S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 182–190 (2009) УДК 510.5

MSC 03D45

ТЕОРЕМА ОБ ОБРАЩЕНИИ СКАЧКА ДЛЯ ПОЛУРЕШЕТОК Σ-СТЕПЕНЕЙ

А. И. СТУКАЧЕВ

Abstract. For the semilattices of Σ-degrees of structures, we prove an analogue of the jump inversion theorem. As a corollary, we get similar result for the semilattices of degrees of of presentability of countable structures.

Keywords: computability, computable structures, admissible sets.

1. Введение

Целью настоящей заметки является доказательство теоремы об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней алгебраических систем. Отношение Σ-сводимости, определенное для систем произвольной мощности, в случае счетных систем является самым сильным в иерархии эффективных сводимостей [6, 7], а одной из слабых в этой иерархии является сводимость по Мучнику. В работах А.А.Сосковой и И.Н.Соскова [10, 11], по существу, установлена теорема об обращении скачка для полурешетки степеней представимости счетных алгебраических систем относительно сводимости по Мучнику. Ниже будет показано, что использование таких же методов (а именно, метода маркеровских расширений, использованного в классической теории конструктивных моделей С.С.Гончаровым и Б.Хусаиновым [2]) позволяет получить аналогичный результат и для Σ-сводимости, следствием которого является обратимость операции скачка для всех известных эффективных сводимостей на проблемах представимости.

Stukachev, A.I., A jump inversion theorem for the semilattices of Σ-degrees.

Работа поддержана РФФИ (гранты 06-01-04002-ННИОа и 08-01-00442а) и Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-335.2008.1) .

Поступила 10 декабря 2008 г., опубликована 15 июля 2009 г.

Для произвольного бесконечного кардинала α через $\mathcal{K}_\alpha$ будем обозначать класс систем мощности не больше, чем α, с конечной или вычислимой сигнатурой. Предполагается, что для каждой сигнатуры зафиксирована некоторая геделевская нумерация ее формул. Следующее определение расширяет определение, данное Ю.Л.Ершовым [1], на случай систем с вычислимой сигнатурой. Для простоты, приведем его только для случая предикатной сигнатуры.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots\rangle$, и пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Система $\mathfrak{M}$ называется* Σ-определимой в $\mathbb{A}$, *если существует вычислимая последовательность Σ-формул*

$$\Phi(x_0, y), \Psi(x_0, x_1, y), \Psi^*(x_0, x_1, y), \Phi_0(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Phi_0^*(x_0, \ldots, x_{n_0-1}, y), \ldots, \Phi_k(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \Phi_k^*(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, y), \ldots$$

сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и параметр $a \in A$ такие, что для $M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a)$ и $\eta \leftrightharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$ имеет место следующее: $M_0 \neq \varnothing$, η — отношение конгруэнтности на системе

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0; P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_k^{\mathfrak{M}_0}, \ldots\rangle,$$

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k}$ для всех $k \in \omega$, $\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a)$, $\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1}, a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \ldots, x_{n_k-1})$ для всех $k \in \omega$, и система $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-системе $\mathfrak{M}_0 / \eta$.

Для систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, через $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Будем предполагать, что сигнатура надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ содержит предикатный символ Sat^2, интерпретацией которого является предикат истинности атомарных формул системы $\mathfrak{B}$, согласованный с зафиксированной геделевской нумерацией для формул сигнатуры этой системы. В случае систем конечной сигнатуры добавление предиката Sat к сигнатуре надстройки не является существенным.

Легко убедиться, что отношение $\leqslant_\Sigma$ рефлексивно и транзитивно. Предпорядок $\leqslant_\Sigma$ порождает на $\mathcal{K}_\alpha$ отношение Σ-эквивалентности: $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$. Классы эквивалентности по отношению $\equiv_\Sigma$ будем называть *степенями Σ-определимости*, или *Σ-степенями.* Σ-степень системы $\mathfrak{A}$ будем обозначать $[\mathfrak{A}]_\Sigma$. Структура

$$\mathcal{S}_\Sigma(\alpha) = \langle \mathcal{K}_\alpha / \equiv_\Sigma, \leqslant_\Sigma\rangle$$

является верхней полурешеткой с наименьшим элементом, которым является степень, состоящая из конструктивизируемых систем. Для любых систем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_\alpha$, $[\mathfrak{A}]_\Sigma \vee [\mathfrak{B}]_\Sigma = [(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]_\Sigma$, где $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — теоретико-модельная пара систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Понятие Σ-степени системы инвариантно относительно выбора полурешетки $\mathcal{S}_\Sigma(\alpha)$, поскольку все бесконечные системы одной Σ-степени имеют одинаковую мощность. Существуют естественные вложения полурешетки $\mathcal{D}$ тьюринговых степеней и полурешетки $\mathcal{D}_e$ степеней перечислимости множеств натуральных чисел в полурешетку $\mathcal{S}_\Sigma(\omega)$ (а значит, и во всякую полурешетку вида $\mathcal{S}_\Sigma(\alpha)$) посредством отображений $i : \mathcal{D} \to \mathcal{S}_\Sigma(\omega)$ и $j : \mathcal{D}_e \to \mathcal{S}_\Sigma(\omega)$, определенных следующим образом: для всякой степени $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$, полагаем $i(\mathbf{a}) = [\mathfrak{M}_\mathbf{a}]_\Sigma$, где $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$ — произвольная система, имеющая степень $\mathbf{a}$. Аналогично, для всякой e-степени $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$, полагаем $j(\mathbf{b}) = [\mathfrak{M}_\mathbf{b}]_\Sigma$, где $\mathfrak{M}_\mathbf{b}$ – произвольная система, имеющая

e-степень $\mathbf{b}$. Легко проверить корректность данных определений (см. [6]). Для удобства, будем обозначать Σ-степень $i(\mathbf{a})$ через $\mathbf{a}$.

2. Операция скачка для полурешеток Σ-степеней

Всюду далее, если не оговорено особо, рассматриваются системы произвольной мощности с конечными или вычислимыми сигнатурами. Так как системы рассматриваются с точностью до Σ-эквивалентности, следующее техническое утверждение позволяет считать, что они обладают еще рядом дополнительных свойств.

Лемма 1. *Для любой системы $\mathfrak{A}$ существует система $\mathfrak{B} \equiv_\Sigma \mathfrak{A}$ такая, что:*

1) *сигнатура системы $\mathfrak{B}$ конечна и не содержит функциональных символов;*
2) *сигнатуры системы $\mathfrak{B}$ вместе с любым предикатным символом P^k содержит предикатный символ Q^k, для которого $Q^{\mathfrak{B}} = B^k \setminus P^{\mathfrak{B}}$;*
3) *для любого предикатного символа P^k сигнатуры системы $\mathfrak{B}$ множество $P^{\mathfrak{B}}$ бесконечно.*

Доказательство. Для проверки пункта 1, переходя от функций к предикатам, выделяющим их графики, достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда система $\mathfrak{A}$ имеет вычислимую предикатную сигнатуру. Система $\mathfrak{B}$ может быть построена, например, следующим образом. В качестве ее носителя выбирается дизъюнктное объединение $A \cup N \cup I$, где A — носитель системы $\mathfrak{A}$, N — счетное бесконечное множество, $I = \{i_{\overline{a}} \,|\, \overline{a} \in A^{<\omega}\}$ — множество мощности $A^{<\omega}$. Сигнатура $\langle N^1, I^1, S^2, R^4, 0, 1\rangle$ интерпретируется на $\mathfrak{B}$ так, что $\mathfrak{B} \upharpoonright N \cong \langle \omega, S, 0, 1\rangle$, где S — отношение непосредственного следования. Предикат R объявляется ложным во всех случаях, кроме описанных ниже. А именно, для любого предикатного символа $R_k^{n_k}$ сигнатуры системы $\mathfrak{A}$ и любого набора $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_{n_k}\rangle \in A^{n_k}$, $\mathfrak{A} \models R_k(a_1, \ldots, a_{n_k})$ тогда и только тогда, когда в системе $\mathfrak{B}$ для элементов $s_0, s_1, \ldots, s_k \in N$, таких, что $s_0 = 0^{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B} \models S(s_m, s_{m+1})$ для всех $m < k$, и элемента $i = i_{\overline{a}} \in I$ справедливо

$$\mathfrak{B} \models (R(s_k, a_1, i, 1) \wedge R(a_1, a_2, i, 1) \wedge \ldots \wedge R(a_k, s_k, i, 1)).$$

Случаю $\mathfrak{A} \models \neg R_k(a_1, \ldots, a_{n_k})$ соответствует аналогичное определение с заменой в предикате R элемента 1 на 0. Легко убедиться что системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ Σ-эквивалентны.

Пункт 2 очевиден. Для выполнения пункта 3, предполагая пункты 1 и 2 выполненными, следуя [10, 11], рассмотрим Σ-эквивалентное расширение $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, носителем которого является дизъюнктное объединение $A \cup T \cup F$, множества T и F бесконечны, и для любой пары противоположных в системе $\mathfrak{A}$ предикатных символов P^k и Q^k, и любого $\overline{b} \in (A \cup T \cup F)^k$, $\mathfrak{B} \models P(\overline{b})$ тогда и только тогда, когда либо $\overline{b} \in A^k$ и $\mathfrak{A} \models P(\overline{b})$, либо в набор $\overline{b}$ входят элементы из T и не входят элементы из F, а $\mathfrak{B} \models Q(\overline{b})$ тогда и только тогда, когда либо $\overline{b} \in A^k$ и $\mathfrak{A} \models Q(\overline{b})$, либо в набор $\overline{b}$ входят элементы из F. $\square$

Будем говорить, что система $\mathfrak{A}$ *$s\Sigma$-определима* в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ (обозн. $\mathfrak{A} \subseteq_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если $A \subseteq \mathrm{HF}(B)$ является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, и все сигнатурные предикаты и функции системы $\mathfrak{A}$ Δ-определимы в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Будем использовать обозначение $\mathfrak{A} \subset_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ в случае, когда $\mathfrak{A} \subseteq_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \not\subseteq_{s\Sigma} \mathfrak{A}$.

Отношение $s\Sigma$-определимости аналогично s-сводимости, рассматривавшейся в [9] для счетных систем. Кроме того, в неявном виде отношение $s\Sigma$-определимости было использовано в [12] для изучения свойств вычислимости над алгебраическими системами. А именно, в терминах $s\Sigma$-определимости скулемовских обогащений в [12] был получен критерий для свойства униформизации в наследственно конечных надстройках над моделями регулярных теорий.

Для системы $\mathfrak{A}$, *скачком* Σ-степени $[\mathfrak{A}]_\Sigma$ (в полурешетке $\mathcal{S}_\Sigma(\mathrm{card}(\mathfrak{A}))$) называется Σ-степень системы

$$\mathfrak{A}' = (\mathbb{HF}(\mathfrak{A}), \Sigma\text{-}\mathrm{Sat}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}),$$

где $\Sigma\text{-}\mathrm{Sat}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}$ — предикат истинности Σ-формул в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. Корректность этого определения вытекает из пункта 1 следующего предложения.

Предложение 1. *Для любых систем* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$,

1) *если* $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$*, то* $\mathfrak{A}' \equiv_\Sigma \mathfrak{B}'$*;*
2) $\mathfrak{A} \subset_{s\Sigma} \mathfrak{A}'$.

Доказательство. Пункт 1 следует из того, что при $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{B}$ существует эффективная интерпретация истинности Σ-формул в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ с помощью Σ-формул в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Пункт 2 следует из того, что в любом допустимом множестве существует Σ-подмножество, не являющееся Δ-подмножеством (см. [1]). □

Замечание 1. Автору неизвестно, можно ли в пункте 2 предыдущего предложения заменить $\subset_{s\Sigma}$ на $<_\Sigma$. Более того, существуют счетные системы $\mathfrak{A}$, для которых справедлива эквивалентность $\mathfrak{A} \equiv_w \mathfrak{A}'$, где $\equiv_w$ — обозначение для эквивалентности по Мучнику (см. [3, 6]). Вопрос о существовании у операции скачка неподвижных точек относительно более сильных сводимостей и, в частности, Σ-сводимости, является, таким образом, естественным вопросом для дальнейшего исследования.

Легко проверить, что операция скачка для Σ-степеней согласована с операциями скачка для T- и e-степеней относительно естественных вложений соответствующих полурешеток: если система $\mathfrak{A}$ имеет $(e\text{-})$степень $\mathbf{a}$, то система $\mathfrak{A}'$ имеет $(e\text{-})$степень $\mathbf{a}'$.

Замечание 2. Аналогичным образом операция скачка была введена в [9] для полурешетки s-степеней счетных систем. Кроме того, аналогичным образом понятие скачка допустимого множества относительно различных сводимостей было определено в [4, 5].

3. Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней

Пусть $\mathfrak{A}=\langle A, R_0^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_{n-1}^{\mathfrak{A}}\rangle$ — алгебраическая система предикатной сигнатуры $\sigma=\langle R_0^{k_0}, \ldots, R_{n-1}^{k_{n-1}}\rangle$. Следуя [2], определим *маркеровское* $\exists$*-расширение* $\mathfrak{A}^\exists$ системы $\mathfrak{A}$ как систему сигнатуры

$$\sigma^\exists = \langle (R_0^\exists)^{k_0+1}, \ldots, (R_{n-1}^\exists)^{k_{n-1}+1}, X_0^1, \ldots, X_{n-1}^1\rangle,$$

носителем системы $\mathfrak{A}^\exists$ является дизъюнктное объединение $A \cup X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$, множества $X_0, \ldots, X_{n-1}$ являются интерпретацией соответствующих предикатных символов, и, для всех $i < n$,

1) из $\mathfrak{A}^\exists \models R_i^\exists(\overline{a}, x)$ следует, что $\overline{a} \in A^{k_i}$, $x \in X_i$, и $\mathfrak{A} \models R_i(\overline{a})$;

2) $(\forall x \in X_i)(\exists! \overline{a} \in A^{k_i})(\mathfrak{A}^{\exists} \models R_i^{\exists}(\overline{a}, x))$;
3) если $\mathfrak{A} \models R_i(\overline{a})$, то $\mathfrak{A}^{\exists} \models (\exists! x \in X_i) R_i^{\exists}(\overline{a}, x)$.

Маркеровским $\forall$-расширением $\mathfrak{A}^{\forall}$ системы $\mathfrak{A}$ называется система сигнатуры $\sigma^{\forall}{=}\langle (R_0^{\forall})^{k_0+1}, \ldots, (R_{n-1}^{\forall})^{k_{n-1}+1}, Y_0^1, \ldots, Y_{n-1}^1 \rangle$, определенная следующим образом: носителем $\mathfrak{A}^{\forall}$ является дизъюнктное объединение $A \cup Y_0 \cup \ldots \cup Y_{n-1}$, множества $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ являются интерпретацией соответствующих предикатных символов, и, для всех $i < n$,

1) из $\mathfrak{A}^{\forall} \models R_i^{\forall}(\overline{a}, y)$ следует, что $\overline{a} \in A^{k_i}$ и $y \in Y_i$;
2) $(\forall \overline{a} \in A^{k_i})(\exists^{\leqslant 1} y \in Y_i)(\mathfrak{A}^{\forall} \models \neg R_i^{\forall}(\overline{a}, y))$;
3) если $(\forall y \in Y_i)(\mathfrak{A}^{\forall} \models R_i^{\forall}(\overline{a}, y))$, то $\mathfrak{A} \models R_i(\overline{a})$;
4) $(\forall y \in Y_i)(\exists! \overline{a} \in A^{k_i})(\mathfrak{A}^{\forall} \models \neg R_i^{\forall}(\overline{a}, y))$.

Таким образом, $\mathfrak{A} \models R_i(\overline{a})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^{\forall} \models (\forall y \in Y_i) R_i^{\forall}(\overline{a}, y)$.

Рассмотрим систему

$$\mathfrak{A}^{\circ} = \mathfrak{A}^{\exists\forall} \ (= (\mathfrak{A}^{\exists})^{\forall}).$$

Носителем $\mathfrak{A}^{\circ}$ является множество $A \cup X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1} \cup Y_0 \cup \ldots \cup Y_{n-1} \cup Z_0 \cup \ldots \cup Z_{n-1}$, где $X_0, \ldots, X_{n-1}$ — $\exists$-напарники предикатов $R_0^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_{n-1}^{\mathfrak{A}}$ системы $\mathfrak{A}$, $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ — $\forall$-напарники предикатов $(R_0^{\exists})^{\mathfrak{A}^{\exists}}, \ldots, (R_{n-1}^{\exists})^{\mathfrak{A}^{\exists}}$ системы $\mathfrak{A}^{\exists}$, а $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ — $\forall$-напарники предикатов $X_0^{\mathfrak{A}^{\exists}}, \ldots, X_{n-1}^{\mathfrak{A}^{\exists}}$ системы $\mathfrak{A}^{\exists}$.

Основным результатом данной заметки является следующая

Теорема 1 (об обращении Σ-скачка)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, такая, что $\mathbf{0}' \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{A}$. Тогда существует система $\mathfrak{B}$, для которой*

$$\mathfrak{B}' \equiv_{\Sigma} \mathfrak{A}.$$

Доказательство. Можно считать, что система $\mathfrak{A}$ удовлетворяет пунктам 1, 2 и 3 леммы 1. Покажем, что $\mathfrak{A}$ Σ-эквивалентна $\mathfrak{B}'$ для $\mathfrak{B}{=}\mathfrak{A}^{\circ}$.

Убедимся сначала, что $\mathfrak{A} \leqslant_{\Sigma} (\mathfrak{A}^{\circ})'$. Из определения расширения $\mathfrak{A}^{\circ}$ системы $\mathfrak{A}$ следует, что основное множество системы $\mathfrak{A}$ определимо $\exists\forall$-формулой в $\mathfrak{A}^{\circ}$, а значит Σ-определимо в $(\mathfrak{A}^{\circ})'$. Далее, для любых $i < n$ и $\overline{a} \in A^{k_i}$,

$$\mathfrak{A} \models R_i(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A}^{\exists} \models (\exists! x \in X_i) R_i^{\exists}(\overline{a}, x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\mathfrak{A}^{\exists})^{\forall} \models (\exists! x \in X_i)(\forall y \in Y_i) R_i^{\exists\forall}(\overline{a}, x, y).$$

Таким образом, истинность атомарных предикатов системы $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^{\circ}$ определяется $\exists\forall$-формулой в $\mathfrak{A}^{\circ}$, а значит Σ-определима в $(\mathfrak{A}^{\circ})'$. Следовательно, $\mathfrak{A} \leqslant_{\Sigma} (\mathfrak{A}^{\circ})'$ (более того, $\mathfrak{A} \subseteq_{s\Sigma} (\mathfrak{A}^{\circ})'$).

Установим теперь, что $(\mathfrak{A}^{\circ})' \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{A}$. Непосредственно из определения вытекает, что $\mathfrak{A}^{\circ} \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{A}$, а значит и $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ}) \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{A}$. Очевидно также, что предикат

$$\Sigma\text{-Sat}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})} = \{\langle \ulcorner\Phi\urcorner, c\rangle \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ}) \models \Phi(c),\ \Phi(x) - \Sigma\text{-формула}\}$$

Σ-определим в любом Σ-представлении $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, удовлетворяющем дополнительному условию из [4]. Для доказательства Σ-определимости дополнения предиката $\Sigma\text{-Sat}_{\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})}$ достаточно показать, что истинность Π-формул в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$ Σ-определима в некотором таком представлении.

Для описания множеств, определяемых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^\circ)$ П-формулами сигнатуры $\sigma^{\exists\forall}\cup\{\mathrm{U}^1, \in^2\}$ с параметрами, для произвольной системы $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры $\sigma = \langle R_0^{k_0}, \ldots, R_{n-1}^{k_{n-1}}\rangle$ рассмотрим подмножества, определяемые в $\mathfrak{M}^\forall$ бесконечными вычислимыми конъюнкциями

$$\bigwedge_{i\in\omega} \forall\overline{u}_i\ \varphi_i(\overline{v}, \overline{u}_i, \overline{m}_0, \overline{y}_0),$$

где, для всех $i \in \omega$, φ_i — бескванторные формулы сигнатуры $\sigma^\forall$, $\overline{m}_0 \in M^{<\omega}$, $\overline{y}_0 \in (Y_0 \cup \ldots \cup Y_{n-1})^{<\omega}$ — наборы параметров.

Будем называть *позитивной* $\forall$-*формулой* формулу вида $\forall\overline{u}\Phi$, где бескванторная формула Φ позитивна, то есть не содержит отрицаний и импликаций. Отношения, определяемые формулами такого вида (с параметрами), будем называть *позитивно* $\forall$-*определимыми.*

Лемма 2. *Класс $\forall$-определимых отношений $\mathfrak{M}^\forall$ состоит из конечных объединений позитивно $\forall$-определимых отношений системы $\mathfrak{M}$ и бескванторных отношений системы $\mathfrak{M}^\forall$.*

Доказательство. Можно считать, что отношение определяется $\forall$-формулой $\Psi(\overline{v})$ вида $\forall\overline{u}((P_0 \wedge \ldots \wedge P_k) \to (Q_0 \vee \ldots \vee Q_l))$, где $P_0, \ldots, P_k, Q_0, \ldots, Q_l$ — атомарные формулы (без отрицаний), не содержащие "неправильных" вхождений параметров. Заметим, что подформулы P_m вида $Y_i(u_j)$ соответствуют ограничению квантора $\forall u_j$ на множества Y_i. Преобразуем исходную формулу к формуле с ограниченными кванторами вида $(\forall y \in Y_i)$, и элиминируем все такие кванторы описанным ниже эффективным образом.

Достаточно рассмотреть случай формулы вида $(\forall y \in Y_i)(S_0 \vee \ldots \vee S_m)$, где $S_0, \ldots, S_m$ — атомарные формулы или их отрицания, содержащие хотя бы одно вхождение переменной y. Следующие преобразования дают формулу, эквивалентную исходной, но не содержащую вхождений переменной y (элиминация ограниченного $\forall$-квантора $(\forall y \in Y_i)$):

1) удаляем все формулы S_k вида $R_j^\forall(\overline{u})$, в которых переменная y встречается на позиции, не являющейся последней, — такие формулы тождественно ложны вследствие определения $\forall$-расширения;

2) заменяем все формулы S_k вида $\neg R_j^\forall(\overline{u}, y)$ на $R_j(\overline{u})$, — согласно определению $\forall$-напарника для предиката R_j;

3) удаляем все формулы S_k вида $Y_j(y)$, $i \neq j$, а также вида $\neg Y_i(y)$ — такие формулы, очевидно, тождественно ложны.

В итоге получим $\forall$-формулу с неограниченными кванторами вида $\forall\overline{u}(S_0 \vee \ldots \vee S_m)$, $S_0, \ldots, S_m$ — атомарные формулы или их отрицания, которая не содержит подформул вида $\neg Y_i$. Далее, для каждой переменной u набора $\overline{u}$, проделаем следующие преобразования, из которых вытекает заключение леммы:

1) если $Y_{i_0}(u), \ldots, Y_{i_k}(u)$ — все $\forall$-напарники, содержащие вхождения переменной u, то не тождественно ложной соответствующая часть дизъюнкции может быть только в случае, когда $\{i_0, \ldots, i_k\} = \{0, \ldots, n-1\}$. В этом случае удаляем подформулы $Y_{i_0}(u), \ldots, Y_{i_k}(u)$;

2) если переменная u входит в подформулу вида $R_i^\forall(\overline{v}, u)$ или $\neg R_i^\forall(\overline{v}, u)$, то удаляем эти подформулы как тождественно ложные;

3) удаляем все подформулы вида $R_i^\forall(\overline{v}, y_i^0)$, где $y_i^0 \in Y_i$, но в наборе $\overline{v}$ есть вхождения элементов набора $\overline{u}$.

□

Лемма 3. *Класс позитивно $\forall$-определимых отношений системы $\mathfrak{A}^{\exists}$ совпадает с классом отношений системы $\mathfrak{A}^{\exists}$, определимых позитивными бескванторными формулами (с параметрами).*

Доказательство. Достаточно убедиться в тождественной ложности в системе $\mathfrak{A}^{\exists}$ формул вида $\forall u(Q_0 \vee \ldots \vee Q_l)$, где $Q_0, \ldots, Q_l$ — атомарные формулы сигнатуры $\sigma^{\exists}$ (с параметрами), содержащие вхождения переменной u и не содержащие символов $\neg$ и $=$. Можно также считать, что $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$ равны, соответственно, формулам $X_0(u), \ldots, X_{n-1}(u)$, а формулы $Q_n, \ldots, Q_l$ отличны от $X_i(u)$. Легко убедиться, что, при любом означивании свободных переменных формулы $\forall u(Q_0 \vee \ldots \vee Q_l)$, множество значений переменной u, при которых формула $(Q_n \vee \ldots \vee Q_l)$ истинна в $\mathfrak{A}^{\exists}$, конечно (это следует из определения предикатов системы $\mathfrak{A}^{\exists}$). Так как система $\mathfrak{A}$ бесконечна, получаем требуемое. □

Завершим доказательство теоремы 1, используя для представления элементов наследственно конечных надстроек понятия и обозначения из [1]. Любое Π-подмножество $P \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$ представляется в виде $P = \cup_{\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)} P_{\varkappa}$, где, для любого $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$, $P_{\varkappa} = \{\varkappa(\overline{a}) \,|\, \mathfrak{A}^{\circ} \models \Phi_{\varkappa}(\overline{a})\}$, $\Phi_{\varkappa}$ — вычислимая конъюнкция $\forall$-формул сигнатуры $\sigma^{\exists\forall}$ (с параметрами), и $\{\Phi_{\varkappa} \,|\, \varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)\}$ — вычислимое семейство. Рассмотрим Σ-представление $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, удовлетворяющее условию из [4], тождественное на $\mathfrak{A}$, и в котором представление элементов $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$ термами $\varkappa(\overline{c})$ ($\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$, $\overline{c} \in |\mathfrak{A}^{\circ}|$) в смысле [1] согласовано с некоторой конструктивизацией $\mathbb{HF}(\omega)$ на ω. Под согласованностью понимается Δ-определимость отношения “$x = \varkappa(\overline{c})$”, где x — элемент представления $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$, $\varkappa$ — элемент конструктивного представления $\mathbb{HF}(\omega)$, а $\overline{c}$ — набор элементов представления $\mathfrak{A}^{\circ}$. Рассмотрим элемент $\varkappa(\overline{c}) \in \mathbb{HF}(\mathfrak{A}^{\circ})$, где $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$, а $\overline{c} \in |\mathfrak{A}^{\circ}|$ — праэлементы. Пусть $\overline{a}$ — все элементы из $\overline{c}$, лежащие в $\mathfrak{A}$, а $\overline{b}$ — все элементы из $\overline{c}$, лежащие в $\mathfrak{A}^{\exists}$. Рассмотрим конечное множество $T_{\overline{c}}$, являющееся объединением атомарного типа набора $\overline{c}$ в системе $\mathfrak{A}^{\exists\forall}$, атомарного типа набора $\overline{b}$ в системе $\mathfrak{A}^{\exists}$, и атомарного типа набора $\overline{a}$ в системе $\mathfrak{A}$. Используя эффективность преобразований из лемм 2 и 3, легко убедиться, что в указанном выше Σ-представлении вопрос об истинности Π-формулы на элементе вида $\varkappa(\overline{c})$ равномерно и эффективно сводится, относительно множества $T_{\overline{c}}$ (вследствие конечности сигнатуры, существует лишь конечное число возможных для $T_{\overline{c}}$ вариантов), к проверке истинности Π-формулы на элементе $\varkappa$ в $\mathbb{HF}(\omega)$. Последнее эффективно проверяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ вследствие условия $\mathbf{0}' \leqslant_{\Sigma} \mathfrak{A}$. □

Замечание 3. Предположение о конечности сигнатуры системы $\mathfrak{A}$, возможное ввиду леммы 1, существенно для данного доказательства. В случае, когда сигнатура системы $\mathfrak{A}$ бесконечна, бесконечность множества бескванторных типов конечных наборов элементов $\mathfrak{A}^{\circ}$ не позволяет использовать аналогичные рассуждения для сведения к проверке Π-формулы в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Из теоремы об обращении скачка для полурешетки $\mathcal{S}_{\Sigma}(\omega)$ вытекает аналогичный результат для полурешеток степеней представимости счетных систем. А именно, имеет место

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— счетная алгебраическая система, для которой* $\mathbf{0}' \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$. *Тогда существует система* $\mathfrak{B}$, *такая, что для любого* $r \in \{e, s, w, ew\}$

$$\mathfrak{B}' \equiv_r \mathfrak{A},$$

где e, s, w, ew *— обозначения для сводимостей по Дымент, по Медведеву, по Мучнику, и неравномерной сводимости по Дымент, соответственно.*

Доказательство. Действительно, как показано в [6], для любых систем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, из $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$ следует $\mathfrak{A} \equiv_r \mathfrak{B}$ для любого $r \in \{e, s, w, ew\}$. □

Замечание 4. В работе [11], кроме частного случая предыдущего следствия (а именно, для $r = w$), по существу, установлено также следующее утверждение: массовая проблема, состоящая из скачков (по Тьюрингу) всевозможных представлений счетной системы $\mathfrak{A}$ на натуральных числах, эквивалентна по Мучнику проблеме представимости системы $\mathfrak{A}'$. Естественными вопросами для дальнейшего исследования представляются определение операции скачка для полурешеток степеней представимости относительно различных эффективных сводимостей, проверка его корректности (в смысле предложения 1) и согласованности с операцией скачка для Σ-степеней относительно естественных гомоморфизмов.

Система $\mathfrak{M}$ называется *локально конструктивизируемой* [1], если множество $\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{M}, \overline{m})$ вычислимо перечислимо для любого $\overline{m} \in M^{<\omega}$. Непосредственно из доказательства теоремы 1 вытекает ряд свойств системы $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^\circ$, характеризующих ее как “простую”, или “низкую”, с точки зрения конструктивной сложности. А именно, имеет место

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— алгебраическая система, такая, что* $\mathbf{0}' \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$. *Тогда существует локально конструктивизируемая система* $\mathfrak{B}$, *для которой*

$$[\mathfrak{A}]_\Sigma = [\mathfrak{B}']_\Sigma.$$

Кроме того, $\mathfrak{B}' \equiv_\Sigma \mathfrak{B}_1$, *где* $\mathfrak{B}_1$ *— обогащение системы* $\mathfrak{B}$ *конечным числом определимых предикатов.*

Доказательство. Как и в теореме 1, возьмем $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^\circ$. Равенства $[\mathfrak{B}']_\Sigma = [\mathfrak{B}_1]_\Sigma = [\mathfrak{B}_1]_\Sigma \vee \mathbf{0}'$ следуют из свойств системы $\mathfrak{A}^\circ$, установленных в ходе доказательства теоремы 1: достаточно в качестве $\mathfrak{B}_1$ взять обогащение системы $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^\circ$ предикатами, атомарными для систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^\exists$. Установим локальную конструктивизируемость системы $\mathfrak{A}^\circ$: пусть $\overline{c} \in |\mathfrak{A}^\circ|^{<\omega}$, и пусть $\overline{a}$ — все элементы из $\overline{c}$, лежащие в $\mathfrak{A}$, а $\overline{b}$ — все элементы из $\overline{c}$, лежащие в $\mathfrak{A}^\exists$. Рассмотрим конечное множество $T_{\overline{c}}$, являющееся объединением атомарного типа набора $\overline{c}$ в системе $\mathfrak{A}^{\exists\forall}$, атомарного типа набора $\overline{b}$ в системе $\mathfrak{A}^\exists$, и атомарного типа набора $\overline{a}$ в системе $\mathfrak{A}$. Из определения маркеровских расширений непосредственно следует, что множество $\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{A}^\circ, \overline{c})$ вычислимо относительно $T_{\overline{c}}$.

□

В заключение автор благодарит рецензента за исправление неточностей и ценные замечания.

Список литературы

[1] Ю.Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Научная книга, Новосибирск, 1996.
[2] С.С. Гончаров, Б. Хусаинов, *Сложность теорий вычислимых категоричных моделей*, Алгебра и логика, **43** (2004), 650–665.
[3] О.В. Кудинов, А.И. Стукачев, *Некоторые замечания о степенях представимости*, (рукопись).
[4] А.С. Морозов, *Об отношении Σ-сводимости между допустимыми множествами*, Сиб. мат. журнал, **45** (2004), 634–652.
[5] В.Г. Пузаренко, *Об одной сводимости на допустимых множествах*, Сиб. мат. журнал, **50** (2009), 414–428.
[6] А.И. Стукачев, *О степенях представимости моделей. I*, Алгебра и логика, **46** (2007), 763–788.
[7] А.И. Стукачев, *О степенях представимости моделей. II*, Алгебра и логика, **47** (2008), 108–126.
[8] J. Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
[9] V. Baleva, *The jump operation for structure degrees*, Arch. Math. Logic, **45** (2006), 249–265.
[10] A.A. Soskova, *A jump inversion theorem for the degree spectra*, Computation and Logic in the Real World, Eds. S.B.Cooper, B. Loewe, A. Sorbi, Siena, LNCS, 2007, 716–726.
[11] A.A. Soskova, I.N. Soskov, *A jump inversion theorem for the degree spectra*, Journal of Logic and Computation, **19** (2009), 199–215.
[12] A.I. Stukachev, *Uniformization theorem for hereditary finite superstructures*, Siberian Advances in Mathematics, **7** (1997), 123–132.

Алексей Ильич Стукачев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: aistu@math.nsc.ru