' (кричать – более обобщ.), которые можно принять за синонимы, они не являются взаимозаменяемыми. Кто-то может и принять их за синонимы, но существуют люди, которые сомневаются (то есть имеют свои представления о этих разновидностях крика), что каждый 'shout' – это 'yell'. Вполне вероятно, что в данном случае

Tyler thinks that some doubt that all who shout yell

может быть правдой, тогда как

Tyler thinks that some doubt that all who shout shout

правдой не является, но последнее происходит от первого путем замены (кажущихся) синонимов на синонимы. Тот факт, что даже подстановка кажущихся синонимов не работает в рамках приписывания отношения, представляет собой контрпример к утверждению о том, что естественные языки обладают семантикой, удовлетворяющей нетривиальному принципу композициональности, на котором определяются семантические свойства сложного выражения, которая может быть изложена в конечной теории посредством семантических свойств ее частей и ее синтаксиса. Можно было бы подумать, что синонимы обладают одинаковыми семантическими свойствами. Вторая проблема, которую

ставит гиперинтенсиональность приписывания установки, состоит в том, чтобы найти объяснение семантических свойств выражений, которое обеспечивает удовлетворительное объяснение условий истинности приписывания установки (и других конструкций, конечно), а также позволяет композиционально учитывать семантику естественных языков [1].

Эта проблема оказалась чрезвычайно сложной. В самом деле, (спорная) неудача всех попыток прийти к удовлетворительному описанию АРА побудила Стивена Шиффера утверждать, что естественные языки просто не имеют композициональной семантики (в смысле аксиоматизируемой теории), которая характеризует условия, при которых использование произвольного предложения языка является истинным или ложным.

10.4 Семантика и структура

Пропозиции выбираются с помощью дополнительных предложений, таких, как фраза «что идет дождь». Хотелось бы точно знать, как пропозиция определяется дополнительным предложением; в идеале объяснение, которое сообщает нам, что также сообщает нам условия, при которых два предложения выражают одну и ту же пропозицию, тем самым давая нам представление о пропозициональной индивидуализации. Нужно знать, какие значения должны быть приписаны простым выражениям (и синтаксическим структурам), чтобы определить предложения. Наконец, нужно знать, имеют ли пропозиции (адекватная семантика, приписываемая предложениям) структуру (или, по крайней мере, условия индивидуализации), подобную структуре выражающих их предложений [1].

Убеждение или утверждение разделяет возможности на два класса: те, в которых оно истинно, и остальные. Одна картина пропозиций отождествляет их с такими разбиениями. Представление о том, что пропозиции представляют собой наборы возможных миров, является версией этой картины; такова и картина пропозиций как наборов ситуаций. В отличие от большинства взглядов, которые интерпретируют структуру предложения как пропозицию, которую оно выражает, такие взгляды допускают, что различие в структуре не является пре-

пятствием для предложений, говорящих об одном и том же: утверждение, что $A\&(B\&C)$, является утверждением, что $B\&(C\&A)$. А поскольку неязыковое ментальное состояние может разделять возможности, эта точка зрения делает приписывание веры нечеловеческим животным относительно беспроблемным [1].

Однако логически эквивалентные предложения истинны в одних и тех же мирах. Когда A является логическим следствием B, миры, в которых истинно B, — это миры, в которых истинны A и B. Таким образом, невозможно узнать, что B, не зная, что A и B. Отождествление пропозиций с множествами миров не решает проблему гиперинтенсиональности [1].

Пропозициональная структура выводится из структуры предложения или, по крайней мере, отражается в ней. Составляющие пропозиций – это повседневные семантические значения выражений: индивидуумов, свойств и отношений, а также вещей, соответствующих связкам и логическим операторам [1].

10.5 Состояния пропозициональных установок

Если убеждения, желания, намерения и тому подобное являются состояниями субъектов, то какие это состояния? Правдоподобная точка зрения состоит в том, что они являются функциональными состояниями — состояниями, определяемыми их функциональными ролями. Согласно функционалистским теориям, пропозициональные состояния установки полностью определяются их каузальными отношениями друг к другу, к перцептивным входам и поведенческим результатам.

Однако есть два различных способа осмысления функциональных состояний: как ролевых состояний или как состояний реализации. Состояния реализаторов — это состояния первого порядка, которые выполняют функциональные роли; они являются особыми состояниями, которые играют роли. Ролевые состояния — это состояния второго порядка: состояние пребывания в каком-то состоянии первого порядка, играющем определенную функциональную роль. Итак, в случае убеждения, скажем, существует состояние реализации первого

порядка (состояние, которое фактически выполняет роль убеждения — состояние, которое является посредником между перцептивными входными данными и поведенческими реакциями, характерным для убеждения); и есть ролевое состояние второго порядка (состояние пребывания в том или ином состоянии, которое реализует роль убеждения — состояние пребывания в состоянии, которое в характерном для убеждения способе опосредует перцептивные входы и поведенческие выходы).

Очевидная причина считать, что пропозициональные состояния установки являются состояниями реализации, а не ролевыми состояниями, заключается в том, что пропозициональные установки центрально вовлечены в причинность поведения, и это именно состояния реализации, а не ролевые состояния центрально вовлечены в причинность поведения. Это, например, конкретное внутреннее состояние, которое выполняет роль, которую мы связываем с верой в то, что снег белый, и вызывает поведение, характерное для этой веры, — например, произнесение слов «Снег бел». Есть, однако, и соображения, указывающие на обратное, в пользу утверждения, например, что моя вера в то, что снег бел, есть ролевое состояние, реализуемое каким-то определенным моим внутренним состоянием.

Паттерны, которые мы улавливаем в психологических обобщениях, относятся к ролевым состояниям, поэтому цена утверждения, что психологические состояния являются состояниями реализации, заключается в том, что психологические обобщения перестают соотносить психологические состояния.

Независимо от того, следует ли рассматривать пропозициональные состояния установки как ролевые состояния или состояния реализации, многим философам казалось правдоподобным, что состояния реализации являются физическими состояниями мозга или, во всяком случае, состояниями, которые являются супервентными по отношению к физическим состояниям мозга. Это выдвигается как правдоподобная научная гипотеза. Только в мозгу есть состояния достаточной сложности, чтобы играть нужные роли. Однако допускается как логическая возможность, что могли существовать и другие (возможно, даже нефизические) состояния реализации, которые выполняли ту же роль.

Некоторые философы, однако, беспокоились о том, могут ли нейронные состояния быть теми вещами, на которые можно ссылаться, в частности, даже при объяснении рационального действия. Они утверждают, что связи между

нервными состояниями являются просто каузальными, используя универсальные законы физики или нейронауки, тогда как связи между состояниями пропозициональной установки рациональны (и служат для рационализации поведения). Одна вера делает другую рациональной; то, во что человек верит и чего желает, может сделать одно действие более рациональным, чем другое; и так далее.

Однако с возражением такого рода возникают серьезные проблемы. Будет ли лучше служить рациональности, если установки будут возникать случайным образом? И, конечно же, достойное объяснение пропозициональных установок помещает их в физический мир — они не являются потусторонними тайнами — и, учитывая это, кажется мало альтернативы тому, чтобы поместить их в мозг: мы знаем, что пропозициональные установки играют сложные каузальные роли в нашем поведении, и только у мозга есть состояния, способные к необходимой сложности. Наконец, непонятно, почему можно предположить, что функционально определенные состояния не могут обладать рационализирующими свойствами, которые якобы исчезают из научной картины [2, 7].

10.6 Сомнения по поводу пропозициональных установок

Существуют многочисленные сомнения, которые возникают у философов в отношении пропозициональных установок.

Некоторые философы отрицают существование каких-либо пропозициональных установок — они отрицают наличие каких-либо убеждений, желаний, намерений и тому подобного. Иногда источником этого отрицания является философия языка (нелюбовь к интенсиональным контекстам и т. д.); в других случаях источником является метафизика (например, неспособность найти физическую структуру, с которой можно отождествить рассматриваемые состояния). Иногда считают, что пропозициональные установки — это удобные фикции — полезные инструменты для прогнозирования поведения, но не подходящие для точной науки. С этой точки зрения разговор о пропозициональных установках имеет второстепенный, чисто инструментальный статус, но нет никаких причин, по которым мы не должны продолжать его в целях предсказания

и объяснения. Другие философы утверждают, что разговор о пропозициональных установках задуман как первоклассное научное теоретизирование. С этой точки зрения, разговоры о пропозициональных установках подобны разговорам о флогистоне: разговоры, которые пытались уловить важную черту реальности и стать частью серьезной науки, но потерпели неудачу.

Среди философов, которые признают, что существуют пропозициональные установки, то есть среди тех философов, которые признают, что некоторые приписывания пропозициональных установок строго и буквально истинны, есть философы, которые скептически относятся к реляционному анализу этих установок.

Они отрицают, что установки являются отношениями к предложениям. Иногда это отрицание подпитывается заботой о сущностях-кандидатах на эти содержания, множествах миров, структурированных теоретико-множественных сущностях и тому подобном, что мы обсуждали ранее. Теоретики, которые отрицают реляционный взгляд на установки, обычно настаивают на том, что предложение типа «Я верю, что снег бел» лучше всего с логической точки зрения написать как «Я верю, что снег белый», или как «У меня есть белый снег», или что «я хромаю» лучше всего писать «я хромаю».

Тем не менее, другие философы — Стивен Шиффер, например, — отчаялись в попытках дать какое-либо философское объяснение пропозициональным установкам, тем не менее предполагая, что практика приписывания пропозициональных установок совершенно правильна в ее нынешнем виде. Суть их позиции — отрицание необходимости давать отчет в чем-либо подобном традиционному смыслу пропозициональных установок.

10.7 Список литературы

1. Richard, M., ‘Propositional Attitudes’.
2. Oppy, G. 1998, ’Elementary distinctions In: Propositional attitudes’ In: Routledge Encyclopedia of Philosophy, Taylor and Francis, viewed 24 December 2022, <https://www.rep.routledge.com/

articles/thematic/propositional-attitudes/ v-1/sections/elementary-distinctions>. doi:10.4324/9780415249126-V028-1

3. Nelson, M., "Propositional Attitude Reports The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2022 Edition), Edward N. Zalta and Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives /win2022/entries/ prop-attitude-reports/>.
4. Kripke, S., 1979. 'A puzzle about belief', in A. Margalit (ed.). Meaning and Use, Dordrecht: Reidel, 1979, 239–283.
5. Richard, M., 1983. 'Direct reference and ascriptions of belief', Journal of Philosophical Logic, 12: 425–452.
6. Salmon, N. (1986) Frege's Puzzle, Cambridge, MA: MIT Press
7. Loar, B. (1981) Mind and Meaning, Cambridge: Cambridge University Press.

Глава 11. Модель DisCoCat

11.1 Введение

Язык позволяет составлять слова огромным количеством способов, чтобы получить различные значения. Он также постоянно меняется. Композиционная распределительная модель [3] описывает, как использовать композиционные методы в рамках модели векторного пространства значений. Однако в этой модели и других, похожих [9], [16], нет встроенного понятия изменения языка или перевода между языками. В отличие от этого, многие статистические системы машинного перевода в настоящее время используют нейронные модели, когда большая сеть обучается переводу слов и фраз [10], [24]. Этот подход не использует грамматическую структуру, которая позволяет строить переводы фраз из переводов отдельных слов. Важным шагом к объединению этих двух подходов является определение понятия перевода между двумя композиционными дистрибутивными моделями смысла. Моделирование перевода между двумя языками также имеет самостоятельную ценность, а выполнение его в рамках DisCoCat означает, что появляется способ использовать возможности этой модели для перевода между двумя языками.

DisCoCat (Categorical Compositional Distributional) — это математическая структура для обработки естественного языка, которая использует теорию категорий для объединения дистрибутивной семантики с принципом композициональности. Грамматические деривации в категориальной грамматике (обычно грамматике прегруппы) интерпретируются как линейные отображения, действующие на тензорное произведение векторов слов для получения значения предложения или фрагмента текста. Строковые диаграммы используются для визуализации потока информации и рассуждений о семантике естественного языка.

DisCoCat использует тот факт, что прегруппы и категория конечномерных вещественных векторных пространств являются примерами жестких моноидальных категорий. Семантика для грамматик прегруппы затем может быть задана в виде сильного моноидального функтора, который позволяет вычис-

лять значения предложений из значений слов с помощью линейной алгебры композиционно на основе грамматической структуры предложения.

DisCoCat была впервые представлена Коеке, Садрзаде и Кларком в 2010 г. [3]. Авторы предложили эту модель как приложение категориальной квантовой механики к обработке естественного языка. Все началось с наблюдения, что грамматики прегрупп и квантовые процессы имеют общую математическую структуру: они обе образуют жесткую категорию (также известную как несимметричная компактная замкнутая категория). Таким образом, они обе извлекают пользу из графического исчисления, которое позволяет проводить чисто схематические рассуждения. Хотя аналогия с квантовой механикой поначалу оставалась неформальной, в конечном итоге она привела к развитию квантовых методов обработки естественного языка.

11.2 История

DisCoCat была предложена Бобом Коеке, Мехрнуш Садрзаде и Стивеном Кларком как математическая модель для объединения дистрибутивной теории смысла в терминах векторных пространств и теории грамматических типов, при этом они использовали алгебру прегрупп, введенную Иоахимом Ламбеком.

Использование прегрупп для анализа структуры естественных языков основывается на исчислении Ламбека (или синтаксическом исчислении) [14], где категории слов (типы) используются для анализа синтаксиса естественных языков в простой эквациональной алгебраической постановке.

Частично упорядоченный моноид $(P, \leqslant, -, 1)$ – это частично упорядоченное множество, снабженное моноидальным умножением $-$ с единицей 1, причем для любых p,q,$r \in P$, из $p \leqslant q$ следует, что $r - p \leqslant r - q$ и $p - r \leqslant q - r$.

Прегруппа – это частично упорядоченная алгебра $(A,1,\cdot,(-)^l,(-)^r,\leqslant)$, для которой $(A,1.\cdot)$ является моноидом, удовлетворяющим дополнительным соотношениям

$$x^l \cdot x \leqslant 1, x \cdot x^r \leqslant 1 \,(\text{сокращение}),$$

$$1 \leqslant x \cdot x^l, 1 \leqslant x^r \cdot x \,(\text{расширение}).$$

Легко доказать, что выполняются следующие тождества:

$$1^l = 1^r = 1,$$

$$x^{lr} = x^{rl} = x,$$

$$(x \cdot y)^l = x^l \cdot y^l, (x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r.$$

Элементы x^l и x^r называются левым и правым сопряженным к элементу x, соответственно.

В теории категорий прегруппы известны как автономные категории [21] или (несимметричные) компактные замкнутые категории [19]. Вместо $x \cdot y$, как обычно, используется сокращение xy.

Другое определение: прегруппа – это частично упорядоченный моноид $(P,1 \cdot , \leqslant)$, в котором каждый элемент $p \in P$ имеет левый сопряженный p^l и правый сопряженный p^r.

Прегруппы формализуют грамматику естественных языков так же, как и категориальные логики типов. Вначале фиксируется набор основных грамматических ролей и частичное упорядочение между ними, затем свободно генерируется прегруппа этих типов, существование которой обосновано. Прегруппы были использованы для анализа синтаксиса целого ряда языков, от английского и французского до польского и персидского [15] и многих других; дополнительные ссылки см. в [11], [13].

В статье [1] авторы привели два примера из английского языка: положительные и отрицательные переходные предложения для которых были зафиксированы следующие основные типы:

n: существительное

s: декларативное утверждение

j: инфинитив глагола

σ: тип склеивания

Составные типы образуются из них путем примыкания и сопоставления. Каждому слову словаря присваивается тип (основной или составной). Авторы определили, что если сопоставление типов слов в предложении сводится к основному типу s, то предложение является грамматическим. Было показано, что эта процедура является разрешимой. Например, предложение "Джону нравится Мэри"имеет тип

$$n(n^r s n^l)n$$

и является грамматическим благодаря сокращению

$$n(n^r s n^l)n \to 1 s n^l n \to 1 s 1 \to s$$



Но что особенно интересно в прегруппах и мотивирует их использование Коеке, Садрзаде и Кларком, так это то, что они имеют общую структуру с векторными пространствами и тензорными произведениями, если перейти к теоретико-категорной перспективе. Как категория векторных пространств, линейных отображений и тензорного произведения, так и прегруппы являются примерами так называемых компактных замкнутых категорий. Компактные замкнутые категории являются общим контекстом для рассмотрения двойственных объектов. Идея двойственного объекта обобщает более известную концепцию двойственности конечномерного векторного пространства. Компактные замкнутые категории являются частным случаем моноидальных замкнутых категорий, которые, в свою очередь, являются частным случаем замкнутых категорий. Они допускают красивое чисто диаграммное исчисление, которое в значительной степени упрощает вычисления значений.

Их математическая модель языка является теоретико-категорной. Теория категорий обычно не воспринимается как наиболее очевидная часть математики, поэтому авторы приводят доводы в оправдание такого подхода.

1. Переход от истинностных значений (как в семантике Монтегю) к количественным смысловым пространствам требует математической структуры, которая может хранить эту дополнительную информацию, но в то же время сохраняющую композициональную структуру. Конкретные моноидальные категории делают именно это: аксиоматическая структура, в частности моноидальный тензор, фиксирует композициональность; конкретные объекты и соответствующие морфизмы позволяют кодировать конкретную модель смысла, которую используют авторы, здесь — векторные пространства.

2. Структурные морфизмы конкретных категорий — компактных замкнутых категорий — будут основными строительными блоками для построения

морфизмов, которые представляют процесс «от значения слов к значению предложения».

3. Даже в чисто синтаксических условиях переход к категориям позволит рассуждать о грамматических структурах различных предложений абсолютно формально. Это позволит обеспечить больше, чем просто ответ "да-нет"о грамматической структуре фразы, т.е. является ли она грамматической или нет. Таким образом, категориальная установка позволит нам, например, различать и рассуждать о двусмысленности в грамматических предложениях, когда их различные грамматические структуры приводят к различным смысловым интерпретациям.

DisCoCat позволяет вычислять значение корректно типизированного предложения из значений его составляющих. Конкретно, редукции типов прегрупп "поднимаются"до морфизмов в категории — процедура, которая преобразует значения составляющих в значение (корректно типизированного) целого. Важно отметить, что значения целых предложений живут в едином пространстве, не зависящем от грамматической структуры предложения. Поэтому авторы используют внутреннее произведение для сравнения векторов значений. Эта мера упоминалась и широко использовалась как степень сходства между значениями слов в дистрибутивных подходах к значению [22].

Согласно формальному определению, процедура приписывания смысла строке слов согласно Коеке, Садрзаде и Кларку [3] может быть приблизительно описана следующим образом:

1. Присвоить грамматический тип p_i каждому слову w_i строки, применить аксиомы и правила грамматики прегруппы, чтобы свести эти типы к более простому типу $p_1 \dots p_n \to x$. Если строка слов является предложением, то сокращенный тип x должен быть основным грамматическим типом предложения s.

2. Присвоить векторное пространство каждому слову предложения на основе задания его синтаксического типа. Векторные пространства слов с основными типами, такими как существительное, могут быть атомарными и строиться в соответствии с обычными правилами дистрибутивной модели; векторные пространства слов с составными типами, такими как глаголы, являются тензорными пространствами.

3. Рассмотреть вектор значения каждого слова в построенных выше пространствах, взять их тензор и применить к нему диаграмму синтаксической редукции строки, согласно пространствам значений каждого слова. В результате Коеке и др. получают значение строки (предложения).

Следовательно, внутреннее произведение, по утверждению авторов, может быть использован как для сравнения значений произвольных положительных и отрицательных предложений, так и для сравнения значений слов в дистрибутивной модели. Математическая структура, которую авторы использовали, допускает чисто диаграммное исчисление, которое показывает, как информация течет между словами в предложении, чтобы составить значение всего предложения. Вариация их "категориальной модели включающая ограничение скаляров векторных пространств семантикой булевых чисел, приводит к семантике булевых значений в стиле Монтегю.

11.3 Формальное определение

В литературе существует множество противоречивых определений DisCoCat. В оригинальной статье [3] использовалось категориальное произведение FinVect с прегруппой, рассматриваемой как позетальная категория. К сожалению, этот подход не работает: действительно, все параллельные стрелки позетальной категории равны, что означает, что подгруппы не могут различать разные грамматические деривации для одного и того же синтаксически неоднозначного предложения.[17]

Вместо этого нужно рассмотреть свободную жесткую категорию G, генерируемую грамматикой прегруппы [18]. То есть G имеет генерирующие объекты для слов и основных типов грамматики и генерирующие стрелки $w \to t$ для словарных статей, которые присваивают предварительно введите t в слово w. Стрелки $f : w_1 \dots w_n \to s$ являются грамматическими производными для предложения $w_1 \dots w_n$, которые могут быть представлены в виде строковых диаграмм с дугами и заглавными буквами, т.е. единицами присоединения и графиками.[21]

С этим определением грамматик прегруппы как свободных жестких категорий модели DisCoCat могут быть определены как сильные моноидальные функторы $F : G \to FinVect$. Далее, они присваивают конечномерное векторное пространство $F(x)$ каждому основному типу x и вектор $F(w) \in F(t) = F(t_1) \otimes \ldots \otimes F(t_n)$ в соответствующем пространстве тензорного произведения для каждой словарной статьи $w \to t$, где $t = t_1 \ldots t_n$ (объекты для слов отправляются в моноидальный блок, т.е. $F(w) = 1$). Значение предложения $f : w_1 \ldots w_n \to s$ затем задается вектором $F(f) \in F(s)$, который может быть вычислен как сжатие тензорной сети [4].

Причина выбора FinVect в качестве категории семантики заключается в том, что векторные пространства являются стандартными объектами дистрибутивной семантики в компьютерной лингвистике и обработке естественного языка. Основополагающая идея гипотезы дистрибутивности “Слово характеризуется компанией, которую оно имеет” особенно актуальна при присвоении значения таким словам, как прилагательные или глаголы, семантическая коннотация которых сильно зависит от контекста.

Пример. Рассмотрим простой фрагмент английского языка, состоящий из существительных и глаголов. Зафиксируем n для типа существительных и s для типа предложений. Пусть C — свободная прегруппа, порожденная n и s. В C существительному будет присвоен тип n, а переходному глаголу будет присвоен тип $n^r s n^l$, поскольку он создаст предложение, если будет дополнен существительными слева и справа. Теперь, учитывая такие существительные, как “Алиса” и “Боб”, и возвратные глаголы, такие как “любит” и “ненавидит”, грамматичность предложения, такого как “Алиса ненавидит Боба”, подтверждается тем фактом, что

$$n n^r s n^l n \leqslant s$$

в свободной прегруппе.

Сильный моноидальный функтор $F : C \to FVect_R$ полностью определяется тем, куда он отправляет порождающие n и s. Векторные пространства $F(n)$ и $F(s)$ называются пространством существительных и пространством предложений, и их выбор является вопросом лингвистического моделирования. Стандартный подход состоит в том, чтобы выбрать большой набор из базовых слов, скажем, из 1000 (или столько, сколько может обработать ваша реализация разреженной матрицы), и взять $F(n) = R^{1000}$. Выбор $F(s)$ не совсем очевиден, но

$F(s) = R^2$ является распространенным выбором, при этом стандартные базисные векторы интерпретируются как “true” и “false”.

Учитывая грамматический разбор $nn^r sn^l n \leqslant s$, мы автоматически получаем линейное отображение

$$F(nn^r sn^l n) : F(n) \otimes F(n) \otimes F(s) \otimes F(n) \otimes F(n) \to F(s)$$

задается соответствующими тензорными сокращениями.

Последний ингредиент, который нам нужен — это словесные векторы. Нам нужно выбрать векторы [[Алиса]], [[Боб]]∈F(n) и [[любит]]$\in F(n) \otimes F(s) \otimes F(n)$. Выбор этих векторов также является вопросом лингвистики, но общая идея состоит в том, чтобы подсчитать, как часто Алиса (например) появляется в корпусе (например, в полном тексте Википедии) рядом с каждым из выбранных базовых слов.

Наконец, мы получаем предложение-вектор

$$F(nn^r sn^l n)([[\text{Алиса}]] \otimes [[\text{любит}]] \otimes [[\text{Боб}]]) \in F(s)$$

11.4 Развитие идеи

Категориально-композициональная дистрибутивная (DisCoCat) модель значения, разработанная в [3], была успешной в моделировании различных аспектов значения. Однако она не позволяет моделировать тот факт, что язык может меняться. Брэдли и др. [1] предлагают подход к DisCoCat, который позволяет представлять языковые модели и переводы между ними, что дает возможность описывать переводы с одного языка на другой или изменения внутри одного языка. Для того чтобы дать такое категориальное описание, авторы сначала вводят некоторые предварительные понятия.

Вместо прегруппы в качестве категории грамматики, Брэдли и др. используют свободную компактную замкнутую категорию $J = C(B)$, порожденную над множеством типов B.

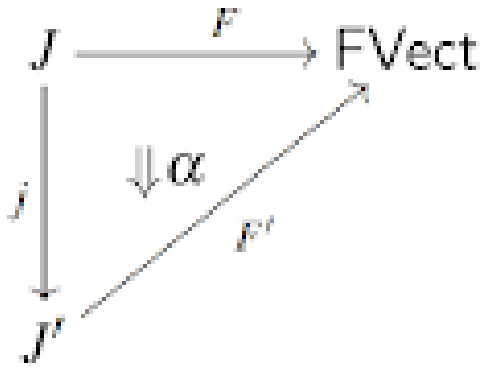
Определение 3.1. Пусть J — категория, свободно моноидальная на некотором множестве грамматических типов. *Дистрибутивная категориальная язы-*

ковая модель или, сокращенно, языковая модель — это сильный моноидальный функтор

$$F : (J,-) \to (FVect,\otimes).$$

Категориальная модель оказалась успешной в ряде задач обработки естественного языка [5], [8], и достаточно гибкой, чтобы ее можно было расширить для анализа неоднозначности [20] и изменения семантической категории [12], [25]. Дистрибутивные категориальные языковые модели не отражают всего, что касается конкретного языка. На самом деле существует множество возможных категориальных моделей языка для одного и того же языка, и между ними существует понятие перевода.

Определение 3.2. Перевод $T = (j,\alpha)$ из языковой модели $F : J \to FVect$ в языковую модель $F' : J' \to FVect$ — это моноидальный функтор $j : J \to J'$ и моноидальное естественное преобразование $\alpha : F \to F' \circ j$. Наглядно, (j,α) — это следующая 2-ячейка



При наличии другой языковой модели $F'' : J'' \to FVect$ и перевода $T' = (j',\alpha')$ составной перевод вычисляется точечно. То есть, $T' \circ T$ — это перевод $(j' \circ j,\alpha' \circ \alpha)$, где $\alpha' \circ \alpha$ — вертикальный композит естественных преобразований α' и α.

Определение 3.3. Пусть DisCoCat — категория с дистрибутивными категориальными моделями языка в качестве объектов, переводами в качестве морфизмов и правилом композиции, описанным выше. Эта категория позволяет определить способы трансляции между языками. Наиболее очевидным применением этого является перевод между двумя языками, такими как английский и испанский. Брэдли и др. предлагают объединение представления продукци-

онного пространства языковой модели из [3] и векторного представления из [6]. Это позволяет им формализовать понятие лексикона в разделе 3.3, которые ранее были лишь эскизно определены в рамках DisCoCat.

Определение 3.4. Пусть F — категориальная модель языка и пусть W – конечное множество слов, рассматриваемое как дискретная категория. Тогда лексикон для F — это функтор $l : W \to PS(F)$. Это соответствует функции от W к объектам PS(F).

Лексиконы могут быть расширены на произвольные фразы в множестве слов W. Фразы — это конечные последовательности слов $v_1 \dots v_n \in W*$, где $W*$ — свободный моноид на W. Функция l присваивает каждому $v_i \in W$ пару (g_i, v_i), соответствующую его грамматическому типу g и его семантическому значению $v_i \in F(g_i)$. Поскольку $W*$ свободно, это определяет уникальный объект в PS(F):

$$(g, v) := \otimes nl(v_i) = (g_1, v_1) \otimes \dots \otimes (g_n, v_n) = (g_1 \dots g_n, v_1 \otimes \dots \otimes v_n),$$

где g_i — грамматический тип v_i , а v_i — семантическое значение v_i для $i \in \{1, \dots, n\}$. Расширение l на $W*$ будем обозначать через $l* : W* \to PS(F)$.

Затем авторы показывают, как построить словарь между двумя лексиконами, и приводят пример, показывающий, как переводы могут быть использованы для моделирования обновления или эволюции композициональной дистрибутивной модели значения. В последнем разделе работы Брэдли и др. дают конкретное предложение по автоматизированному переводу между корпусами на английском и испанском языках.

11.5 Практическое применение

4.1. Библиотека DiscoPy DisCoPy [7] — это набор инструментов для вычислений с моноидальными категориями. Диаграммы являются основной структурой данных DisCoPy, они генерируются с помощью следующей грамматики

diagram ::= Box(name, dom=type, cod=type) | diagram @ diagram | diagram » diagram | Id(type)

type ::= Ty(name) | type.l | type.r | type @ type | Ty()

В частности, DisCoPy может отображать грамматическую структуру предложений естественного языка, закодированных как сокращения в грамматике прегрупп (см. введение в [13]).

from discopy import grammar, Word

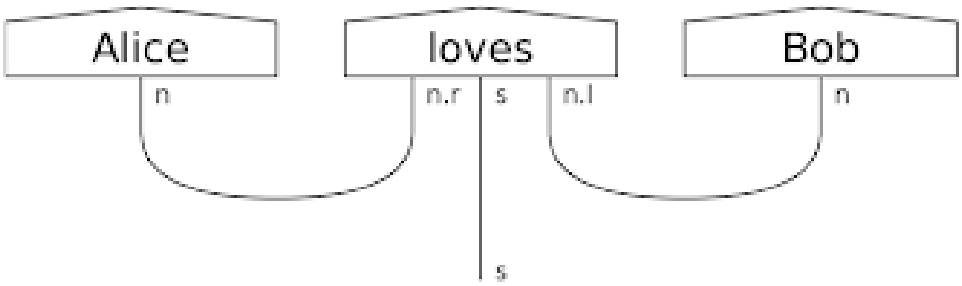
s, n = Ty('s'), Ty('n')

Alice, Bob = Word('Alice', n), Word('Bob', n)

loves = Word('loves', n.r @ s @ n.l)

sentence = Alice @ loves @ Bob » Cup(n, n.r) @ Id(s) @ Cup(n.l, n)

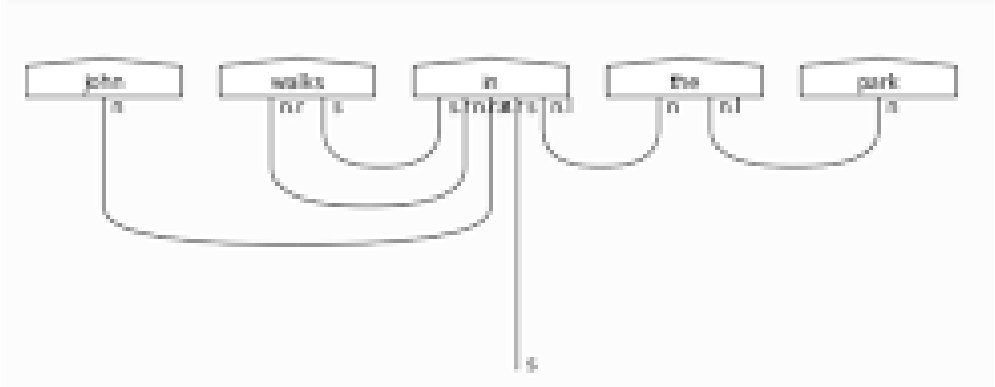
grammar.draw(sentence, path='docs/static/imgs/alice-loves-bob.png', fontsize=20, fontsizetypes=12) При выполнении кода, указанного выше, мы получим следующий результат:



4.2. Библиотека lambeq lambeq [23] — это модульная расширяемая высокоуровневая библиотека Python с открытым исходным кодом для экспериментальной квантовой обработки естественного языка (QNLP), созданная командой QNLP Cambridge Quantum. На высоком уровне библиотека позволяет преобразовывать любое предложение в квантовую схему на основе заданной композициональной модели и определенной параметризации, а также облегчает обучение как квантовым, так и классическим NLP-экспериментам.

Чтобы получить DisCoCat-подобный вывод, мы сначала используем BobcatParser класс из text2diagram пакета, который, в свою очередь, вызывает синтаксический анализатор, получает вывод комбинаторную категориальную грамматику для предложения и преобразует его в строковую диаграмму. В приведенном ниже коде используется парсер Bobcat по умолчанию, чтобы создать диаграмму строк для предложения «Джон гуляет в парке».

```
from lambeq import BobcatParser
from discopy import grammar
sentence = 'John walks in the park'
# Parse the sentence and convert it into a string diagram
parser = BobcatParser(verbose='suppress')
diagram = parser.sentence2diagram(sentence)
grammar.draw(diagram, figsize=(14,3), fontsize=12)
```



Таким образом, существующие реализации модели также связывают дистрибутивную семантику и грамматики прегрупп, позволяя строить интерпретируемые визуализации.

11.6 Заключение

Категориально-композициональная дистрибутивная (DisCoCat) модель значения, разработанная в [3], оказалась успешной в моделировании различных аспектов значения. Коеке, Садрзаде и Кларк [3] заложили математический фундамент для новой области композиционально-дистрибутивных моделей смысла в сфере компьютерной и математической лингвистики, с приложениями к обработке языка, информационному поиску, искусственному интеллекту и в концептуальном плане к философии языка. Они представили структуру, в которой композициональная структура прегрупп поднималась бы до уровня приписывания смысла предложениям и их составляющим, или, что то же самое, где структура приписывания смысла словам сопровождается механизмом, позволяющим вычислять смысл предложения. Авторы [1] развивают подход к DisCoCat, ко-

торый позволяет представлять языковые модели и переводы между ними, что дает возможность описывать переводы с одного языка на другой или изменения внутри одного языка. Объединение представления пространства продуктов, данное в [3], и функционального описания в [6] позволяет рассматривать язык как каталог значений. Формализация понятия лексикона в DisCoCat дает возможность построить словарь значений между двумя лексиконами. Все это делается в рамках моноидальных категорий. Брэдли и др. привели примеры применения своих методов и конкретные предложения по композициональному переводу.

11.7 Список литературы

1. Bradley T. D. et al. Translating and Evolving: Towards a model of language change in DisCoCat //arXiv preprint arXiv:1811.11041. – 2018.
2. Categorical compositional distributional semantics // Nlab URL: https://ncatlab.org/nlab/show/ categorical+ compositional+ distributional+ semantics (дата обращения: 30.11.2022).
3. Coecke B., Sadrzadeh M., Clark S. Mathematical foundations for a compositional distributional model of meaning //arXiv preprint arXiv:1003.4394. – 2010.
4. De Felice, Giovanni; Meichanetzidis, Konstantinos; Toumi, Alexis (2020-09-15). "Functorial Question Answering". Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. 323: 84–94. arXiv:1905.07408. doi:10.4204/EPTCS.323.6. ISSN 2075-2180. S2CID 195874109
5. Dimitri Kartsaklis and Mehrnoosh Sadrzadeh (2013): Prior disambiguation of word tensors for constructing sentence vectors. In: Proceedings of the 2013 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, pp. 1590–1601
6. Dimitri Kartsaklis, Mehrnoosh Sadrzadeh, Stephen Pulman and Bob Coecke (2013): Reasoning about meaning in natural language with compact closed categories and Frobenius algebras. Logic and Algebraic Structures in Quantum Computing, p. 199, doi:10.1017/CBO9781139519687.011.

7. Discopy 0.4.3 // pypi.org URL: https://pypi.org/project/discopy/ (дата обращения: 02.12.2022).
8. Edward Grefenstette and Mehrnoosh Sadrzadeh (2011): Experimental support for a categorical compositional distributional model of meaning. In: Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, Association for Computational Linguistics, pp. 1394–1404.
9. Jean Maillard, Stephen Clark and Edward Grefenstette (2014): A type-driven tensor-based semantics for CCG. In: Proceedings of the EACL 2014 Workshop on Type Theory and Natural Language Semantics (TTNLS), pp. 46–54.
10. Jianfeng Gao, Xiaodong He, Wen-tau Yih and Li Deng (2014): Learning continuous phrase representations for translation modeling. In: Proceedings of the 52nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers), 1, pp. 699–709, doi:10.3115/v1/P14-1066.
11. J. Lambek and C. Casadio, editors. Computational algebraic approaches to natural language. Polimetrica, Milan, 2006.
12. Joe Bolt, Bob Coecke, Fabrizio Genovese, Martha Lewis, Dan Marsden and Robin Piedeleu (2017): Interacting Conceptual Spaces I: Grammatical Composition of Concepts. arXiv preprint arXiv:1703.08314
13. J. Lambek. From Word to Sentence. Polimetrica, 2008.
14. J. Lambek. The mathematics of sentence structure. American Mathematics Monthly, 65, 1958.
15. M. Sadrzadeh. Pregroup analysis of Persian sentences. In C. Casadio and J. Lambek, editors, Computational algebraic approaches to natural language. Polimetrica, 2006.
16. Marco Baroni and Roberto Zamparelli (2010): Nouns are vectors, adjectives are matrices: Representing adjective-noun constructions in semantic space. In: Proceedings of the 2010 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, Association for Computational Linguistics, pp. 1183–1193.
17. Preller, Anne (2014-12-27). "From Logical to Distributional Models". Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. 171: 113–131.

arXiv:1412.8527. doi:10.4204/EPTCS.171.11. ISSN 2075-2180. S2CID 18631267

18. Preller, Anne; Lambek, Joachim (2007-01-18). "Free Compact 2-Categories". Mathematical Structures in Computer Science. 17 (doi: 10.1017/S0960129506005901): 309. doi:10.1017/S0960129506005901. S2CID 10763735
19. Preller, Anne; Mehrnoosh Sadrzadeh (2011). "Semantic Vector Models and Functional Models for Pregroup Grammars"(PDF). Journal of Logic, Language and Information. 20 (4): 419–443.
20. Robin Piedeleu, Dimitri Kartsaklis, Bob Coecke and Mehrnoosh Sadrzadeh (2015): Open system categorical quantum semantics in natural language processing. arXiv preprint arXiv:1502.00831, doi:10.4230/LIPIcs.CALCO.2015.270.
21. Selinger, Peter (2011). "A survey of graphical languages for monoidal categories". New Structures for Physics. Lecture Notes in Physics. Vol. 813. Springer. pp. 289–233. arXiv:0908.3347. Bibcode:2009arXiv0908.3347S
22. H. Schuetze. Automatic word sense discrimination. Computational Linguistics, 24(1):97–123, 1998.
23. Step 1. Sentence input – lambeq 0.2.7 documentation // cqcl.github.io URL: https://cqcl.github.io/lambeq/tutorials/sentence-input.html (дата обращения: 02.12.2022).
24. Tomas Mikolov, Quoc V Le and Ilya Sutskever (2013): Exploiting similarities among languages for machine translation. arXiv preprint arXiv:1309.4168.
25. Yaared Al-Mehairi, Bob Coecke and Martha Lewis (2016): Categorical Compositional Cognition. In: International Symposium on Quantum Interaction, Springer, pp. 122–134, doi:10.1007/978-3-319-52289-0 10.

Дополнение

Страницы специалистов по математической и компьютерной лингвистике:

Barbara Partee: https://people.umass.edu/partee/
Larry Moss: https://iulg.sitehost.iu.edu/moss/
Johan van Benthem: https://staff.fnwi.uva.nl/j.vanbenthem/
Mehrnoosh Sadrzadeh: https://msadrzadeh.com/
Bob Coecke: https://www.cs.ox.ac.uk/people/bob.coecke/
Yiannis Moschovakis: https://www.math.ucla.edu/~ynm/
Roussanka Loukanova: https://staff.math.su.se/rloukanova/
Richard Moot: https://richardmoot.github.io/
Annie Foret: http://www.irisa.fr/prive/foret/
Christian Retore: https://www.lirmm.fr/~retore/
Елена Драгалина-Черная: https://www.hse.ru/org/persons/66491
Леонид Иомдин: http://iitp.ru/ru/users/59.htm
Борис Иомдин: https://ruslang.ru/publica/iomdin
Мати Пентус: https://istina.msu.ru/profile/mpentus/