УДК 510.5

О степенях представимости моделей. II[1]

А.И. СТУКАЧЕВ

Данная работа является продолжением работ [1, 2] и использует такие же обозначения.

1 Свойства алгебраических систем, наследуемые при эффектиных сводимостях

Условие существования степени у системы $\mathfrak{N}$ в теореме 7 работы [1] является существенным и не может быть опущено, как будет показано ниже. Для этого установим некоторые необходимые условия эффективных сводимостей между системами, и, в частности, необходимые условия Σ-определимости.

Система $\mathfrak{M}$ называется *локально конструктивизируемой* [3], если $\mathrm{Th}_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{m})$ вычислимо перечислима для всякого $\bar{m} \in M^{<\omega}$. Имеет место

Как отмечено в [3], локальная конструктивизируемость системы $\mathfrak{M}$ эквививалентна тому, что для всякого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$ существуют конструктивизируемая система $\mathfrak{N}$ и набор $\bar{n} \in N^{<\omega}$ такие, что $\mathrm{Th}_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{m}) = \mathrm{Th}_{\exists}(\mathfrak{N}, \bar{n})$. Для систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем через $\mathfrak{M} \leqslant_{\exists} \mathfrak{N}$ обозначать тот факт, что для всякого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$ существует набор $\bar{n} \in N^{<\omega}$, для которого $\mathrm{Th}_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{m}) \leqslant_e \mathrm{Th}_{\exists}(\mathfrak{N}, \bar{n})$. В частности, если $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема, то $\mathfrak{M} \leqslant_{\exists} \mathfrak{N}$ для любой системы $\mathfrak{N}$. Как было впервые отмечено в [3], если $\mathfrak{M} \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{N}$ и система $\mathfrak{N}$ локально конструктивизируема, то система $\mathfrak{M}$ также локально конструктивизируема. Данное замечание непосредственно обобщается следующим образом: если $\mathfrak{M} \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M} \leqslant_{\exists} \mathfrak{N}$. Для формулировки других необходимых условий Σ-определимости (которые оказываются полезными доказательства отрицательных результатов о сводимости $\leqslant_{\Sigma}$) рассмотрим следующие понятия.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 05-0100481 и 06-0104002, Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых кандидатов наук и их научных руководителей, проект МК-1239.2005.1, а также INTAS, проект INTAS YSF 04-83-3310.

Определение 1. *Система $\mathfrak{M}$ называется локально конструктивизируемой уровня n ($1 < n \leqslant \omega$), если для любого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$ существуют конструктивизируемая система $\mathfrak{N}$ и набор $\bar{n} \in N^{<\omega}$, такие, что $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \equiv_n^{\mathrm{HF}} (\mathfrak{N}, \bar{n})$. Счетная система $\mathfrak{M}$ называется равномерно локально конструктивизируемой уровня n ($1 < n \leqslant \omega$), если существует конструктивизируемая система $\mathfrak{N}$, для которой $\mathfrak{M} \preccurlyeq_n^{\mathrm{HF}} \mathfrak{N}$.*

Например, система $\langle \omega_1^{CK}, \leqslant \rangle$ является равномерно локально конструктивизируемой уровня ω, поскольку $\langle \omega_1^{CK}, \leqslant \rangle \preccurlyeq^{\mathrm{HF}} \langle \omega_1^{CK}(1+\eta), \leqslant \rangle$, где последний порядок (порядок Харрисона) конструктивизируем.

Пусть σ – произвольная предикатная (для простоты) сигнатура. Будем говорить, что задана *частичная система* $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ с носителем M, если зафиксировано некоторое непротиворечивое множество $D(\mathfrak{M})$ атомарных предложений и отрицаний атомарных предложений сигнатуры σ_M. Это эквивалентно тому, что для некоторой (полной) системы $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ имеет место $D(\mathfrak{M}) \subseteq D(\mathfrak{N})$, где $D(\mathfrak{N})$ – атомарная диаграмма $\mathfrak{M}$. Множество $D(\mathfrak{M})$ также будем называть атомарной диаграммой частичной системы $\mathfrak{M}$. Частичную систему $\mathfrak{M}$ (вычислимой сигнатуры) будем называть *конструктивизируемой*, если при некоторой нумерации носителя M множество $D(\mathfrak{M})$ будет вычислимо перечислимым.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – произвольные, возможно частичные, системы сигнатуры σ. Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ – *подсистема* $\mathfrak{N}$ (обозн. $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$), если $D(\mathfrak{M}) \subseteq D(\mathfrak{N})$. Будем также говорить, что $\mathfrak{M}$ *экзистенциально замкнута в* $\mathfrak{N}$ (обозн. $\mathfrak{M} \preccurlyeq_\exists \mathfrak{N}$), если для любой бескванторной формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры σ и любого $\bar{m} \in M^{<\omega}$, из $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{m})$ следует, что $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{m})$.

Имеет место

Предложение 1. *Если $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ и система $\mathfrak{N}$ (равномерно) локально конструктивизируема уровня n, то*

1) если $1 < n \leqslant \omega$, то система $\mathfrak{M}$ также (равномерно) локально конструктивизируема уровня n;

2) если $n = 1$ и система $\mathfrak{N}$ равномерно локально конструктивизируема, то существует частичная конструктивизируемая система $\mathfrak{M}'$ такая, что $\mathfrak{M} \preccurlyeq_\exists \mathfrak{M}'$;

Доказательство. Пусть, например, система $\mathfrak{N}$ локально конструктивизируема уровня n, и Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ посредством набора Σ-формул Γ с параметрами $\bar{n}_0 \in N^{<\omega}$.

Пусть $\bar{m} \in M^{<\omega}$, и пусть $\bar{n} \in N^{<\omega}$ – такой набор, что, для некоторых $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k \in HF(\omega)$, набор $\langle \varkappa_1(\bar{n}), \ldots, \varkappa_k(\bar{n}) \rangle$ соответствует набору $\bar{m}$ в представлении, задаваемом Γ. Рассмотрим набор $\bar{n}\bar{n}_0$. Пусть $\mathfrak{N}'$ – конструктивизируемая система, и $\bar{n}'\bar{n}'_0 \in N'^{<\omega}$ таковы, что $(\mathfrak{N}, \bar{n}\bar{n}_0) \equiv^{\mathrm{HF}}_n (\mathfrak{N}', \bar{n}'\bar{n}'_0)$. Рассмотрим систему $\mathfrak{M}'$, которая определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}')$ той же последовательностью формул Γ с параметрами $\bar{n}'_0$. Если $n > 1$, то (тотальная) система $\mathfrak{M}'$ корректно определена, при $n = 1$ система $\mathfrak{M}'$, вообще говоря, может быть частичной. В любом случае, $\mathfrak{M}'$ конструктивизируема, и для набора $\bar{m}'$, соответствующего в этом представлении набору $\langle \varkappa_1(\bar{n}'), \ldots, \varkappa_k(\bar{n}') \rangle$, имеем $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \equiv^{\mathrm{HF}}_n (\mathfrak{M}', \bar{m}')$. Действительно, определим эффективное преобразование формул, индуцируемое Γ. Пусть, для простоты, $\sigma_{\mathfrak{M}} = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_{k-1}^{n_{k-1}} \rangle$, и пусть система $\mathfrak{M}$ Δ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ посредством последовательности $\Gamma = \langle \Phi, \Phi^*, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_{k-1}^* \rangle$ Σ-формул с параметром $a \in HF(N)$. Определим (эффективные) преобразования $\Gamma_1, \Gamma_2 : Form(\sigma'_{\mathfrak{M}}) \to Form(\sigma'_{(\mathfrak{N}, \bar{n}_0)})$ следующим образом: для любой формулы φ сигнатуры $\sigma'_{\mathfrak{M}}$, не содержащей импликации и с отрицаниями только перед атомарными подформулами (всякая формула логически эквивалентна формуле такого вида), определим формулы $\Gamma_1(\varphi)$ и $\Gamma_2(\varphi)$ индукцией по сложности формулы φ (всюду далее, для Σ-формулы Φ через $\sim \Phi$ будем обозначать Π-формулу, логически эквивалентную $\neg\Phi$):

1) если $\varphi \rightleftharpoons P_i(t_0, \ldots, t_{n_i-1})$, то $\Gamma_1(\varphi) \rightleftharpoons \sim \Phi_i^*(t_0, \ldots, t_{n_i-1}, a)$, $\Gamma_2(\varphi) \rightleftharpoons \Phi_i(t_0, \ldots, t_{n_i-1}, a)$;

2) если $\varphi \rightleftharpoons \neg P_i(t_0, \ldots, t_{n_i-1})$, то $\Gamma_1(\varphi) \rightleftharpoons \sim \Phi_i(t_0, \ldots, t_{n_i-1}, a)$, $\Gamma_2(\varphi) \rightleftharpoons \Phi_i^*(t_0, \ldots, t_{n_i-1}, a)$;

3) если $\varphi \rightleftharpoons U(t)$, то $\Gamma_1(\varphi) \rightleftharpoons \sim \Phi^*(t, a)$, $\Gamma_2(\varphi) \rightleftharpoons \Phi(t, a)$;

4) если $\Phi \rightleftharpoons \neg U(t)$, то $\Gamma_1(\varphi) \rightleftharpoons \sim \Phi(t, a)$, $\Gamma_2(\varphi) \rightleftharpoons \Phi^*(t, a)$;

5) если $\Phi \rightleftharpoons (t_1 = t_2)$, то $\Gamma_1(\varphi) \rightleftharpoons ((\sim \Phi^*(t_1, a) \wedge \sim \Phi^*(t_2, a) \wedge \sim \Psi^*(t_1, t_2, a)) \vee (\sim \Phi(t_1, a) \wedge \sim \Phi(t_2, a) \wedge (t_1 = t_2)))$, $\Gamma_2(\varphi) \rightleftharpoons ((\Phi(t_1, a) \wedge \Phi(t_2, a) \wedge \Psi(t_1, t_2, a)) \vee (\Phi^*(t_1, a) \wedge \Phi^*(t_2, a) \wedge (t_1 = t_2)))$;

6) если $\varphi \rightleftharpoons \neg(t_1 = t_2)$, то $\Gamma_1(\varphi) \rightleftharpoons ((\sim \Phi^*(t_1, a) \wedge \sim \Phi^*(t_2, a) \wedge \sim \Psi(t_1, t_2, a)) \vee (\sim \Phi(t_1, a) \wedge \sim \Phi(t_2, a) \wedge \neg(t_1 = t_2)))$, $\Gamma_2(\varphi) \rightleftharpoons ((\Phi(t_1, a) \wedge \Phi(t_2, a) \wedge \Psi^*(t_1, t_2, a)) \vee (\Phi^*(t_1, a) \wedge \Phi^*(t_2, a) \wedge \neg(t_1 = t_2)))$;

7) если $\varphi \rightleftharpoons (\varphi_1 * \varphi_2)$, $* \in \{\wedge, \vee\}$, то $\Gamma_i(\varphi) \rightleftharpoons (\Gamma_i(\varphi_1) * \Gamma_i(\varphi_2))$, $i = 1, 2$;

8) если $\varphi \rightleftharpoons (Qx \in t)\psi$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $\Gamma_i(\varphi) \rightleftharpoons (Qx \in t)\Gamma_i(\psi)$, $i = 1, 2$;

9) если $\varphi \rightleftharpoons Qx\psi$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $\Gamma_i(\varphi) \rightleftharpoons Qx\Gamma_{3-i}(\psi)$, $i = 1, 2$.

Таким образом, для любых $n > 0$ и $\varphi \in Form(\sigma'_{\mathfrak{M}})$, если φ – Σ_n-формула, то $\Gamma_1(\varphi)$ – также Σ_n-формула; если φ – Π_n-формула, то $\Gamma_2(\varphi)$ – также Π_n-формула. $\square$

Определение 2. *Система $\mathfrak{M}$ называется HF-категоричной уровня n ($n \leqslant \omega$), если для любой системы $\mathfrak{M}'$ той же сигнатуры и мощности, что и $\mathfrak{M}$,*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \equiv_n \mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \;\Rightarrow\; \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'.$$

В случае $n = \omega$ систему $\mathfrak{M}$ будем называть HF-категоричной.

Очевидно, что HF-категоричность уровня 1 эквивалентна категоричности уровня 1 в логике первого порядка (примерами таких систем являются, например, модели категоричных в соответствующей мощности модельно полных теорий). Примерами HF-категоричных уровня 2 систем являются счетные отношения эквивалентности без бесконечных классов и абелевы группы конечных порядков (см. предложение 2 ниже). Примером системы, которая не категорична в HF-логике, может служить линейный порядок $\langle \omega_1^{CK}, \leqslant \rangle$.

Пусть $\mathcal{E}$ – счетное отношение эквивалентности (т.е. счетная алгебраическая система сигнатуры, состоящей из одного бинарного предиката, интерпретация которого в этой системе является отношением эквивалентности). *Характеристикой* системы $\mathcal{E}$ называется множество $\chi(\mathcal{E}) \subseteq \omega^2$, определенное следующим образом:

$$\chi(\mathcal{E}) = \{\langle m, n\rangle \mid \text{в } \mathcal{E} \text{ не менее } m \text{ классов эквивалентности размера } n\}.$$

Определим также *слабую характеристику* $\mathcal{E}$:

$$\chi^*(\mathcal{E}) = \{\langle m, n\rangle \mid \text{в } \mathcal{E} \text{ не менее } m \text{ классов размера не менее } n\}.$$

Несложно убедиться, что $\chi^*(\mathcal{E}) \equiv_e \mathrm{Th}_\exists(\mathcal{E})$. Очевидно также, что если размер конечных классов $\mathcal{E}$ ограничен, то $\mathcal{E}$ конструктивизируема. Если же размер конечных классов $\mathcal{E}$ не ограничен, то $\chi^*(\mathcal{E}) = \omega^2$. В любом случае, всякое отношение эквивалентности локально конструктивизируемо. Отметим также, что характеристика $\chi(\mathcal{E})$ определяет отношение $\mathcal{E}$ с точностью до числа бесконечных классов эквивалентности. Кроме того, имеет место

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ – счетные отношения эквивалентности. Тогда*

1) $\mathcal{E} \equiv_1 \mathcal{E}' \iff \chi^*(\mathcal{E}) = \chi^*(\mathcal{E})$*;*

2) $\mathcal{E} \equiv_2^{\mathrm{HF}} \mathcal{E}' \iff \chi(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}')$*.*

Доказательство. Действительно, $\langle m, n\rangle \in \chi(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда существуют попарно различные элементы $a_1^1, \ldots, a_n^1, \ldots, a_1^m, \ldots, a_n^m$ из E такие, что $a_k^i \sim a_l^i$ для всех i, k, l, и $a_k^i \not\sim a_l^j$ для всех i, j, k с условием $i \neq j$, и для любого $a \in E$ из $a \sim a_k^i$ следует, что $a = a_l^i$ для некоторого l. Данное условие может быть записано в виде $\exists\forall$-формулы сигнатуры отношений эквивалентности. $\square$

Следствие 1. *Если $\mathfrak{M}$ – алгебраическая система, являющаяся локально конструктивизируемой уровня 2, то всякое счетное отношение эквивалентности, Σ-определимое в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, конструктивизируемо.*

Доказательство. По предложению 1, если $\mathcal{E}$ – счетное отношение эквивалентности, для которого $\mathcal{E} \leqslant_\Sigma \mathfrak{M}$, то $\mathcal{E}$ также локально конструктивизируемо уровня 2. По предыдущему предложению отсюда, следует, что $\mathcal{E}$ конструктивизируемо. $\square$

Следующий результат говорит о том, что класс локально конструктивизируемых (уровня 1) счетных систем замкнут вниз относительно $\leqslant_w$ – самой слабой из рассматриваемых эффективных сводимостей.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – алгебраические системы (произвольной мощности). Если $\mathfrak{N} \in \mathcal{K}_w(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{N} \leqslant_\exists \mathfrak{M}$. В частности, если $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема, то любая система $\mathfrak{N} \in \mathcal{K}_w(\mathfrak{M})$ также локально конструктивизируема.*

Так как пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ локально конструктивизируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ локально конструктивизируемы, множество степеней, порожденных локально конструктивизируемыми системами, является идеалом в полурешетках $\mathcal{S}_*$, $* \in \{\Sigma, e, \ , w, ew\}$. Классы локально конструктивизируемых систем уровня n при $n > 1$, однако, замкнуты вниз только относительно $\leqslant_\Sigma$ (а, стало быть, образуют начальные сегменты в $\mathcal{S}_\Sigma$). Для более слабых эффективных сводимостей это не так. Например, имеет место

Теорема 1. *Существует счетная система $\mathfrak{M}_0$, которая является локально конструктивизируемой уровня 1 (строго), такая, что для всякой неконструктивизируемой счетной системы $\mathfrak{M}$ имеет место $\mathfrak{M}_0 \leqslant \mathfrak{M}$. В частности, если $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема уровня $n > 1$ и не конструктивизируема, то $\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) \subsetneq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство теоремы 1 использует результат, полученный независимо Т. Слэманом [9] и С. Вехнером [10], о существовании системы, проблема представимости которой принадлежит наименьшей ненулевой степени решетки Медведева (это, в частности, означает, что полурешетка степеней представимости $\mathcal{S}$ имеет наименьший ненулевой элемент). Всякая такая система локально конструктивизируема: имеет место

Предложение 4. *Пусть система $\mathfrak{M}$ такова, что $\underline{\mathfrak{M}} \leqslant_w \mathcal{A}$ для любой невычислимой массовой проблемы $\mathcal{A}$. Тогда $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема.*

Доказательство. Очевидно, что для любого представления $\mathcal{C}$ произвольной системы $\mathfrak{M}$ и любого $\bar{m} \in M^{<\omega}$ имеет место $\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{M}, \bar{m}) \leqslant_e \mathcal{C}$. Поэтому, если $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям предложения, то, в частности, для любого $\bar{m} \in M^{<\omega}$, $\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{M}, \bar{m}) \leqslant_e X$ для любого $X \subseteq \omega$, не являющегося вычислимо перечислимым. Отсюда непосредственно следует локальная конструктивизируемость $\mathfrak{M}$. □

Основываясь на конструкции системы $\mathfrak{M}_S$ из [9] с указанным выше свойством, построим пример системы $\mathfrak{M}$ и отношения $P \subseteq M$ таких, что $\underline{(\mathfrak{M}, P)} \equiv \underline{\mathfrak{M}}$, однако система $(\mathfrak{M}, P)$ не является Σ-определимой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{M}'_S$ – конструктивизируемая система, для которой $\mathfrak{M}_S \leqslant \mathfrak{M}'_S$. Система $\mathfrak{M}'_S$ получается из $\mathfrak{M}_S$ добавлением бесконечного числа меток для всякого (не обязательно максимального) пути в $\mathfrak{M}_S$.

Для произвольной системы $\mathfrak{A}$, которая не конструктивизируема, но обладает конструктивизируемым 2-элементарным в HF-логике расширением, рассмотрим систему $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S)$ (теоретико-модельную пару систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}'_S$). Одноместное отношение $P \subseteq M'_S$ определим состоящим из меток для путей в $\mathfrak{M}_S \leqslant \mathfrak{M}'_S$: для каждого такого пути, P должно содержать бесконечно много таких меток, и также должно оставаться бесконечно много меток таких путей, не входящих в P.

Имеем $\underline{\mathfrak{M}_S} \leqslant \underline{(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S)}$, отсюда $\underline{((\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S), P)} \leqslant \underline{(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S)}$ (новые метки для отношения P строятся с использованием $\mathfrak{M}_S$ в качестве образца). Сводимость в обратную сторону очевидна. Кроме того, система $((\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S), P)$ не является Σ-определимой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S)$, поскольку в этом случае система $\mathfrak{M}_S$ была бы Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}'_S)$, что невозможно по предложению 1. Действительно, имеет место

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N}$ – счетные алгебраические системы, причем $\mathfrak{N}$ локально конструкивизируема, и $\mathfrak{M} \preccurlyeq_2^{\mathrm{HF}} \mathfrak{M}'$. Тогда $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \preccurlyeq_2^{\mathrm{HF}} (\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$.*

Доказательство. Пусть

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \models \bigwedge_{i\in\omega} \forall \bar{a}_i \forall \bar{b}_i \bigvee_{j\in\omega} (\varphi_{ij}(\bar{a}_i) \wedge \psi_{ij}(\bar{b}_i)).$$

Для каждого $i \in \omega$ и каждого $\bar{b} \in N^{<\omega}$, пусть $J_i(\bar{b}) = \{j \in \omega | \mathfrak{N} \models \psi_j(\bar{b})\}$. По условию, для всякого $i \in \omega$ и для всякого $\bar{b} \in N^{<\omega}$ имеет место

$$\mathfrak{M} \models \forall \bar{a}_i \bigvee_{j\in J_i(\bar{b})} \varphi_{ij}(\bar{a}).$$

Поскольку $\mathfrak{M} \preccurlyeq_n^{\mathrm{HF}} \mathfrak{M}'$, эти же формулы истинны и в $\mathfrak{M}'$, то есть

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}) \models \forall \bar{a}_i \bigvee_{j\in\omega} (\varphi_{ij}(\bar{a}) \wedge \psi_{ij}(\bar{b}))$$

для всякого $i \in \omega$ и для всякого $\bar{b} \in N^{<\omega}$, что и требовалось. $\square$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Существуют счетная система $\mathfrak{M}$ и одноместное отношение $P \subseteq M$, для которых $\underline{(\mathfrak{M}, P)} \equiv \underline{\mathfrak{M}}$, однако $(\mathfrak{M}, P) \not\preccurlyeq_\Sigma \mathfrak{M}$.*

Теорема 2 имеет интерес в связи со следующим результатом из [11]: для любой счетной системы $\mathfrak{M}$ и отношения $P \subseteq M^n$, P является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда, для всякого $\mathcal{C} \in \underline{(\mathfrak{M}, P)}$ $n \in \omega$, $P^{\mathcal{C}}$ является $\mathcal{C} \restriction \sigma_{\mathfrak{M}}$-в.п..

Для алгебраических систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с условием $\mathrm{card}(M) \leqslant \mathrm{card}(N)$, рассмотрим класс

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{M}' \mid \Pr(\mathfrak{M}', \mathbb{HF}(\mathfrak{N})) \leqslant \Pr((\mathfrak{M}, \bar{m}), \mathbb{HF}(\mathfrak{N})),\ \bar{m} \in M^{<\omega}\}.$$

Аналогичным образом определяются классы $\mathcal{K}_e(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $\mathcal{K}_w(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ и $\mathcal{K}_{ew}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – счетные системы, и пусть $\mathfrak{N}$ – либо модель пустой сигнатуры, либо плотный линейный порядок. Тогда $\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_e(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.*

Доказательство. Для $\mathfrak{N} = \mathbb{S}$, где $\mathbb{S}$ – бесконечная система пустой сигнатуры, рассуждения тривиальны: рассмотрим представление $\mathfrak{M}$ с подмножеством S в качестве носителя. Для $\mathbb{A} = \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ – плотный линейный порядок, рассмотрим представление $\mathfrak{M}$ с носителем, состоящим из подмножеств L, являющихся "взаимно плотными": между любыми представителями любых различных элементов, а также слева и справа, существует бесконечно много представителей любого другого элемента. $\square$

Как следствие, существуют естественные изоморфизмы полурешетки $\mathcal{S}_\Sigma$ степеней Σ-определимости и полурешеток $\mathcal{S}(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}))$ степеней представимости, где $\mathfrak{N}$ – либо счетная модель пустой сигнатуры, либо счетный плотный линейный порядок.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – счетные алгебраические системы. Система $\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень) над $\mathfrak{N}$, если существует наименьшая степень среди всех $T\Sigma$-степеней ($e\Sigma$-степеней) всевозможных представлений $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.*

Непосредственным следствием теоремы 6 из [1] является обобщение теоремы 1 из [1]:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – счетные алгебраические системы. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень) над $\mathfrak{N}$;*

2) *некоторое представление $\mathcal{C} \subseteq HF(N)$ системы $\mathfrak{M}$ является Δ-определимым (Σ-определимым) в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.*

Очевидно, что, если $\mathfrak{M} \leqslant_\exists \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень) над $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$. Очевидно также, что если $\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень) над $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}'$, то $\mathfrak{M}$ имеет степень (e-степень) над $\mathfrak{N}'$. Кроме того, имеет место

Предложение 6. *Для любой счетной системы $\mathfrak{A}$ существует система $\mathfrak{M}$, имеющая степень, но не являющаяся Σ-определимой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq \omega$ – подмножество натуральных чисел, не являющееся Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ (оно существует ввиду мощностных соображений: в любом счетном допустимом множестве счетное число Σ-подмножеств). Абелева группа $G_{A \oplus \bar{A}}$ не является Σ-определимой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, поскольку иначе A было бы Δ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. В то же время G_A имеет степень (в $\mathbb{HF}(\varnothing)$, а значит и в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$). $\square$

Как и в нерелятизованном случае, имеет место

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *– счетные системы. Если* $\mathfrak{M}$ *имеет степень над* $\mathfrak{N}$, *то* $\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) = \mathcal{K}_e(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) = \mathcal{K}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$. *Если* $\mathfrak{M}$ *имеет e-степень над* $\mathfrak{N}$, *то* $\mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) = \mathcal{K}_e(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$.

Доказательство. Получается непосредственным обобщением доказательства теоремы 7 из [1], с использованием теоремы 3. □

2 Равномерные сводимости локальных HF-теорий

Еще одним необходимым условием отношения $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ между системами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ является наличие равномерной эффективной сводимости между семействами локальных HF-теорий этих систем, к точному определению которой мы сейчас переходим.

Всюду далее, под *семейством* будем понимать произвольное семейство подмножеств ω. Определим на семействах действие эффективных операторов, расширив область действия классических операторов перечисления множеством семейств $P(P(\omega))$: для семейства $\mathcal{X} \subseteq P(\omega)$ и оператора перечисления $\Phi : P(\omega) \to P(\omega)$, полагаем

$$\Phi(\mathcal{X}) = \{\Phi(D) | D \in \mathcal{X}^{<\omega} \text{ – конечный набор множеств}\}.$$

Здесь под $\Phi(D)$ для $D = \langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ понимается множество $\Phi(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n)$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq P(P(\omega))$ – произвольные классы семейств. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ *сводится по Дымент* к $\mathcal{B}$ (обозн. $\mathcal{A} \leqslant_e \mathcal{B}$), если $\Phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ для некоторого оператора перечисления Φ.

Определим на семействах отображения $i : P(P(\omega)) \to P(P(P(\omega)))$ и $j : P(P(\omega)) \to P(P(P(\omega)))$ следующим образом: для семейства $\mathcal{X}$ полагаем $i(\mathcal{X}) = \{\mathcal{X}\}$ и $j(\mathcal{X}) = \{\{X\} | X \in \mathcal{X}\}$.

Очевидно, что для любых $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq P(\omega)$, $j(\mathcal{X}) \leqslant_e j(\mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} \leqslant_e \mathcal{Y}$ (в последнем случае под $\leqslant_e$ понимается сводимость по Дымент на семействах). Далее через $\mathcal{X} \leqslant_e^o \mathcal{Y}$ будем обозначать тот факт, что $i(\mathcal{X}) \leqslant_e i(\mathcal{Y})$.

Пусть $\mathcal{X} \subseteq P(P(\omega))$, и пусть $\bar{X}^0 = \langle X_1^0, \ldots, X_k^0\rangle$, $X_1^0, \ldots, X_k^0 \subseteq \omega$. *Сдвигом* семейства $\mathcal{X}$ с помощью набора $\bar{X}^0$ называется семейство $\bar{X}^0 * \mathcal{X} = \{X_1^0 \oplus \ldots \oplus X_k^0 \oplus X | X \in \mathcal{X}\}$.

Сводимость по Дымент на множестве $P(P(P(\omega)))$, очевидно, является рефлексивной и транзитивной. Отношение эквивалентности $\equiv_e$ определяется стандартным образом: $\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда

$\mathcal{A} \leqslant_e \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \leqslant_e \mathcal{A}$. Структуру степеней $\langle P(P(P(\omega)))/\equiv_e, \leqslant_e\rangle$ будем обозначать через $\mathcal{M}'_e$, по аналогии с решеткой Дымент $\mathcal{M}_e$.

Предложение 7. *$\mathcal{M}'_e$ является решеткой с 0 и 1, причем $j : \mathcal{M}_e \to \mathcal{M}'_e$ – вложение, сохраняющее $\wedge, \vee, 0, 1$.*

Доказательство. Наибольшим элементом $\mathcal{M}'_e$ является, очевидно, $[\varnothing]_e$, а наименьшим $[\{\{\varnothing\}\}]_e$, и $j(0_{\mathcal{M}_e}) = i(0_{\mathcal{M}_e}) = \{\{\varnothing\}\}$, $j(1_{\mathcal{M}_e}) = \varnothing$, $i(1_{\mathcal{M}_e}) = \{\varnothing\}$, $\varnothing \equiv_e \{\varnothing\}$. Операции $\vee$ и $\wedge$ определяются в $\mathcal{M}'_e$ следующим образом: для классов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq P(P(\omega))$,

1) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} | \mathcal{X} \in \mathcal{A}, \mathcal{Y} \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = \{X \oplus Y | X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$;

2) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \{0\} * \mathcal{A} \cup \{1\} * \mathcal{B}$, где $\{0\} * \mathcal{A} = \{\{0\} * \mathcal{X} | \mathcal{X} \in \mathcal{A}\}$, $\{1\} * \mathcal{B} = \{\{1\} * \mathcal{Y} | \mathcal{Y} \in \mathcal{B}\}$. □

По аналогии с тем, как определяется неравномерный аналог $\mathcal{M}_{ew}$ решетки Дымент, можно определить неравномерный аналог $\mathcal{M}'_{ew}$ решетки $\mathcal{M}'_e$. Кроме того, по аналогии с решетками Медведева и Мучника можно определить решетки $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}'_w$, порождаемые классами семейств тотальных множеств (или функций).

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – системы произвольной мощности, и пусть $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$. Тогда, для некоторого $\bar{n}_0 \in N^{<\omega}$, для всякого $1 < n \leqslant \omega$ имеют место сводимости*

$$\{\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Sigma_n}(\mathfrak{M}, \bar{m}) | \bar{m} \in M^{<\omega}\} \leqslant^o_e \{\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Sigma_n}(\mathfrak{N}, \bar{n}_0, \bar{n}) | \bar{n} \in N^{<\omega}\},$$
$$\{\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Pi_n}(\mathfrak{M}, \bar{m}) | \bar{m} \in M^{<\omega}\} \leqslant^o_e \{\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Pi_n}(\mathfrak{N}, \bar{n}_0, \bar{n}) | \bar{n} \in N^{<\omega}\},$$
$$\{\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{n}(\mathfrak{M}, \bar{m}) | \bar{m} \in M^{<\omega}\} \leqslant^o_e \{\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{n}(\mathfrak{N}, \bar{n}_0, \bar{n}) | \bar{n} \in N^{<\omega}\}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in Form(\sigma'_{\mathfrak{M}})$. Тогда $\varphi \in \mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Sigma_n}(\mathfrak{M}, \bar{m})$ для некоторого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$ в том и только том случае, когда существует набор $\bar{n} \in N^{<\omega}$ и элементы $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s \in HF(\omega)$ для которых набор $\langle \varkappa_1(\bar{n}), \ldots, \varkappa_s(\bar{n})\rangle$ соответствует набору $\bar{m}$ в представлении, определяемом Γ, и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Gamma_1(\varphi)(\varkappa_1(\bar{n}), \ldots, \varkappa_s(\bar{n}))$.

Таким образом, для любых $\bar{m} \in M^{<\omega}$ и $\varphi \in Form(\sigma'_{\mathfrak{M}})$, $\varphi \in \mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Sigma_n}(\mathfrak{M}, \bar{m})$ тогда и только тогда, когда найдутся элементы $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s \in HF(\omega)$ такие, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Phi(\varkappa_i(\bar{n}), a)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$, и

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Gamma_1(\varphi)(\varkappa_1(\bar{n}), \ldots, \varkappa_s(\bar{n})).$$

Отметим, что набор $\langle \varkappa_1, \ldots, \varkappa_s\rangle$ может быть закодирован, например, с помощью набора $\langle n, \ldots, n, n'\rangle \in N^{<\omega}$ длины $\gamma^{-1}(\bar{\varkappa}) + 1$, где $n \neq n'$, а γ – некоторая геделевская нумерация множества $HF(\omega)^{<\omega}$. □

Свяжем с системой $\mathfrak{M}$ семейство $\mathcal{E}(\mathfrak{M}) = \{\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{M}, \bar{m}) | \bar{m} \in M^{<\omega}\}$ $\exists$-типов конечных наборов элементов $\mathfrak{M}$. Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие 2. *Для любых систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$,*

$$\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N} \Rightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{M}) \leqslant_e^o \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \bar{n}_0) \text{ для некоторого } \bar{n}_0 \in N^{<\omega}.$$

Существуют примеры систем, для которых указанное выше необходимое условие сводимости $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ является также и достаточным. С каждым семейством $\mathcal{X} \subseteq P(\omega)$ свяжем систему $\mathfrak{A}_\mathcal{X}$, определенную следующим образом: носителем системы является множество $\omega \cup S$, где S – множество мощности 2^ω. Сигнатура системы состоит из одноместного функционального символа s, который интерпретируется на ω стандартно ($s(n) = n + 1$) и является тождественным на S, и бинарного предикатного символа R, который интепретируется так: $R \subseteq S \times \omega$, $\mathcal{X} = \{\{n \in \omega | R(s, n)\} | s \in S\}$, причем всякому элементу $\mathcal{X}$ соответствует 2^ω различных элементов (меток) из S, и существует 2^ω элементов из S, не связанных отношением R ни с одним элементом ω, а также 2^ω элементов из S, связанных отношением R со всеми элементами ω.

Определим также систему $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$, носителем которой является множество $C \cup S$, где C и S – непересекающиеся множества мощности 2^ω, а сигнатура состоит из одноместного предикатного символа P, выделяющего множество S, и двухместного предикатного символа R, образующего конечные циклы (петли допускаются только на элементах из S), в каждом из которых ровно один элемент из S, для различных циклов множества входящих в них элементов из C не пересекаются , $\mathcal{X} = \{\{n \in \omega | \exists c_0 \ldots \exists c_n (R(s, c_0) \wedge R(c_0, c_1) \ldots \wedge R(c_n, s))\} | s \in S\}$, причем каждому из элементов $\mathcal{X}$ соответствует 2^ω элементов (меток) из S, существует 2^ω элементов из S, каждый из которых входит в цикл любой конечной длины, существует 2^ω элементов из S, не связанных отношением R ни с одним из элементов носителя, и существует 2^ω элементов из C, не входящих ни в один из циклов.

Предложение 9. *Для любых семейств $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq P(\omega)$,*

$$\mathfrak{A}_\mathcal{X} \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}_\mathcal{Y} \iff \mathcal{X} \cup \{\varnothing, \omega\} \leqslant^o \bar{Y}_0 * (\mathcal{Y} \cup \{\varnothing, \omega\}) \text{ для некоторого } \bar{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y},$$
$$\mathfrak{B}_\mathcal{X} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}_\mathcal{Y} \iff \mathcal{X} \cup \{\varnothing, \omega\} \leqslant_e^o \bar{Y}_0 * (\mathcal{Y} \cup \{\varnothing, \omega\}) \text{ для некоторого } \bar{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}$$

Как следствие, если обе системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ вида $\mathfrak{A}_\mathcal{X}$ или $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$, то

$$\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N} \iff \mathcal{E}(\mathfrak{M}) \leqslant_e^o \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \bar{n}_0) \text{ для некоторого } \bar{n}_0 \in N^{<\omega}.$$

Алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ будем называть *локально n-низкой* ($n \in \omega$), если $\mathrm{Th}^{\mathrm{HF}}_{\Sigma_n}(\mathfrak{M}, \bar{m}) \in \Sigma^0_n$ для всех $\bar{m} \in M^{<\omega}$. Очевидно, что если $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема уровня n, то $\mathfrak{M}$ – локально n-низкая система (для случая $n = 1$ верно и обратное). Из предложения 8 следует, что, для любого n, свойство быть локально n-низкой системой, как и свойство локальной конструктивизируемости уровня n, наследуется при Σ-определимости: если $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ – локально n-низкая система, то система $\mathfrak{M}$ также является локально n-низкой.

Как было отмечено в [1], $\mathrm{card}(\mathcal{S}_\Sigma) = 2^\alpha$ для всякого бесконечного кардинала α. Рассмотрим теперь вопрос о существовании максимальных антицепей в полурешетке $\mathcal{S}_\Sigma(2^\omega)$.

Теорема 5. *В $\mathcal{S}_\Sigma(2^\omega)$ существует антицепь мощности 2^{2^ω}.*

Доказательство. Модифицируем конструкцию из [12], показывающую, что $\mathrm{card}(\mathcal{M}) = 2^{2^\omega}$. Пусть семейство $\mathcal{X} = \{X_i \subseteq \omega | i \in I\}$ таково, что $\mathrm{card}(I) = 2^\omega$, и $\{[X_i]_T | i \in I\}$ – антицепь в $\mathcal{D}$, удовлетворяющая следующему дополнительному условию: $[X_i]_T | [X_{j_1} \oplus \ldots \oplus X_{j_k}]_T$ при $i \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$. Для всякого $P \subseteq I$, пусть $\mathcal{X}_P = \{X_i | i \in P\}$. Очевидно, что существует множество $\mathcal{A} \subseteq P(I)$ такое, что $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = 2^{2^\omega}$ и любые различные $P, Q \in \mathcal{A}$ несравнимы относительно $\subseteq$. Стало быть, для любых различных $P, Q \in \mathcal{A}$, системы $\mathfrak{A}_{\mathcal{X}_P}$ и $\mathfrak{A}_{\mathcal{X}_Q}$ несравнимы относительно $\leqslant_\Sigma$, где $\mathcal{X}_P = \{X_i | i \in P\}$. $\square$

3 *-однородные системы

Для произвольной системы $\mathfrak{M}$ рассмотрим классы

$$\mathcal{K}^*_\Sigma(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N}\ \Sigma\text{-определима в } \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \text{ без параметров}\},$$

$$\mathcal{K}^*_\Delta(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N}\ \Delta\text{-определима в } \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \text{ без параметров}\}.$$

Если $\mathfrak{M}$ счетна, то определены также классы

$$\mathcal{K}^*_e(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \underline{\mathfrak{N}} \leqslant_e \underline{\mathfrak{M}}\}, \quad \mathcal{K}^*(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{N} \mid \underline{\mathfrak{N}} \leqslant \underline{\mathfrak{M}}\}.$$

Очевидно, что для любой счетной системы $\mathfrak{M}$ имеют место включения $\mathcal{K}^*_\Delta(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}^*_\Sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M})$, $\mathcal{K}^*_e(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}_e(\mathfrak{M})$, и $\mathcal{K}^*(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$.

Определение 4. *Система $\mathfrak{M}$ называется $*$-однородной, если $\mathcal{K}^*_\Delta(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_\Delta(\mathfrak{M})$, и слабо $*$-однородной, если $\mathcal{K}^*_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_\Sigma(\mathfrak{M})$.*

Непосредственно из определения следует, что (слабая) $*$-однородность системы $\mathfrak{M}$ эквивалентна тому, что, для всех $\bar{m} \in M^{<\omega}$, система $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ (Σ-) Δ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ без параметров. Очевидно также, что если счетная система $\mathfrak{M}$ (слабо) $*$-однородна, то $\mathcal{K}^*(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ (соответственно, $\mathcal{K}^*_e(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}_e(\mathfrak{M})$), что равносильно тому, что, для всех $\bar{m} \in M^{<\omega}$, $\underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})} \equiv \underline{\mathfrak{M}}$ (соответственно, $\underline{(\mathfrak{M}, \bar{m})} \equiv_e \underline{\mathfrak{M}}$).

Предложение 10. *Если система $\mathfrak{M}$ имеет степень, то существует $\bar{m} \in M^{<\omega}$, т.ч. система $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ $*$-однородна. Если система $\mathfrak{M}$ имеет e-степень, то существует $\bar{m} \in M^{<\omega}$, т.ч. система $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ слабо $*$-однородна.*

Доказательство. Пусть, например, $\mathfrak{M}$ имеет степень. Тогда для некоторого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$ и некоторого представления $\mathcal{C}_0 \in \underline{\mathfrak{M}}$ верно $\mathcal{C}_0 \oplus \overline{\mathcal{C}_0} \leqslant_e \mathrm{Th}_e(\mathfrak{M}, \bar{m})$. Таким образом, определяемое представлением $\mathcal{C}_0$ s-обогащение системы $\mathfrak{M}$, а значит и система $(\mathfrak{M}, \bar{m})$, Δ-определимы в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ без параметров. □

Из теоремы 7 работы [1] непосредственно вытекает

Следствие 3. *Если система $\mathfrak{N}$ $*$-однородна и имеет степень, то, для любой системы $\mathfrak{M}$,*

$$\underline{\mathfrak{M}} \leqslant \underline{\mathfrak{N}} \iff \underline{\mathfrak{M}} \leqslant_w \underline{\mathfrak{N}}.$$

Следующее определение хорошо известно в теории моделей (см. [5]).

Определение 5. *Система $\mathfrak{M}$ называется ультраоднородной, если любой изоморфизм между конечно порожденными подсистемами $\mathfrak{M}$ может быть продолжен до автоморфизма всей системы $\mathfrak{M}$.*

Легко убедиться, что если $\mathfrak{M}$ является ультраоднородной системой предикатной сигнатуры, то $\mathfrak{M}$ $*$-однородна. Также очевидно, что если $\mathfrak{M}$ конструктивизируема (т.е. имеет вычислимое представление), то $\mathfrak{M}$ также является $*$-однородной.

Приведем пример неультраоднородной и неконструктивизируемой системы, которая является $*$-однородной.

Лемма 2. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – конструктивные ординалы, то обогащение $\langle \omega_1^{CK}; \leqslant, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\langle \omega_1^{CK}, \leqslant \rangle)$ без параметров.*

Доказательство. Используем тот факт, что $\alpha + \omega_1^{CK} = \omega_1^{CK}$ для всякого конструктивного ординала α. Действительно, если α – конструктивный ординал, то таковым будет и $\alpha \cdot \omega$, а значит $\alpha \cdot \omega < \omega_1^{CK}$. Но $\alpha + \alpha \cdot \omega = \alpha \cdot \omega$, поэтому $\alpha + \omega_1^{CK} = \omega_1^{CK}$.

Предположим теперь, для простоты, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. Поскольку все эти ординалы конструктивны, система $\langle \alpha_n; \leqslant, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle$ Δ-определима в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ (без параметров, конечно). Поэтому сумма $\langle \alpha_n + \omega_1^{CK}; \leqslant, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ также Δ-определима в $\mathbb{HF}(\langle \omega_1^{CK}; \leqslant \rangle)$ без параметров. Вследствие вышеуказанного факта, лемма доказана. □

Следствие 4. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \omega_1^{CK}$ – конструктивные ординалы. Тогда $\underline{\langle \omega_1^{CK}; \leqslant, \bar{\alpha} \rangle} \leqslant \underline{\langle \omega_1^{CK}, \leqslant \rangle}$.*

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 2. □

Следствие 5. *Система $\langle \omega_1^{CK}; \leqslant \rangle$ $*$-однородна.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущей леммы, поскольку $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \omega_1^{CK}$ означает, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – конструктивные ординалы. □

Отметим, что из мощностных соображений следует, что никакой несчетный ординал не является $*$-однородным.

4 Размерности по представимости

Естественной является задача нахождения для проблемы представимости, состоящей из всевозможных представлений некоторой системы, максимально малого ее подмножества, имеющего те же самые свойства относительно сводимости по Медведеву (Мучнику).

Определение 6. *Счетная алгебраическая система $\mathfrak{M}$ имеет (сильную) размерность по представимости α (обозначается $\text{Pr-dim}(\mathfrak{M}) = \alpha$), где α – кардинал, если $\underline{\mathfrak{M}} \equiv \mathcal{B}$ для некоторого $\mathcal{B} \subseteq \underline{\mathfrak{M}}$, $\text{card}(\mathcal{B}) = \alpha$, и α – наименьший кардинал, удовлетворяющий этим условиям.*

Аналогично можно ввести понятие слабой размерности по представимости $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M})$, заменив в предыдущем определении $\equiv$ на $\equiv_w$. Очевидно, что для любой системы $\mathfrak{M}$, $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ имеет степень. Очевидно также, что для всякой (счетной) системы $\mathfrak{M}$ имеют место неравенства

$$1 \leqslant \text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) \leqslant \text{Pr-dim}(\mathfrak{M}) \leqslant 2^\omega.$$

Имеет место

Предложение 11. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная алгебраическая система. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) = 1$*;*

2) $\text{Pr-dim}(\mathfrak{M}, \bar{m}) = 1$ *для некоторого* $\bar{m} \in M^{<\omega}$*.*

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 7 работы [1]. □

Некоторый интерес представляет следствие этой теоремы.

Следствие 6. *Если $\mathfrak{M}$ $*$-однородна, то*

$$\text{Pr-dim}(\mathfrak{M}) = 1 \iff \text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) = 1.$$

Легко убедиться в справедливости следующего факта.

Предложение 12. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная алгебраическая система, и пусть для некоторого представления $\mathcal{C}$ системы $\mathfrak{M}$ имеет место $\mathcal{C} \leqslant_e$* $\text{Th}_\exists(\mathfrak{M})$ *(или, эквивалентно, некоторое представление системы $\mathfrak{M}$ Δ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ без параметров). Тогда* $\text{Pr-dim}(\mathfrak{M}) = 1$.

Автору неизвестно, является ли это достаточное условие также и необходимым.

Естественным является следующий вопрос: существует ли система $\mathfrak{M}$ такая, что $1 < \text{Pr-dim}(\mathfrak{M}) \leqslant \omega$? В этом случае обязательно $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) = 1$. Действительно, это следует из неравенства $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) \leqslant \text{Pr-dim}(\mathfrak{M})$ и следующего важного утверждения, полученного независимо Дж. Найт [6] и И.Н. Сосковым [8]: для любой системы $\mathfrak{M}$, $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M})$ либо равна 1, либо несчетна. Отсюда непосредственно получаем, что для, любой системы $\mathfrak{M}$, $\text{Pr-dim}(\mathfrak{M})$ либо равна 1, либо бесконечна.

По аналогии с определением 6, для счетной системы $\mathfrak{M}$ можно ввести размерности $\text{Pr-dim}_e(\mathfrak{M})$ и $\text{Pr-dim}_{ew}(\mathfrak{M})$. В этом случае также имеют место неравенства $1 \leqslant \text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) \leqslant \text{Pr-dim}(\mathfrak{M}) \leqslant 2^\omega$, и $\mathfrak{M}$ имеет e-степень тогда и только тогда, когда $\text{Pr-dim}_{ew}(\mathfrak{M}) = 1$. Кроме того, из $\text{Pr-dim}_w(\mathfrak{M}) = 1$ следует, что $\text{Pr-dim}_{ew}(\mathfrak{M}) = 1$, а из $\text{Pr-dim}_{ew}(\mathfrak{M}) = 1$ следует, что $\text{Pr-dim}_e(\mathfrak{M}, \bar{m}) = 1$ для некоторого набора $\bar{m} \in M^{<\omega}$.

Для любого $A \subseteq \omega$ пусть $[\mathcal{S}'_A]_w$ обозначает степень решетки Мучника, являющейся наименьшей среди всех степеней, больших $[\mathcal{S}_A]_w$. Оказывается, всякая такая степень является степенью представимости.

Предложение 13. *Для любого $A \subseteq \omega$ существует система $\mathfrak{N}_A$ такая, что $[\underline{\mathfrak{M}}]_w = [\mathcal{S}'_A]_w$.*

Доказательство. Для каждого $A \subseteq \omega$, пусть $\mathfrak{M}_A$ обозначает систему полученную релятивизацией по A конструкции из [9], и пусть $\mathfrak{D}_A$ – произвольная система, имеющая степень $[A]_T$ (например, абелева группа $G_{A \oplus \overline{A}}$). Тогда для всякого $\mathcal{C} \in \underline{(\mathfrak{M}_A, \mathfrak{D}_A)}$ имеем $A <_T \mathcal{C}$, и для любого $X \subseteq \omega$ с условием $A <_T X$ существует X-вычислимое представление системы $(\mathfrak{M}_A, \mathfrak{D}_A)$. Таким образом, спектром этой системы является "открытый конус"$\{\mathbf{x} | \mathbf{x} > \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a} = [A]_T$. Проблема представимости данной системы принадлежит наименьшей степени трудности решетки Мучника, большей $[\mathcal{S}_A]_w$. Отметим, что неравномерность описанной выше конструкции заключается в необходимости использовать в качестве оракула множество A, имея изначально произвольное X с условием $A <_T X$. $\square$

Список литературы

[1] А.И. Стукачев, О степенях представимости моделей I, Алгебра и логика, представлено.

[2] A.I. Stukachev, On mass problems of presentability, in: J.-Y. Cai, S.B. Cooper, and A. Li (Eds.): TAMC2006, LNCS, **3959** (2006), 774-784.

[3] Ю.Л. Ершов, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[4] J. Barwise, Admissible Sets and Strucrures, Berlin, Springer-Velag, 1975.

[5] W. Hodges, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[6] J.F. Knight, Degrees of models, in Handbook of Recursive Mathematics, vol. 1, Elsevier, 1998, 289-309.

[7] A. Sorbi, The Medvedev lattice of degrees of difficulty, in: LMS Lecture Notes, Computability, Enumerability, Unsolvability: Directions in Recursion Theory, bf 24 (1996), 289-312.

[8] I.N. Soskov, Degree spectra and co-spectra of structures, Ann. Univ. Sofia, **96** (2004), 45-68.

[9] T.A. Slaman, Relative to any non-recursive set, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2117-2122.

[10] S. Wehner, Enumerations, countable structures and Turing degrees, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2131-2139.

[11] C. Ash, J. Knight, M. Manasse, T. Slaman, Generic copies of countable structures, Ann. Pure. Appl. Logic, **42** (1989), 195-205.

[12] R. Platek, A note on the cardinality of the Medvedev lattice, Proc. Amer. Math. Soc., **25** (1970), 917.

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А.И. Стукачев, О степенях представимости моделей I,II.

В данной работе рассматриваются представления алгебраических систем в допустимых множествах, а также различные отношения эффективной сводимости между системами. Основным объектом исследования являются полурешетки степеней Σ-определимости. В работе показано, что полурешетка степеней Σ-определимости счетных систем хорошо согласована с полурешетками T- и e-степеней подмножеств натуральных чисел. В работе также предпринята попытка исследования свойств систем, наследуемых при различных эффективных сводимостях, а также исследования зависимости степеней представимости от выбора различных допустимых множеств в качестве областей для представлений.