УДК 510.5

О степенях представимости моделей. I[1]

А.И. СТУКАЧЕВ

В данной работе рассматриваются представления алгебраических систем в допустимых множествах, а также различные отношения эффективной сводимости между системами. Основным объектом исследования являются полурешетки степеней Σ-определимости (полурешетки Ершова), которые можно рассматривать, с одной стороны, как естественное обобщение понятия оракульной вычислимости, когда в качестве оракула (а также в качестве результата вычислений) выступает сложный абстрактный объект – алгебраическая система (данный подход можно рассматривать как теоретическую модель объектно-ориентированного программирования). С другой стороны, понятие Σ-определимости алгебраической системы в допустимом множестве является эффективизацией одного из основных понятий теории моделей – понятия интерпретируемости одной системы в другой, и при этом обобщает понятие конструктивизируемости алгебраической системы на натуральных числах. В работе показано, что полурешетка степеней Σ-определимости счетных систем хорошо согласована с полурешетками T- и e-степеней подмножеств натуральных чисел. Известное в теории конструктивных моделей понятие системы, имеющей степень, является лишь частичной характеристикой сложности, поскольку далеко не все системы имеют степень. В отличие от этого, степени Σ-определимости, а также рассматриваемые в работе степени представимости относительно различных равномерных и неравномерных эффективных сводимостей, являются естественными характеристиками сложности, определенными для любой алгебраической системы. В работе также предпринята попытка исследования свойств систем, наследуемых при различных эффективных сводимостях, а также исследования зависимости степеней представимости от выбора различных допустимых множеств в качестве областей для представлений.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 05-0100481 и 06-0104002, Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых кандидатов наук и их научных руководителей, проект МК-1239.2005.1, а также INTAS, проект INTAS YSF 04-83-3310.

1 Полурешетки степеней Σ-определимости и степеней представимости

Большинство обозначений, а также терминология, используемые в данном обзоре, являются стандартными и соответствуют [1, 2]. Носитель алгебраической системы $\mathfrak{M}$ обозначается как M, а ее сигнатура как $\sigma_{\mathfrak{M}}$. Всюду далее рассматриваются системы с вычислимыми сигнатурами. Для произвольной алгебраической системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\sigma_{\mathfrak{M}} = \langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \ldots\rangle$, *наследственно конечная надстройка* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, являющаяся наименьшим допустимым множеством, содержащим M как подмножество, определяется как система сигнатуры $\sigma'_{\mathfrak{M}} = \sigma_{\mathfrak{M}} \cup \{U^1, \in^2, \mathrm{Sat}^2\}$, носителем которой является множество $HF(M) = \bigcup_{n\in\omega} H_n(M)$, где $H_0(M) = M$, $H_{n+1}(M) = H_n(M) \cup \{a | a \subseteq H_n(M), \mathrm{card}(a) < \omega\}$, предикат U выделяет множество M (элементы которого называются праэлементами), отношение $\in$ интерпретируется стандартным образом, а интерпретацией предиката Sat является множество $\{\langle k, \bar{m}\rangle | \mathfrak{M} \models P_k(\bar{m})\}$. Отметим, что необходимость использования предиката Sat вызвана тем, что, в отличие от стандартных подходов [1, 2], сигнатура $\sigma_{\mathfrak{M}}$ может быть бесконечной. В случае конечной сигнатуры это отличие не является существенным.

В классе формул сигнатуры $\sigma'_{\mathfrak{M}}$ выделяется подкласс Δ_0-*формул*, определяемый как замыкание класса атомарных формул относительно $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ и ограниченных кванторов $\exists x \in y, \forall x \in y$; класс Σ-*формул* определяется как замыкание класса Δ_0-формул относительно $\wedge, \vee, \exists x \in y, \forall x \in y$ и квантора $\exists x$; класс Π-*формул* определяется аналогичным образом: допускается использование квантора $\forall x$ вместо $\exists x$. Отношение на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ называется Σ-*определимым* (Π-*определимым*), если оно определяется соответствующей формулой с параметрами; отношение называется Δ-*определимым*, если оно является одновременно Σ- и Π-определимым.

Пусть, для простоты, $\mathfrak{M}$ – алгебраическая система конечной предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_{k-1}^{n_{k-1}}\rangle$ (данное ограничение не является существенным), и пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество.

Определение 1 (Ю.Л. Ершов [1]). *Система $\mathfrak{M}$ называется Σ-определимой в $\mathbb{A}$, если существуют Σ-формулы*

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, x_1, y), \Psi^*(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Phi_0^*(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \ldots, \Phi_{k-1}(x_0, \ldots, x_{n_{k-1}-1}, y), \Phi_{k-1}^*(x_0, \ldots, x_{n_{k-1}-1}, y)$$

сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и параметр $a \in A$ такие, что, полагая $M_0 \rightleftharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a)$, $\eta \rightleftharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$, имеет место следующее: $M_0 \neq \varnothing$, η – отношение *конгруэнтности на системе*

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0; P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_{k-1}^{\mathfrak{M}_0} \rangle,$$

где $P_i^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_i^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}) \cap M_0^{n_i}$ *для всех* $i < k$, $\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a)$, $\Phi_i^{*\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, a) \cap M_0^{n_i} = M_0^{n_i} \setminus \Phi_i^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1})$ *для всех* $i < k$, *и система* $\mathfrak{M}$ *изоморфна фактор-системе* $\mathfrak{M}_0 / \eta$.

Для алгебраических систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ через $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ будем обозначать тот факт, что $\mathfrak{M}$ является Σ-определимой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Легко проверить, что отношение $\leqslant_\Sigma$ рефлексивно и транзитивно. Для произвольного бесконечного кардинала α через $\mathcal{K}_\alpha$ будем обозначать класс алгебраических систем мощности $\leqslant \alpha$. Определим на $\mathcal{K}_\alpha$ отношение эквивалентности $\equiv_\Sigma$: для $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathcal{K}_\alpha$, $\mathfrak{M} \equiv_\Sigma \mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \leqslant_\Sigma \mathfrak{M}$. Классы эквивалентности по отношению $\equiv_\Sigma$ будем называть *степенями Σ-определимости*. Структура

$$\mathcal{S}_\Sigma(\alpha) = \langle \mathcal{K}_\alpha / \equiv_\Sigma, \leqslant_\Sigma \rangle$$

является верхней полурешеткой с наименьшим элементом, которым является степень, состоящая из конструктивизируемых систем, и, для любых $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathcal{K}_\alpha$, $[\mathfrak{M}]_\Sigma \vee [\mathfrak{N}]_\Sigma = [(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})]_\Sigma$, где $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ – теоретико-модельная пара систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для краткости, полурешетку $\mathcal{S}_\Sigma(\omega)$ будем обозначать через $\mathcal{S}_\Sigma$. Из того, что $\mathrm{card}(\mathcal{K}_\alpha) = 2^\alpha$ и $\mathrm{card}([\mathfrak{M}]_\Sigma) \leqslant \alpha$ для любой $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}_\alpha$, следует, что $\mathrm{card}(\mathcal{S}_\Sigma(\alpha)) = 2^\alpha$ для любого бесконечного кардинала α.

Представлением алгебраической системы $\mathfrak{M}$ в допустимом множестве $\mathbb{A}$ называется всякая алгебраическая система $\mathcal{C}$, для которой $\mathcal{C} \cong \mathfrak{M}$, и носителем $\mathcal{C}$ является подмножество A (отношение $=$ рассматривается как отношение конгруэнтности на $\mathcal{C}$ и может отличаться от нормального отношения равенства на C). В дальнейшем будем отождествлять представление $\mathcal{C}$ (точнее, его атомарную диаграмму) с некоторым подмножеством A, зафиксировав геделевскую нумерацию атомарных формул сигнатуры $\sigma_\mathfrak{M}$.

Определение 2. *Проблемой представимости системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$ называется множество* $\mathrm{Pr}(\mathfrak{M}, \mathbb{A})$, *состоящее из всевозможных представлений $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{Pr}(\mathfrak{M}, \mathbb{A}) = \{\ \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ – } \textit{представление } \mathfrak{M} \textit{ в } \mathbb{A}\ \}.$$

Будем обозначать через $\underline{\mathfrak{M}}$ множество $\mathrm{Pr}(\mathfrak{M}, \mathbb{HF}(\varnothing))$ представлений системы $\mathfrak{M}$ в наименьшем допустимом множестве. Хорошо известно (см.

[2, 1]), что вычислимость (т.е. эффективная определимость) в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ эквивалентна классической вычислимость на натуральных числах.

Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество. Отображение $F : P(A)^n \to P(A)$ $(n \in \omega)$ называется Σ-*оператором* [1], если существует такая Σ-формула $\Phi(x_0, \dots, x_{n-1}, y)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$, что, для любых $S_0, \dots, S_{n-1} \in P(A)$

$$F(S_0, \dots, S_{n-1}) = \{a | \exists a_0, \dots, a_{n-1} \in A(\bigwedge_{i<n} a_i \subseteq S_i \wedge \mathbb{A} \models \Phi(a_0, \dots, a_{n-1}, a))\}.$$

Следующее условие необходимо для обеспечения транзитивности определяемых ниже сводимостей. Оператор $F : P(A) \to P(A)$ *сильно непрерывен в* $S \in P(A)$, если для любого $a \subseteq F(S)$, $a \in A$, существует $a' \subseteq S$, $a' \in A$, такое, что $a \subseteq F(a')$ (данное определение легко обобщается на случай операторов с числом аргументов более 1).

Для оператора $F : P(A)^n \to P(A)$, через $\delta_{\mathrm{c}}(F)$ обозначается множество элементов $P(A)^n$, в которых F сильно непрерывен. Множество $S \in P(A)^n$ называется Σ_*-*множеством*, если $S \in \delta_c(F)$ для любого Σ-оператора $F : P(A)^n \to P(A)$. Легко убедиться, что в допустимом множестве вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ всякое подмножество является Σ_*-множеством. Однако в общем случае это не так: например, в [15] исследовались Σ_*-множества в $\mathbb{HYP}(\mathbb{L})$, где $\mathbb{L}$ – плотный линейный порядок. Даже в этом простейшем случае класс Σ_*-множеств нетривиален.

Пусть $B, C \subseteq A$. Следующие сводимости являются непосредственными обобщениями e- и T-сводимостей на натуральных числах:

1) $B \leqslant_{e\Sigma} C$, если существует одноместный Σ-оператор F, для которого $C \in \delta_c(F)$ и $B = F(C)$;

2) $B \leqslant_{T\Sigma} C$, если существуют двухместные Σ-операторы F_0 и F_1 такие, что $\langle C, A \setminus C\rangle \in \delta_c(F_0) \cap \delta_c(F_1)$, и $B = F_0(C, A \setminus C)$, $A \setminus B = F_1(C, A \setminus C)$.

Определение 3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– алгебраическая система,* $\mathbb{A}$ *– допустимое множество с условием* $\mathrm{card}(A) \geqslant \mathrm{card}(M)$. *Будем говорить, что* $\mathfrak{M}$ *имеет степень (e-степень)* $\mathbf{d}$ *в* $\mathbb{A}$, *если* $\mathbf{d}$ *– наименьшая степень в множестве* $T\Sigma$*-степеней (*$e\Sigma$*-степеней) всевозможных представлений* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathbb{A}$*:* $\mathbf{d} = \min\{\deg_{T_\Sigma}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathrm{Pr}(\mathfrak{M}, \mathbb{A})\}$ *(соотв.,* $\mathbf{d} = \min\{\deg_{e\Sigma}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathrm{Pr}(\mathfrak{M}, \mathbb{A})\}$*).*

Будем говорить, что счетная система $\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень), если $\mathfrak{M}$ имеет степень в наименьшем допустимом множестве $\mathbb{HF}(\varnothing)$. Впервые понятие системы, имеющей степень, было введено Л. Рихтер в [19], причем рассматривались только T-степени, и под представлениями понимались только представления на натуральных числах с носителем ω.

Однако, как легко убедиться, для любой системы $\mathfrak{M}$ и любого представления $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ существует представление $\mathcal{C}' \in \underline{\mathfrak{M}}$ с носителем ω такое, что $\mathcal{C}' \leqslant_{T\Sigma} \mathcal{C}$. Поэтому данное выше определение для случая представлений в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ эквивалентно определению из [19].

Используя классический результат об эквивалентности $\forall$-вычислимости и $\exists$-определимости, впервые отмеченный Д. Лакомбом [6], доказанный Я. Московакисом [7], впоследствии переоткрытый и обобщенный Дж. Найт [5] (ниже будет доказано еще одно обобщение этого результата (теорема 6) для случая представлений в надстройках над счетными системами), может быть доказана

Теорема 1. *Для счетной системы $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень) тогда и только тогда, когда некоторое представление $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ является Δ-определимым (Σ-определимым) в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Существуют естественные вложения полурешетки $\mathcal{D}$ тьюринговых степеней и полурешетки $\mathcal{D}_e$ степеней перечислимости в полурешетку $\mathcal{S}_\Sigma$ (а значит, и во всякую полурешетку вида $\mathcal{S}_\Sigma(\alpha)$). Определим отображения $i : \mathcal{D} \to \mathcal{S}_\Sigma$ и $j : \mathcal{D}_e \to \mathcal{S}_\Sigma$ следующим образом: для всякой степени $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$, полагаем

$$i(\mathbf{a}) = [\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}]_\Sigma, \text{ где } \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \text{ – произвольная система, имеющая степень } \mathbf{a}.$$

Аналогично, для всякой e-степени $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$, полагаем

$$j(\mathbf{b}) = [\mathfrak{M}_{\mathbf{b}}]_\Sigma, \text{ где } \mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \text{ – произвольная система, имеющая e-степень } \mathbf{b}.$$

Лемма 1. *Отображения i и j определены корректно: для любой (e-)степени* $\mathbf{a}$ *существуют системы, имеющие (e-)степень* $\mathbf{a}$*; кроме того, для любых счетных систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}$ имеет (e-)степень* $\mathbf{a}$ *и $\mathfrak{M} \equiv_\Sigma \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}$ также имеет (e-)степень* $\mathbf{a}$.

Доказательство. Следуя [19], со всяким множеством $A \subseteq \omega$ свяжем абелеву группу $G_A = \bigoplus_{n \in A} \mathbb{Z}_{p_n}$. Легко убедиться, что группа G_A имеет e-степень $[A]_e$, а группа $G_{A \oplus \overline{A}}$ – степень $[A]_T$.

Пусть, например, система $\mathfrak{M}$ имеет e-степень $\mathbf{a}$. Так как $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \leqslant_\Sigma \mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$, и некоторое представление $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то $\mathcal{C}$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Поскольку $\mathfrak{N} \leqslant_\Sigma \mathfrak{M}$, по данному Σ-определению и по представлению $\mathcal{C}$ получаем представление $\mathcal{C}' \in \underline{\mathfrak{N}}$ такое, что $\mathcal{C}' \leqslant_e \mathcal{C}$, а, значит, $\mathcal{C}'$ является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Таким образом, система $\mathfrak{N}$ имеет e-степень, которая не превосходит e-степени системы $\mathfrak{M}$. Аналогичные рассуждения в обратном направлении показывают что данные степени совпадают. □

Отметим, однако, что свойство иметь (e-)степень не замкнуто вниз относительно $\leqslant_\Sigma$. Аналогично лемме 1 может быть доказано

Предложение 1. *Отображения* $i : \mathcal{D} \to \mathcal{S}_\Sigma$ *и* $j : \mathcal{D}_e \to \mathcal{S}_\Sigma$ *являются вложениями, сохраняющими* 0 *и* $\vee$.

Существование вложения $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}_\Sigma$ впервые было отмечено А.Н. Хисамиевым [20]. Кроме того, в работе В. Балевой [8], по существу, доказано, что вложения i и j сохраняют также операцию скачка, если скачком системы $\mathfrak{M}$ считать систему $\mathfrak{M}' = (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \Sigma\text{-Sat}^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})})$.

Понятие массовой проблемы было введено Ю.Т. Медведевым в [12]. Согласно этому определению, *массовой проблемой* называется произвольное множество всюду определенных функций из ω в ω. Интуитивно, массовые проблемы можно понимать как множества "решений"(в виде функций из ω в ω) некоторых "проблем". Ниже приведены некоторые примеры массовых проблем, соответствующих известным проблемам (задачам) теории вычислимости:

1) *проблемой разрешимости* множества $A \subseteq \omega$ называется массовая проблема $\mathcal{S}_A = \{\chi_A\}$, где χ_A – характеристическая функция множества A;

2) *проблемой перечислимости* множества $A \subseteq \omega$ называется массовая проблема $\mathcal{E}_A = \{f : \omega \to \omega \mid \mathrm{rng}(f) = A\}$.

3) *проблемой отделимости* множеств $A, B \subseteq \omega$ называется массовая проблема $\mathcal{S}ep_{A,B} = \{f : \omega \to 2 \mid f^{-1}(0) \supseteq A,\ f^{-1}(1) \supseteq B\}$.

В данной работе рассматривается еще один класс массовых проблем – проблем представимости – соответствующий основной проблеме (задаче) теории вычислимых (конструктивных) моделей – изучению различных представлений алгебраических систем на натуральных числах. Действительно, проблема представимости системы в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ эквивалентна массовой проблеме в смысле [12]. А именно, для системы $\mathfrak{M}$ рассмотрим множество всевозможных представлений $\mathfrak{M}$ на натуральных числах. Множество характеристических функций этих представлений образует массовую проблему $\{\ \chi_{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C}$ – представление $\mathfrak{M}\ \}$, которая эквивалентна проблеме представимости $\underline{\mathfrak{M}}$ в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ относительно определяемой ниже сводимости по Медведеву.

Отметим, что для любого представления $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ его носитель C эффективно определяется по (точнее, сводится по Тьюрингу к) $\mathcal{C}$, поскольку $c \in C$ тогда и только тогда, когда $(c = c) \in \mathcal{C}$.

Для системы $\mathfrak{M}$ можно также определить множество

$$\{\, \chi^*_{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C} \text{ – представление } \mathfrak{M} \,\}$$

частичных характеристических функций всевозможных представлений $\mathfrak{M}$ на натуральных числах (напомним, что, для произвольного $A \subseteq \omega$, $\chi^*_A(n) = 0$ если $n \in A$, и $\chi^*_A(n)$ не определено в противном случае). Множества такого вида являются частичными массовыми проблемами в смысле Е.З. Дымент [14], причем частичная проблем такого вида снова эквивалентна проблеме представимости $\underline{\mathfrak{M}}$ в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ относительно определяемой ниже сводимости по Дымент. Проблемы такого вида, с использованием другой терминологии, рассматривались в [18] для классов конечных систем.

В [12] также было введено отношение сводимости на классе массовых проблем. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – массовые проблемы, то говорят, что $\mathcal{A}$ *сводится* к $\mathcal{B}$ (обозначается $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$), если существует рекурсивный оператор Ψ такой, что $\Psi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$, то есть $\Psi(f) \in \mathcal{A}$ для всех $f \in \mathcal{B}$. Интуитивно, $\mathcal{A}$ сводится к $\mathcal{B}$, если существует равномерная эффективная процедура, которая по любому "решению"из $\mathcal{B}$ выдает некоторое "решение"из $\mathcal{A}$.

Отношение эквивалентности $\equiv$ на массовых проблемах определяется по предпорядку $\leqslant$ стандартным образом: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ если $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{A}$. Классы эквивалентности массовых проблем по отношению $\equiv$ (называемые *степенями трудности*) вместе с отношением сводимости $\leqslant$ образуют дистрибутивную решетку (более того, алгебру Брауэра), известную как *решетка Медведева* [12].

Имеется еще одно важное отношение сводимости на классе массовых проблем, введенное А.А. Мучником в [13]. А именно, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – массовые проблемы, то говорят, что $\mathcal{A}$ *слабо сводится* к $\mathcal{B}$ (обозначается $\mathcal{A} \leqslant_w \mathcal{B}$), если для всякой $f \in \mathcal{B}$ существует рекурсивный оператор Ψ такой, что $\Psi(f) \in \mathcal{A}$. Таким образом, слабая сводимость (будем называть ее также сводимостью по Мучнику) получается из сильной сводимости (сводимости по Медведеву) отказом от требования равномерности. Отношение эквивалентности $\equiv_w$ на массовых проблемах определяется по $\leqslant_w$ стандартным образом; классы эквивалентности по отношению $\equiv_w$ вместе с отношением сводимости $\leqslant_w$ также образуют дистрибутивную решетку, известную как *решетка Мучника* [13].

Напомним определение еще одно важное определение. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – частичные массовые проблемы, то говорят, что $\mathcal{A}$ *сводится по перечислимости* к $\mathcal{B}$ (обозначается $\mathcal{A} \leqslant_e \mathcal{B}$), если существует частичный рекурсивный оператор Ψ такой, что $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{dom}(\Psi)$ и $\Psi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$. *Решетка*

Дымент состоит из классов эквивалетности частичных массовых проблем по отношению $\equiv_e$ и отношения сводимости $\leqslant_e$. Как и для сводимости по Медведеву, для сводимости по перечислимости на частичных массовых проблемах можно определить ее слабый (неравномерный) вариант $\leqslant_{ew}$.

Имеется синтаксическое описание этих сводимостей на множестве проблем перечислимости, вытекающее из известного результата, полученного А. Сэлманом [21] и впоследствии переоткрытого М. Розинас [22]: для любых $A, B \subseteq \omega$, $A \leqslant_e B$ тогда и только тогда, когда для любого $X \subseteq \omega$, из того, что B является X-вычислимым следует, что A является X-вычислимым. Из этого результата непосредственно вытекает, что для любых $A, B \subseteq \omega$,

$$\mathcal{E}_A \leqslant_w \mathcal{E}_B \iff \mathcal{E}_A \leqslant \mathcal{E}_B \iff A \leqslant_e B.$$

Помимо синтаксического описания, отсюда также вытекает, что сводимости по Медведеву и по Мучнику совпадают на множестве проблем перечислимости (этот факт отмечался также в [24]).

Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество. Определим равномерные сводимости на семействах подмножеств A, являющиеся непосредственным обобщением сводимостей по Медведеву, Мучнику и Дымент на массовых проблемах [4]. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq P(A)$, тогда

1) *$\mathcal{X}$ сводится по Медведеву к $\mathcal{Y}$* ($\mathcal{X} \leqslant \mathcal{Y}$), если существуют двухместные Σ-операторы F_0 и F_1 такие, что, для всех $Y \in \mathcal{Y}$, $\langle Y, A \setminus Y\rangle \in \delta_c(F_0) \cap \delta_c(F_1)$ и, для некоторого $X \in \mathcal{X}$, $X = F_0(Y, A \setminus Y)$ и $A \setminus X = F_1(Y, A \setminus Y)$;

2) *$\mathcal{X}$ сводится по Дымент к $\mathcal{Y}$* ($\mathcal{X} \leqslant_e \mathcal{Y}$), если существует одноместный Σ-оператор F такой, что, для всех $Y \in \mathcal{Y}$, $Y \in \delta_c(F)$, и $F(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$;

3) *$\mathcal{X}$ сводится по Мучнику к $\mathcal{Y}$* ($\mathcal{X} \leqslant_w \mathcal{Y}$), если для всякого $Y \in \mathcal{Y}$ существуют двухместные Σ-операторы F_0 и F_1 такие, что $\langle Y, A \setminus Y\rangle \in \delta_c(F_0) \cap \delta_c(F_1)$ и, для некоторого $X \in \mathcal{X}$, $X = F_0(Y, A \setminus Y)$ и $A \setminus X = F_1(Y, A \setminus Y)$;

4) *$\mathcal{X}$ слабо сводится по Дымент к $\mathcal{Y}$* ($\mathcal{X} \leqslant_e \mathcal{Y}$), если для всякого $Y \in \mathcal{Y}$ существует одноместный Σ-оператор F такой, что $Y \in \delta_c(F)$ и $F(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$.

Для допустимого множества $\mathbb{A}$ и символа $* \in \{e, \ , w, ew\}$, через $\mathcal{M}_*(\mathbb{A})$ будем обозначать структуру степеней $\langle P(P(A))/ \equiv_*, \leqslant_*\rangle$. Для краткости будем использовать запись $\mathcal{M}_*$ вместо $\mathcal{M}_*(\mathbb{HF}(\varnothing))$. Все структуры вида $\mathcal{M}_*(\mathbb{A})$ являются решетками с 0 и 1, причем $\mathcal{M}, \mathcal{M}_e, \mathcal{M}_w$ изоморфны решеткам Медведева, Дымент и Мучника соответственно.

Для счетной алгебраической системы $\mathfrak{M}$ рассмотрим нижние конусы, состоящие из систем, эффективно сводящихся к $\mathfrak{M}$:
$\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \leqslant_\Sigma \mathfrak{M}\}$,
$\mathcal{K}_e(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \underline{\mathfrak{N}} \leqslant_e \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$ для некоторого $\bar{m} \in M^{<\omega}\}$,
$\mathcal{K}(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \underline{\mathfrak{N}} \leqslant \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$ для некоторого $\bar{m} \in M^{<\omega}\}$,
$\mathcal{K}_{ew}(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \underline{\mathfrak{N}} \leqslant_{ew} \underline{\mathfrak{M}}\}$, $\mathcal{K}_w(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \underline{\mathfrak{N}} \leqslant_w \underline{\mathfrak{M}}\}$.

Теорема 2. *Для любой системы $\mathfrak{M}$ имеют место включения*

$$\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_e(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_w(\mathfrak{M}),$$

и $\mathcal{K}_e(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_{ew}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_w(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Для доказательства включения $\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_e(\mathfrak{M})$ предположим, что некоторая система $\mathfrak{N}$ Δ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ с помощью некоторой вычислимой последовательности Σ-формул Γ с параметрами $\bar{m} \in M^{<\omega}$ (не уменьшая общности можно считать, что все параметры являются элементами M). Тогда Σ-оператор, осуществляющий сведение $\underline{\mathfrak{N}} \leqslant_e \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$, может быть построен по Γ, поскольку для подтверждения истинности Σ-формулы в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \bar{m})$ достаточно некоторого конечного подмножества атомарной диаграммы $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ и некоторого натурального числа.

Для доказательства включения $\mathcal{K}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_w(\mathfrak{M})$ заметим, что, если $\underline{\mathfrak{N}} \leqslant \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$, то для любого представления системы $\mathfrak{M}$, выделяя в нем произвольный набор-представление для $\bar{m}$ и применяя s-m-n-теорему к Σ-оператору, осуществляющему данное сведение, мы получаем Σ-оператор, преобразующий это представление в представление системы $\mathfrak{N}$.

Из оставшихся неочевидным является только включение $\mathcal{K}_e(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Пусть, например, $\underline{\mathfrak{N}} \leqslant_e \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$ посредством одноместного Σ-оператора Ψ. По оператору Ψ построим двухместные Σ-операторы Ψ_1 и Ψ_2 такие, что для любого $\mathcal{C} \in \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$ имеет место $\Psi_1(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}'$, $\Psi_1(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}'$ для некоторого $\mathcal{C}' \in \underline{\mathfrak{N}}$. Для этого опишем эффективные процедуры, которые преобразуют всякое представление $\mathcal{C} \in \underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})}$ с носителем ω в представление $\mathcal{C}'$ системы $\mathfrak{N}$ и его дополнение. Будем по шагам определять носитель системы $\mathcal{C}'$ совместно с биекцией π, отображающей этот носитель на носитель представления $\Psi(\mathcal{C})$. А именно, на шаге s определяем подмножество $C_s \supseteq C_{s-1}$ носителя $\mathcal{C}'$ (как обычно, считаем $C_{-1} = \varnothing$) следующим образом: перебираем все числа от 0 до s, не вошедшие в $\pi(C_{s-1})$; помещаем число s в C_s и пару $\langle s, c\rangle$ в π в том и только том случае, если $c \leqslant s, c \notin \pi(C_{s-1})$ – наименьшее число, для которого существует конечное множество $D_k \subseteq f$ с номером $k \leqslant s$ в стандартной нумерации конечных множеств, для которого $(c = c) \in \Psi(D_k)$.

По построенным в результате такой конструкции носителю $C = \cup_{s\in\omega} C_s$ (его дополнение $\overline{C}$ также эффективно определяется этой конструкцией) и биекции π эффективно определяется представление $\mathcal{C}' \in \underline{\mathfrak{N}}$, такое, что π – изоморфизм систем $\Psi(\mathcal{C})$ и $\mathcal{C}'$. $\square$

Для всякого символа $* \in \{e, \ , w, ew\}$ определим отношение $\leqslant_*$ на $\mathcal{K}_\omega$ следующим образом: $\mathfrak{M} \leqslant_* \mathfrak{N}$ в том и только том случае, когда $\mathcal{K}_*(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_*(\mathfrak{N})$, и пусть $\mathcal{S}_* = \langle \mathcal{K}_\omega / \equiv_*, \leqslant_* \rangle$ – соответствующая данному отношению структура степеней представимости.

Теорема 3. *Для всякого* $* \in \{e, \ , w, ew\}$ *структура* $\mathcal{S}_*$ *является верхней полурешеткой с* 0, *причем имеют место следующие вложения* ($\hookrightarrow$) *и гомоморфизмы* ($\rightarrow$)

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}_e \hookrightarrow \mathcal{S}_\Sigma \rightarrow \mathcal{S}_e \rightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{M}.$$

Доказательство. Действительно, для любых систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и любого $* \in \{e, \ , w, ew\}$ имеем $[\mathfrak{M}]_* \vee [\mathfrak{N}]_* = [(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})]_*$, где $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ – теоретико-модельная пара систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Вложение $\mathcal{D}_e \hookrightarrow \mathcal{S}_\Sigma$ доказано в предложении 1. Существование гомоморфизмов $f : \mathcal{S}_\Sigma \rightarrow \mathcal{S}_e$ и $g : \mathcal{S}_e \rightarrow \mathcal{S}$ следует из теоремы 2: полагаем, для любой системы $\mathfrak{M}$, $f([\mathfrak{M}]_\Sigma) = [\mathfrak{M}]_e$ и $g([\mathfrak{M}]_e) = [\mathfrak{M}]$. Вложение $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ тождественное. $\square$

Очевидно, что из (сильной) сводимости по Медведеву всегда следует (слабая) сводимость по Мучнику: для любых массовых проблем $\mathcal{A}, \mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \leqslant_w \mathcal{B}.$$

В [13] А.А. Мучником установлено достаточное условие, при котором эти сводимости совпадают. Напомним его формулировку. Далее под конечными функциями будем понимать функции вида $\tilde{f} : n \rightarrow \omega$, где $n < \omega$. *Интервалом* называется массовая проблема вида

$$\mathcal{I}_{\tilde{f}} = \{f : \omega \rightarrow \omega \mid \tilde{f} \subseteq f\},$$

где $\tilde{f}$ – конечная функция. Топология Бэра на множестве ω^ω определяется выбором множества всех интервалов в качестве базиса открытых множеств. Массовая проблема называется *замкнутой*, если она является замкнутым подмножеством ω^ω в топологии Бэра. Массовая проблема $\mathcal{A}$ называется *однородной*, если для любого интервала $\mathcal{I}_{\tilde{f}}$ с условием $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}_{\tilde{f}} \neq \varnothing$ имеет место сводимость $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}_{\tilde{f}} \leqslant \mathcal{A}$.

Для формулировки следующего условия нужны некоторые предварительные определения. Пусть $\mathcal{A}$ – массовая проблема. Определим условия игры, которую ведут на проблеме $\mathcal{A}$ два игрока, следующим образом. На первом шаге первый игрок выбирает интервал $\mathcal{I}_{\tilde{f}_1}$ такой, что $\mathcal{A}\cap\mathcal{I}_{\tilde{f}_1} \neq \varnothing$. На втором шаге второй игрок выбирает интервал $\mathcal{I}_{\tilde{f}_2}$ такой, что $\mathcal{A}\cap\mathcal{I}_{\tilde{f}_1}\cap\mathcal{I}_{\tilde{f}_2} \neq \varnothing$. На третьем шаге первый игрок выбирает интервал $\mathcal{I}_{\tilde{f}_3}$ такой, что $\mathcal{A}\cap\mathcal{I}_{\tilde{f}_1}\cap\mathcal{I}_{\tilde{f}_2}\cap\mathcal{I}_{\tilde{f}_3} \neq \varnothing$, и так далее. Второй игрок выигрывает игру, если пересечение интервалов $\mathcal{I}_{\tilde{f}_1}, \mathcal{I}_{\tilde{f}_2}, \mathcal{I}_{\tilde{f}_3}, \ldots$ является точкой (функцией) из $\mathcal{A}$. Массовая проблема $\mathcal{A}$ называется *выигрышной* [13] если второй игрок всегда имеет выигрышную стратегию. Теперь можно сформулировать достаточное условие из [13].

Теорема 4 (А.А. Мучник [13])**.** *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – массовые проблемы. Если $\mathcal{A}$ замкнута, а $\mathcal{B}$ однородна и выигрышна, то*

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leqslant_w \mathcal{B}.$$

Конечно, условия теоремы, вследствие общности ситуации, являются довольно сильными. Наиболее сильным является условие замкнутости, которое делает затруднительным применение этого условия во многих конкретных случаях. Например, для проблем перечислимости в [13] было показано, что для любого $A \subseteq \omega$ проблема $\mathcal{E}_A$ однородна и выигрышна, однако является замкнутой только в том случае, когда $\mathrm{card}(A) \leqslant 1$. Несмотря на это, на множестве проблем перечислимости сводимости по Медведеву и по Мучнику совпадают.

В случае проблем представимости в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ также можно естественным образом определить топологию на множестве подмножеств, аналогичную топологии Бэра на множестве ω^ω, зафиксировав некоторую вычислимую нумерацию элементов $\mathbb{HF}(\varnothing)$ натуральными числами, и отождествляя подмножества с характеристическими функциями их прообразов относительно этой нумерации.

Лемма 2. *Всякая проблема представимости является однородной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – алгебраическая система, и пусть $\tilde{f}$ – конечная функция, такая, что $\mathcal{I}_{\tilde{f}} \cap \underline{\mathfrak{M}} \neq \varnothing$. Это означает, что $\tilde{f}$ представляет некоторую конечную часть атомарной диаграммы $\mathfrak{M}$. Опишем эффективную процедуру, равномерно преобразующую всякое представление $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ в представление из $\underline{\mathfrak{M}} \cap \mathcal{I}_{\tilde{f}}$. Перебираем все конечные подмножества атомарной диаграммы $\mathcal{C}$ до тех пор, пока не найдем то, которое изоморфно подмножеству, представленному функцией $\tilde{f}$, а затем применяем к носителю представления $\mathcal{C}$ конечную перестановку, осуществляющую этот изоморфизм. $\square$

Очевидно, что никакая проблема представимости не является открытой. Что касается свойства замкнутости, легко убедиться, что имеет место

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– счетная алгебраическая система предикатной сигнатуры. Проблема* $\underline{\mathfrak{M}}$ *является замкнутой тогда и только тогда, когда для любой счетной системы* $\mathfrak{N}$ *той же сигнатуры, что и* $\mathfrak{M}$*, и такой, что* $\mathfrak{N} \not\cong \mathfrak{M}$*, существует* $\exists$*-предложение* φ *этой сигнатуры, для которого:*

1) $\mathfrak{N} \models \varphi$*;*

2) для любой системы $\mathfrak{N}'$ *той же сигнатуры, что и* $\mathfrak{M}$*, из* $\mathfrak{N}' \models \varphi$ *следует, что* $\mathfrak{N}' \not\cong \mathfrak{M}$*.*

Из данной леммы непосредственно вытекает

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– счетная алгебраическая система предикатной сигнатуры. Проблема* $\underline{\mathfrak{M}}$ *является замкнутой тогда и только тогда, когда* $\mathrm{card}(M) = 1$*.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\underline{\mathfrak{M}}$ не замкнута в случае, когда $\mathrm{card}(M) \geqslant 2$. Рассмотрим собственную конечную подсистему $\mathfrak{M}' \subsetneq \mathfrak{M}$ (которая существует ввиду отсутствия функциональных символов в сигнатуре). Тогда очевидно $\mathfrak{M}' \not\cong \mathfrak{M}$, однако всякое $\exists$-предложение, истинное в $\mathfrak{M}'$, истинно также и в $\mathfrak{M}$. Из леммы 3 вытекает, что $\underline{\mathfrak{M}}$ не является замкнутой. $\Box$

Существуют системы, проблемы представимости которых являются выигрышными: например, имеет место

Лемма 4. *Пусть* $\mathbb{L}$ *– счетный плотный линейный порядок. Проблема представимости* $\underline{\mathbb{L}}$ *является выигрышной тогда и только тогда, когда* $\mathbb{L}$ *не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов.*

Доказательство. Если $\mathbb{L}$ имеет, например, наименьший элемент, то выигрышной стратегией для второго игрока является следующая: на каждом шаге добавлять новый элемент, который меньше всех, уже построенных. Если же $\mathbb{L}$ не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, то выигрышную стратегию имеет первый игрок: на каждом шаге нужно добавлять новые элементы во все имеющиеся пустые интервалы, а также слева и справа. $\Box$

Можно получить полное описание счетных отношений эквивалентности, имеющих выигрышные проблемы представимости.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{E}$ – счетное отношение эквивалентности. Проблема представимости $\underline{\mathcal{E}}$ является выигрышной тогда и только тогда, когда найдется $m_0 \leqslant \omega$ такое, что*

1) в $\mathcal{E}$ число классов из более, чем m_0 элементов, конечно;

2) для каждого $m \leqslant m_0$, в $\mathcal{E}$ число классов из m элементов конечно, за исключением, возможно, числа классов наименьшего размера.

Доказательство. Пусть $\underline{\mathcal{E}}$ – выигрышная проблема. Предположим, что для любого $m_0 \leqslant \omega$ одно из условий (1 или 2) не выполняется. Если существует m_0, такое, что в $\mathcal{E}$ бесконечно много классов из m_0 элементов и существуют классы с меньшим числом элементов, то имеется выигрышная стратегия для второго игрока: на каждом шаге нужно добиваться, чтобы построенный кусок диаграммы не содержал классов размера из менее, чем m_0 элементов. Это противоречит выигрышности проблемы $\underline{\mathcal{E}}$. Поэтому для всех m_0 условие 2 должно быть выполнено, что, вместе с нашим предположением, означает, что для любого $m_0 < \omega$ число классов из более, чем m_0 элементов, бесконечно. Но в этом случае второй игрок также имеет выигрышную стратегию: на шаге s нужно добиваться, чтобы в построенном куске диаграммы все классы эквивалентности имели s различных элементов. Снова получили противоречие с выигрышностью $\underline{\mathcal{E}}$.

Пусть теперь для некоторого $m_0 \leqslant \omega$ выполняются одновременно условия 1 и 2. В этом случае первый игрок имеет выигрышную стратегию. Действительно, число классов конечного размера конечно, за исключением, возможно, классов наименьшего размера. Поэтому, первым же ходом включив в диаграмму эти классы и достаточно большие части бесконечных классов, первый игрок выигрывает вне зависимости от действий второго игрока. □

Лемма 6. *Никакая проблема представимости не является дискретной.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2: во всяком интервале содержится либо не содержится представлений данной системы, либо их бесконечно много. □

Отметим также, что класс проблем представимости обладает следующим свойством: для любой непустой массовой проблемы $\mathcal{A}$ существует проблема представимости $\underline{\mathfrak{M}}$ такая, что $\mathcal{A} \leqslant \underline{\mathfrak{M}}$. Действительно, таким свойством, очевидно, обладает класс проблем разрешимости, и всякая степень разрешимости является степенью представимости.

2 $\forall$-вычислимость и $\exists$-определимость

Следующая теорема является обобщением известного результата об эквивалентности $\forall$-вычислимости и $\exists$-определимости [6, 7].

Теорема 6. *Для любых счетных алгебраических систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, и любого отношения $R \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, следующие условия эквивалентны:*

1) *$R \leqslant_{e\Sigma} \mathcal{C}$ для всякого представления $\mathcal{C}$ системы $\mathfrak{M}$ в допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$;*

2) *R является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.*

Доказательство. Докажем сначала импликацию $2 \Rightarrow 1$.

Пусть отношение $R \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ с помощью некоторой Σ-формулы $\Phi(x, \bar{m}, \bar{n})$ с параметрами $\bar{m} \in M^{<\omega}$, $\bar{n} \in N^{<\omega}$ (не нарушая общности можно считать, что все параметры являются праэлементами). Это значит (см. [1]), что существует последовательность $\{\varphi_{k,i}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_k) \mid k, i \in \omega\}$ $\exists$-формул сигнатуры $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, вычислимая равномерно по k и i, такая, что, для всех $k \in \omega$ и $\bar{r} \in N^{<\omega}$, $\varkappa(k)(\bar{r}) \in R$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \models \varphi_{k,i}(\bar{m}, \bar{n}, \bar{r})$ для некоторого $i \in \omega$. Пусть теперь $\mathcal{C}$ – произвольное представление системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, и пусть $\bar{c} \in C^{<\omega}$ – набор, для которого $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \cong (\mathcal{C}, \bar{c})$. Легко определить в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ Σ-оператор F (используя наборы $\bar{n}$ и $\bar{c}$ в качестве параметров), для которого $F(\mathcal{C}) = R$.

Докажем теперь импликацию из 1 в 2. Для этого опишем общий метод построения представлений систем, использующий метод форсинга в наследственно конечных надстройках, следуя работам [23] и [9]. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – счетные системы с вычислимыми сигнатурами σ_1 и σ_2 соответственно, и пусть сигнатура σ^* получается из (дизъюнктного) объединения $\sigma_1 \cup \sigma_2$ добавлением новых предикатных символов $R^1, U^1, \in^2$, новых функциональных символов $\{\}^1, \cup^2$, и новых константных символов $\varnothing$. Зафиксируем также бинарный предикатный символ P, не входящий в σ^*. Будем обозначать через $\sigma_i(P)$ и $\sigma^*(P)$ сигнатуры, полученные добавлением этого символа к σ_i, $i \in \{1, 2\}$, и σ^* соответственно. Будем также использовать следующие обозначения: для произвольной системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ пусть σ_A обозначает сигнатуру, полученную добавлением к σ новых константных символов для всех элементов из A.

Наряду с представлением, будем использовать другое понятие, аналогичное, но более тесно связанное с рассматриваемой системой. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная система, а $\mathbb{A}$ – допустимое множество. *Копией* системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$ будем называть любое сюръективное отображение $\pi : C \to M$, где $C \subseteq A$ – множество "обозначений"для элементов $\mathfrak{M}$. Всякая копия $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$ однозначно определяет соответствующее представление, но не наоборот. В частности, если $C \subseteq \omega$, то копия π определяет представление $\mathfrak{M}$ на натуральных числах.

В дальнейшем будет рассматриваться только случай, когда $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. В этом случае всякая копия системы $\mathfrak{M}$ является частичной функцией на допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, с множеством значений M. Поскольку технически более удобно использовать вместо частичных функций их графики как отношения, будем считать, что копия системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ является бинарным отношением P в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, для которого $\mathrm{Pr}_1(P) \subseteq \mathbb{HF}(N)$ и $\mathrm{Pr}_2(P) = M$, рассматривая всякий элемент $a \in \mathbb{HF}(N)$, для которого $\langle a, m\rangle \in P$, в качестве "обозначения"для элемента $m \in M$. Будем обозначать через π фунцкию с графиком P. Отношение P связывает с каждым элементом из M непустое множество "обозначений".

Зафиксируем некоторую геделевскую нумерацию $\ulcorner\ \urcorner$ термов и формул сигнатуры $\sigma^*(P)$. *Атомарной диаграммой* копии π называется множество

$$D(\pi) = \{\langle\ulcorner\varphi\urcorner, \bar{a}\rangle | \varphi \text{ – литерал сигн. } \sigma_1, \bar{a} \in HF(N)^{<\omega}, \mathfrak{M} \models \varphi(\pi(\bar{a}))\},$$

где для $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_k\rangle$ $\pi(\bar{a})$ обозначает набор $\langle \pi(a_0), \ldots, \pi(a_k)\rangle$. Копия π называется *вычислимой в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, если $D(\pi)$ – Δ-определимое подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.

Итак, зафиксируем произвольное отношение $R \subseteq HF(N)$. Идея, на котором основано доказательство импликации $1 \Rightarrow 2$, состоит в построении копии π системы $\mathfrak{M}$, для которой система $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}), R, P\rangle$ была бы генерической в смысле [23]. Построим π как объединение последовательности $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \ldots$ конечных функций: $\pi = \cup_{n\in\omega} p_n$. Всякую конечную функцию, которая может быть расширена до копии системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, будем называть *условием вынуждения*, множество всех таких условий будем обозначать через $\mathcal{P}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Отношение *вынуждения* между элементами $\mathcal{P}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ и предложениями сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$, допускающими ограниченные кванторы, определяется стандартным образом [23]. А именно, для условия вынуждения p и предложения Φ определим отношение "p вынуждает Φ"(обозн. $p \Vdash \Phi$) индукцией по сложности предложения Φ:

1) если Φ – атомарное предложение сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$, то $p \Vdash \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{N}), R, p\rangle \models \Phi$;

2) $p \Vdash (\Phi_1 \vee \Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \Phi_1$ или $p \Vdash \Phi_2$;

3) $p \Vdash \exists x \Psi(x)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \Psi(a)$ для некоторого $a \in HF(M, N)$;

4) $p \Vdash \neg\Phi$ тогда и только тогда, когда не существует условия вынуждения $q \supseteq p$, для которого $q \Vdash \Phi$.

Остальные логические связки, а также квантор всеобщности и ограниченные кванторы трактуются как сокращения, поэтому

5) $p \Vdash (\Phi_1 \wedge \Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \neg(\neg\Phi_1 \vee \neg\Phi_2)$, т.е. для любого условия $q \supseteq p$ существуют условия $r_1, r_2 \supseteq q$ такие, что $r_1 \Vdash \Phi_1$ и $r_2 \Vdash \Phi_2$;

6) $p \Vdash (\Phi_1 \to \Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash (\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$;

7) $p \Vdash \forall x\Psi(x)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \neg\exists x\neg\Psi(x)$, т.е. для любого условия $q \supseteq p$ и любого $a \in HF(M,N)$ существует условие $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash \Phi(a)$;

8) $p \Vdash (\exists x \in a)\Phi(x)$ тогда и только тогда, когда $p \vdash \exists x((x \in a) \wedge \Phi(x))$;

9) $p \Vdash (\forall x \in a)\Phi(x))$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \forall x((x \in a) \to \Phi(x))$.

Нам понадобятся следующие утверждения, стандартные для любого построения методом вынуждения.

Лемма 7. *Для любого предложения Φ сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$ и любых $p, q \in \mathcal{P}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, из $p \subseteq q$ и $p \Vdash \Phi$ следует, что $q \Vdash \Phi$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения индукцией по сложности Φ. □

Лемма 8. *Для любого предложения Φ сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$ и любого $p \in \mathcal{P}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ существует $q \supseteq p$, для которого $q \Vdash \Phi$ или $q \Vdash \neg\Phi$.*

Доказательство. Следует из пункта 4 определения отношения вынуждения. Действительно, если не существует $q \supseteq p$ такого, что $q \Vdash \Phi$, то $p \Vdash \neg\Phi$ по определению. □

Лемма 9. *Пусть Φ – предложение сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$. Не существует условия $p \in \mathcal{P}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ такого, что $p \Vdash \Phi$ и $p \Vdash \neg\Phi$.*

Доказательство. Индукция по сложности предложения Φ. В случае когда Φ – атомарное, утверждение очевидно. Предположим, например, что $\Phi = (\Phi_1 \vee \Phi_2)$. Если $p \Vdash \Phi$ и $p \Vdash \neg\Phi$, то $p \Vdash \Phi_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$ и, в то же время, для любого $q \supseteq p$ имеем $q \nVdash \Phi_1$ и $q \nVdash \Phi_1$, противоречие.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Лемма 10. *Существует копия π (называемая генерической) системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, такая, что для любого предложения Φ сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$,*

$$(\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}), R, \pi) \models \Phi \iff \exists p \in \mathcal{P}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) \restriction \pi \ (p \Vdash \Phi).$$

Здесь $\mathcal{P}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) \restriction \pi$ – множество всех условий вынуждения, являющихся подмножествами π.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нумерацию предложений сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$: $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k, \ldots$, а также произвольную нумерацию носителя системы $\mathfrak{M}$: $m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots$. Для любого $k \in \omega$, пусть p_k – некоторое условие вынуждения, для которого $m_k \in \mathrm{rng}(p_k)$, и $p_k \Vdash \Phi_k$ или $p_k \Vdash \neg\Phi_k$ (из предыдущих лемм следует что такое p_k существует). Определим копию π системы $\mathfrak{M}$ как объединение $\cup_{k\in\omega} p_k$. Утверждение леммы легко проверяется индукцией по сложности предложения Φ. □

Лемма 11. *Для всякой формулы $\Phi(x)$ сигнатуры $\sigma^*(P)$ существует формула $\Phi^*(y, x)$ сигнатуры σ^* такая, что для любого $a \in HF(M,N)$ и любого условия вынуждения p,*

$$p \Vdash \Phi(a) \iff \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}), R\rangle \models \Phi^*(p, a).$$

Φ^* строится по Φ с помощью равномерной эффективной процедуры, причем если Φ – $\Delta_0(\Sigma)$-формула, то Φ^* – также $\Delta_0(\Sigma)$-формула.

Доказательство. Индукция по сложности формулы Φ.

1) Φ – атомарная или отрицание атомарной: если $\Phi = P(m, a)$, то $p \Vdash \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle m, a\rangle \in p$; если $\Phi = \neg P(n, a)$, то $p \Vdash \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle m, a'\rangle \in p$ для некоторого $a' \neq a$; во всех остальных случаях $p \Vdash \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}), R\rangle \models \Phi$.

2) $\Phi = (\Phi_1 \vee \Phi_2)$: $\Phi^* = ((\Phi_1)^* \vee (\Phi_2)^*)$.

3) $\Phi = \neg\Phi_0$: по определению отношения вынуждения, $p \Vdash \Phi(a)$ тогда и только тогда, когда $\forall q($"q – условие вынуждения" $\wedge [q \supseteq p \rightarrow \neg(\Phi_0)^*(p, a)])$.

4) $\Phi = \exists y \Phi_0(a, y)$: снова по определению, $p \Vdash \Phi(a)$ тогда и только тогда, когда $\exists b (\Phi'_0)^*(q, \langle a, b\rangle))$, где $\Phi'_0(z) = \Phi_0(\mathrm{Pr}_1(z), \mathrm{Pr}_2(z))$.

□

Итак, докажем импликацию 1 ⇒ 2 теоремы. Пусть $R \leqslant_{e\Sigma} \mathcal{C}$ для любого представления $\mathcal{C}$ системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, и предположим, что R

не является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$. Пусть $\{\Phi_i(x)|i\in\omega\}$ – некоторая нумерация множества Σ-формул сигнатуры $\sigma'_{HF(M,N)}$. Рассмотрим генерическую копию $\pi=\cup_{n\in\omega}p_n$ системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ со следующим дополнительным свойством: для любого $n\in\omega$, p_n удовлетворяет условию $p_n\Vdash(R\neq\Phi_n(x))$. Такая копия существует, поскольку в противном случае было бы $p_{n-1}\Vdash(R=\Phi_n(x))$, и значит, по лемме 11, R было бы Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$. Итак, для представления $\mathcal{C}_\pi$, соответствующего генерической копии π имеем $R\nleqslant_{e\Sigma}\mathcal{C}_\pi$ поскольку иначе R было бы определимо в $\langle\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}),\pi\rangle$ некоторой Σ-формулой Φ_n, что ввиду генеричности π означало бы вынуждаемость соответствующего утверждения, а это противоречит начальному условию. □

Рассмотрим сводимости между проблемами представимости и некоторыми другими типами массовых проблем. Для случая проблем перечислимости из теоремы 6 непосредственно получается следующий результат, в некотором роде аналогичный теореме Сэлмана-Розинаса.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная алгебраическая система, и пусть $A\subseteq\omega$, $A\neq\varnothing$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{E}_A\leqslant_w\underline{\mathfrak{M}}$;

2) $\mathcal{E}_A\leqslant\underline{(\mathfrak{M},\bar{m})}$ для некоторого $\bar{m}\in M^{<\omega}$;

3) A Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Непосредственно из предыдущего утверждения получается аналогичный результат для случая проблем разрешимости:

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная алгебраическая система, и пусть $A\subseteq\omega$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{S}_A\leqslant_w\underline{\mathfrak{M}}$;

2) $\mathcal{S}_A\leqslant\underline{(\mathfrak{M},\bar{m})}$ для некоторого $\bar{m}\in M^{<\omega}$;

3) A Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Действительно, для любой массовой проблемы $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}_A\leqslant_w\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_A\leqslant_w\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}_{\overline{A}}\leqslant_w\mathcal{B}$ (аналогично для отношения $\leqslant$). □

Приступим теперь к формулировке и доказательству результата, который, с одной стороны, в терминах эффективной определимости в наследственно конечных надстройках дает синтаксическое описание сводимости по Мучнику на множестве проблем представимости моделей особого типа, а также, с другой стороны, показывает связь между сводимостями по Медведеву и Мучнику в этом случае. Пусть $\mathfrak{M}$ – алгебраическая система вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество.

Теорема 7. *Пусть счетная система $\mathfrak{M}$ имеет степень. Тогда*

$$\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_e(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_w(\mathfrak{M}).$$

Ввиду предложения 2, достаточно установить включение $\mathcal{K}_w(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M})$. Для этого воспользуемся следующим результатом, дающим описание систем, имеющих степень, в терминах определимости в наследственно конечных надстройках. Для произвольной счетной алгебраической системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ, *s-обогащением* системы $\mathfrak{M}$ называется любая система $\mathfrak{M}'$ сигнатуры $\sigma \cup \{s^1; 0\}$, где s – символ одноместной функции, а 0 – константный символ, такое, что $\mathfrak{M}' \upharpoonright \sigma = \mathfrak{M}$ и $\langle M, s^{\mathfrak{M}'}, 0^{\mathfrak{M}'} \rangle \cong \langle \omega, s, 0 \rangle$.

Обозначим через $\mathcal{S}_\mathfrak{M}$ массовую проблему, являющуюся объединением проблем представимости $\mathfrak{M}'$ для всех s-обогащений $\mathfrak{M}'$ системы $\mathfrak{M}$. Из определения непосредственно следует, что, для любой системы $\mathfrak{M}$, $\mathcal{S}_\mathfrak{M} \leqslant \underline{\mathfrak{M}}$. Действительно, опишем эффективную процедуру, преобразующую всякое представление $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ в некоторое представление из $\mathcal{S}_\mathfrak{M}$: полагаем значением константы 0 наименьший элемент (в смысле порядка на натуральных числах) носителя $\mathcal{C}$ (точнее, соответствующий этому элементу класс эквивалентности относительно $=$ в $\mathcal{C}$); затем полагаем в качестве значения $s(0)$ наименьший элемент (т.е. его класс эквивалентности) носителя, не лежащий в классе эквивалентности для 0, и так далее. Как следствие, получаем также, что и $\mathcal{S}_\mathfrak{M} \leqslant_w \underline{\mathfrak{M}}$.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная алгебраическая система. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{M}$ имеет степень;*

2) *существует представление $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$, являющееся Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (как подмножество ω);*

3) *некоторое s-обогащение системы $\mathfrak{M}$ Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;*

4) $\underline{\mathfrak{M}} \equiv \mathcal{S}_A$ *для некоторого* $A \subseteq \omega$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$. Пусть $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ таково, что $\mathcal{C}$ является Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Та же эффективная процедура, что и в замечании перед теоремой, преобразует представление $\mathcal{C}$ в представление из $\underline{\mathfrak{M}'}$, что означает, что $\mathfrak{M}'$ Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть $\mathfrak{M}'$ Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Покажем, что в этом случае некоторое представление $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ является Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, причем носителем $\mathcal{C}$ можно взять ω. Установим взаимно однозначное отображение f между носителем $\mathfrak{M}'$ (точнее, его представлением на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$) и ω, которое будет Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, следующим образом: для всякого $a \in HF(M)$ и всякого $n \in \omega$, полагаем $f(a) = n$ в том и только том случае, когда существуют $a_0, \ldots, a_n \in HF(M)$ такие, что, согласно данному представлению системы $\mathfrak{M}'$, имеют место равенства $a_0 = 0^{\mathfrak{M}'}$, $a_1 = s^{\mathfrak{M}'}(a_0), \ldots, a = a_n = s^{\mathfrak{M}'}(a_{n-1})$.

$2 \Rightarrow 1$. Предположим, что для некоторого представления $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ его атомарная диаграмма Δ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ с параметрами $\bar{n} \in N^{<\omega}$ (снова можно считать, что все параметры являются элементами из N). Но из этого непосредственно следует, что $\mathcal{C} \leqslant_T \mathcal{C}'$ для любого $\mathcal{C}' \in \underline{\mathfrak{M}}$. Действительно, вычислимые операторы, осуществляющие эти сводимости, строятся по Σ-формулам, определяющим $\mathcal{C}$.

$1 \Rightarrow 2$. Предположим, что существует представление $\mathfrak{C} \in \underline{\mathfrak{M}}$ такое, что $\mathcal{C} \leqslant_T \mathcal{C}'$ для любого $\mathcal{C}' \in \underline{\mathfrak{M}}$. В терминах массовых проблем это эквивалентно тому, что $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} \leqslant_w \underline{\mathfrak{M}}$. Отсюда, по теореме 2, $\mathcal{C}$ является Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (как подмножество ω). $\square$

Докажем, наконец, включение $\mathcal{K}_w(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M})$ в теореме 7. Предположим, что система $\mathfrak{N}$ такова, что $\underline{\mathfrak{N}} \leqslant_w \underline{\mathfrak{M}}$. Зафиксируем также некоторое представление $\mathcal{C}_0 \in \underline{\mathfrak{M}}$ такое, что $\mathcal{C}_0$ является Δ-определимым подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Из сводимости $\underline{\mathfrak{N}} \leqslant_w \underline{\mathfrak{M}}$ следует существование представления $\mathcal{C} \in \underline{\mathfrak{N}}$ такого, что $\mathcal{C} \leqslant_{T\Sigma} \mathcal{C}_0$. Поскольку $\mathcal{C}_0$ Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, то же самое верно и в отношении $\mathcal{C}$; отсюда следует, что $\mathfrak{N}$ Δ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ посредством представления $\mathcal{C}$. Тем самым, теорема 7 доказана.

Теорема 9. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– счетная алгебраическая система. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{M}$ *имеет e-степень;*

2) существует представление $\mathcal{C}$ *системы* $\mathfrak{M}$*, являющееся* Σ*-определимым в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *(как подмножество* ω*);*

3) $\underline{\mathfrak{M}} \equiv \mathcal{E}_A$ *для некоторого* $A \subseteq \omega$*.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 8. □

В качестве следствия этой теоремы и теоремы 8 получаем

Предложение 2. *Если система* $\mathfrak{M}$ *имеет степень, то она имеет и e-степень.*

В [19] в неявном виде содержатся примеры систем, имеющих e-степень, но не имеющих степени. А именно, в этой работе построен пример множества $A \subseteq \omega$, для которого массовая проблема $\mathcal{E}_A$ не содержит наименьшего элемента относительно сводимости по Тьюрингу, а также указан способ, связывающий с произвольным множеством $A \subseteq \omega$ абелеву группу G_A, для которой $\underline{G_A} \equiv \mathcal{E}_A$.

Аналогом теоремы 7 для систем, имеющих e-степень, является

Теорема 10. *Пусть счетная система* $\mathfrak{M}$ *имеет e-степень. Тогда*

$$\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_e(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_{ew}(\mathfrak{M}).$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 7. □

Еще одной характеризацией систем, имеющих степень, является

Теорема 11. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– счетная алгебраическая система. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{M}$ *имеет степень;*

2) для некоторого s-обогащения $\mathfrak{M}'$ *системы* $\mathfrak{M}$ *верно* $\mathfrak{M}' \in \mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M})$*;*

3) для некоторого s-обогащения $\mathfrak{M}'$ *системы* $\mathfrak{M}$ *верно* $\mathfrak{M}' \in \mathcal{K}(\mathfrak{M})$*;*

4) для некоторого s-обогащения $\mathfrak{M}'$ *системы* $\mathfrak{M}$ *верно* $\mathfrak{M}' \in \mathcal{K}_w(\mathfrak{M})$*.*

Допустимое множество $\mathbb{A}$ называется *рекурсивно развернутым* [2], если в $\mathbb{A}$ существует сюръективная Σ-функция $f : o(\mathbb{A}) \to A$, и *частично рекурсивно развернутым*, если в $\mathbb{A}$ существует частичная сюръективная Σ-функция $f : o(\mathbb{A}) \to A$. Заметим, что в первом случае функция f может быть выбрана биективной.

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– счетная алгебраическая система. Тогда*

1) некоторая копия $\mathfrak{M}$ *в* $\mathbb{HF}(\varnothing)$ Δ*-определима в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *рекурсивно развернуто;*

2) некоторая копия $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ частично рекурсивно развернуто.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{M}$ рекурсивно развернуто (частично рекурсивно развернуто), то $\mathfrak{M}$ имеет степень (е-степень).*

Список литературы

[1] Ю.Л. Ершов, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[2] J. Barwise, Admissible Sets and Strucrures, Berlin, Springer-Velag, 1975.

[3] W. Hodges, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[4] A. Sorbi, The Medvedev lattice of degrees of difficulty, in: LMS Lecture Notes, Computability, Enumerability, Unsolvability: Directions in Recursion Theory, bf 24 (1996), 289-312.

[5] J.F. Knight, Degrees coded into jumps of orderings, J. Symbolic Logic, **51** (1986), 1034-1042.

[6] Lacombe D., Deux généralizations de la notion de récursivité relative, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, **258**, 3410-3413, 1964.

[7] Y.N. Moschovakis, Abstract computability and invariant definability, J. Symb. Logic, **34** (1969), 605-633.

[8] V. Baleva, The jump operation for structure degrees, Arch. Math. Logic, **45** (2006), 249-265.

[9] C. Ash, J. Knight, M. Manasse, T. Slaman, Generic copies of countable structures, Ann. Pure. Appl. Logic, **42** (1989), 195-205.

[10] J. Chisholm, Effective model theory vs. recursive model theory, J.Symbolic Logic, **55** (1990), 1168-1191.

[11] V. Harizanov, J. Knight, A. Morozov, Sequences of n-diagrams, J.Symbolic Logic, **67** (2002), 1227-1248.

[12] Ю.Т. Медведев, Степени трудности массовых проблем, ДАН СССР, **104** (1955), 501-504.

[13] А.А. Мучник, О сильной и слабой сводимости алгоритмических проблем, Сиб. матем. журнал, **4** (1963), 1328-1341.

[14] Е.З. Дымент, О некоторых свойствах решетки Медведева, Матем. сборник, **101** (1976), 360-379.

[15] А.И. Стукачев, Σ-допустимые семейства над линейными порядками, Алгебра и логика, **41** (2002), 228-252.

[16] A.I. Stukachev, On mass problems of presentability, in: J.-Y. Cai, S.B. Cooper, and A. Li (Eds.): TAMC2006, LNCS, **3959** (2006), 774-784.

[17] I.N. Soskov, Degree spectra and co-spectra of structures, Ann. Univ. Sofia, **96** (2004), 45-68.

[18] W. Calvert, D. Cummins, J. Knight, S. Miller, Comparing classes of finite structures, Algebra and Logic, **43** (2004), 374-392.

[19] L. Richter, Degrees of structures, J.Symbolic Logic, **46** (1981), 723-731.

[20] А.Н. Хисамиев, О верхней полурешетке Ершова $\mathfrak{L}_E$, Сиб. мат. журнал, **45** (2004), 211-228.

[21] A. Selman, Arithmetical reducibilities. I, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **17** (1971), 335-350.

[22] М.Г. Розинас, Полурешетка e-степеней, Рекурсивные функции, Иваново, Ивановский гос. университет, 71-84, 1978.

[23] J. Barwise, A. Robinson, Completing theories by forcing, Ann. of Math. Logic, **2** (1970), 119-142.

[24] J. Miller, Degrees of unsolvability of continuous functions, J.Symbolic Logic, **69** (2004), 555-584.

[25] T.A. Slaman, Relative to any non-recursive set, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2117-2122.

[26] S. Wehner, Enumerations, countable structures and Turing degrees, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2131-2139.

[27] R. Platek, A note on the cardinality of the Medvedev lattice, Proc. Amer. Math. Soc., **25** (1970), 917.

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А.И. Стукачев, О степенях представимости моделей I,II.

В данной работе рассматриваются представления алгебраических систем в допустимых множествах, а также различные отношения эффективной сводимости между системами. Основным объектом исследования являются полурешетки степеней Σ-определимости. В работе показано, что полурешетка степеней Σ-определимости счетных систем хорошо согласована с полурешетками T- и e-степеней подмножеств натуральных чисел. В работе также предпринята попытка исследования свойств систем, наследуемых при различных эффективных сводимостях, а также исследования зависимости степеней представимости от выбора различных допустимых множеств в качестве областей для представлений.