УДК 510.5

О свойствах $s\Sigma$-сводимости [1]

А.И. СТУКАЧЕВ

1 Введение

Данная работа является продолжением работ [1, 2, 3, 4, 5, 6] и посвящена изучению свойств одной сводимости на алгебраических системах (структурах), неявным образом, но существенно, использованной в работах автора [2, 3] по Σ-определимости в наследственно конечных надстройках [8] в рамках подхода Ю.Л.Ершова [9]. Одновременно с этим, аналогичная по свойствам сводимость была введена под названием “s-сводимость” в работах И.Н.Соскова и его учеников [10, 11]. Определение s-сводимости было дано в терминах обобщенной вычислимости в надстройках Московакиса для случая счетных систем с общим носителем. Явным образом отношение *$s\Sigma$-сводимости*, обобщающее как s-сводимость, так и сводимость, неявно использованную в [2, 3], было сформулировано и использовалось в работах [4, 5, 6].

Основной особенностью $s\Sigma$-сводимости является то, что она определяется на структурах, а не на их типах изоморфизма (в этом ее основное отличие от Σ-сводимости и сводимостей на проблемах представимости [12, 13, 14]). Естественными примерами использования этой сводимости являются “локальные” связи между структурами и их обогащениями или расширениями. Подобно тому, как отношение Σ-сводимости является

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 8227), Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты РФФИ 11-01-00688-а, РФФИ 13-01-91001-АНФ-а), и государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-276.2012.1).

релятивизацией понятия *конструктивизируемой* структуры, можно считать отношение $s\Sigma$-сводимости релятивизацией понятия *конструктивной* структуры В настоящей работе установлены новые примеры применения $s\Sigma$-сводимости в исследовании свойств обобщенной вычислимости над абстрактными структурами. В частности, при этом используются такие естественные обогащения и расширения структур, как морлизация, скулемизации, и Σ-скачок.

Кроме того, предложено одно обобщение “локального” отношения $s\Sigma$-сводимости в случае, когда все рассматриваемые структуры лежат (как подмножества) в наследственно конечных надстройках вида $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ — бесконечная модель теории равенства. Главное свойство допустимых множеств такого вида заключается в том, что они являются наименьшими в своей мощности допустимыми множествами относительно Σ-сводимости [15] и могут, таким образом, выступать в роли носителей для “абсолютно простейших” вычислимостей. Интересно отметить, что допустимые множества вида $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$, не представляющие большого интереса с точки зрения “абсолютной” Σ-определимости в них, в случае изучения “относительной” Σ-сводимости могут быть использованы достаточно естественным образом.

В работе получены следующие результаты с использованием $s\Sigma$-сводимости и ее свойств:

1) Определен класс *квазирегулярных* структур как класс неподвижных точек морлизации относительно $s\Sigma$-сводимости, расширяющий классы моделей регулярных теорий [9] и эффективно модельно полных структур [16, 17]. Как показано в [7], HF-надстройка над квазирегулярной структурой является квазирезольвентной, и, следовательно, имеет универсальную Σ-функцию и обладает свойством редукции.

2) Показано, что HF-надстройка над квазирегулярной структурой обладает свойством униформизации тогда и только тогда, когда эта структура, относительно $s\Sigma$-сводимости, является неподвижной точкой для некоторой своей скулемизации с дополнительным свойством

структурности. Установлено, что для таких структур HF-надстройка и надстройка Московакиса Σ-эквивалентны.

3) Предложена версия $s\Sigma$-сводимости, расширяющая исходную локальную версию и обладающая свойством транзитивности. Показано, что операция Σ-скачка (на произвольных структурах) не имеет неподвижных точек относительно $s\Sigma$-сводимости (в максимально общем понимании).

2 Применения $s\Sigma$-сводимости в исследовании свойств обобщенной вычислимости

Напомним вначале "локальную" версию $s\Sigma$-сводимости [4, 5, 6], в которой предполагается, что исходная структура $\mathfrak{B}$ имеет основное множество, состоящее из праэлементов (некоторого "внешнего" допустимого множества). При таком ограничении это отношение будет транзитивным только в случае, когда все рассматриваемые структуры обладают указанным свойством. Всюду далее рассматриваются структуры, имеющие вычислимые предикатные сигнатуры и предполагается, что с каждой такой сигнатурой связана некоторая ее геделевская нумерация. Для удобства рассуждений, в тексте используются сигнатуры, содержащие функциональные символы, в частности, для скулемовских функций, однако формально им соответствуют предикатные символы, интерпретируемые как графики этих функций. Аналогичным образом, предполагается возможным использование конечного фиксированного набора параметров-праэлементов.

Для работы с бесконечными вычислимыми сигнатурами будем использовать следующее определение наследственно конечной надстройки над структурой такого типа: пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой предикатной сигнатуры $\sigma = \langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \ldots \rangle$. Определим $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ как структуру конечной сигнатуры $\sigma' = \langle U^1, \in^2, \mathrm{Sat}^2 \rangle$, с носителем $HF(M)$ и естественной интерпретацией символов U (т.е. $U^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$) и $\in$. Интерпретация предиката Sat на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ соответствует интерпретации в $\mathfrak{M}$ символов сигнатуры σ с зафиксированной выше нумерацией: для любых $a, b \in HF(M)$, полагаем $\mathrm{Sat}^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(a, b)$ истинным в том и только том случае, когда $a \in \omega$, $b = \langle m_0, \ldots, m_{n_a-1} \rangle \in M^{n_a}$, и $P^{\mathfrak{M}}_{n_a}(m_0, \ldots, m_{n_a-1})$ истинно. Поскольку структуры вида $HF(\mathfrak{M})$ являются моделями KPU и допустимыми множествами, для них справедливы все общие свойства таких структур, в частности, существование универсального Σ-предиката [9].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы вычислимых предикатных сигнатур. Система $\mathfrak{A}$ $s\Sigma$-*сводится* к системе $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если

1) $A \subseteq HF(B)$ является Σ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ подмножеством;

2) атомарная диаграмма $D(\mathfrak{A})$ (являющаяся подмножеством $HF(B)$) является Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ относительно A подмножеством в следующем смысле: если $\sigma = \langle P_0^{n_1}, P_1^{n_2}, \ldots \rangle$ — вычислимая предикатная сигнатура системы $\mathfrak{A}$, то существует вычислимая последовательность Σ-формул

$$\Phi_0(x_0, x_1, y), \Psi_0(x_0,), \Phi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y), \Psi_1(x_0, \ldots, x_{n_1-1}, y),$$

$$\Phi_2(x_0, \ldots, x_{n_2-1}, y), \Psi_2(x_0, \ldots, x_{n_2-1}, y), \ldots$$

сигнатуры σ'_2, и параметер $c \in HF(B)$ такие, что, для всех $k \in \omega$, $\Phi_k^{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}(\bar{x}, c) \cap A^{n_k} = A^{n_k} \setminus \Psi_k^{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}(\bar{x}, c)$ (считаем, что P_0 — символ отношения $=$ и $n_0 = 2$) и $P_k^{\mathfrak{A}} = \Phi_k^{\mathbb{HF}(\mathfrak{B})}(\bar{x}, c) \cap A^{n_k}$ является интерпретацией символа P_k на системе $\mathfrak{A}$.

Отношение $s\Sigma$-эквивалентности определяется стантартным образом: структура $\mathfrak{A}$ $s\Sigma$-*эквивалентна* структуре $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{A}$.

Отношение $s\Sigma$-сводимости оказывается достаточно полезным при изучении свойств обобщенной вычислимости. Фактически, оно было неявным образом использовано в [2] в критерии свойства униформизации в HF-надстройках над моделями регулярных теорий. В явном виде, с исправлением одной существенной неточности в формулировке, этот критерий сформулирован и доказан в [6].

Напомним, что допустимое множество $\mathbb{A}$ удовлетворяет свойству *униформизации*, если для любого бинарного Σ-предиката R на $\mathbb{A}$ существует (частичная) Σ-функция $f(x)$, для которой $\delta f = \mathrm{Pr}_1(R)$ и $f \subseteq R$.

Пусть структура $\mathfrak{M}$ имеет *регулярную* (т.е. модельно полную и разрешимую [9]) элементарную теорию. В этом случае $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ является квазирезольвентным допустимым множеством [9] и имеет универсальную (частичную) Σ-функцию, а также обладает свойством редукции, однако свойством униформизации может не обладать. Оказывается, отношение $s\Sigma$-сводимости (более точно, $s\Sigma$-эквивалентности) позволяет сформулировать критерий свойства униформизации, причем для более широкого класса, чем класс моделей регулярных теорий.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой сигнатуры σ. Ее *морлизацией* будем называть всякую структуру $\mathfrak{M}^{Morley}$ вычислимой сигнатуры σ^{Morley}, т.ч., для множества Form_σ формул сигнатуры σ,

1) $\sigma^{Morley} \leftrightharpoons \sigma \cup \{P_\varphi(x_0, \ldots, x_{n_\varphi - 1}) \in \mathrm{Form}_\sigma,\ n_\varphi > 0\}$;

2) $\mathfrak{M}^{Morley}$ является обогащением $\mathfrak{M}$: ее носитель есть множество M, интерпретация символов сигнатуры σ совпадает с соответствующей интерпретацией в $\mathfrak{M}$;

3) $(P_\varphi)^{\mathfrak{M}^{Morley}} = \varphi(x_0, \ldots, x_{n_\varphi - 1})^{\mathfrak{M}}$ для всех $\varphi(x_0, \ldots, x_{n_\varphi - 1}) \in \mathrm{Form}_\varphi$, т.ч. $n_\varphi > 0$.

Морлизация структуры единственна с точностью до $s\Sigma$-эквивалентности, если предполагается, что зафиксирована связанная с вычислимой нумерацией символов сигнатуры σ геделевская нумерация формул из Form_σ.

В случае, когда для морлиевского обогащения $\mathfrak{M}^{Morley}$ структуры $\mathfrak{M}$ имеет место

$$\mathfrak{M}^{Morley} \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M},$$

структуру $\mathfrak{M}$ будем называть *квазирегулярной*. Отметим, что структуры со свойством эффективной модельной полноты [16, 17] и, в частности, структуры с регулярной элементарной теорией, являются квазирегулярными. Важным примером квазирегулярной структуры является обогащение поля действительных чисел с помощью экспоненциальной функции [16, 17].

Ряд свойств, которыми обладают модели регулярных теорий, сохраняется и для квазирегулярных структур. В частности, имеет место

Предложение 1. *Если структура $\mathfrak{M}$ квазирегулярна, то допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ квазирезольвентно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры σ, и пусть σ' — сигнатура наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.5.1 из [9], с заменой, в замечании 3.5.1, эффективной эквивалентности в $\mathfrak{M}$ формул сигнатуры σ $\exists$-формулам той же сигнатуры, на эффективную эквивалентность в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ формул сигнатуры σ Σ-формулам сигнатуры σ'. Для случая бесконечной вычислимой сигнатуры необходимые дополнительные рассуждения приведены в [7]. $\square$

Таким образом, непосредственно из результатов [7] и [9] получаем

Следствие 1. *Если структура $\mathfrak{M}$ квазирегулярна, то допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ имеет универсальную Σ-функцию и обладает свойством редукции.*

Свойство Σ-униформизации, однако, в HF-надстройках над квазирегулярными структурами, в общем случае, не справедливо. Критерий этого свойства в указанном классе может быть сформулирован в терминах $s\Sigma$-эквивалентности исходной структуры и некоторой ее скулемизации.

Напомним, что элементарная теория T сигнатуры σ называется *теорией с определимыми скулемовскими функциями* [18], если для любой формулы $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ существует формула $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ той же сигнатуры, такая, что

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big[\exists x_0 \, \varphi(x_0, \ldots, x_n) \to \exists ! \, x_0 \left(\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \psi(x_0, \ldots, x_n) \right) \Big].$$

Оказывается, что требование определимости скулемовских функций слишком сильное для использования в критерии свойства униформизации. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры σ, и пусть σ' — сигнатура наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Условимся в формулах сигнатуры σ' различать переменные со значениями только в множестве праэлементов (прапеременные), и переменные с произвольными значениями. Всюду далее, если речь идет о формуле сигнатуры σ, предполагается, что все ее переменные, как свободные, так и связанные, являются прапеременными.

Квазирегулярная структура $\mathfrak{M}$ называется структурой с Σ-*определимыми скулемовскими функциями* [2], если, по любой формуле $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ эффективно определяется Σ-формула $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ', такая, что

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big[\exists x_0 \varphi(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow \exists!\, x_0 \big(\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \psi(x_0, \ldots, x_n)\big)\Big]$$

(напомним, что переменные $x_0, \ldots, x_n$, а также все связанные переменные в формуле φ являются прапеременными). Вследствие квазирегулярности, соответствующая скулемовская функция f_φ действительно имеет Σ-определимый в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ график.

Предыдущее определение может быть естественным образом сформулировано в терминах $s\Sigma$-эквивалентности. Пусть $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры σ, и пусть σ_{Skolem} — сигнатура, состоящая из всех символов сигнатуры σ, а также новых функциональных символов вида $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для всех формул $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ. Структура $\mathfrak{M}^S$ сигнатуры σ_{Skolem} называется (неитерированным) *скулемовским обогащением* структуры $\mathfrak{M}$, если $M^S = M$, $\mathfrak{M} \restriction_\sigma = \mathfrak{M}^S \restriction_\sigma$, и, для любой формулы $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ,

$$\mathfrak{M}^S \models \forall x_1 \ldots \forall x_n (\exists x_0 \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \varphi(f_\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)).$$

Легко убедиться, что квазирегулярная структура $\mathfrak{M}$ является структурой с Σ-определимыми скулемовскими функциями тогда и только тогда, когда, для некоторого (неитерированного, как предполагается всюду далее) скулемовского обогащения $\mathfrak{M}^S$ структуры $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M}^S \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M}.$$

Скулемовское обогащение $\mathfrak{M}^S$ структуры $\mathfrak{M}$ называется *структурным*, если, для любой формулы $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ, любого $\overline{m} \in M^n$, и любой перестановки ρ на множестве $\{1, \ldots, n\}$,

$$\mathfrak{M} \models \forall x_0(\varphi(x_0, \overline{m}) \leftrightarrow \varphi(x_0, \rho(\overline{m}))) \text{ влечет } \mathfrak{M}^S \models (f_\varphi(\overline{m}) = f_\varphi(\rho(\overline{m}))),$$

где $\rho(\overline{m}) = \langle m_{\rho(1)}, \ldots, m_{\rho(n)} \rangle$.

Напомним, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ обладает *свойством униформизации*, если для любого Σ-предиката $R \subseteq \mathrm{HF}(M) \times \mathrm{HF}(M)$ существует Σ-функция f, такая, что:

1) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{Pr}_1(R)$,

2) $f \subseteq R$,

где $f = \big\{\langle x, y\rangle \bigm| f(x) = y\big\}$, $\mathrm{dom}(f) = \big\{x \mid f(x)\!\downarrow\big\}$,
и $\mathrm{Pr}_1(R) = \big\{x \bigm| \exists\, y\big(\langle x, y\rangle \in R\big)\big\}$.

Следующая теорема является исправлением и усилением основного результата работ [2, 3]. (К сожалению, свойство структурности скулемовских обогащений не было явно сформулировано в этой работе, однако фактически подразумевалось. Более того, рассматриваемые в [2, 3] скулемизации полей действительных и p-адических чисел этим свойством обладают. Исправленная версия критерия для HF-надстроек над моделями регулярных теорий опубликована с доказательством в работе [6].) Эта теорема дает естественный пример использования $s\Sigma$-сводимости на структурах, и сформулированное далее предложение 2 является естественным примером $s\Sigma$-эквивалентности.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — квазирегулярная структура. Наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ обладает свойством униформизации тогда и только тогда, когда существует структурное скулемовское обогащение $\mathfrak{M}^S$ структуры $\mathfrak{M}$, для которого

$$\mathfrak{M}^S \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M}.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую гедегевскую нумерацию формул сигнатуры σ', разделяющую прапеременнные и переменные для множеств. Геделевский номер формулы φ будем обозначать как $[\varphi]$. Отметим, что если $\mathfrak{M}$ — квазирегулярная структура, то каждая формула ее сигнатуры эквивалентна над $\mathfrak{M}$ некоторой Σ-формуле в HF-надстройке, причем такая формула может быть найдена эффективно (здесь и далее, под эффективностью понимается существование подходящей $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-вычислимой функции на множестве геделевских номеров).

Докажем необходимость. Предположим, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ обладает свойством униформизации. Пусть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры σ, и пусть $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — Σ-формула сигнатуры σ', которая $\mathfrak{M}$-эквивалентна φ (такая формула существует и может быть найдена эффективно вследствие квазирегулярности $\mathfrak{M}$). Определим бинарный предикат G_0 следующим образом:

$$G_0 = \{\langle a, b\rangle | a = \langle [\varphi], \langle m_1, \ldots, m_{n-1}\rangle\rangle, b = \{\langle [\varphi], \langle m_{\rho(1)}, \ldots, m_{\rho(n-1)}\rangle\rangle |$$

$$|\rho \in S_{n-1} \text{ — перестановка, для которой}$$

$$\mathfrak{M} \models \forall x_0(\varphi(x_0, m_1, \ldots, m_{n-1}) \leftrightarrow \varphi(x_0, m_{\rho(1)}, \ldots, m_{\rho(n-1)}))\}\}.$$

Вследствие квазирегулярности, G_0 является Σ-предикатом на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Пусть $f_0(x)$ — Σ-функция, униформизующая G_0. Определим теперь бинарный Σ-предикат G_1 на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ следующим образом:

$$\langle a, m\rangle \in G_1 \iff \Big(a = \big\langle [\varphi], \langle m_1, \ldots, m_{n-1}\rangle\big\rangle\Big) \wedge$$

$$\wedge(\psi \text{ — } \Sigma\text{-формула, эквивалентная } \varphi) \wedge \Sigma\text{-Sat}\big([\psi], \langle m, m_1, \ldots, m_{n-1}\rangle\big),$$

где Σ-Sat — предикат истинности Σ-формул в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Опять же, существует Σ-функция f_1, униформизующая G_1. Функция

$$f_\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lambda x_1. \ \ldots \ \lambda x_{n-1}. f_1\Big(f_0(\langle [\varphi], x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle)\Big)$$

является скулемовской функцией для формулы φ, причем по построению эта функция удовлетворяет условию структурности.

Докажем достаточность.

Следующая лемма справедлива для произвольной структуры $\mathfrak{M}$ вычислимой сигнатуры σ. Для $n \in \omega$, пусть $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — множество “праэлементов”, соответствующих натуральным числам (но не являющихся ни ординалами, ни праэлементами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$). Аналогичным образом определяется множество $\underline{\omega} = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x)$ — Δ_0-формула сигнатуры σ', и пусть $\varkappa \in \mathrm{HF}(n)$. По ним эффективно определяется $\exists$-формула $\varphi^*(u_0, \ldots, u_{n-1})$ сигнатуры σ такая, что для любого означивания $\gamma : \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \to M$,

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(x)^x_{t_\varkappa(\bar{x})}[\gamma] \iff \mathfrak{M} \models \varphi^*(u_0, \ldots, u_{n-1})[\gamma].$$

Доказательство. По формуле $\varphi(x)$ и элементу $\varkappa \in \mathrm{HF}(\underline{n})$ построим формулу $\varphi^x_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n-1})$ сигнатуры $\sigma' \cup \left\{\cup^2, \{\}^1, \varnothing\right\}$ следующим образом:

1) если $\varphi = \varphi_1 \, q \, \varphi_2$, $q \in \{\vee, \wedge, \to\}$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons (\varphi_1)^x_\varkappa \, q \, (\varphi_2)^x_\varkappa$;

2) если $\varphi = \neg\varphi_1$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons \neg(\varphi_1)^x_\varkappa$;

3) если $\varphi = (t_1 \, p \, t_2)$, $p \in \{\in, =\}$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons (t_1 \, p \, t_2)^x_{t_\varkappa(\bar{x})}$;

4) если $\varphi = \exists y \in x(\varphi_1)$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons \bigvee\limits_{\varkappa' \in \varkappa} ((\varphi_1)^y_{\varkappa'})^x_\varkappa$;

5) если $\varphi = \forall y \in x(\varphi_1)$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons \bigwedge\limits_{\varkappa' \in \varkappa} ((\varphi_1)^y_{\varkappa'})^x_\varkappa$;

6) если $\varphi = U(x)$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons \begin{cases} \tau, & \text{если } \varkappa \in \underline{n} \\ \sim\tau, & \text{иначе} \end{cases}$;

7) если $\varphi = \mathrm{Sat}(x, t_1)$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons \begin{cases} P_a(u_{k_0}, \ldots u_{k_{n_a-1}}), & \text{если } \varkappa = a \in \omega, \\ & t_1 = \langle k_0, \ldots, k_{n_a-1} \rangle \in \underline{n}^{n_a}, \\ \sim\tau, & \text{иначе} ; \end{cases}$

8) если $\varphi = \mathrm{Sat}(t_0, x)$, то $\varphi^x_\varkappa \rightleftharpoons \begin{cases} P_a(u_{k_0}, \ldots u_{k_{n_a-1}}), & \text{если } t_0 = a \in \omega, \\ & \varkappa = \langle k_0, \ldots, k_{n_a-1} \rangle \in \underline{n}^{n_a}, \\ \sim\tau, & \text{иначе} , \end{cases}$

где $P_n \in \sigma$, τ обозначает предложение $\exists x(x = x)$, а $\sim\tau$ — предложение $\exists x(x \neq x)$.

Далее, для любой пары термов t_0, t_1 сигнатуры $\left\langle \cup, \{\}, \varnothing \right\rangle$ над прапеременными $u_0, \ldots, u_{n-1}$, можно эффективно определить формулы Φ_{t_0,t_1} и Ψ_{t_0,t_1} пустой сигнатуры такие, что $\mathrm{FV}(\Phi_{t_0,t_1}) = \mathrm{FV}(\Psi_{t_0,t_1}) = \mathrm{FV}(t_0) \cup$

$\mathrm{FV}(t_1)$, и для любого означивания $\gamma : \mathrm{FV}(t_0 = t_1) \to M$ справедливы соотношения:

$$t_0^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \in t_1^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \iff \mathfrak{M} \models \Phi_{t_0,t_1}[\gamma]$$
$$t_0^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \subseteq t_1^{\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \{\}, \cup \rangle}[\gamma] \iff \mathfrak{M} \models \Psi_{t_0,t_1}[\gamma]$$

(доказательство этого факта можно найти в [9]). Формула $\varphi^*(\bar{u})$ получается из формулы $\varphi^x_\varkappa(\bar{u})$ заменой подформул вида $(t_0 \in t_1)$ на Φ_{t_0,t_1}, а подформул вида $(t_0 = t_1)$ — на $(\Psi_{t_0,t_1} \wedge \Psi_{t_1,t_0})$. □

Лемма 1 очевидно обобщается на случай формул с несколькими переменными. Из нее также следует, что можно ограничиться рассмотрением формул с параметрами только из M.

Пусть теперь $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma^{\mathfrak{M}} \rangle$ — квазирегулярная структура сигнатуры σ, имеющая структурное скулемовское обогащение $\mathfrak{M}^S$ со свойством $\mathfrak{M}^S \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M}$.

Лемма 2. Пусть $n \geqslant 1$, и пусть P — n-местный определимый предикат на $\mathfrak{M}$. Тогда по любой формуле, определяющей P, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ эффективно определяется Σ-формула с параметрами, использованными в определении P и Σ-определении $\mathfrak{M}^S$, определяющая предикат Q на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ такой, что

1) если $P = \varnothing$, то $Q = \varnothing$,

2) если $P \neq \varnothing$, то $Q = \{\bar{x}\}$ для некоторого $\bar{x} \in P$.

Доказательство. Индукция по $n \geqslant 1$. Случай $n = 1$ непосредственно вытекает из существования скулемовского обогащения $\mathfrak{M}^S$ со свойством $\mathfrak{M}^S \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M}$; поэтому пусть $n > 1$ и, по индукционному предположению, утверждение леммы справедливо для всех $k < n$. Пусть предикат P определяется формулой $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, \bar{y})$ сигнатуры σ с параметрами $\overline{m}$. Для предиката

$$X = \{x_0 \mid \mathfrak{M} \models \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1}\, \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, \overline{m})\},$$

по индукционному предположению, эффективно находится Σ-формула $\Phi(x, \bar{y})$ с параметрами, выделяющая одноэлементное подмножество в X в случае, когда $X \neq \varnothing$. Не нарушая общности, можно считать, что все параметры являются праэлементами. Пусть, для простоты обозначений, все эти параметры уже содержатся среди элементов набора $\overline{m}$. Рассмотрим предикат

$$Y = \Big\{ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \in M^{n-1} \ \Big| \ \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists x_0 \big(\varphi(\bar{x}, \overline{m}) \wedge \Phi(x_0, \overline{m}) \big) \Big\}.$$

Как следует, например, из леммы 1, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0, \overline{m})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \bigvee_{i\in\omega} \varphi_i(x_0, \overline{m})$, где φ_i — $\exists$-формулы сигнатуры σ, и множество $\big\{ [\varphi_i] \ \big| \ i \in \omega \big\}$ вычислимо перечислимо. Таким образом,

$$Y = \Big\{ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \in M^{n-1} \ \Big| \ \mathfrak{M} \models \bigvee_{i\in\omega} \exists x_0 \big(\varphi(\bar{x}, \overline{m}) \wedge \varphi_i(x_0, \overline{m}) \big) \Big\}.$$

Пусть $i_0 = \mu i \Big(\mathfrak{M} \models \exists x_0 \big(\varphi(\bar{x}, \overline{m}) \wedge \varphi_i(x_0, \overline{m}) \big) \Big)$; вследствие квазирегулярности, i_0 (если оно существует) определяется Σ-формулой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ по параметрам. Так как формула $\Phi(x_0, \overline{m})$ истинна не более, чем на одном элементе, то, в случае, когда i_0 существует,

$$Y = \Big\{ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \in M^{n-1} \ \Big| \ \mathfrak{M} \models \exists x_0 \big(\varphi(\bar{x}, \overline{m}) \wedge \varphi_{i_0}(x_0, \overline{m}) \big) \Big\}.$$

По индукции, эффективно определяется Σ-формула $\Psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{y})$ с набором праэлементов в качестве параметров, выделяющая единственный элемент в множестве Y. Искомый предикат Q определяется Σ-формулой $\Phi(x_0, \bar{y}) \wedge \Psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{y})$. □

Пусть $\underline{\omega} = \{0^*, 1^*, \ldots, n^*, \ldots\}$ — множество “праэлементов”, соответствующих натуральным числам (но не являющихся ни ординалами, ни праэлементами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$). Определим функцию $h : \omega \to \mathrm{HF}(\underline{\omega})$. Для каждого $n \in \omega$, полагаем

$$h(n) = \begin{cases} (n_1)^*, & \text{если } n = c(0, n_1), \\ \{h(n_1)\}, & \text{если } n = c(1, n_1), \\ h(n_1) \cup h(n_2), & \text{если } n = c(2, c(n_1, n_2)), l(n_1) \cdot l(n_2) > 0, \text{ и } n_1 < n_2 \\ \varnothing, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1}$$

где $c(n,m) = \frac{(n+m)^2+3n+m}{2}$ — канторовская биекция, а функции $l(n)$ и $r(n)$ определяются по ней стандартным образом. Из определения непосредственно следует, что h является нумерацией $\mathrm{HF}(\underline{\omega})$, а так как ω — Δ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то, в терминах [9], h является $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-конструктивизацией $\mathbb{HF}(\underline{\omega})$. Таким образом, $\mathbb{HF}(\underline{\omega})$ эффективно интерпретируется в любом допустимом множестве, и наличие некоторой такой интерпретации будет предполагаться в дальнейшем.

Пусть $\Phi(x,\overline{m})$ — Δ_0-формула сигнатуры σ' с набором параметров $\overline{m}$ из M. Для всякого $n \in \omega$ определим множество

$$\mathrm{H}_n \rightleftharpoons \{\varkappa \in \mathrm{HF}(\underline{n}) \mid \mathrm{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists x_0 \ldots \exists x_{n-1} (\Phi(x,\overline{m}))^x_{t_\varkappa(\bar{x})}\},$$

и положим $\mathrm{H} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{H}_n$. Имеет место следующая

Лемма 3. Множество H является Δ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть $\overline{\mathrm{H}}_n \rightleftharpoons \mathrm{HF}(\underline{n}) \setminus \mathrm{H}_n$, $\overline{\mathrm{H}} \rightleftharpoons \mathrm{HF}(\underline{\omega}) \setminus \mathrm{H}$; тогда $\overline{\mathrm{H}} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{\mathrm{H}}_n$. Поэтому достаточно показать, что H_n является Δ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Пользуясь леммой 1, по формуле Φ и элементу $\varkappa$ эффективно в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ находим формулу $\Psi_\varkappa(\bar{x},\overline{m})$ сигнатуры σ, для которой

$$\varkappa \in \mathrm{H}_n \iff \mathfrak{M} \models \exists x_0 \ldots \exists x_{n-1}\, \Psi_\varkappa(\bar{x},\overline{m}).$$

В силу квазирегулярности, по формуле $\exists\bar{x}\, \Psi_\varkappa(\bar{x},\bar{y})$ эффективно в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ находится эквивалентная ей Σ-формула $\Theta_\varkappa(\overline{y})$. Таким образом,

$$\varkappa \in \mathrm{H}_n \iff \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Sigma\text{-}\mathrm{Sat}\big([\Theta_\varkappa],\overline{m}\big).$$

Случай $\varkappa \in \overline{\mathrm{H}}_n$ рассматривается аналогично. □

Итак, пусть $R \subseteq \mathrm{HF}(M)\times\mathrm{HF}(M)$ — произвольный Σ-предикат. Не нарушая общности, можно считать, что предикат $R(x,y)$ определяется формулой $\exists z\, \Phi(x,y,z,\overline{m})$, где $\Phi(x,y,z,\overline{m})$ — Δ_0-формула с параметрами $\overline{m}$ из M.

Очевидно, что $\mathrm{Pr}_1(R)$ также является Σ-предикатом. В самом деле, рассмотрим Δ_0-формулу

$$\Psi(x,t,\overline{m}) \rightleftharpoons \exists u \in t\ \exists v \in t\ \exists y \in u\ \exists z \in v\ \big(t = \langle y,z\rangle \wedge \Phi(x,y,z,\overline{m})\big).$$

Очевидно, что $x \in \mathrm{Pr}_1(R) \iff \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists t\, \Psi(x,t,\overline{m})$.

Для любого $a \in \mathrm{HF}(M)$ найдутся такие $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathrm{HF}(\underline{n})$, и элементы $a_0,\ldots,a_{n-1} \in M$, что $a = \varkappa(\bar{a})$. (Именно в этом месте доказательства предполагается, что набор $\bar{a}$ является (каким-либо образом) упорядоченным, однако выбор упорядочения не имеет значения вследствие структурности скулемовского обогащения.) Пусть $x^* \in \mathrm{HF}(\mathfrak{M})$, $x^* = \varkappa_0(\bar{x})$, где $\varkappa_0 \in \mathrm{HF}(\underline{l})$, $\bar{x} = \langle x_0,\ldots,x_{l-1}\rangle \in M^l$. Так же, как и в лемме 3, определим множества

$$H_n \rightleftharpoons \{\ \varkappa \in \mathrm{HF}(\underline{n}) \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists t_0 \ldots \exists t_{n-1} (\Psi(x^*,t,\overline{m}))^t_{t_\varkappa(\bar{t})}\}$$

для всех $n \in \omega$, и положим $\mathrm{H} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{H}_n$.

Если $x^* \in \mathrm{Pr}_1(R)$, то множество $\big\{t \bigm| \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(x^*,t,\overline{m})\big\}$ непусто; следовательно, непусто и множество H. В этом случае однозначно определяется элемент $\varkappa_1 \in \mathrm{H}$, являющийся минимальным в смысле определенной ранее нумерации h. Иными словами, $\varkappa_1$ выбирается удовлетворяющим условию

$$\exists k\Big((k \in \omega) \wedge \big(\varkappa_1 = h(k)\big) \wedge (\varkappa_1 \in \mathrm{H}) \wedge \forall k' < k\big(h(k') \notin \mathrm{H}\big)\Big).$$

Из леммы 3 следует, что это условие определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ некоторой Σ-формулой $\Psi_1(\varkappa_1,x^*,\overline{m})$.

Пусть $\varkappa_1 \in \mathrm{HF}(\underline{n})$. Рассмотрим множество

$$T = \Big\{\langle t_0,\ldots,t_{n-1}\rangle \in M^n \Bigm| \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(x^*,t,\overline{m})^t_{\varkappa_1(\bar{t})}\Big\}.$$

По лемме 1, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ можно эффективно построить формулу $\Theta(\bar{x},\bar{t},\bar{y})$ сигнатуры σ такую, что, для любого означивания $\gamma\ \{\bar{x},\bar{t}\} \to M$,

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(x,t,\overline{m})^{x,\ \ \ t}_{\varkappa_0(\bar{x}),\ \varkappa_1(\bar{t})}[\gamma] \iff \mathfrak{M} \models \Theta(\bar{x},\bar{t},\overline{m})[\gamma].$$

Вследствие леммы 2, по формуле Θ эффективно строится Σ-формула $\Theta^*(\bar{x},\bar{t},\overline{m})$, выделяющая из множества T единственный элемент $\overline{t^*}$.

Элемент $t^* \rightleftharpoons \varkappa_1(\overline{t^*})$ удовлетворяет формуле $\Psi(x^*, t^*, \overline{m})$, поэтому он имеет вид $t^* = \langle y^*, z^* \rangle$, причем $\langle x^*, y^* \rangle \in E$. Полагаем, по определению, $F(x^*) \rightleftharpoons y^*$.

Искомая Σ-функция f определяется следующим образом: полагаем $f(x^*) = y^*$, если

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists t^* \exists z^* \exists \varkappa_0 \exists \varkappa_1 \big((t^* = \langle y^*, z^* \rangle) \wedge \Psi_1(\varkappa_1, x^*, \overline{m}) \wedge$$

$$\wedge \Sigma\text{-}Sat([\exists x_0 \ldots \exists x_{l-1} \exists t_0 \ldots \exists t_{n-1} (x^* = \varkappa_0(\bar{x}) \wedge$$

$$\wedge t^* = \varkappa_1(\bar{t}) \wedge \Theta^*(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}))], \overline{m})\big).$$

$\square$

Одним из важных следствий данного критерия является следующее утверждение.

Предложение 2 ([2])**.** Существуют структурные скулемовские обогащения $\mathbb{R}^S$ и $(\mathbb{Q}_p)^S$ для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$, соответственно, для которых $\mathbb{R}^S \equiv_{s\Sigma} \mathbb{R}$ и $(\mathbb{Q}_p)^S \equiv_{s\Sigma} \mathbb{Q}_p$.

Следствие 2 ([2], [19] для HW($\mathbb{R}$))**.** Допустимые множества $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{HF}(\mathbb{Q}_p)$ обладают свойством униформизации.

Еще одним следствием сформулированных выше результатов, основанных на свойствах $s\Sigma$-сводимости, является приведенное ниже достаточное условие "эквивалентности" допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и надстройки Московакиса над $\mathfrak{M}$ [10, 11].

Предложение 3. Пусть квазирегулярная структура $\mathfrak{M}$ такова, что, для некоторого ее скулемовского обогащения $\mathfrak{M}^S$ справедливо $\mathfrak{M}^S \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M}$. Тогда существует Σ-функция g на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ такая, что $\mathrm{dom}(g) = \{a \in HF(M) \,|\, \mathrm{rank}(a) = 1\}$, $\mathrm{rng}(g) \subseteq M^{<\omega}$, причем, для любых различных $m_1, \ldots, m_n \in M$,

$$g(\{m_1, \ldots, m_n\}) = \langle m_{i_1}, \ldots, m_{i_n} \rangle$$

для некоторых различных $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Пусть $a = \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$, причем $m_i \neq m_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим формулу

$$\varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_n) = ((x_0 = x_1) \vee \ldots \vee (x_0 = x_n)).$$

Очевидно, что формулы $\varphi_0(x_0, x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)})$ эквивалентны для любой подстановки $\rho \in S_n$. Поэтому для скулемовской Σ-функции $f_{\varphi_0}(x_1, \ldots, x_n)$ выполнено равенство $f_{\varphi_0}(\overline{m}) = f_{\varphi_0}(\rho(\overline{m}))$, для любой подстановки $\rho \in S_n$. Пусть $f_{\varphi_0}(\overline{m}) = m_{i_1}$.

Далее, рассмотрим Σ-формулу от праэлементов

$$\Phi_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons (\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (x_0 \neq f_{\varphi_0}(x_1, \ldots, x_n)).$$

По геделевскому номеру этой формулы эффективно определяется вычислимая дизъюнкция $\vee_{j\in\omega}\psi_j(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $\exists$-формул сигнатуры σ, эквивалентная (в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$) формуле $\Phi_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Пусть

$$j_0 = \mu j(\mathfrak{M} \models \exists x_0 \psi_j(x_0, \overline{m})).$$

Вследствие квазирегулярности, j_0 определяется по $\overline{m}$ с помощью некоторой Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Полагаем

$$\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_{j_0}(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

определяем $f_{\varphi_1}(\overline{m}) = m_{i_2}$, и так далее. $\square$

Предложение 4. Пусть квазирегулярная структура $\mathfrak{M}$ такова, что, для некоторого ее структурного скулемовского обогащения $\mathfrak{M}^S$, справедливо $\mathfrak{M}^S \equiv_{s\Sigma} \mathfrak{M}$. Тогда существует инъективная Σ-функция f на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ такая, что $\mathrm{dom}(f) = HF(M)$ и $\mathrm{rng}(f) \subseteq \omega \times M^{<\omega}$.

Доказательство. Пусть $a \in HF(M)$. Функция $\mathrm{sp}(a) = M \cap \mathrm{TC}(a)$ является Σ-функцией на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Поэтому натуральное число

$$k(a) = \mu k\,(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models ((h(k)(g(\mathrm{sp}(a))) = a)),$$

вследствие квазирегулярности, определяется с помощью некоторой Σ-функции на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Полагаем $f(a) = \langle k(a), g(\mathrm{sp}(a))\rangle$. $\square$

Так как основное множество надстройки Московакиса $\mathfrak{M}^*$ является Σ-подмножеством наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, получаем

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — квазирегулярная структура. Если в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедлив принцип униформизации, то наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и надстройка Московакиса $\mathfrak{M}^*$ Σ-эквивалентны в следующем смысле: существуют инъективные Σ-функции f и g в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, для которых $\mathrm{dom}(f) = HF(M)$, $\mathrm{rng}(f) \subseteq M^*$, $\mathrm{dom}(g) = M^*$, $\mathrm{rng}(g) \subseteq HF(M)$.*

Аналогичный результат может быть сформулирован для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и близких к $\mathfrak{M}^*$ по свойствам наследственно списочных надстроек вида $\mathrm{HW}(\mathfrak{M})$ и $\mathrm{HL}(\mathfrak{M})$, определенных, соответственно, в работах [20] и [21].

3 Локальная и глобальная версии $s\Sigma$-сводимости

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $\mathfrak{M}$ — структура вычислимой предикатной сигнатуры σ (считаем зафиксированной ее геделевскую нумерацию γ). Для удобства рассуждений в тексте используются функциональные символы, в частности, для скулемовских функций, однако формально им соответствуют предикатные символы, интерпретируемые как графики этих функций. Если выполнено включение $M \subseteq A$, то атомарная диаграмма

$$D(\mathfrak{M}) = \{\langle n, \overline{m}\rangle \mid n \in \omega, \overline{m} \in M^{<\omega}, \mathfrak{M} \models \gamma(n)(\overline{m})\}$$

структуры $\mathfrak{M}$ также является подмножеством в $\mathbb{A}$ (упорядоченные пары и наборы определяются, как элементы $\mathbb{A}$, стандартным образом по отношению $\in^{\mathbb{A}}$). Как и ранее, в случае, когда допустимое множество является надстройкой над структурой бесконечной вычислимой сигнатуры, предполагается, что сигнатура этого допустимого множества содержит бинарный предикат Sat, интерпретируемый как атомарная диаграмма данной структуры (с зафиксированной геделевской нумерацией сигнатурных символов). В случае конечной сигнатуры это предположение не является необходимым. Предполагается также, что в случае, когда σ содержит выделенный символ бинарного предиката $=$, его интерпретация на $\mathfrak{M}$ является отношением конгруэнтности, которое, вообще говоря, может отличаться от отношения равенства на $\mathbb{A}$ при $M \subseteq A$.

Для формулировки "глобальной" версии $s\Sigma$-сводимости, зафиксируем "достаточно большое" множество праэлементов S. В дальнейшем будем считать, что:

1) все рассматриваемые структуры имеют в качестве основных множеств непустые подмножества $HF(S)$;

2) структура $\mathfrak{A}$ с основным множеством A и атомарной диаграммой $D(\mathfrak{A})$ отождествляется с теоретико-множественным сочленением этих объектов: $\mathfrak{A} = A \oplus D(\mathfrak{A}) = \{\langle a, 0\rangle | a \in A\} \cup \{\langle b, 1\rangle | b \in D(\mathfrak{A})\}$.

Для структуры $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{HF}(\mathcal{S})$ вычислимой предикатной сингатуры σ будем рассматривать структуру $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$ сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{U^1, \in^2, \mathrm{Sat}^2\}$, которая определяется следующим образом: следуя [9], полагаем в качестве носителя этой структуры множество $\cup_{n\in\omega}\mathcal{H}_n(B)$, где

$$\mathcal{H}_0(B) = \{\langle b, 0\rangle | b \in B\},$$

$$\mathcal{H}_{n+1}(B) = \{\langle c, n+1\rangle \mid c \in HF(S), c \subseteq \cup_{k\leqslant n}\mathcal{H}_k(B),$$

$$\forall m \leqslant n \exists k \leqslant n \exists d((m \leqslant k) \wedge (\langle d, k\rangle \in c))\},\ n \in \omega.$$

Полагаем $U^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B})} = \mathcal{H}_0(B)$ и

$$\in^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B})} = \{\langle a, b\rangle \mid \exists n > 0 \exists c (b = \langle c, n\rangle \wedge a \in c)\}.$$

Интерпретация в $\mathfrak{B}$ символов сигнатуры σ, вместе с их зафиксированной нумерацией γ, определяют интерпретацию в структуре $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$ символа Sat следующим образом: $\mathrm{Sat}(a, b)$ истинно в $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $a \in \omega(\in \mathcal{HF}(\mathfrak{B}))$, $b = \langle\langle b_1, 0\rangle, \ldots, \langle b_{n_a}, 0\rangle\rangle(\in \mathcal{HF}(\mathfrak{B}))$, и $\mathfrak{B} \models \gamma(a)(b_1, \ldots, b_{n_m})$.

Класс Σ-формул сигнатуры σ' естественным образом интерпретируется в структуре $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$, причем, аналогично [9], несложно убедиться, что $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$ является моделью KPU и допустимым множеством — наследственно конечной надстройкой над системой $\mathfrak{B}_{\mathsf{o}} \cong \mathfrak{B}$ с носителем $U^{\mathcal{HF}(\mathfrak{B})}$ и атомарной диаграммой, образованной с помощью упорядоченных пар и наборов из $\mathcal{HF}(B)$. В дальнейшем, будем отождествлять системы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_0$, (отметим, что изоморфизм между ними Σ-определим в $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$). Отметим также, что существует равномерная эффективная процедура, сводящая проверку истинности Σ-предложений в $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$ к проверке истинности Σ-предложений в $(\mathbb{HF}(\mathcal{S}), \mathfrak{B})$.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы вычислимых предикатных сигнатур, для которых $A, B \subseteq \mathbb{HF}(\mathcal{S})$. Система $\mathfrak{A}$ *обобщенно $s\Sigma$-сводится* к системе $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если

1) $A \subseteq \mathcal{HF}(B)$ — Σ-определимое подмножество в $\mathcal{HF}(\mathcal{B})$;

2) $D(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{HF}(B)$ — Δ-определимое относительно A подмножество в $\mathcal{HF}(\mathcal{B})$ в том же смысле, что и в определении 1.

Следующее утверждение показывает, что локальная версия определения является частным случаем глобальной.

Предложение 5. Если система $\mathfrak{B}$ такова, что $B \subseteq S$, то, для произвольной системы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда существует система $\mathfrak{A}_0$, изоморфная системе $\mathfrak{A}$ посредством Σ-определимого в $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$ изоморфизма, такая, что $\mathfrak{A}_0 \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$, при указанных выше предположениях. Рассмотрим Σ-определимое в $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$ биективное отображение $f : HF(B) \to \mathcal{HF}(B)$, определяемое Σ-рекурсией: полагаем

1) $f(b) = \langle b, 0\rangle$, для всех $b \in B$;

2) $f(c) = \langle \{f(a) | a \in c\}, rank(c)\rangle$, для всех $c \in HF(B) \setminus B$.

Отображение является изоморфизмом между $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ и $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$, поэтому, для системы $\mathfrak{A}_0$ с основным множеством $f(A)$ и атомарной диаграммой, индуцированной f и $D(\mathfrak{A})$, верно следующее: $\mathfrak{A}_0$ Σ-определима в $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$ теми же формулами, что и система $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Таким образом, $\mathfrak{A} \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}$, и $\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{A}$ посредством Σ-изоморфизма в $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$.

Наоборот, пусть $\mathfrak{A}_0 \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ для некоторой системы $\mathfrak{A}_0$, Σ-изоморфной в $\mathbb{HF}(\mathcal{S})$ системе $\mathfrak{A}$, то есть $A_0 \subseteq \mathcal{HF}(B)$ и $D(\mathfrak{A}_0) \subseteq \mathcal{HF}(B)$ являются, соответственно, Σ-определимым и Δ-определимым подмножествами в $\mathcal{HF}(\mathfrak{B})$. Так как, для $S_0 = B$, имеет место сводимость допустимых множеств $\mathbb{HF}(\mathcal{S}_0) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ в смысле [15], то A_0, а значит и A, Σ-определимы в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, и $D(\mathfrak{A})$, как и $D(\mathfrak{A}_0)$, является Δ-определимым в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ подмножеством. Таким образом, $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}$. □

Определение 4. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы вычислимых предикатных сигнатур. Система $\mathfrak{A}$ $s\Sigma^*$-*сводится* к системе $\mathfrak{B}$ (обозн. $\mathfrak{A} \leqslant^*_{s\Sigma} \mathfrak{B}$), если существуют $n \in \omega$ и системы $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$, такие, что

$$\mathfrak{A} \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{C}_n \leqslant^g_{s\Sigma} \ldots \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{C}_1 \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}.$$

Очевидно, что, определенное как “транзитивное замыкание” отношения обобщенной $s\Sigma$-сводимости, отношение $s\Sigma^*$-сводимости обладает свойством транзитивности.

Предложение 6. Отношение $\leqslant^*_{s\Sigma}$ транзитивно: для любых структур $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, если $\mathfrak{A} \leqslant^*_{s\Sigma} \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leqslant^*_{s\Sigma} \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A} \leqslant^*_{s\Sigma} \mathfrak{C}$.

В отличие от морлизаций и скулемизаций, оператор Σ-скачка не имеет неподвижных точек относительно $s\Sigma$-сводимости. Для локальной версии это свойство было отмечено в [4, 5, 6]. В глобальной версии определение Σ-скачка $\mathfrak{A}'$ структуры $\mathfrak{A}$ модифицируется следующим образом:

$$\mathfrak{A}' = (\mathcal{HF}(A), \Sigma\text{-Sat}_{\mathcal{HF}(\mathfrak{A})}).$$

Предложение 7. Для любой структуры $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} <^*_{s\Sigma} \mathfrak{A}'.$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{A} \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{A}'$. Предположим, что $\mathfrak{A}' \leqslant^*_{s\Sigma} \mathfrak{A}$, то есть

$$\mathfrak{A}' \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}_n \leqslant^g_{s\Sigma} \ldots \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{B}_1 \leqslant^g_{s\Sigma} \mathfrak{A}$$

для некоторых $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$. Так как носителем системы $\mathfrak{A}'$ является множество $\mathcal{HF}(A)$, и, с учетом отождествлений, имеют место включения

$$B_1 \subseteq \mathcal{HF}(A), \ldots, B_{k+1} \subseteq \mathcal{HF}(B_k), \ldots, \mathcal{HF}(A) \subseteq \mathcal{HF}(B_n),$$

то $B_1 = \ldots = B_n = \mathcal{HF}(A)$. Таким образом, из $\mathfrak{A}' \leqslant_{s\Sigma} \mathfrak{B}_n$ следует, что предикат $\Sigma\text{-Sat}_{\mathcal{HF}(\mathfrak{A})}$ является Δ-предикатом в $\mathcal{HF}(\mathcal{HF}(\mathfrak{A}))$. Проверка истинности Σ-формулы в $\mathcal{HF}(\mathcal{HF}(\mathfrak{A}))$ на элементах из $\mathcal{HF}(\mathfrak{A})$ эффективно сводится к проверке истинности Σ-формул на $\mathcal{HF}(\mathfrak{A})$. Таким образом, в $\mathcal{HF}(\mathfrak{A})$ всякое Σ-подмножество является Δ-подмножеством. Это противоречит общему свойству допустимых множеств. $\square$

Список литературы

[1] *А.И. Стукачев*, Теорема об униформизации в HF(R), Материалы XXXIV международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс: Математика”, Новосибирск, НГУ (1996), 83.

[2] *A.I. Stukachev*, Uniformization property in hereditary finite superstructures, Sib. Adv. Math., **7** (1997), 123–132.

[3] *А.И. Стукачев*, Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках, в сб. “Обобщенная определимость и вычислимость”, Вычислительные системы, **161** (1998), 3–14.

[4] *А.И. Стукачев*, Теорема об обращении скачка для полурешеток Σ-степеней, Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 182–190.

[5] *A.I. Stukachev*, A Jump Inversion Theorem for the semilattices of Σ-degrees, Sib. Adv. Math., **20** (2010), 68–74.

[6] *A.I. Stukachev*, Effective model theory: an approach via Σ-definability, Lect. Notes in Logic, **41** (2013), 164–197.

[7] *А.И. Стукачев*, HF-надстройки над структурами бесконечных вычислимых сигнатур, Сибирские электронные математические известия, (to appear).

[8] *J. Barwise*, Admissible Sets and Strucrures, Springer-Velag, Berlin (1975).

[9] *Ю.Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Научная книга, Новосибирск (1996).

[10] *Иван Н. Сосков*, Абстрактна изчислимост и определимост: външен подход (дис. д-р матем. наук), София (2000).

[11] *V. Baleva*, The jump operation for structure degrees, Arch. Math. Logic, **45** (2006), 249–265.

[12] *A.I. Stukachev*, On mass problems of presentability, Lect. Notes Comput. Sci., **3959** (2006), 774–784.

[13] *А.И. Стукачев*, О степенях представимости моделей. I, Алгебра и логика, **46** (2007), 763–788.

[14] *А.И. Стукачев*, О степенях представимости моделей. II, Алгебра и логика, **47** (2008), 108–126.

[15] *А.С. Морозов*, Об отношении Σ-сводимости между допустимыми множествами, Сиб. мат. журнал, **45** (2004), 634–652.

[16] *A.J. Wilkie*, Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function, J. Amer. Math. Soc., **9** (1996), 1051–1094.

[17] *A.J. Macintyre and A.J. Wilkie*, On the decidability of the real exponential field, in Kreiseliana, About and Around Georg Kreisel', A.K. Peters (1996), 441–467.

[18] *L. van den Dries*, Algebraic theories with definable Skolem functions, J. Symbolic Logic, **49** (1984), 625–630.

[19] *М.В. Коровина*, Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой, в сб. “Структурные и алгоритмические свойства вычислимости”, Вычислительные системы, **156** (1996), 24–43.

[20] *Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, and D.I. Sviridenko*, Semantic programming, Inform. Processing, **86** (1986), 1093–1100.

[21] *И.В. Ашаев, В.Я. Беляев, А.Г. Мясников*, Подходы к теории обобщенной вычислимости, Алгебра и логика, **32** (1993), 349–386.

Алексей Ильич СТУКАЧЕВ
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН
просп. акад. Коптюга, 4
Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aistu@math.nsc.ru

УДК 510.5

А.И. Стукачев, О свойствах $s\Sigma$-сводимости.

В работе дано определение $s\Sigma$-сводимости на структурах, описаны некоторые ее свойства, а также приведены в явном виде примеры ее использования. В частности, рассматриваются такие естественные обогащения и расширения структур, как морлизация, скулемизации, и Σ-скачок.

Определен класс квазирегулярных структур как класс неподвижных точек морлизации относительно $s\Sigma$-сводимости, расширяющий классы моделей регулярных теорий и эффективно модельно полных структур. Показано, что HF-надстройка над квазирегулярной структурой является квазирезольвентной, и, следовательно, имеет универсальную Σ-функцию и обладает свойством редукции. Показано, что HF-надстройка над квазирегулярной структурой обладает свойством Σ-униформизации тогда и только тогда, когда эта структура, относительно $s\Sigma$-сводимости, является неподвижной точкой для некоторой своей скулемизации с дополнительным свойством структурности, причем в этом случае HF-надстройка и надстройка Московакиса над данной структурой Σ-эквивалентны. Показано, что операция Σ-скачка (на произвольных структурах) не имеет неподвижных точек относительно $s\Sigma$-сводимости.