УДК 510.5

Σ-допустимые семейства над линейными порядками

А.И. Стукачев

Аналогом рекурсивной перечислимости в обобщенной теории рекурсии является понятие Σ-определимости. В свою очередь, это понятие в некоторых случаях также может быть обобщено. В монографии [1] рассматривается естественное расширение класса Σ-подмножеств допустимого множества до так называемых Σ-допустимых семейств. Настоящая работа посвящена изучению семейств и подмножеств, которые могут служить базисом для образования Σ-допустимых семейств.

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Для Σ-оператора $F : P(A) \to P(A)$ через $\delta_C F$ обозначим множество всех точек $S \in P(A)$, в которых оператор F сильно непрерывен. Подмножество $S \subseteq A$ называется *Σ_*-множеством*, если S входит в $\delta_C F$ для любого одноместного Σ-оператора F.

Класс $\Sigma_*(A)$ всех Σ_*-множеств, однако, не определяется синтаксически, в отличие от класса $\Sigma(A)$ всех Σ-подмножеств, каждый элемент которого задается в $\mathbb{A}$ некоторой Σ-формулой. В силу этого большой интерес представляют семейства подмножеств, промежуточные между $\Sigma(A)$ и $\Sigma_*(A)$, полученные следующим образом. Для допустимого множества $\mathbb{A}$ вводится класс $\Sigma^+(A)$, построенный как замыкание относительно позитивных Σ-операторов некоторого (как правило, конечного) семейства $\mathcal{P}$ подмножеств A, удовлетворяющего определенным условиям допустимости. Полученный таким образом класс представляется естественным расширением класса Σ-подмножеств (для класса $\Sigma^+(A)$, например, справедливо обобщение теоремы Ганди), поэтому он подробно изучался (см. [1, 2, 3, 4]).

В данной работе рассматриваются допустимые множества вида $HYP(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная система. В этом случае удается получить описание подмножеств модели $\mathfrak{M}$, являющихся Σ_*-множествами в $HYP(\mathfrak{M})$. В первой части для произвольного допустимого множества вводится понятие Σ-регулярного семейства и Σ-регулярной пары. Формулируются и доказываются простейшие свойства Σ-регулярных пар, которые оказываются полезными при изучении свойств Σ_*-множеств. Во второй части для произвольного допустимого множества определяется класс фундаментальных подмножеств как расширение класса Σ_*-множеств. В случае, когда $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная система, фундаментальные в $HYP(\mathfrak{M})$ подмножества праэлементов могут быть описаны при помощи некоторого теоретико-модельного понятия, которое мы из этих соображений также называем фундаментальностью. Для произвольной модели $\mathfrak{M}$ определяется класс внутренних подмножеств. В случае, когда $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена, пересечение класса внутренних и класса фундаментальных подмножеств $\mathfrak{M}$ совпадает с классом подмножеств $\mathfrak{M}$, являющихся Σ_*-множествами в $HYP(\mathfrak{M})$.

Понятия фундаментального и внутреннего подмножеств будут более подробно рассмотрены в третьей части на примере плотного линейного порядка. Удается получить описание фундаментальных подмножеств и семейств в любой модели $\mathfrak{L}$ плотного линейного порядка, в частности, в моделях $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ рациональных и действительных чисел с естественным порядком. Также описаны подмножества, являющиеся внутренними в $\mathfrak{L}$.

Терминология и основные обозначения являются стандартными и соответствуют монографиям [1] и [5]. Отметим лишь, что в допустимых множествах аппарат кодирования позволяет ограничиваться рассмотрением только одноместных предикатов и формул от одной переменной.

1 Σ-регулярные семейства в $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество сигнатуры σ_1, σ_1 содержит предикатные символы $\in^2$ и U^1 (последний выделяет праэлементы в A). Для всякого $n \in \omega$ определим сигнатуру $\sigma_1^n = \sigma_1 \cup \langle \mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n-1} \rangle$, где $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ — символы одноместных предикатов. Для произвольного набора подмножеств $P_0 \subseteq A, \ldots, P_{n-1} \subseteq A$ через $\langle \mathbb{A}, \bar{P} \rangle$ будем обозначать модель расширенной сигнатуры σ_1^n, в которой символ одноместного предиката P_i интерпретируется как подмножество $P_i \subseteq A$.

Для всякого $n \in \omega$ определим класс $\bar{\mathrm{P}}$-позитивных формул сигнатуры σ_1^n так:
— если $\Phi(\bar{x})$ – формула сигнатуры σ_1, то $\Phi(\bar{x})$ является $\bar{\mathrm{P}}$-позитивной;
— если t – терм сигнатуры σ_1, то формула $\mathrm{P}_i(t)$ является $\bar{\mathrm{P}}$-позитивной;
— если $\Phi(\bar{x}), \Psi(\bar{y})$ – $\bar{\mathrm{P}}$-позитивные формулы, то формулы $\Phi(\bar{x}) \wedge \Psi(\bar{y})$, $\Phi(\bar{x}) \vee \Psi(\bar{y})$ также являются $\bar{\mathrm{P}}$-позитивными;
— если $\Phi(x, \bar{z})$ – $\bar{\mathrm{P}}$-позитивная формула, то формулы $\exists x \Phi(x, \bar{z}), \forall x \Phi(x, \bar{z}), \exists x \in y \Phi(x, y, \bar{z}), \forall x \in y \Phi(x, y, \bar{z})$ также являются $\bar{\mathrm{P}}$-позитивными.

Σ-формулу сигнатуры $\sigma_1 \cup \langle \bar{\mathrm{P}} \rangle$, которая является $\bar{\mathrm{P}}$-позитивной, будем называть Σ^+-формулой. С каждой Σ^+-формулой $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры σ_1^n и любым набором $\pi_0, \ldots, \pi_{n-1}$ различных переменных, не встречающихся в Φ, свяжем Σ-формулу $\Phi^*(\bar{x}, \bar{\pi})$ сигнатуры σ_1, полученную из формулы Φ заменой каждой подформулы вида $P_i(t)$ формулой $t \in \pi_i,\ i \in n$. Σ-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{\pi})$ называется *$\bar{\pi}$-специальной*, если $\Phi(\bar{x}, \bar{\pi}) = \Psi^*(\bar{x}, \bar{\pi})$ для некоторой Σ^+-формулы $\Psi(\bar{x})$. Заметим, что всякая $\bar{\pi}$-специальная Σ-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{\pi})$ является $\bar{\pi}$-монотонной, то есть

$$\mathrm{KPU} \vdash \forall \pi_0' \supseteq \pi_0 \ldots \forall \pi_{n-1}' \supseteq \pi_{n-1} (\Phi(\bar{x}, \bar{\pi}) \to \Phi(\bar{x}, \bar{\pi}')).$$

KPU^+-теорией (сигнатуры σ_1^n) называется теория, аксиомами которой являются аксиомы экстенсиональности, пустого множества, пары, объединения, схемы аксиом Δ_0-выделения, схемы аксиом фундирования (для всех формул сигнатуры σ_1^n) и приводимой ниже схемы аксиом Δ_0-ограниченности: для любой $\bar{\pi}$-специальной Δ_0-формулы $\Phi(x, y, \bar{z}, \bar{\pi})$

$$\forall x \in v \exists y \exists \bar{\pi} \subseteq \bar{P} \Phi \to \exists u \exists \bar{\pi} \subseteq \bar{P} \forall x \in v \exists y \in u \Phi$$

Пусть $\mathbb{A}$ — KPU-модель сигнатуры σ_1. Согласно [1], семейство $\Sigma^+(A)$ подмножеств A называется *Σ-допустимым*, если для любого $n \in \omega$ и любых $Q_0, \ldots, Q_{n-1} \in \Sigma^+(A)$ выполняются следующие условия:
— $\mathbb{A}^+ \rightleftharpoons \langle \mathbb{A}, Q_0, \ldots, Q_{n-1} \rangle$ есть KPU^+-модель сигнатуры σ_1^n
— если Q_n – Σ^+-подмножество $\mathbb{A}^+$, то $Q_n \in \Sigma^+(A)$.

Пусть $\mathbb{A}$ —допустимое множество, и $\Phi(x)$ — Σ^+-формула сигнатуры $\sigma_1 \cup \{\mathrm{P}\}$ с параметрами из $\mathbb{A}$. Определим Σ-оператор $\Gamma_\Phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, положив

$$\Gamma_\Phi(Q) = \{x \in A | \langle \mathbb{A}, Q \rangle \models \Phi(x)\}$$

для любого $Q \subseteq A$. мз Р-позитивности формулы Φ следует монотонность оператора Γ_Φ, то есть $\forall Q, R(Q \subseteq R \Rightarrow \Gamma_\Phi(Q) \subseteq \Gamma_\Phi(R))$. Таким образом, для произвольного подмножества $P \subseteq A$ имеем $\Gamma_\Phi(\pi) \subseteq \Gamma_\Phi(P)$ для всякого $\mathbb{A}$-конечного $\pi \subseteq P$, поэтому включение $\bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \Gamma_\Phi(\pi) \subseteq \Gamma_\Phi(P)$ имеет место для любой Р-позитивной формулы Φ (здесь и далее в условии вида $\pi \subseteq P$ подразумевается, что $\pi \in \mathbb{A}$). Обратное включение выполняется не всегда. Напомним (см.[1]) важное

Определение 1. *Подмножество $P \subseteq A$ называется Σ_*-множеством в $\mathbb{A}$, если $\Gamma_\Phi(P) = \bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \Gamma_\Phi(\pi)$ для любой Р-позитивной Σ-формулы $\Phi(x)$.*

Таким образом, если P — Σ_*-множество в $\mathbb{A}$, и $\Phi(x)$ — Σ^+-формула, то из $a \in \Gamma_\Phi(P)$ следует, что $a \in \Gamma_\Phi(\pi)$ для некоторого $\pi \subseteq P$. Определение Σ_*-множества можно также сформулировать в терминах Р-негативных Π-формул. А именно: подмножество $P \subseteq A$ будет Σ_*-множеством в $\mathbb{A}$, если для всякой Р-негативной Π-формулы $\Psi(x)$ и любого элемента $a \in A$ выполняется следующее: если $a \in \Gamma_\Psi(\pi)$ для всех $\pi \subseteq P$, то $a \in \Gamma_\Psi(P)$.

Определение 2. *Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств A назовем* **Σ-регулярным в** $\mathbb{A}$, *если для всякого $n \in \omega$ и для любых $P_0, \ldots, P_{n-1}$ из $\mathcal{P}$ справедливо равенство*

$$\Gamma_\Phi(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \bigcup_{\pi_0 \subseteq P_0} \ldots \bigcup_{\pi_{n-1} \subseteq P_{n-1}} \Gamma_\Phi(\pi_0, \ldots, \pi_{n-1})$$

для любой $\bar{\mathrm{P}}$-позитивной Σ-формулы $\Phi(x)$ сигнатуры $\sigma_1 \cup \langle P_0, \ldots, P_{n-1} \rangle$.

В дальнейшем будет часто использоваться важное предложение из [6], с помощью которого, в частности, легко убедиться, что всякое Σ-подмножество является Σ_*-множеством в $\mathbb{A}$. В наших обозначениях это предложение выглядит следующим образом.

Предложение 1. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, $P_0, \ldots, P_{n-1}$ — подмножества A. Тогда $\langle \mathbb{A}, \bar{P} \rangle \models \mathrm{KPU}^+$ тогда и только тогда, когда $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ — Σ-регулярное семейство в $\mathbb{A}$. В частности, $\langle \mathbb{A}, P \rangle \models \mathrm{KPU}^+$ тогда и только тогда, когда P— Σ_*-множество в $\mathbb{A}$.*

Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ — два произвольных семейства подмножеств из $\mathbb{A}$. Будем говорить, что $\mathcal{Q} \leqslant_\Sigma \mathcal{P}$, если для любого Q из $\mathcal{Q}$ существуют $P_1, \ldots, P_n$ из $\mathcal{P}$ такие, что $Q = \Gamma_\Phi(P_1, \ldots, P_n)$ для некоторой $\bar{\mathrm{P}}$-позитивной Σ-формулы $\Phi(x)$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если $\mathcal{Q} \leqslant_\Sigma \mathcal{P}$, и $\mathcal{P}$ — Σ-регулярное семейство, то $\mathcal{Q}$ также является Σ-регулярным семейством.*

Доказательство. Пусть $Q_0, \ldots, Q_{n-1} \in \mathcal{Q}$. Тогда существуют $P_0, \ldots, P_{m-1} \in \mathcal{P}$ такие что $\forall i < n \ Q_i = \Gamma_{\Phi_i}(P_0, \ldots, P_{m-1})$ для некоторых $\bar{P}$-позитивных Σ-формул $\Phi_0(x), \ldots, P_{m-1}(x)$ сигнатуры σ_1^m. Ограничимся для простоты случаем, когда $n = 1$ и $m = 1$. Пусть $\Psi(x)$ — Q-позитивная Σ-формула сигнатуры $\sigma_1 \cup \{Q\}$. ммеем $\Gamma_\Psi(Q) = \Gamma_\Psi(\Gamma_\Phi(P)) = \Gamma_{\Psi\circ\Phi}(Q)$, если через $\Psi \circ \Phi(x)$ обозначать Р-позитивную Σ-формулу, полученную из $\Psi(x)$ заменой всех подформул вида Q(t) на формулу $\Phi(t)$. Далее, поскольку P — Σ_*-множество, $\Gamma_{\Psi\circ\Phi}(P) = \bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \Gamma_{\Psi\circ\Phi}(\pi) = \bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \Gamma_\Psi(\Gamma_\Phi(\pi))$ =(так как $\Gamma_\Phi(\pi)$ — Σ-подмножество, а значит и Σ_*-множество) $= \bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \bigcup\limits_{\pi' \subseteq \Gamma_\Phi(\pi)} \Gamma_\Psi(\pi') \subseteq \bigcup\limits_{\pi' \subseteq \Gamma_\Phi(P)} \Gamma_\Psi(\pi')$. Таким образом, $Q = \Gamma_\Phi(P)$ является Σ_*-множеством. $\square$

Для семейства $\mathcal{P}$ определим семейство $\widehat{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{\mathcal{Q} \leqslant_\Sigma \mathcal{P}} \mathcal{Q}$. ммеет место

Теорема 2. *Если $\mathcal{P}$ — Σ-регулярное семейство, то $\widehat{\mathcal{P}}$ является Σ-допустимым семейством.*

Простейшее Σ-регулярное семейство вида $\{P_0, P_1\}$ будем называть *Σ-регулярной парой.* мз теоремы 1 следует

Лемма 1. *Если P — Σ_*-множество, а R является Σ-подмножеством в $\mathbb{A}$, то $\{P, R\}$ — Σ-регулярная пара в $\mathbb{A}$.*

Вопрос о том, будет ли объединение или пересечение Σ_*-множеств снова Σ_*-множеством, в общем случае не является тривиальным. Достаточное условие дает

Лемма 2. *Если $\{P_1, P_2\}$ — Σ-регулярная пара, то $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2$ — Σ_*-множества.*

Доказательство. Докажем, что $P_1 \cup P_2$ — Σ_*-множество (случай пересечения рассматривается аналогично). ммеем $P_1 \cup P_2 = \Gamma_\Phi(P_1, P_2)$, где $\Phi(x) \leftrightharpoons P_1(x) \vee P_2(x)$, поэтому утверждение леммы непосредственно следует из теоремы 1. □

Следствием двух предыдущих лемм является

Лемма 3. *Если P — Σ_*-множество, а Q — Σ-подмножество в $\mathbb{A}$,то $P \cup Q$ и $P \cap Q$ являются Σ_*-множествами в $\mathbb{A}$.*

Для произвольного предиката $P \subseteq A^n, n > 1$ через $pr(P)$ будем обозначать проекцию P на первые $n-1$ координат. Вводя соответствующую кодировку, можно считать предикаты P и $pr(P)$ одноместными.

Лемма 4. *Если P — Σ_*-множество, то $pr(P)$ также Σ_*-множество.*

Доказательство. ммеем $pr(P) = \Gamma_\Phi(P)$, где $\Phi(\bar{x}) \leftrightharpoons \exists x_{n-1} P(x_0, \ldots, x_{n-1})$, поэтому утверждение леммы непосредственно следует из теоремы 1. □

Лемма 5. *Если $P_1 \subseteq A^{n_1}$, $P_2 \subseteq A^{n_2}$ таковы, что $\{P_1, P_2\}$ — Σ-регулярная пара, то $P_1 \times P_2$ — Σ_*-множество.*

Доказательство. Поскольку имееет место представление $P_1 \times P_2 = \Gamma_\Phi(P_1, P_2)$, где по определению $\Phi(x_0, \ldots, x_{n_1+n_2-1}) \leftrightharpoons P_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}) \wedge P_2(x_{n_1}, \ldots, x_{n_1+n_2-1})$, то утверждение леммы непосредственно следует из теоремы 1. □

В конце третьей части будет рассмотрен пример, показывающий, что от требования Σ-регулярности пары $\{P_1, P_2\}$ в леммах 2 и 5 нельзя отказаться.

Рассмотрим цепь

$$\mathbb{A}_0 \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_1 \leqslant_{\Sigma_1} \ldots \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_n \leqslant_{\Sigma_1} \ldots$$

Σ_1-вложенных KPU-моделей, такую, что $\mathbb{A}_* = \cup \mathbb{A}_n$ – KPU-модель, обладающая следующим свойством: для любого $a \in A_*$ из того, что $a \subseteq A_n$ следует, что $a \in A_n$. Пусть $P_* \subseteq A_*$ — произвольное подмножество. Укажем одно достаточное условие, при котором P_* будет Σ_*-множеством в $\mathbb{A}_*$.

Определение 3. *Подмножество $R \subseteq A_*$ назовем* **$\mathbb{A}_n$-определимым***, если R определимо в $\mathbb{A}_*$ некоторой Δ_0-формулой с параметрами из $\mathbb{A}_n$.*

Определение 4. *Подмножество $P_* \subseteq A_*$ назовем* **ступенчатым***, если для любого $n \in \omega$ существуют подмножество $P \subseteq A_n$, являющееся Σ_*-множеством в $\mathbb{A}_n$, и подмножество $R \subseteq A_*$, являющееся $\mathbb{A}_n$ -определимым, такие, что $P_* = P \cup R$.*

Лемма 6. *Если $P_* \subseteq A_*$ — ступенчатое подмножество, то P_* является Σ_*-множеством в $\mathbb{A}_*$.*

Доказательство. Воспользуемся критерием из предложения 1: пусть для некоторой π-специальной Δ_0-формулы $\Phi(x, y, \pi)$ сигнатуры σ_1 имеет место $\mathbb{A}_* \models \forall x \in a \exists \pi \subseteq P_* \exists y \Phi(x, y, \pi)$. Пусть a и все параметры формулы Φ лежат в A_n. По условию, существуют подмножество P_n, являющееся Σ_*-множеством в $\mathbb{A}_n$, и подмножество $R_n \subseteq A_*$, определимое в $\mathbb{A}_*$ некоторой Δ_0-формулой Ψ с параметрами из A_n, такие, что $P = P_n \cup R_n$. Поэтому любой элемент $\pi \subseteq P_*$ представляется в виде $\pi \cup \pi'$, где $\pi \subseteq P_n, \pi' \subseteq R_n$. Таким образом,

$$\mathbb{A}_* \models \forall x \in a \exists \pi \subseteq P_n \exists \pi' \exists y \Phi_*(x, y, \pi, \pi'),$$

где $\Phi_*(x, y, \pi, \pi') \leftrightharpoons \forall z \in \pi' \Psi(z) \wedge \Phi(x, y, \pi \cup \pi')$. Так как $\pi \subseteq P_n \to \pi \in A_n$, то та же формула справедлива и в $\mathbb{A}_n$, а так как P_n является Σ_*-множеством в $\mathbb{A}_n$, то

$$\mathbb{A}_n \models \exists \rho \exists u \exists \pi \subseteq P_n \forall x \in a \exists \pi' \in \rho \exists y \in u \Phi_*(x, y, \pi, \pi'),$$

причем вследствие Δ_0-выделения можно считать, что $\forall \pi' \in \rho \forall z \in \pi' \Psi(z)$. Отсюда, учитывая $\mathbb{A}_n \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_*$, получаем, что та же формула выполняется и в $\mathbb{A}_*$. Для элемента $\pi_a = \bigcup \rho$ имеем $\pi_a \subseteq R$, и $\mathbb{A}_* \models \forall x \in a \exists y \in u \Phi(x, y, \pi \cup \pi_a)$, что и требовалось показать, поскольку $\pi \cup \pi_a \subseteq P_*$. □

2 Подмножества праэлементов, фундаментальные в $HYP(\mathfrak{M})$.

Определим класс подмножеств, являющийся расширением класса Σ_*-множеств.

Определение 5. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Подмножество $P \subseteq A$ назовем* **фундаментальным в** $\mathbb{A}$, *если $\Gamma_\Phi(P) = \bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \Gamma_\Phi(\pi)$ для любой* P*-позитивной Δ_0-формулы $\Phi(x)$*

Предложение 2. *Подмножество $P \subseteq A$ фундаментально в $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда, для любой* P*-негативной Δ_0-формулы $\Psi(x)$ и для любого $a \in A$, в $\mathbb{A}$ выполнена формула*

$$\forall \pi \subseteq P \exists x \in a \Psi(x, \pi) \to \exists x \in a \forall \pi \subseteq P \Psi(x, \pi),$$

где $\Psi(x, \pi)$ — соответствующая формуле Ψ π-специальная Δ_0-формула.

Доказательство. Покажем что из условия предложения следует, что P фундаментально. Пусть $\Psi(x)$ — P-негативная Δ_0-формула сигнатуры σ_1^1 и $a \in A$ таково, что $a \in \Gamma_\Phi(\pi)$ для всех $\pi \subseteq P$. Другими словами, в $\mathbb{A}$ выполняется бесконечная конъюнкция $\bigwedge\limits_{\pi \subseteq P} \Psi(a, \pi)$, мндукцией по сложности формулы Ψ покажем, что $\langle \mathbb{A}, P \rangle \models \Psi(a)$ (параллельно той же индукцией установим, что для всякой P-позитивной Δ_0-формулы $\Phi(x)$ из $\langle \mathbb{A}, P \rangle \models \Phi(a)$ следует $\mathbb{A} \models \bigvee\limits_{\pi \subseteq P} \Phi(a, \pi)$).

0) если $\Psi(a)$ — формула сигнатуры σ_1. Этот случай тривиален.

1) если $\Psi(a) = \neg P(a)$, то, так как всякий элемент $p \in P$ очевидно содержится в множестве $\pi = \{p\}$, имеем $\bigwedge\limits_{\pi \subseteq P} \Psi(a, \pi) \to \bigwedge\limits_{p \in P} (a \neq p) \to \neg P(a)$. Отсюда также очевидно, что из $\langle \mathbb{A}, P \rangle \models P(a)$ следует $\mathbb{A} \models \bigvee\limits_{\pi \subseteq P} (a \in \pi)$.

2) если $\Psi(a) = \neg\Phi(a)$, то $\Phi(a)$ — Р-позитивна, поэтому $\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \neg\Phi(a,\pi) \leftrightarrow \neg(\bigvee\limits_{\pi\subseteq P} \Phi(a,\pi))$ $\to \neg(\langle\mathbb{A},P\rangle \models \Phi(a)) \leftrightarrow \langle\mathbb{A},P\rangle \models \neg\Phi(\bar{a})$.
3) если $\Psi(a) = \Psi^1(a) \wedge \Psi^2(a)$, то очевидно $\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi(a,\pi) \to \bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi^1(a,\pi) \wedge \bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi^2(a,\pi) \to$ $\Psi^1(a) \wedge \Psi^2(a)$.
4) если $\Psi(a) = \Psi^1(a) \vee \Psi^2(a)$. Предположим, что $\langle\mathbb{A},P\rangle \models \neg\Psi^1(a) \wedge \neg\Psi^2(a)$. Так как формулы $\neg\Psi^1$ и $\neg\Psi^2$ Р-позитивны, то по индукции

$$\langle\mathbb{A},P\rangle \models \neg\Psi^i(a) \Rightarrow \mathbb{A} \models \neg\Psi^i(a,\pi_i),\ i \in \{1,2\}$$

для некоторых $\pi_1 \subseteq P$, $\pi_2 \subseteq P$. мз Р-позитивности также следует, что для элемента $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ имеет место $\mathbb{A} \models \neg\Psi^1(a,\pi)$, $\mathbb{A} \models \neg\Psi^2(a,\pi)$, то есть $\mathbb{A} \not\models \Psi^1(a,\pi) \vee \Psi^2(a,\pi)$. Получили противоречие, поскольку $\pi \subseteq P$.
5) если $\Psi(a) = \forall x \in c\Psi^0(a,x)$, то $\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi(a,\pi) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{\pi\subseteq P}\bigwedge\limits_{b\in c} \Psi^0(a,b,\pi) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{b\in c}\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi^0(a,b,\pi)$ $\to \forall x \in c\Psi^0(a,x)$.
6) если $\Psi(a) = \exists x \in c\Psi^0(a,x)$, то $\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \exists x \in c\Psi^0(a,x,\pi) \to \exists x \in c \bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi^0(a,x,\pi) \to$ $\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi^0(a,b,\pi)$ для некоторого $b \in c$ $\to \Psi^0(a,b) \to \exists x \in c\Psi^0(a,x)$.

Докажем теперь в обратную сторону. Пусть подмножество $P \subseteq A$ фундаментально. Если для некоторой Р-негативной Δ_0-формулы $\Psi(x)$ в $\mathbb{A}$ выполняется конъюнкция $\bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \exists x \in c\Psi(x,\pi)$, то по определению фундаментального подмножества имеем $\langle\mathbb{A},P\rangle \models \exists x \in c\Psi(x)$, то есть для некоторого $b \in c$ справедлива формула $\Psi(b)$. Но поскольку формула Ψ Р-негативна, то отсюда следует, что для любого $\pi \subseteq P$ справедлива формула $\Psi(b,\pi)$. Отсюда очевидно, что в $\mathbb{A}$ выполняется бесконечная формула $\exists x \in c \bigwedge\limits_{\pi\subseteq P} \Psi(x,\pi)$. □

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель некоторой сигнатуры σ. По ней однозначно определяется допустимое множество $HYP\mathfrak{M}$, поэтому корректно

Определение 6. *Подмножество $P \subseteq M^n$ назовем* **фундаментальным в $\mathfrak{M}$**, *если P фундаментально в допустимом множестве $HYP(\mathfrak{M})$.*

Как будет показано ниже, для модели $\mathfrak{M}$ из подходящего класса фундаментальность в $\mathfrak{M}$ может быть выражена при помощи некоторого теоретико-модельного понятия, не зависящего от HYP.

Подмножество $D \subseteq M$ называется *определимым в* $\mathfrak{M}$, если оно определяется некоторой формулой сигнатуры σ с набором параметров из M. Для произвольного подмножества $P \subseteq M$ через $dsb(P)$ будем обозначать семейство всех определимых подмножеств D, для которых $D \subseteq P$.

Важный класс моделей составляют так называемые рекурсивно насыщенные системы. Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ называется *рекурсивно насыщенной*, если для любого рекурсивного множества формул Φ, все свободные переменные которых содержатся в множестве $\{x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m\}$, и для любых элементов $a_0,\dots,a_m \in M$ выполнено следующее: если для любого конечного подмножества $\Phi_0 \subseteq \Phi$ существуют $b_0,\dots,b_n \in M$ такие, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b},\bar{a})$ для всех $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \Phi_0$, то существуют $b_0,\dots,b_n \in M$ такие, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b},\bar{a})$ для всех $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \Phi$.

Модель $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $O(\mathfrak{M}) = \omega$. мными словами, элементами $HYP(\mathfrak{M})$ — наименьшего допустимого множества, содержащего M как элемент, — являются в точности элементы из $L(\omega,M)$. Хорошо известна следующая

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена. Подмножество $R \subseteq M^n$ является элементом $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда R определимо в $\mathfrak{M}$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена. Подмножество $P \subseteq M$ фундаментально в модели $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие $(*)$: для всякой* P*-позитивной формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{P}\}$ и любых элементов $\bar{a}$ из M из того, что $\langle \mathfrak{M}, P \rangle \models \varphi(\bar{a})$ следует, что $\langle \mathfrak{M}, D \rangle \models \varphi(\bar{a})$ для некоторого определимого подмножества $D \subseteq P$.*

Условие $(*)$ можно также выразить при помощи негативных формул. А именно: $P \subseteq M$ удовлетворяет условию $(*)$ в $\mathfrak{M}$, если для всякой P-негативной формулы $\varphi(\bar{x})$ и любого набора $\bar{a}$ из M выполняется следующее: если $\langle \mathfrak{M}, D \rangle \models \varphi(\bar{a})$ для всех определимых подмножеств $D \subseteq P$, то $\langle \mathfrak{M}, P \rangle \models \varphi(\bar{a})$.

Для доказательства теоремы нам понадобится предложение 3, доказательство которого аналогично доказательству предложения 2.

Предложение 3. *Подмножество $P \subseteq M$ удовлетворяет условию $(*)$ в том и только том случае, если для любой* P*-негативной формулы $\varphi(x, \bar{a})$ с параметрами $\bar{a}$, в модели $\mathfrak{M}$ выполняется бесконечная формула*

$$\bigwedge_{D \in dsb(P)} \exists x \varphi_D(x, \bar{a}) \to \exists x \bigwedge_{D \in dsb(P)} \varphi_D(x, \bar{a}),$$

где $\varphi_D(\bar{y})$ — формула (сигнатуры σ), полученная из $\varphi(\bar{y})$ заменой подформул вида P*(t) на формулу, определяющую подмножество D.*

Доказательство. (теоремы 3). Подмножество $P \subseteq M$ будет фундаментальным в $HYP(\mathfrak{M})$ в том и только том случае, когда для любой π-специальной Δ_0-формулы $\Phi(x, \pi)$ (с набором параметров из $HYP(\mathfrak{M})$) формула

$$\forall x \in a \exists \pi \subseteq P \Phi(x, \pi) \to \exists \pi \subseteq P \forall x \in a \Phi(x, \pi)$$

выполняется в $HYP(\mathfrak{M})$ для любого a. Обратив импликацию, получим

$$\forall \pi \subseteq P \exists x \in a \Psi(x, \pi) \to \exists x \in a \forall \pi \subseteq P \Psi(x, \pi),$$

где $\Psi(x, \pi) = \neg \Phi(x, \pi)$ – Δ_0-формула, являющаяся антимонотонной по π, то есть $\Psi(x, \pi) \wedge (\pi' \subseteq \pi) \to \Psi(x, \pi')$. Так как $\pi \subseteq P \subseteq M$, и π является элементом $HYP(\mathfrak{M})$, то $\pi = D$ для некоторого определимого в $\mathfrak{M}$ подмножества $D \subseteq M$. Пусть D определяется формулой $\theta(y)$ сигнатуры σ (с параметрами из M). По $\theta(y)$ построим Δ_0-формулу $\Theta(y)$, заменив кванторные приставки $(\forall z)$ и $(\exists z)$ на $(\forall z \in M)$ и $(\exists z \in M)$ соответственно. Теперь для данного D по Δ_0-формуле $\Psi(x, \pi)$ эффективно строится Δ_0-формула $\Psi_D(x)$ заменой подформул вида $(t \in \pi)$ на Δ_0-формулу $\Theta(t)$. Таким образом, P будет фундаментальным подмножеством тогда и только тогда, когда в $HYP(\mathfrak{M})$ имеет место импликация

$$\forall D \in dsb(P) \exists x \in a \Psi_D(x) \to \exists x \in a \forall D \in dsb(P) \Psi_D(x).$$

Элемент $a \in HYP(\mathfrak{M})$ есть объединение конечного числа простых множеств. Не нарушая общности, можно считать, что само a простое, то есть существует терм $t(x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$ от функций $\{\}, \cup, f_\Phi$, где Φ – Δ_0-формула, $L(n,\ ), n \in \omega$, такой, что любой элемент $x \in a$ имеет вид $x = t(q_0, \ldots, q_n, M)$ с подходящими $q_i \in M, i \leq n$. Поэтому для подходящего терма $t_0(x_0, \ldots, x_m, x_{m+1})$ имеем $a \subseteq \{t_0(\bar{q}, M) | \bar{q} \in M^{m+1}\}$.

Кроме того, существует терм $t_1(y_0, \ldots, y_k, y_{k+1})$ и $\bar{s} \in M^{k+1}$ такие, что $a = t_1(\bar{s}, M)$. Поэтому

$$HYP(\mathfrak{M}) \models \exists x \in a\Psi_D(x) \ \Leftrightarrow \exists q_0 \in M \ldots \exists q_m \in M \quad [(t_0(\bar{q}, M) \in t_1(\bar{s}, M)) \\ \wedge \Psi_D(t_0(\bar{q}, M))].$$

Далее, по Δ_0-формуле $\Psi'_D(\bar{q}) \rightleftharpoons (t_0(\bar{q}, M) \in t_1(\bar{s}, M)) \wedge \Psi_D(t_0(\bar{q}, M))$ эффективно находится формула $\psi_D(\bar{q})$ сигнатуры σ такая, что

$$HYP(\mathfrak{M}) \models \Psi'_D(\bar{q}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi_D(\bar{q}).$$

ммеем $HYP(\mathfrak{M}) \models \exists x \in a\Psi_D(x)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \exists q_0 \ldots \exists q_m \psi_D(\bar{q})$. Таким образом, $P \subseteq M$ будет фундаментальным в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда в модели $\mathfrak{M}$ выполняется бесконечная формула

$$\bigwedge_{D \in dsb(P)} \exists \bar{x} \psi_D(\bar{x}, \bar{c}) \to \exists \bar{x} \bigwedge_{D \in dsb(P)} \psi_D(\bar{x}, \bar{c})$$

для любой формулы $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ из некоторого (эффективного) класса формул сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{P}\}$. Таким образом, используя предложение 3, получаем, что из условия $(*)$ следует фундаментальность P в $\mathfrak{M}$. С другой стороны, условие $(*)$ для $\mathfrak{M}$ есть частный случай условия фундаментальности для $HYP(\mathfrak{M})$, если ограничиться в нем формулами сигнатуры σ (точнее, их Δ_0-релятивизациями на M), и случаем, когда $a = M$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Напомним некоторые определения из [1]. Теория T сигнатуры σ называется *регулярной*, если она модельно полна и разрешима, и *простой*, если она регулярна, ω-категорична, и имеет рекурсивное множество полных формул. В [7] рассматривалась проблема униформизации в $HF(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — модель регулярной теории.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель регулярной теории. Тогда $HYP(\mathfrak{M})$ Σ-определимо в $HF(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Каждый элемент $a \in HYP(\mathfrak{M})$ может быть представлен в виде терма $t_\varkappa(D_1, \ldots, D_m)$, где $\varkappa \in HF(\omega)$, а $D_1 \subseteq M^{n_1}, \ldots, D_m \subseteq M^{n_m}$ — определимые в $\mathfrak{M}$ подмножества. Каждое определимое подмножество D, в свою очередь, может быть представлено в $HF(\mathfrak{M})$ при помощи геделевского номера формулы, определяющей D, и набора параметров этой формулы. Поэтому для Σ-определимости $HYP(\mathfrak{M})$ в $HF(\mathfrak{M})$ достаточно установить что для любых формул $\varphi(\bar{x}, \bar{a}), \psi(\bar{x}, \bar{b})$ сигнатуры σ с параметрами из M и любого набора элементов $\bar{m}$ из M предикаты $Eq([\varphi], [\psi], \bar{a}, \bar{b}) \rightleftharpoons \varphi(M^n, \bar{a}) = \psi(M^n, \bar{b})$ и $In([\varphi], \bar{a}, \bar{m}) \rightleftharpoons \bar{m} \in \varphi(M^n, \bar{a})$ определяются Σ-формулами в $HF(\mathfrak{M})$.

Ограничимся рассмотрением предиката Eq. ммеем $\varphi(M^n, \bar{a}) = \psi(M^n, \bar{b}) \iff \mathfrak{M} \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{b})) \iff HF(\mathfrak{M}) \models \Sigma - Sat([\theta], \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)$, где $\theta(\bar{y}, \bar{z})$ — $\exists$-формула, эквивалентная формуле $\forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{z}))$. $\square$

Дадим теперь еще одно важное определение, которое позволит нам для рекурсивно насыщенной модели $\mathfrak{M}$ полностью описать подмножества $\mathfrak{M}$, являющиеся Σ_*-множествами в $HYP(\mathfrak{M})$.

Определение 7. *Подмножество $P \subseteq M^n$ назовем* **внутренним** *для модели $\mathfrak{M}$, если в $\langle \mathfrak{M}, P \rangle$ любое локально выполнимое рекурсивное множество $\{\psi_n(\bar{x}, \bar{a}) | n \in \omega\}$ P-негативных формул сигнатуры $\sigma \cup \{P\}$ выполнимо.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена, и подмножество $P \subseteq M^n$ таково, что $O(\langle \mathfrak{M}, P \rangle) = O(\mathfrak{M})$, то P будет внутренним для $\mathfrak{M}$.

Несложно убедиться, что $P \subseteq M^n$, являющееся Σ-подмножеством в $HYP(\mathfrak{M})$, будет внутренним. Оказывается, то же самое справедливо и для Σ_*-множеств. А именно, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная система. Подмножество $P \subseteq M^n$ является Σ_*-множеством в $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда P является внутренним и фундаментальным подмножеством в модели $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть подмножество $P \subseteq M^n$ является внутренним и фундаментальным. Покажем, что P — Σ_*-множество в $HYP(\mathfrak{M})$.

мспользуя предложение 2 получаем, что $P \subseteq M^n$ является Σ_*-множеством в $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда

$$HYP(\mathfrak{M}) \models \forall D \in dsb(P) \exists x \in a \Psi_D(x) \to \exists x \in a \forall D \in dsb(P) \Psi_D(x)$$

для любой P-негативной П-формулы $\Psi(x)$. Так как $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена, то в $HYP(\mathfrak{M})$ всякая П-формула сигнатуры σ_1 вида $\forall y \Phi(\bar{u}, y, \bar{c})$, где $\bar{u}$ — прапеременные, а $\bar{c}$ — праэлементы, эквивалентна вычислимой конъюнкции $\bigwedge\limits_{n \in \omega} \phi^n(\bar{u}, \bar{c})$ формул сигнатуры σ.

Таким образом, P будет Σ_*-множеством в $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge_{D \in dsb(P)} \exists \bar{x} \bigwedge_{n \in \omega} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c}) \to \exists \bar{x} \bigwedge_{D \in dsb(P)} \bigwedge_{n \in \omega} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c})$$

справедливо в $HYP(\mathfrak{M})$ для любого рекурсивного набора $\{\psi^n(\bar{x}, \bar{c})\}_{n \in \omega}$ P-негативных формул сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{P}\}$.

Пусть $\mathfrak{M} \models \bigwedge\limits_{D \in dsb(P)} \exists \bar{x} \bigwedge\limits_{n \in \omega} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c})$ тогда очевидно $\mathfrak{M} \models \bigwedge\limits_{D \in dsb(P)} \exists \bar{x} \bigwedge\limits_{n \leqslant n_0} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c})$ для любого $n_0 \in \omega$, а поскольку P фундаментально, то $\langle \mathfrak{M}, P \rangle \models \exists \bar{x} \bigwedge\limits_{n \leqslant n_0} \psi^n(\bar{x}, \bar{c})$. Так как $\langle \mathfrak{M}, P \rangle$ рекурсивно насыщена, то имеем $\langle \mathfrak{M}, P \rangle \models \exists \bar{x} \bigwedge\limits_{n \in \omega} \psi^n(\bar{x}, \bar{c})$, откуда уже $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge\limits_{n \in \omega} \bigwedge\limits_{D \in dsb(P)} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c})$ в силу P-негативности формул ψ^n.

В обратную сторону, пусть $P \subseteq M^n$ — Σ_*-множество в $HYP(\mathfrak{M})$. Очевидно, что P будет фундаментальным в $\mathfrak{M}$ (так как всякая Δ_0-формула является Σ-формулой). Покажем, что P будет внутренним. В самом деле, как уже было показано, P будет Σ_*-множеством тогда и только тогда, когда импликация

$$\bigwedge_{D \in dsb(P)} \exists \bar{x} \bigwedge_{n \in \omega} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c}) \to \exists \bar{x} \bigwedge_{D \in dsb(P)} \bigwedge_{n \in \omega} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c})$$

справедлива для любой рекурсивной последовательности $\{\psi^n(\bar{x}, \bar{c})\}_{n \in \omega}$ P-негативных формул сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{P}\}$, и в частности, для всех рекурсивных последовательностей $\{\psi^n(\bar{x}, \bar{c})\}_{n \in \omega}$ таких, что $\psi^i(\bar{x}, \bar{c}) \to \psi^j(\bar{x}, \bar{c})$ при $i < j$. Для таких последовательностей исходная импликация эквивалентна импликации

$$\bigwedge_{D \in dsb(P)} \bigwedge_{n \in \omega} \exists \bar{x} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c}) \to \exists \bar{x} \bigwedge_{D \in dsb(P)} \bigwedge_{n \in \omega} \psi_D^n(\bar{x}, \bar{c})$$

вследствие рекурсивной насыщенности $\mathfrak{M}$. Поскольку P фундаментально, то это эквивалентно тому, что

$$\langle \mathfrak{M}, P \rangle \models \bigwedge_{n \in \omega} \exists \bar{x} \psi^n(\bar{x}, \bar{c}) \to \exists \bar{x} \bigwedge_{n \in \omega} \psi^n(\bar{x}, \bar{c}),$$

что справедливо только в том случае, когда P — внутреннее в $\mathfrak{M}$. □

3 Фундаментальные семейства в $\mathfrak{L}$.

Очевидно, что любое определимое подмножество фундаментально в $\mathfrak{M}$. Однако в общем случае класс фундаментальных подмножеств существенно богаче. В качестве примера рассмотрим модель $\mathfrak{L} = \langle L, < \rangle$ теории плотного линейного порядка без концевых элементов. Она обладает важным свойством o-минимальности: имеет место

Предложение 4. *Всякое определимое в $\mathfrak{L}$ подмножество есть объединение конечного числа точек и интервалов с концами из $L \cup \{\pm\infty\}$.*

Пусть $A|B$ — сечение в $\mathfrak{L}$, то есть $A \cup B = L$, и $\forall a \in A \forall b \in B \ a < b$. Сечение будем называть *неопределимым*, если A и B не являются определимыми подмножествами в $\mathfrak{L}$. Расширим множество L до множества L^*, добавив новые элементы для каждого неопределимого сечения в L. На множестве L^* можно естественным образом ввести порядок, продолжающий порядок на L. Полученный таким образом плотный линейный порядок $\mathfrak{L}^*$ будем называть *дедекиндовым пополнением* порядка $\mathfrak{L}$. Например, для множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с естественным порядком имеем $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Порядок будем называть дедекиндово полным, если он совпадает со своим дедекиндовым пополнением. Заметим что всякая ограниченная и монотонная последовательность элементов из L имеет предел в L^*.

Пусть подмножество P фундаментально в модели $\mathfrak{L}$. В этом случае основным является следующее

Предложение 5. *Если $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — монотонная последовательность элементов из P, то*
1) либо существуют $n_0 \in \omega$ и $q_0, q_1 \in L \cup \{\pm\infty\}$ такие, что интервал $(q_0, q_1) \subseteq P$ и $p_n \in (q_0, q_1)$ $\forall n > n_0$
2) либо последовательность $\{p_n\}_{n\in\omega}$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \in L^* \setminus L$.

Доказательство. Пусть, для определенности, последовательность $\{p_n\}$ монотонно возрастает, то есть $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$. Предположим, что не выполняется случай 2. От противного, пусть случай 1 также не имеет места. Если $\{p_n\}_{n\in\omega}$ не является ограниченной, то, рассмотрев формулу $\varphi(x) = (\forall y)(P(y) \to y < x)$ сигнатуры $\sigma \cup \{P\}$, убеждаемся, что в модели $\langle \mathfrak{L}, P \rangle$ не выполняется предложение $\exists x \varphi(x)$, однако $\langle \mathfrak{L}, D \rangle \models \exists x \varphi(x)$ для всякого определимого $D \subseteq P$ (которое есть объединение конечного числа точек и интервалов, не содержащее никакой интервал вида $(q, +\infty)$. Это противоречит фундаментальности P.

Если же $\{p_n\}_{n\in\omega}$ ограничена, то существует $\lim\limits_{n\to\omega} p_n \ = q^* \in L$. Рассмотрим формулу $\varphi(x, q_*) = (\forall y)(P(y) \to y < x < q_*)$. Тогда формула $\exists x \varphi(x, q_*)$ не выполняется в $\langle \mathfrak{L}, P \rangle$, однако $\langle \mathfrak{L}, D \rangle \models \exists x \varphi(x, q_*)$ для любого определимого подмножества $D \subseteq P$, поскольку P не содержит никакой интервал вида (q, q^*). $\square$

Определение 8. *Подмножество $P \subseteq L$ назовем* **локально определимым**, *если для любого $q \in L \cup \{\pm\infty\}$ существует окрестность O точки q такая, что $P \cap O$ определимо (окрестностью точки $q \in L$ называется любое подмножество, содержащее интервал вида (l, r) такой, что $q \in (l, r)$, и соответствуюшие полуинтервалы для $q = \pm\infty$).*

Теорема 6. *Подмножество $P \subseteq L$ фундаментально в $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда P локально определимо.*

Доказательство. Если P фундаментально, то по предложению 5 P будет локально определимым. Докажем в обратную сторону. Пусть $P \subseteq L$ локально определимо, и пусть $\Phi(\bar{q})$ - предложение сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{P}\} \cup \{\bar{q}\}$, являющееся P-позитивным и такое, что $\langle \mathfrak{L}, P\rangle \models \Phi(\bar{q})$. Покажем, что существует определимое $D \subseteq P$ такое, что $\langle \mathfrak{L}, D\rangle \models \Phi(\bar{q})$.

Не нарушая общности можно считать, что предложение $\Phi(\bar{q})$ находится в пренексной форме, то есть имеет вид $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\Psi(\bar{x}, \bar{q})$,где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, и бескванторная формула $\Psi(\bar{x}, \bar{q})$ находится в дизъюнктивной нормальной форме. По предложению $\Phi(\bar{q})$ можно построить $\forall$-предложение $\forall x_1 \dots \forall x_m \psi(\bar{x}, \bar{q}, f_1(\bar{x}), \dots, f_{n-m}(\bar{x}))$ в сигнатуре, расширенной скулемовскими термами $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_{n-m}(x_1, \dots, x_m)$ такое, что $\langle \mathfrak{L}, P\rangle \models \Phi(\bar{q})$ тогда и только тогда, когда существуют функции $f_i : L^m \to L, 1 \leqslant i \leqslant n-m$, для которых

$$\langle \mathfrak{L}, P, \bar{f}\rangle \models \forall x_1 \dots \forall x_m \psi(\bar{x}, \bar{q}, \bar{f}).$$

Пусть $\psi(\bar{x}, \bar{q}, \bar{f}) = \psi_1(\bar{x}, \bar{q}, \bar{f}) \vee \dots \vee \psi_k(\bar{x}, \bar{q}, \bar{f})$, где ψ_i - конъюнкции атомарных формул сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{P}\} \cup \{\bar{f}\}$. Докажем, что существуют формулы $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_k(\bar{x})$ сигнатуры σ (с параметрами из L) такие, что $\mathfrak{L} \models \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}) \vee \dots \vee \varphi_k(\bar{x}))$ и $\langle \mathfrak{L}, P, \bar{f}\rangle \models \forall \bar{x}(\varphi_i(\bar{x}) \to \psi_i(\bar{x}, \bar{q}, \bar{f}))$ для подходящих скулемовских функций $\bar{f}$.

Рассмотрим для простоты случай $m = 1$. Так как P локально определимо, все конъюнкции ψ_i P-позитивны, и $\langle \mathfrak{L}, P, \bar{f}\rangle \models \forall x(\psi_1(x, \bar{q}, \bar{f}) \vee \dots \vee \psi_k(x, \bar{q}, \bar{f}))$, то формулы $\psi'_i(x, \bar{q})$, полученные из $\psi_i(x, \bar{q}, \bar{f})$ заменой термов $\bar{f}$ на переменные $\bar{y}$ и навешиванием кванторной приставки $\exists \bar{y}$, относительно переменной x определяют в L подмножества $A_1, \dots, A_k$ такие, что $A_1 \cup \dots \cup A_k = L$ и каждое A_i есть объединение конечного числа точек, а также интервалов с границами из $L^* \cup \{\pm\infty\}$. Теперь можно указать систему точек и интервалов $B_1, \dots, B_k$ с границами уже из $L \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $B_i \subseteq A_i, B_1 \cup \dots \cup B_k = L$. Действительно, это следует из того, что покрытие $\{A_1, \dots, A_k\}$ не образует "иррациональных"сечений, то есть невозможен случай, когда $A_i = A'_i \cup (l, \xi), A_j = (\xi, r) \cup A'_j$ для некоторых i,j и "иррационального"$\xi \in L^* \setminus L$. Таким образом, в качестве $\varphi_i(x)$ можно взять формулу, определяющую подмножество B_i.

Пусть $i \in \{1, \dots, k\}$. ммеем $\langle \mathfrak{L}, P\rangle \models \forall x(\varphi_i(x) \to \psi_i(x, \bar{q}, \bar{f}))$. Укажем определимое подмножество $D_i \subseteq P$ такое, что данная формула справедлива уже в модели $\langle L, <, D_i\rangle$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $\varphi_i(x) = (q_0 < x < q_1)$ и $\psi_i(x, \bar{f}) = (x < f(x) < q) \wedge P(f(x))$. Тогда очевидно $q \geqslant q_1$. Если $\exists c \in P \cap (q_1, q)$, то в качестве D_i можно взять определимое подмножество $\{c\}$. Если же $P \cap (q_1, q) = \emptyset$, то точка q_1 будет P-плотной. В силу локальной определимости P найдется $c < q_1$ такое, что $(c, q_1) \subseteq P$. В этом случае полагаем $D_i = (c, q_1)$.

В качестве искомого определимого подмножества $D \subseteq P$ теперь можно взять $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$. Теорема доказана. □

Предложение 6. *Если $\mathfrak{L}$ — дедекиндово полный плотный линейный порядок, то подмножество $P \subseteq L$ локально определимо в $\langle L, <\rangle$ тогда и только тогда, когда оно определимо.*

Доказательство. Пусть P локально определимо. Отсюда непосредственно следует, что существуют $l, r \in L$ такие, что $P \setminus (l, r)$ определимо. Покажем, что $P \cap (l, r)$ есть объединение конечного числа связных компонент (т.е. точек и интервалов, что и требуется доказать). От противного, пусть $\{p_n\}_{n \in \omega} \subseteq P$ — последовательность попарно не связных в P элементов. Поскольку $\{p_n\}$ ограничена, она содержит сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности можно считать, что сама последовательность $\{p_n\}$ сходится, то есть $p_n \to \xi$ для некоторого $\xi \in L$. Так как $\{p_n\}$ не связна в P, то для любого $n \in \omega$ существует $q_i \in (p_i, p_{i+1})$ такое, что $q_i \in L \setminus P$. Но в этом случае для всякой окрестности O точки ξ подмножество $P \cap O$ не будет определимым. Противоречие. $\square$

Определение 9. *Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое семейство подмножеств основного множества модели $\mathfrak{M}$. Назовем $\mathcal{P}$* **фундаментальным семейством в $\mathfrak{M}$**, *если для любого $n > 0$ и любых $P_0, \ldots, P_{n-1}$ из $\mathcal{P}$ верно следующее: для любой $\bar{P}$-позитивной формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры $\sigma \cup \{\bar{P}\}$ и для любых элементов $\bar{a}$ из M из того, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{P} \rangle \models \varphi(\bar{a})$ следует, что найдутся определимые в $\mathcal{M}$ подмножества $D_0 \subseteq P_0, \ldots, D_{n-1} \subseteq P_{n-1}$, для которых $\langle \mathfrak{M}, \bar{D} \rangle \models \varphi(\bar{a})$.*

Простейшее фундаментальное семейство вида $\{P_0, P_1\}$ будем называть *фундаментальной парой в $\mathfrak{M}$*. Очевидно, что если $\{P_0, P_1\}$ - фундаментальная пара, то P_0 и P_1 - фундаментальные подмножества. Наоборот, пусть P_0 и P_1 - фундаментальные подмножества в $\mathfrak{M}$. В каком случае $\{P_0, P_1\}$ будет фундаментальной парой?

В качестве примера снова рассмотрим модель $\mathfrak{L}$ теории плотного линейного порядка без концевых элементов. С каждым подмножеством $P \subseteq L$ свяжем функцию $\tau(P) : L^* \to \{-1, 0, 1\}$. Определим подмножества $Lim_-(P) \subseteq L^*$ и $Lim_+(P) \subseteq L^*$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
Lim_-(P) &= \{\xi \in L^* \quad | \quad \text{существует посл. } \{p_n\} \subseteq P, \text{ т.ч. } p_n \nearrow \xi \ \}, \\
Lim_+(P) &= \{\xi \in L^* \quad | \quad \text{существует посл. } \{p_n\} \subseteq P, \text{ т.ч. } p_n \searrow \xi \ \}.
\end{aligned}
$$

Теперь для всякого $\xi \in L^*$ полагаем

$$
\tau(P)\,(\xi) = \begin{cases} -1, & \text{если } \xi \in Lim_-(P) \setminus Lim_+(P), \\ \ \ 1, & \text{если } \xi \in Lim_+(P) \setminus Lim_-(P), \\ \ \ 0, & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Пусть $P \subseteq L$ фундаментально. Непосредственным следствием предложения 5 является следующая

Лемма 8. *Для любого $q \in L$ $\ \tau(P)(q) = \pm 1$ в том и только том случае, когда q является соответствующим концом интервала, целиком лежащего в P.*

Доказательство. Пусть, например, для некоторого $q \in L$ $\tau(P)(q) = -1$. В этом случае существует последовательность $\{p_n\} \subseteq P$, такая что $p_n \nearrow q$. Если бы не существовало интервала (p, q), целиком лежащего в P, то формула $\exists x \varphi(x, q)$, где

$$
\varphi(x, q) = \forall y (P(y) \wedge y < q \to y < x < q)
$$

служила бы контрпримером к фундаментальности P. Далее, так как $q \in Lim_-(P) \setminus Lim_+(P)$ то для некоторого $r > q$ $P \cap (q, r) = \emptyset$. Таким образом, q является правым концом интервала из P. $\square$

Пусть P_1 и P_2 — фундаментальные подмножества в $\mathfrak{L}$. Определим величину

$$
\rho(P_1, P_2) = \max_{\xi \in L^* \setminus L} |\tau(P_1)(\xi) - \tau(P_2)(\xi)|.
$$

Таким образом $range(\rho) = \{0, 1, 2\}$. На множестве фундаментальных подмножеств можно определить отношение эквивалентности следующим образом: $P_1 \sim P_2$, если $\rho(P_1, P_2) = 0$. Пусть $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ — классы эквивалентности, содержащие P_1 и P_2. Функция $\tilde{\rho}$ корректно определяется на классах эквивалентности соотношением $\tilde{\rho}(P_1, P_2) = \rho(P_1, P_2)$. Легко убедиться, что функция $\tilde{\rho}$ является метрикой.

Критерий фундаментальности для пары $\{P_1, P_2\}$ можно сформулировать при помощи функции ρ следующим образом: имеет место

Предложение 7. *Пусть подмножества $P_1 \subseteq L$ и $P_2 \subseteq L$ фундаментальны в $\mathfrak{L}$. Тогда $\{P_1, P_2\}$ — фундаментальная пара $\iff \rho(P_1, P_2) \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\rho(P_1, P_2) > 1$. Покажем что в этом случае P_1 и P_2 не образуют фундаментальную пару. Действительно, пусть для некоторого $\xi \in L^* \setminus L$ $\tau(P_1)(\xi) = -1$ и $\tau(P_2)(\xi) = 1$. Тогда для данного ξ существуют последовательности $\{p_n^1\} \subseteq P_1$ и $\{p_n^2\} \subseteq P_2$, а также элементы q_1, q_2 из L такие, что $p_n^1 \nearrow \xi$, $P_1 \cap (\xi, q_1) = \emptyset$ и $p_n^2 \searrow \xi$, $P_2 \cap (q_2, \xi) = \emptyset$ соответственно. Рассмотрим формулу

$$\varphi(x, q_1, q_2) = (\forall y)(P_1(y) \wedge y < q_1 \to y < x) \wedge (\forall y)(P_2(y) \wedge y > q_2 \to y > x)$$

сигнатуры $\sigma \cup \{P_1, P_2\}$.Очевидно, что $\langle \mathfrak{L}, D_1, D_2 \rangle \models \exists x \varphi(x, q_1, q_2)$ для любых определимых в $\mathfrak{L}$ подмножеств $D_1 \subseteq P_1, D_2 \subseteq P_2$, но в то же время $\langle \mathfrak{L}, P_1, P_2 \rangle \models \neg \exists x \varphi(x, q_1, q_2)$, что и требовалось.

Наоборот, пусть $\rho(P_1, P_2) \leqslant 1$. Доказательство того, что P_1 и P_2 образуют фундаментальную пару, аналогично доказательству теоремы 6: дополнительно необходимо только установить, что P_1 и P_2 не образуют иррациональных сечений. Но это как раз и следует из условия $\rho(P_1, P_2) \leqslant 1$. □

Для семейства $\mathcal{P}$ подмножеств модели $\langle L, < \rangle$ определим *диаметр*

$$d(\mathcal{P}) = \max\{\rho(P_1, P_2) | P_1, P_2 \in \mathcal{P}\}.$$

мз предложения 7 и доказательства теоремы 6 очевидным образом вытекает

Теорема 7. *$\mathcal{P}$ - фундаментальное семейство в $\langle L, < \rangle \iff d(\mathcal{P}) \leqslant 1$.*

Очевидным следствием предложения 6 является следующий факт: если $\mathfrak{L}$ — дедекиндово полный плотный линейный порядок, то всякое семейство фундаментальных в $\mathfrak{L}$ подмножеств является фундаментальным семейством в $\mathfrak{L}$.

Характеризацию фундаментальных подмножеств в плотных линейных порядках дает следующая теорема, являющаяся следствием теорем 6 и 7.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{L}$ — плотный линейный порядок. Подмножество $P \subseteq L$ фундаментально в $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда P локально определимо. Подмножество $P \subseteq L^n$ фундаментально в $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда, для любого определимого $D \subseteq L^n$, семейство $\{\pi_1(P \cap D), \ldots, \pi_n(P \cap D)\}$ является фундаментальным.*

Для описания подмножеств $\mathfrak{L}$, являющихся Σ_*-множествами в $HYP(\mathfrak{L})$, согласно теореме 5, необходимо в классе фундаментальных подмножеств выделить подкласс подмножеств, являющихся внутренними. Воспользуемся для этого следующей важной конструкцией.

Пусть $S \subseteq L$ — произвольное подмножество. Определим на нем отношение эквивалентности следующим образом: для двух элементов s_1, s_2 таких, что $s_1 < s_2$ полагаем $s_1 \sim s_2$, если интервал (s_1, s_2) содержит лишь конечное число элементов из S. Через $\mathcal{F}(S)$ обозначим систему $\langle S/\sim, < \rangle$, в которой порядок индуцирован порядком в $\mathfrak{L}$.

Теорема 9. *Пусть подмножество $P \subseteq L$ фундаментально. Подмножество P будет внутренним в том и только том случае, когда для любых элементов a и b из $L \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $\overline{P} \cap (a, b)$ локально конечно, либо $\overline{P} \cap (a, b)$ конечно, либо $\mathcal{F}(\overline{P} \cap (a, b))$ — плотный линейный порядок.*

Доказательство. Пусть $L \subseteq P$ является одновременно фундаментальным и внутренним. Покажем, что отсюда следует условие теоремы. От противного, пусть существуют такие $a, b \in P$, что $\overline{P} \cap (a, b)$ бесконечно, локально конечно, но $\mathcal{F}(\overline{P} \cap (a, b))$ не является плотным линейным порядком. Это означает, что найдутся $p, q \in (a, b)$, $p < q$ такие, что в $\mathcal{F}(\overline{P} \cap (a, b))$ элементы $p/\sim$ и $q/\sim$ различны и между ними нет других элементов. Возможен только один из следующих трех случаев.

Случай 1. ммеет место $\overline{P} \cap (p, q) = \{q_n\}_{n\in\omega}$ для некоторой монотонной последовательности $\{q_n\}_{n\in\omega}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, где $\xi \in L^* \cap (p, q)$. Рассмотрим рекурсивную последовательность P-негативных формул $\{\psi_n(x, p, q)\}_{n\in\omega}$ сигнатуры $\sigma \cup \{P\}$, где $\psi_n(x, p, q) \leftrightharpoons \exists x_1 \ldots \exists x_n(p < x_1 < \ldots < x_n < x < q \wedge \neg P(x_1) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n) \wedge \neg P(x))$. Тогда для любого $n_0 \in \omega$ имеем $\langle \mathfrak{L}, P\rangle \models \exists x(\psi_1(x, p, q) \wedge \ldots \wedge \psi_{n_0}(x, p, q))$, однако тип $\{\psi_n(x, p, q)\}_{n\in\omega}$ не реализуется в $\langle \mathfrak{L}, P\rangle$. Противоречие с тем, что P — внутреннее.

Случай 2. ммеет место $\overline{P} \cap (p, q) = \{q^1_n\}_{n\in\omega} \cup \{q^2_n\}_{n\in\omega}$, где $q^1_n \nearrow \xi$, $q^2_n \searrow \xi$ для некоторого $\xi \in (p, q)$. В этом случае рассмотрим рекурсивную последовательность формул $\{\psi_n(x, p, q)\}_{n\in\omega}$, где $\psi_n(x, p, q) \leftrightharpoons \exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y_1 \ldots \exists y_n(p < x_1 < \ldots < x_n < x < y_n < \ldots < y_1 < q \wedge \neg P(x_1) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n) \wedge \neg P(x) \wedge \neg P(y_n) \wedge \ldots \wedge \neg P(y_1))$. Тогда тип $\{\psi(x, p, q)\}_{n\in\omega}$ локально выполним, но не реализуется в модели $\langle \mathfrak{L}, P\rangle$, что противоречит тому, что P — внутреннее.

Случай 3. ммеет место $\overline{P} \cap (p, q) = \{q^1_n\}_{n\in\omega} \cup \{q^2_n\}_{n\in\omega}$, где $q^1_n \nearrow \xi_1$, $q^2_n \searrow \xi_2$ для некоторых $\xi_1, \xi_2 \in (p, q), \xi_1 < \xi_2$. Взяв $q' \in (\xi_1, \xi_2)$, рассмотрим рекурсивную последовательность формул $\{\psi_n(x, p, q')\}_{n\in\omega}$, определенную для случая 1. Как и для случая 1, снова получаем противоречие. $\square$

Пусть $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathfrak{M}_n \preccurlyeq \ldots$ - элементарная цепь моделей сигнатуры σ, для любого $n \in \omega$ пусть $P_n \subseteq M_n$ - фундаментальное подмножество $\mathfrak{M}_n$, причем $P_n = P_{n+1} \upharpoonright M_n$. Пусть $\mathfrak{M}_* \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{M}_n$, $P_* \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} P_n$. При каких условиях подмножество P_* будет фундаментальным в модели $\mathfrak{M}_*$?

В качестве примера рассмотрим элементарную цепь, объединение которой есть $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$, а элементами цепи являются интервалы из $\mathbb{Q}$. А именно, для любого n определим подсистему $\langle L_n, <\rangle \preccurlyeq \langle \mathbb{Q}, <\rangle$ и подмножество $P_n \subseteq L_n$ следующим образом: пусть

$$L_0 = (-1, 1), P_0 = \{0\},\ L_1 = (-2, 2), P_1 = \{-1, 0, 1\},\ \ldots\ ,$$

$$L_n = (-n - 1, n + 1), P_n = \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}\ \ldots\ .$$

Тогда очевидно, что для любого n P_n фундаментально в $\langle L_n, <\rangle$, но в то же время $\mathbb{Z} = \cup_n P_n$ не фундаментально в $\langle \mathbb{Q}, <\rangle = \cup_n \langle L_n, <\rangle$. мсходя из этого, приведем одно достаточное условие (аналогичное условию из леммы 6), при котором в элементарной цепи объединение фундаментальных подмножеств будет фундаментальным.

Определение 10. *$\mathcal{P}$-цепь назовем* **ступенчатой**, *если для всех $n \in \omega$ $P_* = P_n \cup D_n$, где D_n определимо в $\mathfrak{M}_*$ формулой с параметрами из M_n*

Теорема 10. *Если $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathfrak{M}_n \preccurlyeq \ldots$ и $\mathcal{P}$ – ступенчатая цепь фундаментальных подмножеств, то P_* фундаментально в $\mathfrak{M}_*$.*

Рассмотрим теперь пример, показывающий, что от требования Σ-регулярности пары $\{P_1, P_2\}$ в леммах 2 и 5 нельзя отказаться. В модели $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$ рассмотрим предикат $P \subseteq \mathbb{Q}^2$, определенный следующим образом: $\langle x, y\rangle \in P \iff (x < \xi) \wedge (y > \xi)$ для некоторого иррационального $\xi \in \mathbb{R}$. Предикат P может быть представлен как $P_1 \times P_2$, где $P_1 = (-\infty, \xi), P_2 = (\xi, +\infty)$, или же как $Q_1 \cap Q_2$, где $Q_1 = P_1 \times \mathbb{Q}, Q_2 = \mathbb{Q} \times P_2$.

Подмножества P_1 и P_2, также как Q_1 и Q_2, являются фундаментальными в $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, а значит и Σ_*-множествами в $HYP(\langle \mathbb{Q}, < \rangle)$. Однако P фундаментальным не является. В самом деле, для формулы

$$\varphi(x_0, y_0) \leftrightharpoons (x_0 < y_0) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \to (x > x_0 \wedge y < y_0))$$

имеем $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \models \exists x_0, y_0 \varphi_D(x_0, y_0)$ для всякого определимого $D \subseteq P$, однако $\langle \mathbb{Q}, <, P \rangle \models \neg \exists x_0, y_0 \varphi(x_0, y_0)$. Следовательно, P не является фундаментальным.

Список литературы

[1] *Ю.Л.Ершов,* Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[2] *A.Adamson,* Admissible sets and the saturation of structures, Ann.Math.Logic, **14**, N 2, 111 - 157, (1978).

[3] *A.Adamson,* Saturated structures, unions of chains and preservation theorems, Ann.Math.Logic, **19**, N 1, 67 - 96, (1980).

[4] *В.Ю.Сазонов, Д.м.Свириденко,* Денотационная семантика языка Σ-выражений, в сб."Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы, **114**), Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 1986. 16 - 34

[5] *J.Barwise,* Admissible sets and structures, Berlin, 1975.

[6] *Ю.Л.Ершов,* Σ-допустимые множества, в сб."Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы, **114**), Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 1986, 35 - 39.

[7] *А.И.Стукачев,* Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках, в сб."Обобщенная вычислимость и определимость (Вычислительные системы, **161**), Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 1998, 3 - 14.

СТУКАЧЕВ Алексей Ильич,
РОССмЯ,
630090, Новосибирск,
ул. Пирогова, 2
Новосибирский государственный университет.
e-mail: aistu@math.nsc.ru

Реферат

УДК 510.5

А.м. Стукачев, Σ-допустимые семейства над линейными порядками.

Рассматриваются допустимые множества вида $HYP(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная система. Для этого случая получено описание подмножеств $\mathfrak{M}$, являющихся Σ_*-множествами в $HYP(\mathfrak{M})$, и семейств подмножеств $\mathfrak{M}$, образующих Σ-регулярные семейства в $HYP(\mathfrak{M})$. Описание дается в терминах введенного в работе понятия фундаментальности. Описаны фундаментальные подмножества и семейства для моделей плотного линейного порядка.