УДК 510.5

Обобщенно гиперарифметическая вычислимость над структурами. I [1]

А.И. СТУКАЧЕВ

1 Введение

Данная работа является продолжением работ [1, 2, 3, 4, 5, 6] и, особенно, [7], и посвящена распространению отношения гиперарифметической сводимости, а также операции гиперскачка, на класс абстрактных структур произвольной мощности. Данные результаты соответствуют "относительному" подходу к определению конструктивной сложности объектов, в том числе, структур, с помощью отношений эффективной сводимости.

В работе рассматривается класс аппроксимационных пространств, порожденных допустимыми множествами и, в частности, наследственно конечными надстройками над структурами. В последнем случае, в отличие от обобщенной вычислимости в допустимых множествах, являющихся HYP-надстройками над структурами, понятие конечного объекта, как и в HF-надстройках, остается стандартным. Это обстоятельство оказывается важным в случае, когда существенно исходное разделение объектов на конечные ("простые") и бесконечные ("сложные").

Обобщенная вычислимость на аппроксимационных пространствах понимается как эффективная определимость в динамической логике. Установлены связи между гиперарифметической вычислимостью и определимостью в языке динамической логики над аппроксимационным пространством, соответствующим наибольшей компоненте HF-вычислимости над 0. Аналогично понятию Σ-определимости структуры в допустимом множестве, вводится понятие эффективной определимости структуры на аппроксимационном пространстве. Аналогично отношению Σ-сводимости, естественным образом возникает отношение сводимости на структурах, порождающее соответствующие полурешетки степеней структур произвольной мощности. Установлено естественное вложение в эти полурешетки полурешетки гиперстепеней множеств натуральных чисел, сохраняющее операцию гиперскачка. Аналогично случаям сводимостей по Тьюрингу и по перечислимости, введено понятие структуры, имеющей гиперстепень, и получено синтаксическое описание таких структур в терминах определимости в динамической логике, дополняющее соответствующие результаты из [2, 3] и [8, 9].

В тексте работы используются определения и обозначения из [10, 11]. В частности, для допустимого множества $\mathbb{A}$, символом A обозначается его носитель (основное множество), $P(A)$ обозначает множество всех подмножеств A, $U^{\mathbb{A}}$ обозначает множество праэлементов $\mathbb{A}$, а A^* обозначает множество элементов $\mathbb{A}$, являющихся множествами (т.е. не праэлементами).

2 Аппроксимационные пространства и динамическая логика

В работе также используются понятия и определения теории аппроксимационных пространств Ершова–Скотта [12, 13, 14]. В качестве основной будем использовать следующую формализацию.

Определение 2.1. *Аппроксимационным пространством* будем называть тройку

$$\mathcal{X} = \langle X, F, \leqslant \rangle,$$

где X есть топологическое T_0-пространство, являющееся φ-пространством [14], $F \subseteq X$ есть базисное подпространство *конечных элементов*, а $\leqslant$ — порядок специализации на X.

Как и в [13, 14], обозначение $a \prec x$ означает, что $a \in F$ и $a \leqslant x$.

Известно (см. [14]), что всякое φ-пространство обладают следующим важным свойством: любой элемент $x \in X$ является пределом своих F-аппроксимаций:

$$x = \sup\{a \,|\, a \prec x\}.$$

Аппроксимационные пространства, рассматриваемые в данной работе, порождаются допустимыми множествами $\mathbb{A}$ таким образом, что $F = A$, $X \subseteq A \cup P(A)$ — некоторое множество (примеры см. в работе [15]), а порядок специализации $\leqslant$ определяется следующим образом: $\leqslant\, = \,\subseteq_{X\setminus U^{\mathbb{A}}} \cup =_{X\cap U^{\mathbb{A}}} \cup (\{\varnothing\} \times (X \cap U^{\mathbb{A}}))$.

Для случая, когда $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, существует максимальное по включению аппроксимационное пространство: можно взять в качестве X все множество $\mathrm{HF(M)} \cup P(\mathrm{HF(M)})$. Будем обозначать такие аппроксимационные пространства $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$.

В дальнейшем будут рассматриваться *структурированные* аппроксимационные пространства, то есть такие, в которых множество F является носителем некоторой структуры $\mathcal{F}$. Типичной явлется ситуация, когда структура такой же сигнатуры, что и $\mathcal{F}$, распространяется с $\mathcal{F}$ на $\mathcal{X}$. Как правило, это происходит путем определения отношений в расширенной структуре с помощью формул динамической логики (см. определения 2.3 и 2.4 ниже). В качестве примера можно указать процесс образования поля действительных чисел из поля рациональных чисел.

Следующее определение из [16] накладывает естественные ограничения на строение структуры $\mathcal{F}$.

Для произвольной структуры $\mathfrak{M}$, *схема кодирования* $\mathcal{C}$ [16] состоит из множества $N^{\mathcal{C}} \subseteq M$ и линейного порядка $\leqslant^{\mathcal{C}}$ на N, таких, что

$$\langle N^{\mathcal{C}}, \leqslant^{\mathcal{C}} \rangle \cong \langle \omega, \leqslant \rangle,$$

а также инъективного отображения $\pi^{\mathcal{C}}$ из множества всех конечных последовательностей элементов M в M. Для данной схемы кодирования, через $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots$ будем обозначать сооответствующие элементы N относительно порядка $\leqslant$. Кроме того, с ней связывается предикат $Seq^{\mathcal{C}}(x)$, истинный, если $x = \pi^{\mathcal{C}}(\emptyset)$ или $x = \pi^{\mathcal{C}}(\langle m_0, \ldots, m_n \rangle)$ для некоторых $m_0, \ldots, m_n \in M$, и функции $lh^{\mathcal{C}}(x)$, $pr^{\mathcal{C}}(x, \dot{m})$, выдающие соответственно длину и m-ый элемент набора, представленного элементом x, и выдающие $\dot{0}$ в случае несоответствия аргументов.

Определение 2.2. Структура $\mathcal{F}$ сигнатуры σ называется *приемлемой (acceptable)* [16], если существует схема кодирования $\mathcal{C}$, для которой предикаты и функции $N^{\mathcal{C}}$, $\leqslant^{\mathcal{C}}$, $Seq^{\mathcal{C}}$, $lh^{\mathcal{C}}$, $pr^{\mathcal{C}}$ определимы в $\mathcal{F}$ формулами первого порядка сигнатуры σ с параметрами.

В данной работе рассматриваются только аппроксимационные пространства вида $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$, в которых, для простоты изложения, структура $\mathfrak{M}$ имеет конечную предикатную сигнатуру. Таким образом, структуры $\mathcal{F} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, очевидно, являются приемлемыми. (Отметим, что структуры вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ разумно определены и имеют конечную предикатную сигнатуру $\{U^1, \in^2, \mathrm{Sat}^2\}$, даже в случае, когда сигнатура $\mathfrak{M}$ бесконечна и вычислима, см. [17].) Во всякой приемлемой структуре $\mathcal{F}$ определима инъективная функция упорядоченной пары $(\cdot, \cdot) : F^2 \to F$, а также соответствующие ей одноместные частичные функции l, r. В дальнейшем будем считать, что в аппроксимационных пространствах вида $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$ функция упорядоченной пары определена на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ так, что выполнено свойство *декартовой замкнутости* относительно $(\cdot, \cdot)$: для любых $x_0, x_1 \in X$, элемент $x = \sup\{(a_0, a_1) \,|\, a_0 \prec x_0, a_1 \prec x_1\}$ обладает следующими свойствами:

1) если $x_0, x_1 \in F$, то $x = (x_0, x_1)$;

2) для любого $c \prec x$, существуют $a_0 \prec x_0$ и $a_1 \prec x_1$, такие, что $c = (a_0, a_1)$.

В силу свойства 1, корректно для любых $x_0, x_1 \in X$ использовать для элемента $x = \sup\{(a_0, a_1) \,|\, a_0 \prec x_0, a_1 \prec x_1\}$ обозначение (x_0, x_1), распространяя, тем самым, функцию $(\cdot, \cdot)$ с F^2 на X^2.

Указанными свойствами обладает, например, функция $(\cdot, \cdot) : F^2 \to F$, определенная на $\mathcal{F} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ так: для любых $a, b \in HF(M)$ полагаем

$$(a, b) \risingdotseq (a \oplus b) \cup g_a \cup h_b,$$

где, как обычно, $a \oplus b = \{\langle c, 0\rangle | c \in a\} \cup \{\langle d, 1\rangle | d \in b\}$, $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, а множества g_a и h_b определяются следующим образом:

$$\begin{cases} g_a = \{\langle a, 2\rangle\}, & \text{если } U(a), \\ \varnothing, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_b = \{\langle b, 3\rangle\}, & \text{если } U(b), \\ \varnothing, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко убедиться, что функция $(\cdot, \cdot)$ определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, как и соответствующие ей частичные функции l, r.

Пусть σ — конечная предикатная сигнатура, содержащая, помимо прочего, бинарный предикатный символ $\leqslant$. Определим множество формул динамической логики DL_σ (с модальными скобками, как в [18], и в отличие от [19]) следующим образом. Формулы логики DL_σ имеют переменные двух типов — для конечных объектов и для произвольных, потенциально бесконечных, объектов, доступ к которым возможен только с помощью их конечных фрагментов. Будем обозначать эти множества FV и XV, соответственно. Для формулы θ, множества ее свободных переменных этих двух типов будем обозначать, соответственно, $FV(\theta)$ и $XV(\theta)$. Если θ – формула логики первого порядка, то все ее переменные, в том числе свободные, считаются конечными. Переменные, обозначаемые прописными буквами $(S, P, \ldots)$, по умолчанию считаются перемеными типа XV.

Определение 2.3. Множество Δ_0^{DL}-*формул логики* DL_σ определяется как наименьшее множество R, такое, что

1) если θ — формула логики первого порядка сигнатуры σ, то $\theta \in R$ (полагаем при этом $XV(\theta) \leftrightharpoons \varnothing$, $FV(\theta)$ – множество всех свободных переменных формулы θ);

2) если $\theta \in R$, $S \in XV$, $a \in FV$, то

$$[a|S]\theta \in R, < a|S > \theta \in R$$

(полагаем при этом $XV([a|S]\theta) \leftrightharpoons XV(\theta) \cup \{S\}$, $FV([a|S]\theta) \leftrightharpoons FV(\theta) \setminus \{a\}$), аналогично для формулы $< a|S > \theta$;

3) если $\theta \in R$, $a, s \in FV$, то

$$[a|s]\theta \in R, < a|s > \theta \in R$$

(полагаем при этом $XV([a|s]\theta) \leftrightharpoons XV(\theta)$, $FV([a|s]\theta) \leftrightharpoons (FV(\theta) \setminus \{a\}) \cup \{s\}$), аналогично для формулы $< a|s > \theta$;

4) если $\theta_0, \theta_1 \in R$, то $\neg\theta_0 \in R$, $(\theta_0 \wedge \theta_1) \in R$, $(\theta_0 \vee \theta_1) \in R$ и $(\theta_0 \to \theta_1) \in R$.

Выражения $[a|S], < a|S >, [a|s]$ и $< a|s >$ будем называть *модальными скобками.*

Определение 2.4. Множество Σ_1^{DL}-*формул логики* DL_σ определяется как наименьшее множество Q, такое, что

> если θ – Δ_0^{DL}-формула логики DL_σ, $S \in XV$, то $\theta \in Q$ и $(\exists S)\theta \in Q$ (при этом полагаем $XV((\exists S)\theta) \leftrightharpoons XV(\theta) \setminus \{S\}$, $FV((\exists S)\theta) \leftrightharpoons FV(\theta)$).

Аналогично определяется множество Π_1^{DL}-*формул логики* DL_σ. Множество всех формул логики DL_σ получается из класса Δ_0^{DL} формул логики DL_σ замыканием относительно логических связок $\neg, \wedge, \vee, \to$, модальных скобок, а также кванторов по переменным всех типов.

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{X} = (X, F, \leqslant)$ — структурированное аппроксимационное пространство над структурой $\mathcal{F} = (F, \sigma^{\mathcal{F}})$ сигнатуры σ. Определим понятие *истинности* на $\mathcal{X}$ формулы φ логики DL_σ при означивании $\gamma : XV(\varphi) \cup FV(\varphi) \to X$, с условием $\gamma(x) \in F$ для любого $x \in FV(\varphi)$, обозначаемое

$$\mathcal{X} \models \varphi \restriction \gamma,$$

индукцией по сложности φ. Пусть, для $x \in FV$ и $a \in F$, $\gamma_a^x \leftrightharpoons (\gamma \setminus (\{x\} \times F)) \cup \{\langle x, a\rangle\}$, аналогично, для $S \in XV$ и $S_0 \in X$, $\gamma_{S_0}^S \leftrightharpoons (\gamma \setminus (\{S\} \times X)) \cup \{\langle S, S_0\rangle\}$. Полагаем

1) $\mathcal{X} \models [x|S]\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(S)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;

2) $\mathcal{X} \models < x|S > \theta(x) \restriction \gamma$, если существует $a \prec \gamma(S)$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;

3) $\mathcal{X} \models [x|s]\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \prec \gamma(s)$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;

4) $\mathcal{X} \models < x|s > \theta(x) \restriction \gamma$, если существует $a \prec \gamma(s)$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$;

5) $\mathcal{X} \models (\exists S)\theta(S) \restriction \gamma$, если существует $S_0 \in X$, т.ч. $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_{S_0}^S$;

6) $\mathcal{X} \models (\forall x)\theta(x) \restriction \gamma$, если для всех $a \in F$ выполнено $\mathcal{X} \models \theta \restriction \gamma_a^x$,

и так далее: истинность формул, образованных при помощи логических связок, а также истинность атомарных формул определяются стандартным образом (считаем, что предикатный символ $\leqslant$ также интерпретируется в $\mathcal{X}$ стандартным образом, т.е. как порядок специализации).

Множество $A \subseteq X$ будем называть Δ^{DL}-*определимым в логике* DL_σ, если существуют Σ_1^{DL}-формула и Π_1^{DL}-формула логики DL_σ, с параметрами из X, каждая из которых определяет в $\mathcal{X}$ множество A в смысле указанной выше семантики. Кроме того, множество $A \subseteq F$ будем называть *финитно* Δ^{DL}-*определимым в логике* DL_σ, если существуют Σ_1^{DL}-формула и Π_1^{DL}-формула логики DL_σ, со свободными переменными только из FV и с параметрами из F, каждая из которых определяет в $\mathcal{X}$ множество A.

Замечание 2.1. Из определения следует, что в аппроксимационных пространствах вида $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$ всякая Δ_0^{DL}-формула семантически эквивалентна формуле логики $DL_{\sigma,F}$ с дополнительной константой F, выделяющей множество конечных элементов, не содержащей неограниченных кванторов. Действительно, достаточно последовательно заменить подформулы вида $(\forall a)\Theta$ и $(\exists a)\Theta$, для $a \in FV$, на подформулы $[c|F]((\exists a \in c)(c = \{a\}) \to \Theta)$ и $< c|F > ((\exists a \in c)(c = \{a\}) \wedge \Theta)$, соответственно.

Инъективная функция $s : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ называется *атомизацией*, если, для всех $a \in F$,

$$(\mathcal{X}, s) \models [c|s(a)]((c = 0) \vee (c = s(a))),$$

и, для всех $A \subseteq F$ и $x \in F$,

$$s(x) \prec \sup\{s(a)|a \in A\} \text{ тогда и только тогда, когда } x \in A.$$

Частичная одноместная функция e на $\mathcal{F}$ называется обратной к атомизации s, если $\mathrm{dom}(e) = \mathrm{rng}(a)$ и $e(s(a)) = a$ для всех $a \in F$. Структурированное аппроксимационное пространство $\mathcal{X}$ над $\mathcal{F}$ называется *пространством с атомизацией*, если на $\mathcal{F}$ существуют определимые функции атомизации и обратной к ней. Например, аппроксимационные пространства вида $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$ являются пространствами с атомизацией: в качестве атомизации можно взять функцию $s(x) = \{x\}$. Отметим, что при таком выборе функции $s(x)$ отношение принадлежности $\in$ и константа $\varnothing$ выражаются через отношение специализации $\leqslant$ и функцию атомизации $s(x)$, и наоборот. Действительно, для любых $a, b \in \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$, $a \in b$ тогда и только тогда, когда $s(a) \leqslant b$, и наоборот, $s(a) = b$ тогда и только тогда, когда $b = \{a\}$, то есть $\forall x(x \in b \to x = a)$, аналогично, если, a и b не являются праэлементами (то есть $(a = \varnothing) \vee \exists c(c \in a)$, аналогично для b), то $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$, то есть $\forall x(x \in a \to x \in b)$.

Аппроксимационное пространство $\mathcal{X}$ будем называть *насыщенным*, если для любого совместного (т.е., имеющего верхнюю грань) множества $Y \subseteq X$, в X существует $\sup Y$. В случае, когда в $\mathcal{X}$ существует наибольший элемент, любое множество элементов из $\mathcal{X}$ совместно.

Аппроксимационное пространство $\mathcal{X}$ с атомизацией s будем называть *F-ограниченным*, если множество $s(F)(= \{s(x) \,|\, x \in F\})$ имеет верхнюю грань в $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X}$ насыщенное и F-ограниченное одновременно, то $\sup s(F) \in X$.

Структурированное аппроксимационное пространство $\mathcal{X}$ сигнатуры σ будем называть *A-определенным*, если существует Δ_0^{DL}-формула $\Theta(R)$ сигнатуры $\sigma \cup \{R^1\}$ (предикатный символ R не входит в σ), такая, что, для любого подмножества $R_0 \subseteq F$, $(\mathcal{X}, R_0) \models \Theta(R)$ тогда и только тогда, когда существует $x_0 \in X$, для которого $R_0 = \{a \in F \,|\, a \prec x_0\}$.

Например, все пространства вида $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$ являются А-определенными: достаточно использовать формулу

$$\Theta(R) \leftrightharpoons (\forall c(R(c) \to \forall c'((c' \leqslant c) \to R(c'))) \wedge \forall a_1 \forall a_2((R(a_1) \wedge R(a_2)) \to R(a_1 \vee a_2))),$$

используя определимую в сигнатуре $\{\leqslant\}$ функцию $\vee$. Для случая произвольного аппроксимационного пространства сформулированные в Θ условия замкнутости R вниз и относительно точных верхних граней являются необходимыми для того, чтобы R было множеством аппроксимаций некоторого элемента пространства, но, вообще говоря, не достаточными.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{X}$ — насыщенное F-ограниченное декартово замкнутое структурированное A-определенное аппроксимационное пространство с атомизацией над приемлемой структурой $\mathcal{F}$ сигнатуры σ, и пусть Φ — Δ_0^{DL}-формула логики DL_σ. По формуле Φ эффективно определяется Δ_0^{DL}-формула Ψ логики DL_σ, такая, что

$$\mathcal{X} \models [a|S](\exists P)\Phi \iff \mathcal{X} \models (\exists P)[a|S]\Psi.$$

Доказательство. Пусть, при указанных в формулировке условиях, имеет место $\mathcal{X} \models [a|S](\exists P)\Phi$, то есть для любого $a \prec S$ существует $P_a \in X$, для которого $\mathcal{X} \models \Phi(a, P_a)$. Пусть $s(x)$ — атомизация элемента $x \in F$, и пусть $e : \mathrm{rng}(s) \to F$ — обратная функция для s. Для всякого $a \prec S$ рассмотрим элемент $T_a = \sup\{s((a,t)) \,|\, t \prec P_a\}$, и положим $P_* = \sup\{T_a \,|\, a \prec S\}$. Пусть для некоторого $c \in \mathrm{rng}(s)$ (а значит, $c \neq 0$) справедливо $c \prec P_*$. По определению атомизации s, из $c \prec \sup\{s((a,t))|a \prec S, t \prec P_a\}$ следует, что, для некоторых $a \prec S$ и $t \prec P_a$, справедливо $c = s((a,t))$.

Таким образом, $\mathcal{X} \models [a|S]\Psi(a, P_*)$, где

$$\Psi(a,P) \leftrightharpoons (\Phi_*(a,P) \wedge [a'|S](< c|P > ((c \in \mathrm{rng}(s)) \wedge (l(e(c)) = a')) \wedge \Theta(R_{a'}))),$$

где $\Theta(R)$ — формула, подтверждающая A-определенность $\mathcal{X}$,

$$R_a \leftrightharpoons \{c \in F| < x|P_* > (x = s((a,c)))\},$$

— Δ_0^{DL}-определимое в $(\mathcal{X}, P_*)$ множество, а Δ_0^{DL}-формула Φ_* определяется по Φ индукцией по сложности:

$$([c|P]\Phi_0(c))_* \leftrightharpoons [c|P](((c \in \mathrm{rng}(s)) \wedge (l(e(c)) = a)) \to (\Phi_0)_*(r(e(c)))),$$

$$(< c|P > \Phi_0(c))_* \leftrightharpoons < c|P > ((c \in \mathrm{rng}(s)) \wedge (l(e(c)) = a) \wedge (\Phi_0)_*(r(e(c)))),$$

и так далее: для $S \in XV \setminus \{P\}$ и $c \in FV$ полагаем $([c|S]\Phi_0)_* \leftrightharpoons [c|S](\Phi_0)_*$, аналогично, для $c, s \in FV$, $([c|s]\Phi_0)_* \leftrightharpoons [c|s](\Phi_0)_*$, $(< c|s > \Phi_0)_* \leftrightharpoons < c|s > (\Phi_0)_*$, а также $(\forall c\Phi_0)_* \leftrightharpoons \forall c(\Phi_0)_*$, $(\exists c\Phi_0)_* \leftrightharpoons \exists c(\Phi_0)_*$, и $(\Phi_1 \circ \Phi_2)_* \leftrightharpoons ((\Phi_1)_*\Phi(\Theta_2)_*)$ для $\circ \in \{\vee, \wedge, \to\}$, $(\neg\Phi_0)_* \leftrightharpoons \neg(\Phi_0)_*$, $(\Phi_0)_* \leftrightharpoons \Phi_0$ в случае, когда Φ_0 — атомарная формула.

Пусть теперь для формулы Ψ, посторенной по формуле Φ указанным выше образом, справедливо $\mathcal{X} \models (\exists P)[a|S]\Psi$, то есть существует элемент $P \in X$ такой, что, для всех $a \prec S$,

$$\mathcal{X} \models (\Phi_*(a,P) \wedge [a'|S](< c|P > ((c \in \mathrm{rng}(s)) \wedge (l(e(c)) = a')) \wedge \Theta(R_{a'}))),$$

где $R_a \leftrightharpoons \{c \in F| < x|P > (x = s((a,c)))\}$.

Из индуктивного определения Φ_* следует, что $\mathcal{X} \models [a|S](\exists P)\Phi$, так как для всякого $a \prec S$ в качестве такого P можно взять элемент $P_a \leftrightharpoons \sup R_a$. $\square$

Отметим, что в приемлемых структурированных аппроксимационных пространствах аппарат кодирования позволяет по любой формуле вида $\exists S_0 \exists S_1 \Phi$, где Φ — Δ_0^{DL}-формула, эффективно построить эквивалентную ей Σ_1^{DL}-формулу $\exists S \Phi^*$ (Φ^* — Δ_0^{DL}-формула).

Следующее определение аналогично известному определению Ю.Л.Ершова [11] конструктивизируемости структуры в допустимом множестве.

Определение 2.6. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная структура вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \ldots \rangle$, и пусть $\mathcal{X}$ — приемлемое структурированное аппроксимационное пространство над структурой сигнатуры σ. Будем называть структуру $\mathfrak{M}$ *Δ^{DL}-определимой в $\mathcal{X}$*, если существует вычислимая последовательность Σ_1^{DL}-формул логики DL_σ

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, y), \Phi_=(x_0, x_1, y), \Psi_=(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Psi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \Phi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y), \Psi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y), \ldots,$$

такая, что, для некоторого параметра $c \in X$, полагая

$$M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathcal{X}}(x_0, c), \ \ \eta \leftrightharpoons \Phi_=^{\mathcal{X}}(x_0, x_1, c) \cap M_0^2,$$

имеем $M_0 \neq \varnothing$, $X \setminus M_0 = \Psi^{\mathcal{X}}(x_0, c)$, η — отношение конгруэнтности на структуре

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, P_1^{\mathfrak{M}_0}, \ldots \rangle,$$

где $P_i^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_i^{\mathcal{X}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, c) \cap M_0^{n_i}$ для всех i,

$$\Psi_=^{\mathcal{X}}(x_0, x_1, c) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Phi_=^{\mathcal{X}}(x_0, x_1, c),$$
$$\Psi_i^{\mathcal{X}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, c) \cap M_0^{n_i} = M_0^{n_i} \setminus \Phi_i^{\mathcal{X}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, c)$$

для всех $i \in \omega$, и структура $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-структуре $\mathfrak{M}_0 / \eta$.

В случае, когда рассматриваются формулы без свободных переменных из XV, а параметр $c \in F$, будем говорить, что структура $\mathfrak{M}$ *финитно Δ^{DL}-определима в $\mathcal{X}$*.

Определение 2.7.

1. Структура $\mathfrak{A}$ *финитно Δ^{DL}-сводится* к структуре $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{B}$), если структура $\mathfrak{A}$ финитно Δ^{DL}-определима в аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$.

2. Структурированное аппроксимационное пространство $\mathcal{X}_1$ *Δ^{DL}-сводится* к структурированному аппроксимационному пространству $\mathcal{X}_2$ (обозн. $\mathcal{X}_1 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_2$), если $\mathcal{X}_1$ как структура Δ^{DL}-определима в аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}_2$, и

   2.1. структура конечных элементов $\mathcal{F}_1$ финитно Δ^{DL}-определима в $\mathcal{X}_2$, и

2.2. существует эффективная процедура, сопоставляющая всякой Σ_1^{DL}-формуле сигнатуры пространства $\mathcal{X}_1$ Σ_1^{DL}-формулу сигнатуры пространства $\mathcal{X}_2$, определяющую соответствующий предикат в данном представлении пространства $\mathcal{X}_2$ в пространстве $\mathcal{X}_1$.

Как следует непосредственно из определений, для структур $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, из Σ-сводимости $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ следует финитная Δ^{DL}-сводимость $\mathfrak{A} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{B}$. Кроме того, определенное таким образом на структурах отношение финитной сводимости обладает свойством транзитивности.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ — структуры конечных предикатных сигнатур, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ — структурированные аппроксимационные пространства конечных предикатных сигнатур.

1. Если $\mathfrak{A} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{C}$.

2. Если $\mathcal{X}_1 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_2 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_3$, то $\mathcal{X}_1 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_3$.

Доказательство. Докажем пункт 1. Транзитивность отношения $\leqslant_f^{DL}$ на структурах следует из леммы 2.1 и замечания перед ней, так как аппроксимационные пространства вида $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$ удовлетворяют всем условиям этой леммы.

Действительно, пусть $\mathfrak{A} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{C}$. Из последней сводимости непосредственно следует, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \leqslant_f^{DL} \mathfrak{C}$, так как $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$. Более того, имеет место сводимость

$$\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})} \leqslant^{DL} \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}.$$

Действительно, соответствующее представление аппроксимационного пространства $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$ определяется в аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$ следующим образом.

Следуя [11], для произвольной структуры $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{C})$ конечной предикатной сингатуры σ будем рассматривать структуру $\mathcal{HF}(\mathcal{M})$ сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{U^1, \in^2\}$, которая определяется так: полагаем в качестве носителя этой структуры множество $\cup_{n\in\omega}\mathcal{H}_n(M)$, где

$$\mathcal{H}_0(M) = \{\langle m, 0\rangle | m \in M\},$$

$$\mathcal{H}_{n+1}(M) = \{\langle d, n+1\rangle \,|\, d \in HF(C), d \subseteq \cup_{k\leqslant n}\mathcal{H}_k(M),\ \ \exists e(\langle e, n\rangle \in d)\},\ n \in \omega.$$

Полагаем $U^{\mathcal{HF}(\mathcal{M})} = \mathcal{H}_0(M)$ и

$$\in^{\mathcal{HF}(\mathcal{M})} = \{\langle a, b\rangle \,|\, \exists n > 0 \exists c(b = \langle c, n\rangle \wedge a \in c)\}.$$

Интерпретация в $\mathcal{M}$ символов сигнатуры σ естественным образом определяют их интерпретацию в структуре $\mathcal{HF}(\mathcal{M})$.

Класс Σ-формул сигнатуры σ' естественным образом интерпретируется в структуре $\mathcal{HF}(\mathcal{M})$, причем, аналогично [11], несложно убедиться, что $\mathcal{HF}(\mathcal{M})$ является моделью KPU и допустимым множеством — наследственно конечной надстройкой над системой $\mathcal{M}_0 \cong \mathcal{M}$ с носителем $U^{\mathcal{HF}(\mathcal{M})}$ и атомарной диаграммой, образованной с помощью упорядоченных пар и наборов из $\mathcal{HF}(\mathcal{M})$.

Пусть финитно Δ^{DL}-определимое в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$ представление структуры $\mathfrak{B}$ задается с помощью структуры $\mathfrak{B}_0$ и отношения конгруэнции η на нем, то есть $\mathfrak{B}_0/\eta \cong \mathfrak{B}$. Основное множество представления пространства $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$ (до факторизации) определяется в виде дизъюнктного объединения $\mathcal{HF}(B_0) \cup X_0$, где

$$X_0 \rightleftharpoons \{S \subseteq \mathrm{HF}(C) | \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})} \models [a|S](\forall c \in a)(c \in \mathcal{HF}(B_0))\},$$

таким образом, основное множество Δ^{DL}-определимо в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$. Определим на $\mathcal{HF}(B_0) \cup X_0$ отношение эквивалентности $=_\eta$ и отношение $\neq_\eta$ следующим образом:

а) на $\mathcal{HF}(B_0) \times \mathcal{HF}(B_0)$ определим отношения $=_\eta$ и $\neq_\eta$ индукцией по рангу (Σ_1^{DL}-формулы используются только при определении соответствующих отношений на элементах ранга 0, поэтому можно воспользоваться теоремой о Σ-рекурсии для допустимого множества $\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)$):

1) если a_1 и a_2 имеют ранг 0, то $a_1 =_\eta a_2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})} \models \Phi_\eta(l(a_1), l(a_2), c)$, где $\Phi_\eta(x, y, z)$ и c, соответсвенно, Σ_1^{DL}-формула и параметр из Δ^{DL}-определения структуры $\mathfrak{B}$ в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$;

2) если a_1 и a_2 имеют ранг 0, то $a_1 \neq_\eta a_2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})} \models \Psi_\eta(l(a_1), l(a_2), c)$, где $\Psi_\eta(x, y, z)$ и c, соответсвенно, Σ_1^{DL}-формула и параметр из Δ^{DL}-определения структуры $\mathfrak{B}$ в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$;

3) если ранг a_1 или ранг a_2 отличен от нуля, то $a_1 =_\eta a_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 \subseteq_{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)} a_2$ и $a_2 \subseteq_{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)} a_1$, то есть $\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0) \models ((\forall x \in a_1)(\exists y \in a_2)(x =_\eta y)) \wedge ((\forall y \in a_2)(\exists x \in a_1)(x =_\eta y))$;

4) если ранг a_1 или ранг a_2 отличен от нуля, то $a_1 \neq_\eta a_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 \not\subseteq_{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)} a_2$ или $a_2 \not\subseteq_{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)} a_1$, то есть $\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0) \models ((\exists x \in a_1)(\forall y \in a_2)(x \neq_\eta y)) \vee ((\exists y \in a_2)(\forall x \in a_1)(x \neq_\eta y))$.

б) на $X_0 \times X_0$ отношение $=_\eta$ определяется через отношение специализации $\leqslant$: полагаем $S_1 \leqslant S_2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})} \models [a_1|S_1] < a_2|S_2 > (a_1 =_\eta a_2)$, и $S_1 \nleqslant S_2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})} \models < a_1|S_1 > [a_2|S_2](a_1 \neq_\eta a_2)$. Полагаем $S_1 =_\eta S_2$ тогда и только тогда, когда $S_1 \leqslant S_2$ и $S_2 \leqslant S_1$. Аналогично, полагаем $S_1 \neq_\eta S_2$ тогда и только тогда, когда $S_1 \nleqslant S_2$ или $S_2 \nleqslant S_1$.

в) Наконец, для произвольных $c \in \mathcal{HF}(B_0)$ и $S \in X_0$, полагаем $c =_\eta S$ (и $S =_\eta c$) в том и только том случае, когда $S =_\eta \{x \in \mathrm{HF}(C) \,|\, x \in_{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)} c\}$ (последнее множество является элементом X_0).

Таким образом, в представлении с данным основным множеством определяются множество конечных элементов F (как элементов, η-эквивалентных элементам $\mathcal{HF}(B_0)$), предикаты системы $\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)$, а также отношение специализации $\leqslant$.

Используя полученное представление, преобразуем последовательность Σ_1^{DL}-формул, определяющую представление $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$, в последовательность Σ_1^{DL}-формул, определяющую представление $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$ внутри соответствующего представления $\mathcal{X}_{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)} \subseteq \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$: применим сначала определяемое ниже преобразование * Σ_1^{DL}-формул в соответствующие формулы сигнатуры $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$. Затем, учитывая Δ^{DL}-определимость множеств F и X_0, применим лемму 2.1 и замечание перед ней для преобразования полученных формул в Σ_1^{DL}-формулы.

Преобразование * определяется индукцией по сложности Σ_1^{DL}-формулы $\varphi(\bar{x})$. Не нарушая общности, можно считать, что $\varphi(\bar{x})$ является формулой с тесными отрицаниями. Кроме того, $\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)$ как структура Δ^{DL}-определима в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$, поэтому выражения $z \in \mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)$, $\mathrm{rank}^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)}(z) = 0$ и т.п., также Δ^{DL}-определимы в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{C})}$.

1) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $(\exists S)\theta$, то $\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons (\exists S)((S \in X_0) \wedge \theta^*)$;

2) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $< a|S > \theta$, то $\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons < a|S > ((a \in F) \wedge \theta^*)$;

3) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $[a|S]\theta$, то $\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons [a|S]((a \in F) \to \theta^*)$;

4) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $\exists a\theta(a, \bar{x})$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons \exists a((a \in F) \wedge \theta^*(a, \bar{x}));$$

5) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $(\forall a \in b)\theta(a, \bar{x})$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons \forall a((a \in \mathrm{TC}(b)) \to (\neg(a \in b)^* \vee \theta^*(a, \bar{x})));$$

6) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $(\exists a \in b)\theta(a, \bar{x})$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons \exists a((a \in \mathrm{TC}(b)) \wedge (a \in b)^* \wedge \theta^*(a, \bar{x}));$$

7) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $(\psi_1(\bar{x}) \circ \psi_2(\bar{x}))$, $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons (\psi_1^*(\bar{x}) \circ \psi_2^*(\bar{x}));$$

8) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $U(x)$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons ((x \in F) \wedge (\mathrm{rank}^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)}(x) = 0) \wedge \neg(x = \varnothing));$$

9) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $\neg U(x)$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \leftrightharpoons ((x \in F) \wedge (\mathrm{rank}^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)}(x) > 0));$$

10) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $R_k(\bar{x})$, где R_k — сигнатурный символ $\mathfrak{B}$ или символ равенства, то

$$(\varphi(\bar{x}))^* \leftrightharpoons \Phi_k(l(x_0), \ldots, l(x_{n_k-1}), c) \wedge \Phi(l(x_0), c) \wedge \ldots \wedge \Phi(l(x_{n_k-1}), c) \wedge$$
$$\wedge (r(x_0) = 0) \wedge \ldots \wedge (r(x_{n_k-1}) = 0)), ;$$

11) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $\neg R_k(\bar{x})$, где R_k — сигнатурный символ $\mathfrak{B}$ или символ равенства, то

$$(\varphi(\bar{x}))^* \risingdotseq (\Psi_k(l(x_0), \ldots, l(x_{n_k-1}), c) \wedge \Phi(l(x_0), c) \wedge \ldots \wedge \Phi(l(x_{n_k-1}), c) \wedge$$

$$\wedge (r(x_0) = 0) \wedge \ldots \wedge (r(x_{n_k-1}) = 0)),$$

12) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $(a \in b)$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \risingdotseq \exists n > 0 \exists c((b = \langle c, n \rangle) \wedge (\exists a_0 \in c)(a_0 =_\eta a));$$

13) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $\neg(a \in b)$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \risingdotseq (\mathrm{rank}^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B}_0)}(b) = 0) \vee (\exists n > 0 \exists c((b = \langle c, n \rangle) \wedge (\forall a_0 \in c)(a_0 \neq_\eta a)));$$

14) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $(a = b)$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \risingdotseq ((a \in F) \wedge (b \in F) \wedge (a =_\eta b));$$

15) если $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $\neg(a = b)$, то

$$\varphi^*(\bar{x}) \risingdotseq ((a \in F) \wedge (b \in F) \wedge (a \neq_\eta b)).$$

Для доказательства пункта 2 теоремы достаточно воспользоваться пунктом 2.2. соответствующего определения.

□

Аппроксимационные пространства $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ будем называть Δ^{DL}*-эквивалентными*, если $\mathcal{X}_1 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_2 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_1$. Для примера Δ^{DL}-эквивалентных аппроксимационных пространств, рассмотрим аппроксимационное пространство $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}$, порожденное наименьшим допустимым множеством, и аппроксимационное пространство $\mathcal{X}_0$, неявно используемое в [21] для определения гиперарифметической вычислимости на натуральных числах. Для $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$, определим приемлемое структурированное аппроксимационное пространство

$$\mathcal{X}_0 = (FunIS(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N}, FinFunIS(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N}, \leqslant),$$

где $FunIS(\mathcal{N})$ — множество всех частичных функций на $\mathcal{N}$, область определения которых является начальным сегментом натурального ряда, $FinFunIS(\mathcal{N})$ — множество всех частичных функций на $\mathcal{N}$, область определения которых является конечным начальным сегментом натурального ряда, а отношение $\leqslant$ определяется как отношение включения на функциях (отождествляемых со своими графиками, т.е. множествами пар) и как отношение равенства на натуральных числах. Сигнатуру соответствующей структуры $\mathcal{F}$ с основным множеством $FinFunIS(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N}$ можно считать состоящей из тех же предикатов и функций, что и схема кодирования $\mathcal{C}$.

Предложение 2.1.

$$\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)} \equiv^{DL} \mathcal{X}_0.$$

Доказательство. Сводимость $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)} \leqslant^{DL} \mathcal{X}_0$ следует из конструктивизируемости допустимого множества $\mathbb{HF}(\varnothing)$ в $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$ и Δ^{DL}-определимости в $\mathcal{X}_0$ множества $P(HF(\varnothing))$ с отношением $\subseteq$. Сводимость $\mathcal{X}_0 \leqslant^{DL} \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}$ следует из Σ-определимости структуры $\mathcal{N}$ в $\mathbb{HF}(\varnothing)$ и Δ^{DL}-определимости в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}$ множеств $FunIS(\mathcal{N})$ и $FinFunIS(\mathcal{N})$, предикатов и функций схемы кодирования $\mathcal{C}$ на $FinFunIS(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N}$, а также отношения включения на элементах $FunIS(\mathcal{N})$. □

3 Обобщенно гиперарифметическая вычислимость

Одним из свойств, выразимых в языке динамической логики над (структурированным) аппроксимационным пространством $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}$, порожденным наименьшим допустимым множеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$, является (относительная) гиперарифметичность.

Теорема 3.1. Пусть $A, B \subseteq \omega$. Следующие условия эквивалентны:

1) A финитно Δ^{DL}-определимо в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}, B)$;

2) $A \leqslant_h B$ (A гиперарифметически сводится к B).

Доказательство. Установим сначала импликацию 2) $\to$ 1). Пусть $A \leqslant_h B$, что, по определению, означает, что A Δ^1_1-определимо в $(\mathbb{N}, B)$. Известно (см. [21]), что всякое Π^1_1-определимое множество натуральных чисел определимо выражением вида $\forall f \exists n R(\overline{f}(n), x)$, где $R \subseteq \omega^2$ — вычислимое отношение, а $\overline{f}(n)$ обозначает набор $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\rangle$. Аналогично, всякое Σ^1_1-определимое множество натуральных чисел определимо выражением вида $\exists f \forall n Q(\overline{f}(n), x)$ для некоторого вычислимого отношения $Q \subseteq \omega^2$.

Пусть $Fun(f)$ обозначает Δ^{DL}_0-формулу, утверждающую, что f является функцией (т.е. множеством пар с условием однозначности), а $Fun_\omega(f)$ обозначает Δ^{DL}_0-формулу $(Fun(f) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \omega) \wedge (\mathrm{rng}(f) \subseteq \omega))$. Указанные выше выражения для Π^1_1- и Σ^1_1-определимых множеств натуральных чисел эквивалентны в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}$ формулам логики DL сигнатуры $\{U, \in\}$

$$(\forall f)(Fun_\omega(f) \to (< a|f >< n|\omega > (a = \overline{f}(n)) \wedge R^*(a, x)))$$

и, соответственно,

$$(\exists f)(Fun_\omega(f) \wedge [a|f](< n|\omega > (a = \overline{f}(n)) \to Q^*(a, x))),$$

где $R^*(a, x)$ и $Q^*(a, x)$ — Δ^{DL}_0-формулы, определяющие,соответственно, отношения R и Q. Таким образом, Σ^1_1- и Π^1_1-формулы, подтверждающие Δ^1_1-определимость A в $(\mathbb{N}, B)$, посредством данных преобразований модифицируются в формулы, подтверждающие финитную Δ^{DL}-определимость A в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}, B)$.

Импликация 1) $\to$ 2) следует из предложения 2.1 и теоремы 2.1, точнее, из следующей цепочки Δ^{DL}-сводимостей: имеем $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}, B) \leqslant^{DL} (\mathcal{X}_0, B)$ по предложению 2.1, $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}, A) \leqslant^{DL} (\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}, B)$ по пункту 1, и $(\mathcal{X}_0, A) \leqslant^{DL} (\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}, A)$ снова по предложению 2.1. Таким образом, $(\mathcal{X}_0, A) \leqslant^{DL} (\mathcal{X}_0, B)$ по теореме 2.1, что и означает $A \leqslant_h B$.

$\square$

Следствие 3.1. Пусть $A \subseteq \omega$. Следующие условия эквивалентны:

1) A финитно Δ^{DL}-определимо в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\varnothing)}$;

2) A — гиперарифметическое множество.

Операция Σ-скачка позволяет обобщить определенные на классе множеств натуральных чисел операции скачка относительно сводимостей по Тьюрингу и по перечислимости и распространить их на класс абстрактных структур относительно Σ-сводимости. Определяемая ниже операция гиперскачка структуры аналогичным образом согласована с операцией гиперскачка множества натуральных чисел.

Определение 3.1. *Гиперскачком* структуры $\mathfrak{A}$ называется структура

$$\mathfrak{A}^H \leftrightharpoons (\mathbb{HF}(\mathfrak{A}), \Sigma\text{-Sat}^{DL}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}),$$

где $\Sigma\text{-Sat}^{DL}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}$ есть множество

$$\{\langle n, \bar{c}\rangle \mid n \in \omega \text{ — геделевский номер } \Sigma_1^{DL}\text{-формулы } \Phi(\bar{x}),\ \bar{c} \in HF(A),\ \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})} \models \Phi(\bar{c})\}.$$

Обозначим полурешетку степеней структур по отношению эквивалентности $\equiv_f^{DL}$ через $\mathcal{S}^{DL}$. Непосредственным следствием теоремы 3.1 является

Предложение 3.1. Существует естественное вложение полурешетки гиперстепеней множеств натуральных чисел (с отношением гиперсводимости) в полурешетку $(\mathcal{S}^{DL}, \leqslant^{DL})$, сохраняющее операцию гиперскачка.

Представлением структуры $\mathfrak{M}$ вычислимой сигнатуры σ в допустимом множестве $\mathbb{A}$ называются структура $\mathcal{C}$ сигнатуры $\sigma \cup \{\sim^2\}$ (символ $\sim$ не входит в сигнатуру σ), носителем которой является непустое подмножество A, интерпретацией отношения $\sim$ является отношение конгруэнтности на $\mathcal{C} \upharpoonright \sigma$, такое, что $(\mathcal{C} \upharpoonright \sigma)/\!\sim\, \cong \mathfrak{M}$. В дальнейшем будем отождествлять представление $\mathcal{C}$ (точнее, его атомарную диаграмму) с некоторым подмножеством A, зафиксировав геделевскую нумерацию атомарных формул сигнатуры $\sigma \cup \{\sim\}$. Множество всех представлений структуры $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$ будем обозначать $\mathrm{Pr}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M})$, а также использовать обозначение $\mathrm{Pr}_\omega(\mathfrak{M})$ для множества всех представлений структуры $\mathfrak{M}$ на натуральных числах.

Наряду с представлением, будем использовать другое понятие, аналогичное, но более тесно связанное с рассматриваемой системой. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная система, а $\mathbb{A}$ — допустимое множество. *Копией* системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$ будем называть любое сюръективное отображение $\pi : C \to M$, где $C \subseteq A$ – множество "обозначений" для элементов $\mathfrak{M}$. Всякая копия $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{A}$ однозначно определяет соответствующее представление, но не наоборот. В частности, если $C \subseteq \omega$, то копия π определяет представление $\mathfrak{M}$ на натуральных числах.

Определение 3.2. Будем говорить, что счетная структура $\mathfrak{A}$ имеет *гиперстепень*, если существует $\mathcal{C}_0 \in \mathrm{Pr}_\omega(\mathfrak{A})$, такое, что, для любого $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}_\omega(\mathfrak{A})$, выполнено $\mathcal{C}_0 \leqslant_h \mathcal{C}$.

Из определения следует, что все представления $\mathcal{C}_0$ с таким свойством (если они существуют) имеют одинаковую гиперстепень, которую и будем называть *гиперстепенью структуры* $\mathfrak{A}$.

Предложение 3.2. Пусть счетные структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathfrak{A} \leqslant_f^{DL} \mathfrak{B}$. Тогда, для любой счетной структуры $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ_0 справедливо следующее: существуют Σ_1^{DL}-формула $\Phi(x, S)$ и Π_1^{DL}-формула $\Psi(x, S)$ языка DL сигнатуры $\sigma_0' = \sigma_0 \cup \{\leqslant^2, \in^2, U^1\}$, имеющие параметры только из $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, для которых справедливо следующее: для любого представления $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}(\mathfrak{B})$, $\Phi(x, \mathcal{C})$ и $\Psi(x, \mathcal{C})$ определяют (одновременно) в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}$ некоторое представление $\mathcal{C}_* \in \mathrm{Pr}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное представление $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}(\mathfrak{B})$ и образуем структуру $\mathcal{HF}(\mathcal{C})$, которая будет структурой $\mathcal{F}$ конечных элементов соответствующего аппроксимационного пространства.

Произвольную структуру $\mathfrak{M}$ с основным множеством M и атомарной диаграммой $AD(\mathfrak{M})$ будем отождествлять с теоретико-множественным сочленением этих объектов: $\mathfrak{M} = M \oplus AD(\mathfrak{M}) = \{\langle m, 0\rangle | m \in M\} \cup \{\langle n, 1\rangle | n \in AD(\mathfrak{M})\}$.

Покажем, что существует равномерная эффективная процедура, сводящая проверку истинности Σ_1^{DL}-формул в $\mathcal{X}_{\mathcal{HF}(\mathcal{C})}$ к проверке истинности Σ_1^{DL}-формул в пространстве $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}, \mathcal{C})$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Пусть $\mu : \mathcal{C} \to \mathfrak{B}$ — произвольная копия структуры $\mathfrak{B}$. Она естественным образом продолжается до копии $\mu' : \mathcal{HF}(\mathcal{C}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, определяемой следующим образом: полагаем

1) $\mu'(c) = \mu(c)$, для всех $c \in C$;
2) $\mu'(d) = \{\mu'(a) | a \in_{\mathcal{HF}(\mathcal{C})} d\}$, для всех $d \in \mathcal{HF}(C) \setminus C$.

Лемма 3.1. Пусть σ — сигнатура структуры $\mathfrak{B}$. Существует эффективная равномерная процедура, преобразующая всякую Σ_1^{DL}-формулу $\varphi(\bar{x})$ языка DL сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{\leqslant^2, \in^2, U^1\}$, не имеющую свободных переменных типа XV, в Σ_1^{DL}-формулу $\varphi^*(\bar{x})$ языка DL сигнатуры $\sigma_0'(P)$, такая, что, для любого представления $\mathcal{C}$ структуры $\mathfrak{B}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, любой копии $\mu : \mathcal{C} \to \mathfrak{B}$ и любых $\bar{a} \in HF(B)$,

$$\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})} \models \varphi(\mu'(\bar{a})) \iff (\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}, \mathcal{C}) \models \varphi^*(\bar{a}).$$

Доказательство. Из определения следует, что $\mathcal{HF}(\mathcal{C})$ как структура Δ^{DL}-определима в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})},\mathcal{C})$, поэтому выражения $z\in\mathcal{HF}(\mathcal{C})$, $\mathrm{rank}^{\mathcal{HF}(\mathcal{C})}(z)=0$ и т.п., также Δ^{DL}-определимы в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})},\mathcal{C})$. Воспользуемся представлением аппроксимационного пространства $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$ в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})},\mathcal{C})$, которое определяется над $\mathcal{HF}(\mathcal{C})$ таким же образом, как в доказательстве теоремы 2.1. Аналогичным образом определяется и преобразование формул *.

Поэтому, если структура $\mathfrak{A}_0$ — Δ^{DL}-определимое в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$ представление $\mathfrak{A}$ на $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, то для системы $\mathfrak{A}_1$ с основным множеством $(\mu')^{-1}(A_0)$ и атомарной диаграммой, индуцированной $AD(\mathfrak{A}_0)$, верно следующее: $\mathfrak{A}_1$ Δ^{DL}-определима в $\mathcal{X}_{\mathcal{HF}(\mathcal{C})}$ теми же формулами, что и структура $\mathfrak{A}_0$ в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}$. Поэтому данный набор формул после преобразования * определяет в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})},\mathcal{C})$ некоторое представление $\mathcal{C}_*\in\mathrm{Pr}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}(\mathfrak{A})$.

□

□

Предложение 3.2 является аналогом (а точнее, обобщением) соответствующего утверждения из [2], связывающего Σ-предикаты на $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ с Σ-операторами на $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, действующими на представлениях $\mathfrak{B}$. Действительно, операторы в определении $T\Sigma$- и $e\Sigma$-сводимостей на элементах $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}$, фактически, определяются в [2] с помощью Δ_0^{DL}-формул без вхождений модальных скобок типа [ ].

Будем использовать следующие стандартные обозначения: запись вида $(\exists S)_{\mathcal{K}}\Phi$ означает, что существует объект S из класса (множества) $\mathcal{K}$, обладающий свойством Φ. Помимо указанных выше лемм, в дальнейшем будет использовано важное *свойство базиса*, позволяющее ограничить поиск $\exists$-свидетелей перебором счетного числа вариантов. А именно, будем говорить, что структурированное аппроксимационное пространство $\mathcal{X}=\langle X,F,\leqslant\rangle$ сигнатуры σ имеет *счетный базис*, если существует счетное семейство $\mathcal{K}$ элементов из X, такое, что, для любой Δ_0^{DL}-формулы $\Phi(S_0,S_1,\ldots,S_n,x_1,\ldots,x_m)$ сигнатуры σ и любых $S_1^0,\ldots,S_n^0\in\mathcal{K}$, $a_1,\ldots,a_m\in F$,

$$\mathcal{X}\models(\exists S)\Phi(S,S_1^0,\ldots,S_n^0,\bar a)\iff\mathcal{X}\models(\exists S)_{\mathcal{K}}\Phi(S,S_1^0,\ldots,S_n^0,\bar a).$$

Лемма 3.2. *Если F — счетное множество, то аппроксимационное пространство $\mathcal{X}=\langle X,F,\leqslant\rangle$ имеет счетный базис.*

Доказательство. Для Δ_0^{DL}-формулы $\Phi(S_0,S_1,\ldots,S_n,x_1,\ldots,x_m)$ конечной сигнатуры σ от переменных $S_0,S_1,\ldots,S_n\in XV$, $x_1,\ldots,x_m\in FV$, $n,m\in\omega$, пусть f_Φ — символ частичной $(n+m)$-местной функции, не лежащий в σ. (Допускаются функции от 0 переменных, т.е. константы.) Зафиксируем конечное множество константных символов $S_1,\ldots,S_k$ $(k\in\omega)$, не лежащих в σ, и пусть $\sigma^*(S_1,\ldots,S_k)$ — сигнатура

$$\sigma\cup\{S_1,\ldots,S_k\}\cup\{f_\Phi|\Phi-\Delta_0^{DL}\text{-формула сигнатуры }\sigma\}.$$

Скулемизацией сигнатуры $\sigma(S_1,\ldots,S_k)$ называется сигнатура $\sigma^{Skolem}(S_1,\ldots,S_k)=\cup\{\sigma^{(n)}(S_1,\ldots,S_k)|n\in\omega\}$, где $\sigma^{(0)}(S_1,\ldots,S_k)=\sigma\cup\{S_1,\ldots,S_k\}$, $\sigma^{(n+1)}(S_1,\ldots,S_k)=$

$(\sigma^{(n)})^*(S_1, \ldots, S_k)$. Обогащение аппроксимационного пространства $\mathcal{X}$ сигнатуры σ до аппроксимационного пространства с выделенными элементами $S_1^0, \ldots, S_k^0 \in X$ сигнатуры $\sigma^{Skolem}(S_1,\ldots,S_k)$ называется *скулемовским*, если, для любой Δ_0^{DL}-формулы $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$ сигнатуры $\sigma^{Skolem}(S_1, \ldots, S_k)$ и любых $a_1, \ldots, a_m \in F$,

$$(\mathcal{X}, S_1^0, \ldots, S_k^0) \models ((\exists S)\Phi(S, S_1^0, \ldots, S_k^0, \bar{a}) \rightarrow \Phi(f_\Phi(S_1^0, \ldots, S_k^0, \bar{a}), S_1^0, \ldots, S_k^0, \bar{a}).$$

Стандартным рассуждением легко установить, что, для счетного $\mathcal{F}$ и произвольных $S_1^0, \ldots, S_k^0 \in X$, замыкание в $\mathcal{X}$ множества $F \cup \{S_1^0, \ldots, S_k^0\}$ относительно функций скулемовского обогащения $\mathcal{X}$ не более, чем счетно и образует счетный базис $\mathcal{K}$ для $\mathcal{X}$. □

Следующее утверждение дает синтаксическое описание структур, имеющих гиперстепень, и является аналогом соответствующего синтаксического описания (в терминах Σ-определимости) структур, имеющих T-степень и e-степень, полученного в [2]. Отметим, что естественного синтаксического описания таких структур в терминах бесконечных формул, аналогичного полученному в [8, 9], насколько известно автору, пока не найдено.

Теорема 3.2. Для счетной структуры $\mathfrak{A}$ и гиперстепени $\mathbf{a}$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mathfrak{A}$ имеет гиперстепень $\mathbf{a}$;

2) существует представление $\mathcal{C}$ структуры $\mathfrak{A}$, такое, что $\mathcal{C} \subseteq \omega$, $\deg_h(\mathcal{C}) = \mathbf{a}$, и $\mathcal{C}$ финитно Δ^{DL}-определимо в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}$.

Для доказательства этой теоремы установим вначале более общее утверждение.

Пусть $\sigma_1 = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k} \rangle$ и $\sigma_0 = \langle Q_0^{m_0}, \ldots, Q_l^{m_l} \rangle$ — конечные предикатные сигнатуры (можно считать, что $\sigma_1 \cap \sigma_0 = \varnothing$), $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — структуры сигнатур σ_1 и σ_0, соответственно. Под *теоретико-модельной парой* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ будем понимать любую структуру сигнатуры $\sigma \leftrightharpoons \langle M^1, N^1, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, Q_0^{m_0}, \ldots, Q_l^{m_l} \rangle$, основным множеством которой является объединение $|\mathfrak{M}| \cup |\mathfrak{N}|$, а предикатные символы интерпретируются следующим образом: $M^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = |\mathfrak{M}|$, $N^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = |\mathfrak{N}|$, $P_i^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = P_i^{\mathfrak{M}}$, $i = 1, \ldots, k$, $Q_j^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = Q_j^{\mathfrak{N}}$, $j = 1, \ldots, l$. Отметим, что, если $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ и $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$ — теоретико-модельные пары, для которых $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \cong (\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$, то $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{N}'$. Обратное не всегда справедливо, однако далее рассматривается случай, в котором обратное утверждение также верно: а именно, рассматриваются теоретико-модельные пары $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ с условием $M \cap N = \emptyset$.

Для структурированного аппроксимационного пространства $\mathcal{X}$ и подмножеств $S_1, S_2 \subseteq F$, через

$$S_1 \leqslant_h^{\mathcal{X}} S_2$$

принимая во внимание теорему 3.1, будем обозначать тот факт, что S_1 финитно Δ^{DL}-определимо в $(\mathcal{X}, S_2)$.

Предложение 3.3. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — счетные структуры конечных предикатных сигнатур σ_1 и σ_0, с основными множествами M и N, соответственно, для которых $M \cap N = \varnothing$, и пусть $R \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ — произвольное отношение. Следующие условия эквивалентны:

1) $R \leqslant_h^{\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}} \mathcal{C}$ для всякого представления $\mathcal{C}$ структуры $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$;

2) R финитно Δ^{DL}-определимо в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$, где $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ — теоретико-модельная пара структур $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Докажем сначала импликацию $2 \Rightarrow 1$.

Пусть отношение $R \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ финитно Δ^{DL}-определимо в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$, и пусть $\mathcal{C}$ — произвольное представление системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Рассмотрим структуру $\mathcal{C}_\sim \leftrightharpoons (\mathcal{C} \upharpoonright \sigma)/_\sim$. Так как $\mathcal{C}$ — представление $\mathfrak{M}$, то $\mathcal{C}_\sim \cong \mathfrak{M}$, а так как $C_\sim \cap N = \emptyset$, то $(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N}) \cong (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, а, значит, $\mathcal{HF}(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N}) \cong \mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Поэтому формулы, определяющие в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ отношение $R \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, определяют в $\mathcal{HF}(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N})$ (с соответствующими параметрами) отношение $R^* \subseteq \mathcal{HF}(\mathfrak{N})$, такое, что

$$(\mathcal{HF}(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N}), R^*) \cong (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}), R).$$

Таким образом, если $\mu' : \mathcal{HF}(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ — канонический изоморфизм, порожденный произвольным изоморфизмом $\mu : (\mathcal{C} \upharpoonright \sigma)/_\sim \to \mathfrak{M}$, и $\mu_r \leftrightharpoons \mu' \upharpoonright \mathcal{HF}(\mathfrak{N})$, то $\mu_r(R^*) = \mu'(R^*) = R$. Но отображение $\mu_r : \mathcal{HF}(\mathfrak{N}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ по определению множества $\mathcal{HF}(N) \subseteq HF(N)$ является Σ-функцией в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Кроме того, легко видеть, что структуры $\mathcal{C}_\sim$ и $(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N})$ (с условием $C_\sim \cap N = \emptyset$) Σ-определимы в $(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}), \mathcal{C})$. Таким образом, используя вытекающую отсюда финитную Δ^{DL}-определимость $\mathcal{HF}(\mathcal{C}_\sim, \mathfrak{N})$ в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}, \mathcal{C})$, получаем импликацию из 2 в 1. (Отметим, что структуры вида $(\mathbb{HF}(\mathfrak{N}), \mathcal{C})$ и $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}, \mathcal{C})$ корректно рассматривать и как теоретико-модельные пары, определимость при этом естественным образом понимается как определимость в большей структуре.)

Докажем теперь импликацию из 1 в 2. Для этого воспользуемся существованием счетного базиса, а также методом вынуждения в наследственно конечных надстройках, следуя работам [8, 20]. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — структуры с сигнатурами σ_1 и σ_0, соответственно, и пусть сигнатура σ^* получается из сигнатуры σ теоретико-модельной пары $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ добавлением новых предикатных символов $R^1, U^1, \in^2$. Зафиксируем также бинарный предикатный символ P, не входящий в σ^*. Будем обозначать через $\sigma^*(P)$ сигнатуру, полученную добавлением этого символа к σ^*. Для произвольной структуры $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ, как обычно, σ_A обозначает сигнатуру, полученную добавлением к σ новых константных символов для всех элементов из A.

Всякая копия системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ является частичной функцией на допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ с множеством значений M. Поскольку технически более удобно использовать вместо частичных функций их графики как отношения, будем считать, что копия системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ является бинарным отношением P в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, для которого $\mathrm{Pr}_1(P) \subseteq \mathbb{HF}(N)$ и $\mathrm{Pr}_2(P) = M$, рассматривая всякий элемент $a \in \mathbb{HF}(N)$, для которого $\langle a, m\rangle \in P$, в качестве "обозначения" для элемента $m \in M$. Будем обозначать через π фунцкию с графиком P. Отношение P связывает с каждым элементом из M непустое множество "обозначений".

Зафиксируем некоторую эффективную нумерацию $\ulcorner\ \urcorner$ термов и формул сигнатуры $\sigma^*(P)$. *Атомарной диаграммой* копии π называется множество

$$AD(\pi) = \{\langle\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{a}\rangle | \varphi \text{ – литерал сигн. } \sigma_1, \overline{a} \in HF(N)^{<\omega}, \mathfrak{M} \models \varphi(\pi(\overline{a}))\},$$

где для $\overline{a} = \langle a_0, \ldots, a_k\rangle$ $\pi(\overline{a})$ обозначает набор $\langle\pi(a_0), \ldots, \pi(a_k)\rangle$.

Итак, зафиксируем произвольное отношение $R \subseteq HF(N)$. Идея, на котором основано доказательство импликации $1 \Rightarrow 2$, состоит в построении копии π системы $\mathfrak{M}$, для которой система $\mathcal{X}_{\langle\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}),R,P\rangle}$ была бы генерической по отношению P в смысле [20] . Построим π как объединение последовательности $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \ldots$ конечных функций: $\pi = \cup_{n\in\omega} p_n$. Всякую конечную функцию на $HF(M, N)$, которая может быть расширена до копии системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, будем называть *условием вынуждения*, множество всех таких условий будем обозначать через $Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Пусть $\{S_n | n \in \omega\}$ — нумерация некоторого счетного базиса $\mathcal{K}$ аппроксимационного пространства $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$. Отношение *вынуждения* между элементами $Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ и предложениями языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$, определяется ниже стандартным образом (см., например, [20]). Единственной существенной особенностью приводимой ниже конструкции является использование "базисной вынуждаемости".

А именно, для условия вынуждения p и предложения Φ, определим отношение "p базисно вынуждает Φ" (обозн. $p \Vdash_b \Phi$) индукцией по сложности предложения Φ:

1) если Φ — атомарное предложение сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$, то $p \Vdash_b \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}, R, p, \{S_n | n \in \omega\}\rangle \models \Phi$;

2) $p \Vdash_b (\Phi_1 \vee \Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \Phi_1$ или $p \Vdash_b \Phi_2$;

3) $p \Vdash_b < a|S > \Phi(a)$ тогда и только тогда, когда существует $a \prec S$, для которого $p \Vdash_b \Phi(a)$;

4) $p \Vdash_b < a|s > \Phi(a)$ тогда и только тогда, когда существует $a \prec s$, для которого $p \Vdash_b \Phi(a)$;

5) $p \Vdash_b (\exists s)\Psi(s)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \Psi(s)$ для некоторого $s \in HF(M, N)$;

6) $p \Vdash_b (\exists S)\Psi(S)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \Psi(S_i)$ для некоторого базисного $S_i \in \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$;

7) $p \Vdash_b \neg\Phi$ тогда и только тогда, когда не существует условия вынуждения $q \supseteq p$, для которого $q \Vdash_b \Phi$.

Остальные логические связки, квантор всеобщности, ограниченные кванторы и модальные скобки "всеобщности" трактуются как сокращения, поэтому

8) $p \Vdash_b (\Phi_1 \wedge \Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \neg(\neg\Phi_1 \vee \neg\Phi_2)$, т.е. для любого условия $q \supseteq p$ существуют условия $r_1, r_2 \supseteq q$ такие, что $r_1 \Vdash_b \Phi_1$ и $r_2 \Vdash_b \Phi_2$;

9) $p \Vdash_b (\Phi_1 \to \Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b (\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$;

10) $p \Vdash_b \forall x \Psi(x)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \neg\exists x \neg\Psi(x)$, т.е. для любого условия $q \supseteq p$ и любого $a \in HF(M,N)$ существует условие $r \supseteq q$ такое, что $r \Vdash_b \Phi(a)$;

11) $p \Vdash_b (\exists x \in a)\Phi(x)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \exists x((x \in a) \wedge \Phi(x))$;

12) $p \Vdash_b (\forall x \in a)\Phi(x))$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \forall x((x \in a) \to \Phi(x))$;

13) $p \Vdash_b [a|S]\Phi(a)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \neg < a|S > \neg\Phi(a)$ (аналогичное определение для случая $p \Vdash_b [a|s]\Phi(a)$);

14) $p \Vdash_b (\forall S)\Psi(S)$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash_b \neg(\exists S)\neg\Psi(S)$.

Нам понадобятся следующие утверждения, стандартные для любого построения методом вынуждения.

Лемма 3.3. Для любого предложения Φ языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$ и любых $p, q \in Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, из $p \subseteq q$ и $p \Vdash_b \Phi$ следует, что $q \Vdash_b \Phi$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения индукцией по сложности Φ. □

Лемма 3.4. Для любого предложения Φ языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$ и любого $p \in Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ существует $q \supseteq p$, для которого $q \Vdash_b \Phi$ или $q \Vdash_b \neg\Phi$.

Доказательство. Следует из пункта 7 определения отношения вынуждения. Действительно, если не существует $q \supseteq p$ такого, что $q \Vdash_b \Phi$, то $p \Vdash_b \neg\Phi$ по определению. □

Лемма 3.5. Пусть Φ – предложение языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$. Не существует условия $p \in Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ такого, что $p \Vdash_b \Phi$ и $p \Vdash_b \neg\Phi$.

Доказательство. Индукция по сложности предложения Φ. В случае когда Φ – атомарное, утверждение очевидно. Предположим, например, что $\Phi = (\Phi_1 \vee \Phi_2)$. Если $p \Vdash_b \Phi$ и $p \Vdash_b \neg\Phi$, то $p \Vdash \Phi_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$ и, в то же время, для любого $q \supseteq p$ имеем $q \nVdash_b \Phi_1$ и $q \nVdash_b \Phi_1$, противоречие.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Лемма 3.6. Существует копия π (называемая *b-генерической*) структуры $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, такая, что для любого предложения Φ языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$,

$$(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}, R, \pi) \models \Phi \iff \exists p \in Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \restriction \pi \; (p \Vdash_b \Phi).$$

Здесь $Cond(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \restriction \pi$ – множество всех условий вынуждения, являющихся подмножествами π.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нумерацию предложений языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)} \cup \{S_n | n \in \omega\}$: $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k, \ldots$, а также произвольную нумерацию носителя системы $\mathfrak{M}$: $m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots$.

Пусть $p_{-1} \leftrightharpoons \varnothing$. Для любого $k \in \omega$, пусть p_k – некоторое условие вынуждения, для которого $p_{k-1} \subseteq p_k$, $m_k \in \mathrm{rng}(p_k)$, и $p_k \Vdash_b \Phi_k$ или $p_k \Vdash_b \neg\Phi_k$ (из предыдущих лемм следует, что такое p_k существует). Определим копию π системы $\mathfrak{M}$ как объединение $\cup_{k\in\omega} p_k$. Утверждение леммы легко проверяется индукцией по сложности предложения Φ. $\square$

Лемма 3.7. Пусть $\Phi(\overline{x})$ — формула языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)$ с тесными отрицаниями. Существует формула $\Phi^*(y, \overline{x})$ языка DL сигнатуры σ^* такая, что, для любого $\overline{a} \in HF(N)^{<\omega}$ и любого условия вынуждения p,

$$p \Vdash_b \Phi(\overline{a}) \iff \langle \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}, R\rangle \models \Phi^*(p, \overline{a}).$$

Φ^* строится по Φ с помощью равномерной эффективной процедуры, причем если Φ – $\Delta_0^{DL}(\Sigma_1^{DL})$-формула, то Φ^* – также $\Delta_0^{DL}(\Sigma_1^{DL})$-формула.

Доказательство. Индукция по сложности формулы Φ. Заметим, что всякая формула языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)$ семантически эквивалентна формуле с тесными отрицаниями, причем если исходная формула была $\Delta_0^{DL}(\Sigma_1^{DL})$-формулой, то такой же тип будет иметь и соответствующая формула с тесными отрицаниями.

1) Φ – атомарная или отрицание атомарной: если $\Phi = P(a, m)$, то $p \Vdash_b \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle a, m\rangle \in p$; если $\Phi = \neg P(a, m)$, то $p \Vdash_b \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle a, m\rangle \notin p$. Во всех остальных случаях $p \Vdash_b \Phi$ тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}, R\rangle \models \Phi$, то есть $\Phi^* \leftrightharpoons \Phi$;

2) $\Phi = (\Phi_1 \vee \Phi_2)$: полагаем $\Phi^* = ((\Phi_1)^* \vee (\Phi_2)^*)$;

3) $\Phi = \exists y \Phi_0(\overline{a}, y)$, $y \in FV$: полагаем $\Phi^* \leftrightharpoons \exists y(\Phi_0 \overline{a}, y))^*$;

4) $\Phi = (\exists S)\Phi_0(\mathrm{S})$: полагаем $\Phi^* \leftrightharpoons (\exists S)(\Phi_0(S))^*)$, и пользуемся пунктом 4 определения отношения b-вынуждаемости и определением счетного базиса $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$;

5) $\Phi = [a|S]\Phi_0$: по определению, имеем $p \Vdash_b [a|S]\Phi_0(a)$ тогда и только тогда, когда для всех условий вынуждения $q \supseteq p$ и для всех $c \prec S$ выполнено $q \nVdash_b \neg\Phi_0(c)$, причем $\neg\Phi_0$ — Δ_0^{DL}-формула.

6) $\Phi = [a|s]\Phi_0$: аналогично случаю 5. $\square$

Итак, докажем импликацию $1 \Rightarrow 2$ теоремы. Пусть $R \leqslant_h^{\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}} \mathcal{C}$ для любого представления $\mathcal{C}$ системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, и предположим, что R не является финитно Δ^{DL}-определимым в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$.

Для данного R, построим b-генерическую копию $\mathcal{C}_R$ системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ со следующим дополнительным свойством. Пусть $\{\Phi_i(x) | i \in \omega\}$ — вычислимая нумерация Σ_1^{DL}-формул языка DL сигнатуры $\sigma^*(P)_{HF(M,N)}$ (переменная x имеет тип FV). Если $\mathcal{C}_R$ образована по $\pi = \cup_{n\in\omega} p_n$, то, для любого $n \in \omega$, потребуем, чтобы p_n удовлетворяло *дополнительному условию*

$$p_n \Vdash (R \neq \Phi_{l(n)}(x) \vee \overline{R} \neq \Phi_{r(n)}(x)).$$

Такая копия существует, поскольку в противном случае, по лемме 3.7, R было бы финитно Δ^{DL}-определимо в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$.

Так как, по предположению, $R \leqslant_h^{\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}} \mathcal{C}$ для любого представления $\mathcal{C}$ системы $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, этот факт верен и для b-генерической копии $\mathcal{C}_R$ с указанным выше дополнительным условием. Имеем

$$(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}, R, \mathcal{C}_R) \models \text{“}R \leqslant_h^{\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}} P\text{”},$$

где выражение в правой части есть формула, означающая, по определению отношения $\leqslant_h^{\mathcal{X}}$, финитную Σ^{DL}-определимость в $(\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}, \mathcal{C}_R)$ отношений R и $\overline{R}$ некоторыми конкретными, релятивизованными на $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}$ формулами $\Phi(x, \mathcal{C}_R)$ и $\Psi(x, \mathcal{C}_R)$, соответственно (релятивизация финитно Σ^{DL}-определима в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$ вследствие Σ-определимости $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$). Так как $\mathcal{C}_R$ — b-генерическая копия, по лемме 3.6 отсюда следует, что, для некоторого условия вынуждения p_n,

$$p_n \Vdash_b \text{“}R \leqslant_h^{\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{N})}} P\text{”}.$$

По леммам 3.7 и 3.3, последнее противоречит дополнительному условию, удовлетворенному на соответствующем шаге построения $\mathcal{C}_R$.

□

Теорема 3.2 является непосредственным следствием предложения 3.3 при $\mathfrak{N} = \varnothing$.

Автор выражает глубокую благодарность А.С. Морозову за замечания и предложения, позволившие, в частности, устранить многочисленные неточности в первоначальной версии текста работы.

Список литературы

[1] *A.I. Stukachev*, On mass problems of presentability, Lect. Notes Comput. Sci., **3959** (2006), 774–784.

[2] *А.И. Стукачев*, О степенях представимости моделей. I, Алгебра и логика, **46**, № 6 (2007), 763–788.

[3] *А.И. Стукачев*, О степенях представимости моделей. II, Алгебра и логика, **47**, № 1 (2008), 108–126.

[4] *А.И. Стукачев*, Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней, Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 182–190.

[5] *A.I. Stukachev*, A Jump Inversion Theorem for the semilattices of Σ-degrees, Siberian Advances in Mathematics, **20**, No. 1 (2010), 68–74.

[6] *A.I. Stukachev*, Effective model theory: an approach via Σ-definability, Lecture Notes in Logic, **41** (2013), 164–197.

[7] *A.I. Stukachev*, On processes and structures, Lect. Notes Comput. Sci., **7921** (2013), 393–402.

[8] *C. Ash, J. Knight, M. Manasse, T. Slaman*, Generic copies of countable structures, Ann. Pure. Appl. Logic, **42**, No. 3 (1989), 195–205.

[9] *J. Chisholm*, Effective model theory vs. recursive model theory, J. Symbolic Logic, **55** (1990), 1168–1191.

[10] *J. Barwise*, Admissible Sets and Structures, Berlin, Springer-Velag, 1975.

[11] *Ю.Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[12] *D.S. Scott*, Outline of a mathematical theory of computation, Proceedings of 4th Annual Princeton Conference on Information Science and Systems (1970), 165–176.

[13] *Ю.Л. Ершов*, Теория A-пространств, Алгебра и логика, **12**, № 4 (1973), 369–416.

[14] *Yu.L. Ershov*, Theory of domains and nearby, Formal Methods in Programming and Their Applications, Lect. Notes Comput. Sci., **735** (1993), 1–7.

[15] *А.И. Стукачев*, Обобщенно гиперарифметическая вычислимость над структурами. II, Алгебра и логика (сдано в печать).

[16] *Y.N. Moschovakis*, Elementary Induction on Abstract Structures, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1974.

[17] *А.И. Стукачев*, О квазирегулярных структурах вычислимых сигнатур, Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), 444–450.

[18] *D. Harel*, First-Order Dynamic Logic, Lecture Notes in Computer Science, **68** (1979), 1–135.

[19] *Ю.Л. Ершов*, Динамическая логика над допустимыми множествами, Докл. АН СССР, **273**, № 5 (1983), 1045–1048.

[20] *J. Barwise, A. Robinson*, Completing theories by forcing, Ann. of Math. Logic, **2** (1970), 119–142.

[21] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва, Мир, 1972.

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А.И. Стукачев, Обобщенно гиперарифметическая вычислимость над структурами. I

Аннотация. Рассматривается класс аппроксимационных пространств, порожденных допустимыми множествами и, в частности, наследственно конечными надстройками над структурами. Обобщенная вычислимость на аппроксимационных пространствах понимается как эффективная определимость в динамической логике. Аналогично понятию структуры, Σ-определимой в допустимом множестве, вводится понятие эффективной определимости структуры на аппроксимационном пространстве. Аналогично тому, как определяется отношение Σ-сводимости, естественным образом возникает отношение сводимости на структурах, порождающее соответствующие полурешетки степеней структур (произвольной мощности), а также операция скачка. Установлено естественное вложение в эти полурешетки полурешетки гиперстепеней множеств натуральных чисел, сохраняющее операцию гиперскачка. Получено синтаксическое описание структур, имеющих гиперстепень.
Ключевые слова: теория вычислимости, допустимые множества, аппроксимационные пространства, конструктивные модели, вычислимый анализ, гиперарифметическая вычислимость.