УДК 510.5

Процессы и структуры на аппроксимационных пространствах[1]

А.И. СТУКАЧЕВ

Данная работа является непосредственным продолжением работы [1] и содержит развернутое изложение результатов краткой публикации [2]. Вводится понятие компоненты вычислимости на допустимом множестве, рассматриваются минимальная и максимальная компоненты вычислимости на наследственно конечных надстройках и ссответствующие этим компонентам скачки. Показано, к скачкам максимальной компоненты вычислимости на наименьшем допустимом множестве $\mathbb{HF}(\varnothing)$ Σ-сводится поле действительных чисел. Тем самым получен результат, в терминах Σ-сводимости связывающий действительные числа, понимаемые как структура, с действительными числами, понимаемымим как аппроксимационное пространство. Сформулирован ряд естественных открытых вопросов, в том числе, касающихся аналогов результатов, известных для полурешеток Σ-степеней.

В тексте работы используются определения и обозначения из [3, 4]. В частности, для допустимого множества $\mathbb{A}$, символом A обозначается его носитель (основное множество), $P(A)$ обозначает множество всех подмножеств A, $U^{\mathbb{A}}$ обозначает множество праэлементов $\mathbb{A}$, а A^* обозначает множество элементов $\mathbb{A}$, являющихся множествами (т.е. не праэлементами).

1 Процессы и компоненты вычислимости

Неформально, процессы — это функции на аппроксимационных пространствах, значения которых определяются как пределы своих F-аппроксимаций, образованных по F-аппроксимациям аргументов и ресурсов (например, пространства и времени). Каждый процесс определяется своей *спецификацией* или *представлением*, причем конструктивными процессами называются процессы, имеющие спецификации, которые допускают "эффективную проверку". Обладающие определенными свойствами замкнутости семейства конструктивных процессов образуют *компоненты вычислимости* (точное определение будет дано ниже).

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{X} = \langle X, F, \leqslant\rangle$ — аппроксимационное пространство, и пусть $m, n \in \omega$. Под (m, n)-местной *спецификацией* на $\mathcal{X}$ будем понимать всюду определенную функцию $\alpha_0 : F^{m+n+2} \to \{0, 1\}$, которая монотонна относительно двух последних аргументов в следующем смысле: для любых $\bar{a} \in F^m$, $\bar{b} \in F^n$, и любых $c, c', d, d' \in F$,

$$\text{если } c \prec c', \text{ то } \alpha_0(\bar{a}, \bar{b}, c, d) \leqslant \alpha_0(\bar{a}, \bar{b}, c', d);$$

$$\text{если } d \prec d', \text{ то } \alpha_0(\bar{a}, \bar{b}, c, d') \leqslant \alpha_0(\bar{a}, \bar{b}, c, d).$$

Неформально, $\bar{a}$ есть набор конечных аргументов, $\bar{b}$ есть набор конечных фрагментов (потенциально) бесконечных аргументов, c и c' есть конечные фрагменты доступных ресурсов, тогда как d и d' — конечные фрагменты результата процесса, определяемого данной спецификацией.

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{X} = \langle X, F, \leqslant \rangle$ — аппроксимационное пространство. Для $m, n \in \omega$, (m, n)-*местным процессом* на $\mathcal{X}$ называется частичное отображение α из (подмножества) $F^m \times X^n$ в X, для которого существует спецификация $\alpha_0 : F^{m+n+2} \to \{0, 1\}$, *определяющая* α в следующем смысле: для любых $\bar{a} \in F^m$, $\bar{x} \in X^n$, таких, что $(\bar{a}, \bar{x}) \in \mathrm{dom}(\alpha)$, и любого $d \in F$, $d \prec \alpha(\bar{a}, \bar{x})$ тогда и только тогда, когда существуют $b_0, \ldots, b_{n-1}, c \in F$, такие, что $b_0 \prec x_0, \ldots, b_{n-1} \prec x_{n-1}$, и $\alpha_0(\bar{a}, \bar{b}, c, d) = 1$.

Будем использовать следующую терминологию для обозначения процессов, определенных либо только на конечных аргументах, либо на произвольных (возможно, “бесконечных”) аргументах, доступных только через конечные аппроксимации. А именно, для $n > 0$,

- n-местным *предикатом* называется любой $(n, 0)$-местный процесс, то есть отображение из (подмножества) F^n в X;
- n-местной *функцией* называется любой $(n, 0)$-местный процесс с конечными значениями, то есть отображение из (подмножества) F^n в F;
- n-местным *оператором* называется любой $(0, n)$-местный процесс, то есть отображение из (подмножества) X^n в X.

Будем обозначать классы n-местных предикатов, функций и операторов на $\mathcal{X}$ через $\mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, $\mathcal{F}_n(\mathcal{X})$ и $\mathcal{O}_n(\mathcal{X})$, соответственно, а класс всех процессов на $\mathcal{X}$ через $\mathcal{P}roc(\mathcal{X})$.

Пример 1.1. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Оно порождает класс аппроксимационных пространств $\mathcal{X}$ следующего вида. Пусть $X_0 \subseteq P(A)$ — произвольное Σ-допустимое семейство (определение см. в [4]). Таким образом, топология на $X \cap P(A)$ является сильной топологией [4], а топология на $U^{\mathbb{A}}$ тривиальна, за исключением того, что $\varnothing$ полагается в качестве наименьшего элемента аппроксимационного пространства. В качестве класса процессов, действующих на $\mathcal{X}$, в этом случае можно рассматривать произвольный замкнутый относительно суперпозиции подкласс класса $\mathcal{P}roc(\mathcal{X})$, состоящего из процессов, являющихся сильно непрерывными (см. [4]) на элементах из X. Множества Σ-предикатов и Σ-операторов образуют подкласс конструктивных процессов и определяются как процессы соответствующего типа, имеющие Δ_0-определимые на $\mathbb{A}$ спецификации. Эти процессы являются элементами $\mathcal{P}roc(\mathcal{X})$ по аксиоме Δ_0-ограниченности и по определению Σ-допустимого семейства, соответственно.

Определение 1.3. 1) *Терминацией* (частичного) n-местного предиката $\alpha : F^n \to X$ называется всюду определенная функция $\alpha_t : F^{n+1} \to \{0,1\}$, такая, что, для любых $\bar{a} \in F^n$, $b \in F$,

$$\alpha_t(\bar{a}, b) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } b \prec \alpha(\bar{a}).$$

2) *Терминацией* (частичного) n-местного оператора $\beta : X^n \to X$ называется всюду определенная функция $\beta_t : X^{n+1} \to \{0,1\}$, такая, что, для любых $\bar{a} \in X^n$, $b \in X$,

$$\beta_t(\bar{a}, b) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } b = \beta(\bar{a}).$$

3) *Терминацией* (частичного) (m,n)-местного процесса $\gamma : F^m \times X^n \to X$, $n > 0$, называется всюду определенная функция $\beta_t : F^m \times X^{n+1} \to \{0,1\}$, такая, что, для любых $\bar{a} \in F^m$, $\bar{b} \in X^n$, $c \in X$,

$$\gamma_t(\bar{a}, \bar{b}, c) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } c = \gamma(\bar{a}, \bar{b}).$$

Будем использовать следующие технические модификации определений для понятий из [3, 4]: пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество.

1) Отображение $\alpha : A^n \to P(A)$ называется Σ-*предикатом на* $\mathbb{A}$, если существует такая Σ-формула $\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n, y)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ с параметрами из $\mathbb{A}$, что, для любых $a_1, \ldots, a_n$, $b \in A$,

$$b \in \alpha(a_1, \ldots, a_n) \text{ т. и т. т., когда } \mathbb{A} \models \varphi_\alpha(a_1, \ldots, a_n, b)$$

(φ_α называется Σ-*представлением* α).

2) Отображение $\beta : P(A)^n \to P(A)$ называется Σ-*оператором на* $\mathbb{A}$, если существует Σ-формула $\varphi_\beta(x_1, \ldots, x_n, y)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ с параметрами из $\mathbb{A}$ такая, что, для любых $S_1, \ldots, S_n \in P(A)$, $b \in A$

$$b \in \beta(S_1, \ldots, S_n) \text{ т. и т. т., когда } \exists a_1 \subseteq S_1, \ldots, \exists a_n \subseteq S_n \text{ т.ч.}$$

$$\mathbb{A} \models \varphi_\beta(a_1, \ldots, a_n, b)$$

(здесь подразумевается, что $a_1, \ldots, a_n \in A^*$). Аналогично, φ_β называется Σ-*представлением* β.

Далее преполагается, что в случаях, когда $\mathbb{A}$ зафиксировано, $\leqslant$ обозначает $\subseteq_{P(A)} \cup =_{U^{\mathbb{A}}}$.

Определение 1.4. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $m, n \in \omega$. Отображение γ из (подмножества) $A^m \times (A \cup P(A))^n$ в $P(A)$ называется (m,n)-местным Σ-*процессом на* $\mathbb{A}$, если существует Σ-формула $\varphi_\gamma(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z)$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ с параметрами из $\mathbb{A}$ такая, что, для любых $a_1, \ldots, a_m \in A$, $x_1, \ldots, x_m \in A \cup P(A)$, $c \in A$,

$$c \in \gamma(\overline{a}, \overline{x}) \text{ т. и т. т., когда } \exists b_1 \leqslant x_1, \ldots, \exists b_n \leqslant x_n \text{ т.ч. } \mathbb{A} \models \varphi_\gamma(\overline{a}, \overline{b}, c).$$

Формула φ_γ называется Σ-*представлением* γ. Множество всех Σ-представлений процесса γ будем обозначать через $Pres_\Sigma(\gamma)$.

Любое Σ-представление $\varphi_\gamma(\overline{x}, \overline{y}, c)$ процесса γ может быть преобразовано в Δ_0-формулу $\theta_\gamma(\overline{x}, \overline{y}, c, d)$, являющуюся спецификацией для γ в смысле определений работы [1]: полагаем

$$\theta_\gamma(\overline{x}, \overline{y}, c, d) \leftrightharpoons (\forall c' \in c)\varphi_\gamma(\overline{x}, \overline{y}, c')^{(d)},$$

где $\varphi_\gamma(\overline{x}, \overline{y}, c')^{(d)}$ есть релятивизация формулы φ_γ относительно d (см. [3]).

Будем обозначать через $\mathcal{F}_\Sigma(\mathbb{A})$ класс всех Σ-предикатов на $\mathbb{A}$, определяемых формулами без параметров, через $\mathcal{O}_\Sigma(\mathbb{A})$ класс всех Σ-операторов на $\mathbb{A}$, и через $\mathcal{P}_\Sigma(\mathbb{A})$ класс всех Σ-процессов на $\mathbb{A}$, сооответственно (таким образом, $\mathcal{P}_\Sigma(\mathbb{A}) \supseteq \mathcal{F}_\Sigma(\mathbb{A}) \cup \mathcal{O}_\Sigma(\mathbb{A})$).

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_\Sigma(\mathbb{A})$ — произвольный класс Σ-процессов на $\mathbb{A}$. Семейство $\mathcal{S} \subseteq A \cup P(A)$ называется Σ-*допустимым относительно* $\mathcal{C}$, если

1) $\mathcal{S}$ замкнуто относительно действия процессов из $\mathcal{C}$: для любого (m,n)-местного процесса $\alpha \in \mathcal{C}$,

$$\forall a_1 \ldots \forall a_m \in A \cap \mathcal{S}\, \forall x_1 \ldots \forall x_n \in \mathcal{S}\ \alpha(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S};$$

2) процессы из $\mathcal{C}$ сильно непрерывны на элементах из $\mathcal{S}$: для любого (m,n)-процесса $\alpha \in \mathcal{C}$,

$$\forall a_1 \ldots \forall a_m \in A \cap \mathcal{S}\, \forall x_1 \ldots \forall x_n \in \mathcal{S} \forall c \in A (c \leqslant \alpha(\overline{a}, \overline{x}) \to$$
$$\to \exists b_1 \in A \ldots \exists b_n \in A (b_1 \leqslant x_1 \wedge \ldots \wedge b_n \leqslant x_n \wedge c \leqslant \alpha(\overline{a}, \overline{b}))).$$

Определение 1.6. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. *Компонентой вычислимости на* $\mathbb{A}$ будем называть всякую пару $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, где

1) $\mathcal{S} \subseteq A \cup P(A)$ — Σ-допустимое семейство относительно $\mathcal{C}$,

2) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_\Sigma(\mathbb{A})$ — класс Σ-процессов на $\mathbb{A}$, замкнутый относительно суперпозиции.

Компоненту вычислимости $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ будем называть $\mathbb{A}$-*адекватной*, если $A \subseteq \mathcal{S}$ и $\mathcal{F}_\Sigma(\mathbb{A}) \subseteq \mathcal{C}$.

Для допустимого множества $\mathbb{A}$, *вычислимостью на* $\mathbb{A}$ будем называть семейство $\mathrm{Com}(\mathbb{A})$ всех $\mathbb{A}$-адекватных компонент вычислимости на $\mathbb{A}$:

$$\mathrm{Com}(\mathbb{A}) = \{(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \mid (\mathcal{S}, \mathcal{C}) \text{ — } \mathbb{A}\text{-адекватная компонента вычислимости на } \mathbb{A}\}.$$

Заметим, что если для компоненты вычислимости $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ справедливо $\mathcal{O}_\Sigma(\mathbb{A}) \subseteq \mathcal{C}$, то $\mathcal{S}$ является Σ-допустимым семейством на $\mathbb{A}$ в смысле [4].

С другой стороны, можно вначале зафиксировать подкласс "конструктивных" процессов $\mathcal{C}$, а затем взять в качестве $X_0 \subseteq P(A)$ семейство, Σ-допустимое относительно $\mathcal{C}$.

2 Σ-скачок структуры как скачок минимальной компоненты HF-вычислимости

Определение 2.1. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ — компонента вычислимости на $\mathbb{A}$. *Скачком* компоненты $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ называется структура $J_{\mathbb{A}}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, имеющая в качестве носителя множество $\mathcal{S}$, а в качестве атомарной диаграммы одноместный предикат, выделяющий множество A конечных объектов, а также предикаты, выделяющие терминации $t(\mathcal{C})$ процессов из $\mathcal{C}$ (заданных своими Σ-представлениями в некоторой фиксированной геделевской нумерации).

Данное определение является естественным обобщением операций скачка, существующих на множествах натуральных чисел и на структурах. Для случая структур, воспользуемся тем фактом, что всякая структура порождает наименьшее по включению допустимое множество, ее содержащее — свою HF-надстройку. Если взять наименьшую адекватную компоненту вычислимости этой HF-надстройки и терминировать ее процессы (т.е., все Σ-предикаты без параметров), мы получим структуру, которая называется Σ-*скачком* исходной структуры. Формальное определение выглядит следующим образом.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная структура. Σ-*скачком*, точнее, *наименьшим* Σ-*скачком* структуры $\mathfrak{A}$ называется структура

$$\mathfrak{A}' = (X; F, \mathcal{T}),$$

с носителем $X = HF(A)$, и отношениями $F = HF(A)$ (т.е. носитель состоит только из конечных объектов, поэтому одноместное отношение F в данном случае тривиально и может быть опущено), а также терминацией $\mathcal{T} = t(\mathcal{F}_\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A})))$ всех Σ-предикатов без параметров на $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ (которую будем обозначать, как в [5, 6], через $\Sigma\text{-Sat}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}$).

Аналогичным образом операция скачка была введена в работе [10] для полурешетки s-степеней счетных структур. Кроме того, аналогичным образом понятие скачка допустимого множества относительно эффективных сводимостей было введено в работах [12, 16].

Необходимо отметить, однако, что для того, чтобы определение 2.2 было частным случаем определения 2.1, фоормально необходимо расширить носитель X структуры $\mathfrak{A}'$ с помощью множества всех Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ без параметров отношений (данных как "точки"). Однако легко убедиться, что такая формализация Σ-эквивалентна указанной в определении 2.2.

Операция Σ-скачка согласована с операциями скачка для полурешеток тьюринговых степеней и спепеней перечислимости для множеств натуральных чисел относительно естественных вложений i и j этих полурешеток в полурешетку Σ-степеней: если структура $\mathfrak{A}$ имеет (e-)степень $\mathbf{a}$, то структура $\mathfrak{A}'$ имеет (e-)степень $\mathbf{a}'$. Таким образом, отображения $i : \mathcal{D} \to \mathcal{S}_\Sigma$ и $j : \mathcal{D}_e \to \mathcal{S}_\Sigma$ являются вложениями, сохраняющими 0, $\vee$, и операцию скачка (см. [11, 6]). Поэтому операция Σ-скачка является естественным обобщением скачков тьюринговых степеней и степеней перечислимости. Еще одним важным свойством минимальной компоненты HF-вычислимости является то, что, как и для классической (наименьшей) вычислимости на натуральных числах, здесь справедлива теорема об обращении скачка.

Теорема 2.1 ([5, 6])**.** Пусть $\mathfrak{A}$ — структура, для которой $\mathbf{0}' \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$. Тогда существует структура $\mathfrak{B}$, для которой

$$\mathfrak{B}' \equiv_\Sigma \mathfrak{A}.$$

Аналогично определению Σ-предикатов, еще одним частным случаем определения 1.2 является следующее: Σ^{DL}*-предикатами* на $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}$ будем называть предикаты, имеющие Δ_0^{DL}-определимые в $\mathcal{X}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}$ спецификации. Несложно убедиться, что определенный в работе [1] гиперскачок $\mathfrak{A}^H$ структуры $\mathfrak{A}$ Σ-эквивалентен обогащению $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ с помощью терминаций всех Σ^{DL}-предикатов на $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$.

Важным свойством HF-вычислимостей является существование максимальной (по включению) компоненты. Это свойство используется в следующем определении.

Определение 2.3. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная структура. *$P\Sigma$-скачком*, или *максимальным Σ-скачком* структуры $\mathfrak{A}$ называется структура

$$\mathfrak{A}^\diamond = (X; F, \mathcal{T}),$$

с носителем $X = HF(A) \cup P(HF(A))$ и атомарной диаграммой, состоящей из отношения $F = HF(A)$, выделяющего множество конечных объектов, и бинарного отношения $\mathcal{T}$, выделяющего терминацию всех Σ-процессов на $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$.

Из мощностных соображений непосредственно следует, что $P\Sigma$-скачок действительно является скачком относительно сводимости $\leqslant_\Sigma$: для любой структуры $\mathfrak{A}$ справедливо

$$\mathfrak{A} <_\Sigma \mathfrak{A}^\diamond.$$

3 Приложения для сводимостей на допустимых множествах

В качестве примера использования введенных понятий установим одно усиление результата А.С.Морозова [12] который показал, что некоторая эффективная сводимость между допустимыми множествами влечет вложимость классов соответствующих конструктивных объектов (а именно, Σ-подмножеств).

Эффективная сводимость на допустимых множествах была определена в работе А.С.Морозова [12] как модификация введенного Ю.Л.Ершовым понятия Σ-определимости алгебраической системы в допустимом множестве (в оригинале рассматривается только случай конечной сигнатуры).

Определение 3.1 (Ю.Л.Ершов [13, 4]). Пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \ldots\rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Будем называть структуру $\mathfrak{M}$ Σ-*определимой в* $\mathbb{A}$, если существует вычислимая последовательность Σ-формул

$$\Phi(x_0, y), \Phi_=(x_0, x_1, y), \Psi_=(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y),$$
$$\Psi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \Phi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y), \Psi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y), \ldots,$$

такая, что, для некоторого параметра $a \in A$, полагая

$$M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a), \;\; \eta \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}_=(x_0, x_1, a) \cap M_0^2,$$

имеем $M_0 \neq \varnothing$, η — отношение конгруэнции на структуре

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, P_1^{\mathfrak{M}_0}, \ldots\rangle,$$

где $P_i^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_i^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}) \cap M_0^{n_i}$ для всех i,

$$\Psi^{\mathbb{A}}_=(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Phi^{\mathbb{A}}_=(x_0, x_1, a),$$
$$\Psi_i^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, a) \cap M_0^{n_i} = M_0^{n_i} \setminus \Phi_i^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_i-1})$$

для всех i, и структура $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-структуре $\mathfrak{M}_0/\eta$.

Структура, Σ-определимая в $\mathbb{A}$, называется также $\mathbb{A}$-*конструктивизируемой.* Отношение Σ-сводимости $\leqslant_\Sigma$ на структурах (точнее, на типах изоморфизма структур) также определяется с помощью данного понятия. А именно, для структур $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathfrak{N}$ обозначает тот факт, что структура $\mathfrak{M}$ Σ-определима в допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Это отношение рефлексивно и транзитивно, а соответствующее понятие Σ-степени является естественной мерой (относительной) конструктивной сложности для структур произвольной мощности (см. [11, 14, 5, 6]).

Кроме того, в дальнейшем потребуется "позитивная" версия определения 3.1: для структуры $\mathfrak{M}$ и допустимого множества $\mathbb{A}$, $\mathfrak{M}$ называется Σ^+-*определимой в* $\mathbb{A}$, если существует вычислимая последовательность Σ-формул $\Phi(x_0, y)$, $\Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y)$, $\Phi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y)$, $\ldots$ такая, что, для некоторого параметра $a \in A$ и сюръективного отображения $\nu : \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a) \twoheadrightarrow M$, для всех $i \in \omega$ и любых $a_0, \ldots, a_{n_i-1} \in \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a)$,

$$\mathbb{A} \models \Phi_i(a_0, \ldots, a_{n_i-1}, a) \iff \mathfrak{M} \models P_i(\nu(a_0), \ldots, \nu(a_{n_i-1})).$$

Аналогично, для структур $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, будем обозначать через $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma^+ \mathfrak{N}$ тот факт, что структура $\mathfrak{M}$ Σ^+-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Необходимо отметить, что отношение $\leqslant_\Sigma^+$ будет транзитивным лишь в том случае, когда все рассматриваемые структуры представлены "позитивными" атомарными диаграммами (то есть, не обязательно содержащими вместе с отношением его дополнение).

Следующее определение является несущественной модификацией определения из работы [12].

Определение 3.2. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — допустимые множества. Допустимое множество $\mathbb{A}$ Σ-*сводится* к допустимому множеству $\mathbb{B}$ (обозначается $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$), если существует сюръективное отображение $\nu : B \twoheadrightarrow A$ такое, что

1) ν является $\mathbb{B}$-конструктивизацией $\mathbb{A}$ как структуры, в смысле [13, 4];

2) существует двухместный Σ-предикат E на $\mathbb{B}$ такой, что $pr_1(R) = B$ и, для любых $b, c \in B$,
$$\langle b, c\rangle \in E \text{ влечет } \nu(b) = \{\nu(z) | z \in c\}.$$

Определение 3.3. Если для допустимых множеств $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ существуют отображения $\nu : B \twoheadrightarrow A$ и $\mu : Pres(\mathcal{P}_\Sigma(\mathbb{A})) \rightarrow Pres(\mathcal{P}_\Sigma(\mathbb{B}))$ такие, что μ вычислимо и для любой компоненты $(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \in \mathrm{Com}(\mathbb{A})$ существует компонента $(\mathcal{S}', \mathcal{C}') \in \mathrm{Com}(\mathbb{B})$ такая, что

$$(\nu^{-1}(\mathcal{S}), \mu(Pres(\mathcal{C})) \text{ изоморфна } (\mathcal{S}', \mathcal{C}'),$$

то будем говорить, что вычислимость $\mathrm{Com}(\mathbb{A})$ Σ-*вложима* в вычислимость $\mathrm{Com}(\mathbb{B})$.

Замечание. Приведенная выше формулировка является ослабленной версией определения из [12], что оправдывает ее выбор для данной работы, так как в теореме 3.1 ниже Σ-сводимость допустимых множеств используется как достаточное условие. Нужно также отметить, что одно из отличий данного определения от определения из [12] не являясь существенным, оправдывает его использование в настоящей работе. А именно, рассматриваются только Σ-представления в которых носителем является все допустимое множество, что естественно и удобно в данном случае, так как Σ-процессы изначально определяются на всех возможных аргументах. Данное ограничение не влияет на общность рассуждений, поскольку по произвольному Σ-представлению эффективно строится Σ-представление с указанным выше свойством (см. [16]).

Теорема 3.1. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — допустимые множества. Если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, то $\mathrm{Com}(\mathbb{A})$ Σ-вложима в $\mathrm{Com}(\mathbb{B})$.

Доказательство. Покажем, что из того, что $\mathbb{A}$ Σ-сводится к $\mathbb{B}$ следует, что Σ-процессы на $\mathbb{A}$ представимы, равномерным и эффективным образом, с помощью Σ-процессов на $\mathbb{B}$, действующих на представлениях элементов из A. Таким образом, данный результат имеет существенные общие черты с результатом о (эффективном) вложении полурешеток Σ-степеней в полурешетки степеней представимости структур.

Укажем равномерную эффективную процедуру, преобразующую всякое Σ-представление произвольного Σ-процесса на $\mathbb{A}$ в некоторое Σ-представление Σ-процесса на $\mathbb{B}$, представляющего исходный процесс. Определим равномерное эффективное преобразование $\Phi(\overline{x},\overline{a}) \mapsto \Phi^*(\overline{x},\overline{b})$, переводящее Σ-формулы сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ с параметрами $\overline{a}$ из A в Σ-формулы сигнатуры $\sigma_{\mathbb{B}}$ с параметрами $\overline{b}$ из B, стандартным образом: индукцией по сложности формул. А именно, полагаем

- $(P(\overline{x}))^* = (\Phi(x_0) \wedge \ldots \wedge \Phi(x_{n-1}) \wedge \Phi_P(\overline{x}))$, $P^n \in \sigma_{\mathbb{A}}$;
- $(\neg P(\overline{x}))^* = (\Phi(x_0) \wedge \ldots \wedge \Phi(x_{n-1}) \wedge \Psi_P(\overline{x}))$, $P^n \in \sigma_{\mathbb{A}}$;
- $((\exists x \in y)\Theta)^* = (\Phi(y) \wedge \exists x(\Phi_\in(x,y) \wedge \Theta^*))$;
- $((\forall x \in y)\Theta)^* = (\Phi(y) \wedge \exists z((\langle y,z\rangle \in E) \wedge ((\forall v \in z)\Theta^*))$;
- $(\Theta_1 \circ \Theta_2)^* = (\Theta_1^* \circ \Theta_2^*)$, $\circ \in \{\wedge,\vee\}$,

и так далее. Далее, всякое Σ-представление Φ_α произвольного (m,n)-местного Σ-процесса α на $\mathbb{A}$ преобразуется в Σ-формулу $(\Phi_\alpha)^*$, которая является Σ-представлением (m,n)-местного Σ-процесса α^* на $\mathbb{B}$, такого, что, если $\langle S_0,\ldots,S_{n-1}\rangle \in \delta_c(\alpha)$ (δ_c — обозначение для области сильной непрерывности), то $\langle \nu^{-1}(S_0),\ldots,\nu^{-1}(S_{n-1})\rangle \in \delta_c(\alpha^*)$, и

$$\nu^{-1}(\alpha(S_0,\ldots,S_{n-1})) = \alpha^*(\nu^{-1}(S_0),\ldots,\nu^{-1}(S_{n-1})).$$

Таким образом, если определить отображение μ на классе Σ-процессов, положив $\mu(p) = (p)^*$, то пара отображений (ν^{-1},μ) будет определять требуемый изоморфизм. $\square$

4 Приложения для поля действительных чисел

Важным является нахождение аналога теоремы об обращении для гиперскачка и $P\Sigma$-скачка. Первым шагом в этом направлении является исследование Σ-степени $0^\diamond$.

Определение 4.1. Пусть $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел. Рассмотрим следующие структуры с носителем $\mathbb{R}$:

1) алгебраическое поле действительных чисел $\mathcal{R} = (\mathbb{R},+,\times,0,1,=)$;

2) топологическое поле действительных чисел

$$\mathcal{R}_o = (\mathbb{R},\Gamma_+^A,\Gamma_+^B,\Gamma_\times^A,\Gamma_\times^B,0,1,<),$$

где $\Gamma_+^A = \{\langle x,y,z\rangle \in \mathbb{R}^3 | x+y < z\}$, $\Gamma_+^B = \{\langle x,y,z\rangle \in \mathbb{R}^3 | z < x+y\}$ (аналогично определяются отношения $\Gamma_\times^A$, $\Gamma_\times^B$).

Теорема 4.1. $\mathcal{R} \leqslant_\Sigma (0^\diamond)'$.

Доказательство. Определим Σ-представление структуры действительных чисел $\mathcal{R}$ в $(0^\diamond)' = (\mathbb{HF}(0^\diamond),\Sigma\text{-Sat}_{\mathbb{HF}(0^\diamond)})$ следующим образом. Возьмем в качестве носителя представления множество

$$R = \{\langle k,m,\alpha\rangle | k \in \{-1,0,1\}, m \in \omega, \alpha \in Fun(\omega,2)\},$$

где $Fun(\omega, 2)$ — множество всюду определенных функций из ω в $2 = \{0, 1\}$, и пусть всякая тройка вида $x = \langle k, m, \alpha\rangle$ является представлением действительного числа

$$r_x = k(m + \sum_{n\in\omega} \frac{\alpha(n)}{2^{n+1}}).$$

Следующая лемма справедлива для произвольного допустимого множества.

Лемма 4.1. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Отношения $\in$ и $\subseteq$ между элементами множеств A и $P(A)$ являются терминациями некоторых Σ-процессов на $\mathbb{A}$.

Доказательство. Действительно, определим следующие $(1, 1)$-местные Σ-процессы $F^{\in}(a, x)$ и $F^{\subseteq}(a, x)$: для любых $a \in A$ и $S \in P(A)$, полагаем

$$F^{\in}(a, S) = \{1 \mid (\mathbb{A}, S) \models (\exists b \subseteq S)(b = \{a\})\};$$

$$F^{\subseteq}(a, S) = \{1 \mid (\mathbb{A}, S) \models (\exists b \subseteq S)(b = a)\}.$$

□

Лемма 4.2. Множество R Σ-определимо в $(\mathbb{HF}(0^\diamond), \Sigma\text{-Sat}_{\mathbb{HF}(0^\diamond)})$.

Доказательство. Для произвольного $S \in HF(0^\diamond)$, $S \in Fun(\omega, 2)$ тогда и только тогда, когда $\exists X(S = F(X)) \wedge \Phi(S)$, где Σ-оператор F на $\mathbb{HF}(\varnothing)$ определяется следующим образом: для любого $X \subseteq HF(\varnothing)$,

$$F(X) = \{y | \exists a \subseteq X \exists n \exists k[(a = \{y\}) \wedge (y = \langle n, k\rangle) \wedge Nat(n) \wedge (k \in 2)]\},$$

и

$$\Phi(S) = \forall n(Nat(n) \to ((((\langle n, 0\rangle \in S) \wedge (\langle n, 1\rangle \notin S)) \vee (((\langle n, 1\rangle \in S) \wedge (\langle n, 0\rangle \notin S))).$$

Так как $Fn(S)$ является П-формулой на $\mathbb{HF}(0^\diamond)$, то R является Σ-определимым в $(\mathbb{HF}(0^\diamond), \Sigma\text{-Sat}_{\mathbb{HF}(0^\diamond)})$. □

□

Теорема 4.2. $\mathcal{R}_o \leqslant^+_\Sigma 0^\diamond$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$R_o = \{\langle k, m, S\rangle | k \in \{-1, 0, 1\}, m \in \omega, S \subseteq \mathbb{HF}(\varnothing)\},$$

в качестве носителя представления. Отметим, что мощность представления $\mathcal{R}_0$ будет равна мощности самой структуры $\mathcal{R}_0$, что не всегда справедливо для представлений структур, рассматриваемых без отношения равенства. Доказательство опирается на следующие леммы.

Лемма 4.3. Для любого множества $S \subseteq \mathbb{HF}(\varnothing)$, следующие множества могут быть получены как значения некоторых Σ-операторов, действующих на S:

1) $S \cap \omega$;

2) $S \cap n \,(= S \cap \{0, \ldots, n-1\})$.

Кроме того, в случае 2 соответствующий Σ-оператор зависит от n равномерно и эффективно.

Доказательство. 1) Достаточно заметить, что $S \cap \omega = F_0(S)$, где

$$F_0(S) = \{x \in \mathrm{HF}(\varnothing) \,|\, (\mathbb{HF}(\varnothing), S) \models (\exists a \subseteq S)(\exists x)(a = \{x\}) \wedge Nat(x)\}.$$

2) Аналогично, для любого $n > 0$, $S \cap n = F_n(S)$, где

$$F_n(S) = \{x \in \mathrm{HF}(\varnothing) \,|\, (\mathbb{HF}(\varnothing), S) \models (\exists a \subseteq S)(\exists x)(a = \{x\}) \wedge (x \in n)\}.$$

□

Лемма 4.4. Отношение строгого порядка $\{\langle x_1, x_2 \rangle \in R_o^2 \,|\, r_{x_1} < r_{x_2}\}$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(0^\diamond)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим, например, случай, когда $x_1 = \langle 0, 1, S_1 \rangle$ и $x_2 = \langle 0, 1, S_2 \rangle$. По лемме 4.3, функции $\alpha_i : \omega \to \{0, 1\}$, для которых $S_i = \{n \in \omega | \alpha_i = 1\}$, Σ-определимы в $\mathbb{HF}(0^\diamond)$. Так как $r_{x_1} < r_{x_2}$ означает, что

$$\sum_{n \in \omega} \frac{\alpha_1(n)}{2^{n+1}} < \sum_{n \in \omega} \frac{\alpha_2(n)}{2^{n+1}},$$

это эквивалентно тому, что существует $n_0 \in \omega$, для которого

$$\sum_{n < n_0} \frac{\alpha_1(n)}{2^{n+1}} - \sum_{n < n_0} \frac{\alpha_2(n)}{2^{n+1}} > \frac{1}{2^{n_0 - 1}},$$

при этом существуют $n_1, n_2 > n_0$, для которых $\alpha_1(n_1) = \alpha_2(n_2) = 0$. Снова, по лемме 4.3 это условие может быть выражено в $\mathbb{HF}(0^\diamond)$ с помощью Σ-формулы.

2) Общий случай, когда $x_1 = \langle k_1, m_1, S_1 \rangle$ и $x_2 = \langle k, m_1, S_2 \rangle$, рассматривается аналогично: $r_{x_1} < r_{x_2}$ означает, что

$$(k_2 m_2 - k_1 m_1) + (k_2 \sum_{n \in \omega} \frac{\alpha_2(n)}{2^{n+1}} - k_1 \sum_{n \in \omega} \frac{\alpha_1(n)}{2^{n+1}}) > 0.$$

В зависимости от значений k_i и m_i, последнее условие либо устанавливается тривиальной проверкой, либо сводится к строгому неравенству между рядами, как в первом случае. □

Аналогичным образом устанавливается, что отношения $\Gamma_+^A, \Gamma_+^B, \Gamma_\times^A, \Gamma_\times^B$ также являются Σ-определимыми в $\mathbb{HF}(0^\diamond)$. □

5 Эквивалентность $h\Sigma$-определимости и Δ^{DL}-определимости структур

Структуру $\mathfrak{M}$ будем называть *$h\Sigma$-определимой*, или *Σ_1^{DL}-определимой* в приемлемом структурированном аппроксимационном пространстве $\mathcal{X}$, если выполнены все условия определения 3.5 из работы [1] (Δ_1^{DL}-определимости структуры в приемлемом структурированном аппроксимационном пространстве), за исключением существования Σ_1^{DL}-формулы $\Psi(x,y)$, выделяющей в $\mathcal{X}$ дополнение основного множества $\mathfrak{M}$. Аналогично финитной версии определения 3.5 из работы [1], вводится понятие *финитной $h\Sigma$-определимости*, или *финитной Σ_1^{DL}-определимости*.

Предложение 5.1. Для структуры $\mathfrak{M}$ и приемлемого структурированного аппроксимационного пространства $\mathcal{X}$, следующие условия эквивалентны:

1) $\mathfrak{M}$ (финитно) Σ_1^{DL}-определима в $\mathcal{X}$;

2) $\mathfrak{M}$ (финитно) Δ^{DL}-определима в $\mathcal{X}$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только импликация из 1 в 2. Рассмотрим сначала случай Σ_1^{DL}-определимости. Пусть $\Phi(S)$ — Σ_1^{DL}-формула, определяющая множество M. Не нарушая общности, можно считать, что формула Φ имеет вид $(\exists P)\Theta(S,P)$, где $\Theta(S,P)$ — Δ_0^{DL}-формула. Зададим Σ_1^{DL}-формулы $\Psi(S,P)$ и $\Psi^*(S,P)$, определяющие множества M' и $X \setminus M'$ следующим образом, учитывая Δ_0^{DL}-определимость множества $\mathrm{rng}(\cdot,\cdot)$:

$$M' = \{R \in X | (\exists S)(\exists P)((R = (S,P)) \wedge \Theta(S,P))\},$$

$$X \setminus M' = \{R \in X | (R \notin \mathrm{rng}(\cdot,\cdot)) \vee ((\exists S)(\exists P)((R = (S,P)) \wedge \neg\Theta(S,P)))\}.$$

Для случая финитной Σ_1^{DL}-определимости Σ_1^{DL}-формулы $\Psi(S,P)$ и $\Psi^*(S,P)$, определяющие множества M' и $X \setminus M'$ задаются аналогично:

$$M' = \{R \in X | (\exists S)(\exists P)((R = (S,P)) \wedge F(S) \wedge \Theta(S,P))\},$$

$$X \setminus M' = \{R \in X | (R \notin \mathrm{rng}(\cdot,\cdot)) \vee ((\exists S)(\exists P)((R = (S,P)) \wedge (\neg F(S) \vee \neg\Theta(S,P))))\}.$$

Формулы для отношения конгруэнции и атомарных отношений, определяющие на M' структуру, изоморфную A, получаются из соответствующих формул над M стандартным образом: с помощью подстановки функции pr_0, выделяющей из пар вида (S,P) первый элемент.

□

6 Открытые вопросы

1. В каком виде справедлив аналог теоремы Фридберга об обращении скачка для полурешетки $\mathcal{S}^{DL}$ гиперстепеней структур с операцией гиперскачка?

2. Верно ли, что $0^{\diamond} \leqslant^{+}_{\Sigma} \mathcal{R}_0$? Это будет означать, что для максимальной компоненты HF-вычислимости над 0 справедлив аналог теоремы Матиясевича. Также, естественным является следующий вопрос: верно ли, что $(0^{\diamond})' \leqslant_{\Sigma} \mathcal{R}$?

3. Как выглядит теорема о полноте для логики DL над аппроксимационными пространствами Ершова-Скотта?

Список литературы

[1] A.I. Stukachev: Generalized hyperarithmetical computability on structures. Algebra Logic. **55** (2016) 769–799

[2] A.I. Stukachev: On processes and structures. Lecture Notes in Computer Science. **7921** (2013) 393–402

[3] J. Barwise: Admissible Sets and Structures. Springer-Velag. Berlin. (1975)

[4] Yu.L. Ershov: Definability and Computability. Plenum. New York. (1996)

[5] A.I. Stukachev: A Jump Inversion Theorem for the semilattices of Σ-degrees. (Russian). Sib. Elektron. Mat. Izv. **6** (2009) 182–190

[6] A.I. Stukachev: A Jump Inversion Theorem for the semilattices of Σ-degrees. Sib. Adv. Math. **20** (2010) 68–74

[7] A.A. Soskova: A jump inversion theorem for the degree spectra. Lect. Notes Comput. Sci. **4497** (2007) 716–726

[8] I.N. Soskov, A. A. Soskova: A jump inversion theorem for the degree spectra. J. Log. Comput. **19** (2009) 199–215

[9] A. Montalban: Notes on the jump of a structure. Lect. Notes Comput. Sci. **5635** (2009) 372–378

[10] V. Baleva: The jump operation for structure degrees. Arch. Math. Logic. **45** (2006) 249–265

[11] A.I. Stukachev: Degrees of presentability of structures, I. Algebra Logic. **46** (2007) 419–432

[12] A.S. Morozov: On the relation of Σ-reducibility between admissible sets. Sib. Math. J. **45** (2004) 522–535

[13] Yu.L. Ershov: Σ-definability in admissible sets. Sov. Math. Dokl. **32** (1985) 767–770

[14] A.I. Stukachev: Degrees of presentability of structures, II. Algebra Logic. **47** (2008) 65–74

[15] A.I. Stukachev: Effective model theory: an approach via Σ-definability. Lect. Notes in Logic. **41** (2013) 164–197

[16] V.G. Puzarenko: About a certain reducibility on admissible sets. Sib. Math. J. **50** (2009) 330–340

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А.И. Стукачев, Обобщенно гиперарифметическая вычислимость над структурами. II

Аннотация. Вводится понятие компоненты вычислимости на допустимом множестве, рассматриваются минимальная и максимальная компоненты вычислимости на наследственно конечных надстройках и ссответствующие этим компонентам скачки. Показано, к скачкам максимальной компоненты вычислимости на наименьшем допустимом множестве $\mathbb{HF}(\varnothing)$ Σ-сводится поле действительных чисел. Тем самым получен результат, в терминах Σ-сводимости связывающий действительные числа, понимаемые как структура, с действительными числами, понимаемымим как аппроксимационное пространство. Сформулирван ряд естественных открытых вопросов.
Ключевые слова: теория вычислимости, допустимые множества, аппроксимационные пространства, конструктивные модели, вычислимый анализ, гиперарифметическая вычислимость.