ПРОБЛЕМА ЛАХЛАНА

С. В. СУДОПЛАТОВ

НОВОСИБИРСК
2008

УДК 510.6

Судоплатов С. В. Проблема Лахлана. — Новосибирск, 2008.

В книге излагается генерическая конструкция, приводящая к реализации основных характеристик эренфойхтовых теорий, т.е. полных теорий с конечным, но большим единицы, числом попарно неизоморфных счетных моделей. На основе этой конструкции, а также генерической конструкции Хрушовского — Хервига представляется решение проблемы Лахлана о существовании стабильной эренфойхтовой теории.

Для интересующихся математической логикой.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема Лахлана является одной из основных проблем современной абстрактной теории моделей. Сама теория моделей, сформировавшаяся в самостоятельную область в 1950-х годах, находится на стыке математической логики и алгебры. Предметом ее изучения являются синтаксические объекты (теории, представляющие описания реальных объектов) и семантические объекты (алгебраические системы, отражающие взаимосвязь элементов реальных объектов), а также классификация синтаксических объектов по свойствам объектов семантическим, и наоборот. При описании полных теорий (т.е. теорий с недополняемой непротиворечивой информацией в рамках фиксированного языка) возможны существенно различные (неизоморфные) реализации этих теорий алгебраическими системами (моделями) При этом число таких реализаций может быть различным в разных бесконечных мощностях (т.е. с разным бесконечным числом элементов) алгебраических систем. Так возникает функция спектра, отражающая число неизоморфных моделей данной теории в зависимости от мощности моделей, и одна из основных проблем теории моделей — проблема описания всех возможных спектральных функций как для класса всех теорий, так и для различных существенных подклассов этого класса.

Как это ни удивительно, спектральная проблема решена для больших (несчетных) мощностей в классе всех теорий. Здесь основные достижения связаны с работами С. Шелаха [26] и в окончательном виде представлены в работе Б. Харта, Е. Хрушовского и М. Ласковского [106].

Для счетной (минимальной бесконечной) мощности ситуация оказалась значительно сложнее. Во-первых, до сих пор неизвестно, существуют ли теории с несчетным, но не максимальным числом счетных моделей (проблема Воота). Во-вторых, построенные А. Эренфойхтом (см. [199]) первоначальные примеры теорий с конечным, но большим единицы, числом счетных моделей (сейчас такие теории в его честь называются *эренфойхтовыми*) долгое время оставались по существу единственными: все модификации сводились к надстройкам на бесконечные плотные линейно упорядоченные множества. В связи с последним обстоятельством и возникла проблема Лахлана о существовании существенно других (т.е. не имеющих бесконечных линейных порядков) эренфойхтовых теориях. В краткой формулировке *проблема Лахлана* звучит так: определить, существует ли стабильная эренфойхтова теория.

Эта проблема была частично решена самим А. Лахланом [141], опубликовавшим в 1973 году доказательство отсутствия эренфойхтовых теорий в классе суперстабильных теорий, который является важным подклассом класса стабильных теорий. Долгое время предполагалось, что это утверждение верно и для стабильных теорий, и в литературе наряду с проблемой Лахлана называлось *гипотезой Лахлана* (см., например, [27], с. 202). Гипотеза Лахлана частично подтверждалась для многих подклассов класса стабильных теорий в работах Д. Ласкара [143], С. Шелаха [26], А. Пилая [163], [167], [169], [170], Т. Г. Мустафина [37], Ю. Заффе [182], А. Цубои [198], Е. Хрушовского [122], А. А. Викентьева [32], Б. Кима [137], П. Тановича [192], [193]. Вместе с тем происходила наработка структурных свойств, которыми должен обладать контрпример, если таковой существует. С этим связаны работы М. Г. Перетятькина [42], [43], М. Бенды [90], Р. Вудроу [205], [206], А. Пилая [164], [165], Б. Омарова [38], А. Цубои [197], С. С. Гончарова, М. Пурмахдиана [34], Б. Хервига [113] и автора. Решение проблемы, а именно доказательство существования стабильной эренфойхтовой теории, стало возможно лишь после появления в 1988 году тонкой конструкции, созданной Е. Хрушовским [121] и примененной для решения многих теоретико-модельных проблем. Сейчас эта известная конструкция называется генерической конструкцией Хрушовского и позволяет "собирать" требуемые модели, исходя из конечных объектов с помощью амальгам.

Другой важной составляющей стала созданная автором теория полигонометрий групп [190], [191] обобщающая классические тригонометрии. Класс полигонометрий групп оказался удобным и геометрически наглядным полигоном, позволившим реализовать многие структурные свойства стабильных эренфойхтовых теорий. Вместе с тем сейчас, когда стал понятен общий механизм построения эренфойхтовых теорий, явное описание неявно присутствующего в конструкции полигонометрического аппарата представляется избыточным, и поэтому как сама полигонометрическая теория, так и ее применения в книге не отражены.

Для построения стабильных эренфойхтовых теорий была привлечена тонкая модификация конструкции Хрушовского, предложенная Б. Хервигом [113] для реализации одного из основных структурных свойств — бесконечного веса. Вместе с тем эта модификация в первоначальном виде оказалась недостаточной, поскольку конструкция Хрушовского — Хервига является семантической и не учитывает возможность появления внешних связей по отношению к данному конечному объекту, являющемуся “кирпичиком” общей конструкции.

Для устранения этого недостатка автором была развита теория синтаксических генерических конструкций [56]. В основе синтаксического построения лежат не конечные объекты, а типы, т.е. описания (возможно и внешние) конечных объектов, которые затем шаг за шагом позволяют сформировать модели требуемых теорий.

Использование указанного выше аппарата и позволило построить ряд стабильных эренфойхтовых теорий.

Первоначальная моя работа проходила во время учебы в Новосибирском государственном университете, где работали и продолжают работать первоклассные специалисты по математической логике и алгебре. Появление Сибирской школы алгебры и логики, к которой я отношу и себя, стало возможным с образованием в 1957 году Института математики в Новосибирском Академгородке и приездом в Новосибирск основателя этой школы академика Анатолия Ивановича Мальцева. Сейчас на протяжении уже более тридцати лет эту Школу возглавляет директор Института математики академик Юрий Леонидович Ершов. Постановке задачи и успехам в ее решении я во многом обязан своему научному руководителю, заведующему лабораторией алгебраических систем, профессору Евгению Андреевичу Палютину. У меня было много полезных и плодотворных дискуссий с членом-корреспондентом РАН, заведующим отделом математической логики ИМ СО РАН, деканом механико-математического факультета НГУ, профессором Сергеем Савостьяновичем Гончаровым, с профессором кафедры алгебры и математической логики НГТУ Александром Георгиевичем Пинусом, с постоянными участниками семинара “Теория моделей” ИМ СО РАН к.ф.-м.н. Александром Николаевичем Ряскиным, к.ф-.м.н. Александром Александровичем Викентьевым, к.ф.-м.н. Дмитрием Юрьевичем Власовым, аспирантом Михаилом Андреевичем Русалевевым, с сотрудниками кафедры алгебры и математической логики НГТУ. На семинаре “Теория моделей”, руководимом академиком Юрием Леонидовичем Ершовым и профессором Евгением Андреевичем Палютиным, в течение всей моей научной деятельности я апробировал свои новые результаты перед тем как их выпускать в свет.

Мне помогало очное и заочное общение со многими специалистами по теории моделей Франции, Казахстана, США, Великобритании, Израиля, Японии, Германии, Польши, Чехии, Сербии.

Так получилось, что после обучения в аспирантуре НГУ я с 1990 года уже 17 лет работаю в НГТУ, из них 15 лет — на созданной в 1992 году кафедре алгебры и математической логики, которую с 1992 г. по 2006 г. возглавлял профессор Александр Георгиевич Пинус, сплотивший дружный и плодотворный коллектив. Созданию кафедры (которая с таким названием является в техническом вузе скорее исключением, чем правилом) способствовал бывший ректор НГТУ, профессор Анатолий Сергеевич Востриков и первый проректор (ныне ректор) НГТУ, профессор Николай Васильевич Пустовой. Успешной научной работе помогает доброжелательная научная атмосфера в НГТУ, чтение курсов алгебры, дискретной математики и математической логики, а также возможность издания учебников по читаемым дисциплинам.

С 2005 года по настоящее время я являюсь старшим научным сотрудником лаборатории алгебраических систем Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, и окончательное доведение основных результатов до статей происходило именно здесь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 93-011-1520, 96-01-01675, 99-01-00571, 02-01-00258, 05-01-00411, а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-4787.2006.1.

Я благодарен всем вышеназванным коллегам, а также руководству организаций, при участии которых оказалось возможным осуществить работу, излагаемую в книге.

Сергей Судоплатов

Новосибирск, октябрь 2007 г.

ВВЕДЕНИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Как уже отмечалось в предисловии, одной из основных задач современной теории моделей является решение *спектральной проблемы*, т.е. проблемы описания функций $I(T,\lambda)$ числа попарно неизоморфных моделей теории T в мощности λ для различных классов теорий T. Интерес к этой проблеме вызван прежде всего тем, что для ее решения требуется построение содержательной структурной теории.

Проблема описания функций спектра, а также классов теорий, зависящих от этих функций, привлекала и продолжает привлекать внимание широкой группы специалистов по теории моделей, составляя обширную область исследований. Это отражено в большом количестве работ, среди которых упомянем следующие: книги и диссертации — О. В. Белеградек [1]; С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов [2]; Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин [5]; Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн [6]; Дж. Сакс [9]; Справочная книга по математической логике [10]; Дж. Болдуин [16]; У. Ходжес [22]; А. Пилай [24]; Б. Пуаза [25]; С. Шелах [26]; Ф. Вагнер [27]; статьи — С. С. Гончаров, М. Пурмахдиан [34]; Т. Г. Мустафин [37]; Б. Омаров [38]; Е. А. Палютин [40]; Е. А. Палютин, С. С. Старченко [41]; М. Г. Перетятькин [42], [43]; А. Н. Ряскин [45]; Дж. Болдуин, А. Лахлан [68]; М. Бенда [90]; С. Биклер [93]; Б. Харт, С. Старченко, М. Валериот [105]; Б. Харт, Е. Хрушовский, М. Ласковский [106]; Б. Хервиг, Дж. Ловейс, А. Пилай, П. Танович, Ф. Вагнер [112]; Б. Хервиг [113]; Е. Хрушовский [122]; К. Икеда, А. Пилай, А. Цубои [127]; Б. Хусаинов, А. Нис, Р. Шор [135]; Б. Ким [137]; А. Лахлан [141]; Д. Ласкар [143]; Дж. Ловейс, П. Танович [148]; Л. Лоу, А. Пилай [149]; Л. Майер [151]; Т. Миллар [152]–[155]; М. Морли [157], [158]; А. Пилай [163]–[167], [169], [170]; Р. Рид [179]; Ч. Рыль-Нардзевский [181]; Ю. Заффе [182], [183]; С. Шелах [184]; С. Шелах, Л. Харрингтон, М. Маккай [186];

С. Томас [196]; А. Цубои [197], [198]; П. Танович [192]; Р. Воот [199]; Р. Вудроу [205], [206].

Как уже отмечалось (см. С. Шелах [26]; Б. Харт, Е. Хрушовский, М. Ласковский [106]), спектральная проблема решена в целом для счетных полных теорий в несчетных мощностях λ.

До настоящего времени одной из малоисследованных проблем остается проблема описания числа $I(T,\omega)$ попарно неизоморфных счетных моделей теории T для данных классов полных теорий. В этой связи следует отметить *гипотезу Воота*, согласно которой не существует теории T с условием $\omega < I(T,\omega) < 2^{\omega}$. Эта гипотеза была подтверждена для теорий деревьев (Дж. Стил [189]), унаров (Л.Маркус [150]; А. Миллер [156]), многообразий (Б. Харт, С. Старченко, М. Валериот [105]), для o-минимальных теорий (Л. Майер [151]), для теорий модулей над некоторыми кольцами (В. А. Пунинская [44], [176]; В. А. Пунинская, К. Тоффалори [177]). В классе стабильных теорий гипотеза Воота доказана для ω-стабильных теорий (С. Шелах, Л. Харрингтон, М. Маккай [186]), для различных классов суперстабильных теорий (Е. Р. Байсалов [28], [29]; С. Биклер [93], [94]; Л. Лоу, А. Пилай [149]; Л. Невельский [159], [160], [161]), а также для 1-базируемых теорий с неизолированным типом над конечным множеством, который ортогонален пустому множеству (П. Танович [193]). Предпринимались попытки (см. Р. Найт [139]) построения примеров, опровергающих гипотезу Воота. Однако до настоящего времени проблема остается открытой.

Еще одной интересной гипотезой является *гипотеза Пилая*, согласно которой для счетной теории T условие $\mathrm{dcl}(\varnothing) \models T$ влечет $I(T,\omega) \geq \omega$. А. Пилай [166] доказал эту гипотезу для стабильных теорий, а также установил (см. [163]), что из $\mathrm{dcl}(\varnothing) \models T$ следует $I(T,\omega) \geq 4$. П. Танович [194] показал, что гипотеза Пилая верна для теорий, не имеющих свойства строгого порядка.

В 1959 г. Ч. Рыль-Нардзевский [181] опубликовал свою знаменитую теорему, представляющую синтаксический критерий счетной категоричности теории (т.е. условия $I(T,\omega) = 1$), согласно которому счетная категоричность теории эквивалентна конечности числа n-типов теории для каждого натурального числа n и фиксированного множества свободных переменных. Это означает, что каждая счетно категоричная теория определяется одной характеристикой, а именно, *функцией Рыль-Нардзевского*, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие число типов от n фиксированных свободных переменных.

Большое количество результатов связано с *эренфойхтовыми* теориями, т.е. теориями, имеющими конечное (> 1) число счетных моделей. Р. Воотом [199] установлено, что не существует полных теорий, имеющих ровно две счетные модели. На основе теории плотного линейного порядка А. Эренфойхт [199] построил первоначальные примеры теорий, имеющих ровно n счетных моделей для любого натурального $n \geq 3$. Дальнейшие исследования были связаны с построениями эренфойхтовых теорий, обладающих различными дополнительными свойствами, с нахождением и исследованием структурных свойств эренфойхтовых теорий, а также с нахождением классов полных теорий, не содержащих эренфойхтовых теорий.

М. Г. Перетятькин [42] для каждого $n \geq 3$ построил полную разрешимую теорию, имеющую ровно n счетных моделей, из которых лишь одна конструктивизируема. В работах Б. Омарова [38], М. Г. Перетятькина [43], Т. Миллара [152], [155], С. Томаса [196], Р. Вудроу [206] построены примеры эренфойхтовых теорий, допускающих константные обогащения до теорий с бесконечным числом счетных моделей, а также неэренфойхтовых теорий, некоторые константные обогащения которых являются эренфойхтовыми. Р. Вудроу [205] показал, что в предположении элиминации кванторов и при ограничении сигнатуры на бинарный предикатный символ и константные символы счетные полные теории, имеющие ровно три счетные модели, являются по существу примерами Эренфойхта. А. Пилай [165] установил, что в любой эренфойхтовой теории с малым числом связей интерпретируется бесконечный плотный частичный порядок. С. С. Гончаров и М. Пурмахдиан [34] доказали, что каждая эренфойхтова теория имеет конечный ранг. В работе К. Икеды, А. Пилая, А. Цубоя [127] показано, что в любой почти ω-категоричной теории с тремя счетными моделями интерпретируется плотный линейный порядок. П. Танович [195] установил, что в любой теории с тремя счетными моделями и бесконечным множеством попарно различных констант интерпретируется пример Эренфойхта или пример Перетятькина. Е. Р. Байсалов [30] описал числа счетных моделей o-минимальных теорий (класс o-минимальных теорий включает классические примеры эренфойхтовых теорий). С. Лемп и Т. Слемен [147] установили, что свойство эренфойхтовости Π^1_1-полно. У. Калверт, В. Харизанов, Дж. Найт, С. Миллер [95] описали сложность индексных множеств классической эренфойхтовой теории. Конструктивные модели эренфойхтовых теорий рассмотрены в работах К. Эша и Т. Миллара [67], Г. А. Омаровой [39], Б. Хусаинова, А. Ниса и Р. Шора [135], А. Н. Гаврюшкина [33], разрешимые эренфойхтовы теории — в работах Т. Миллара [153], [154], Р. Рида [179], В. Харизанов [20].

Проблема Лахлана, о решении которой пойдет речь в книге, известна более тридцати лет. В направлении решения этой проблемы для различных подклассов класса стабильных теорий установлено отсутствие теорий T с условием $1 < I(T, \omega) < \omega$. Это отсутствие было доказано для класса несчетно категоричных теорий (Дж. Болдуин, А. Лахлан [68]), для суперстабильных теорий (А. Лахлан [141], Д. Ласкар [143], С. Шелах [184], Ю. Заффе [182], А. Пилай [167]), для теорий с неглавными суперстабильными типами (Т. Г. Мустафин [37]), для стабильных теорий, у которых $\mathrm{dcl}(\varnothing)$ является моделью (А. Пилай [166]), для нормальных теорий (А. Пилай [167]), для слабо нормальных (1-базируемых) теорий (А. Пилай [169], [170]), для теорий, допускающих конечную кодировку (Е. Хрушовский [122]), для объединений псевдо-суперстабильных теорий (А. Цубои [198]), для теорий без плотных цепей ответвляемости (Б. Хервиг, Дж. Ловейс, А. Пилай, П. Танович, Ф. Вагнер [112]). А. Цубои [197] доказал, что любая эренфойхтова теория, представляющаяся в виде счетного объединения ω-категоричных теорий, нестабильна. А. А. Викентьев [32] установил наследственность неэренфойхтовости при расширении неэренфойхтовых формульных ограничений. П. Танович [192] показал, что любая стабильная теория, в которой интерпретируется бесконечное множество попарно различных констант, является неэренфойхтовой. Им же [194] доказано, что если теория T эренфойхтова, то множество $\mathrm{dcl}(\varnothing)$ конечно или теория T имеет свойство строгого порядка.

С развитием теории простых теорий (см. Ф. Вагнер [27]; З. Шатзидакис, А. Пилай [97]; Б. Ким, А. Пилай [136]; Б. Ким [137]; М. Пурмахдиан [175]; С. Шелах [185]) наряду с проблемой Лахлана для стабильных теорий возникла аналогичная проблема для простых теорий: *проблема Лахлана для простых теорий*. Б. Ким [137] обобщил теорему Лахлана (см. А. Лахлан [141]) о суперстабильных теориях и установил, что эренфойхтовы теории не содержатся в классе суперпростых теорий.

При определении числа счетных моделей важную роль играют так называемые *властные* типы, которые всегда присутствуют в эренфойхтовых теориях (см. М. Бенда [90]). По существу, доказательство отсутствия эренфойхтовых теорий в вышеперечисленных классах сводится к тому, что для этих классов доказывается отсутствие теорий с неглавными властными типами. Другие существенные свойства, которыми обладают эренфойхтовы теории — несимметричность отношения полуизолированности на множестве реализаций властных типов, а также бесконечный вес неглавных властных типов в простых теориях (см. А. Пилай [167]; Б. Ким [137]). Начала систематизации структурных свойств эренфойхтовых теорий и их властных типов положены в кандидатской диссертации автора [11].

А. Лахлан [142] доказал, что структура бесконечной псевдоплоскости содержится в моделях любой ω-категоричной стабильной несуперстабильной теории, а А. Пилай [169] получил аналогичный результат для стабильных не 1-базируемых теорий. Таким образом, положительное решение проблемы Лахлана возможно лишь в классе теорий, интерпретирующих псевдоплоскости.

Взаимосвязь типов в теориях во многом определяется предпорядками Рудина — Кейслера (см. М. Рудин [180]). Эти предпорядки имеют конечное число классов эквивалентности для эренфойхтовых теорий. В работах Д. Ласкара [143]–[145] проведено исследование различных видов предпорядков Рудина–Кейслера и показано, что любому властному типу соответствует наибольший класс эквивалентности по предпорядку Рудина–Кейслера.

В 1988 г. Е. Хрушовский [125] с помощью модификации генерической *конструкции Йонсона–Фраисé* (см. Р. Фраисé [102], [19]; Б. Йонсон [132], [133];) опроверг гипотезу Зильбера, построив примеры сильно минимальных не локально модулярных теорий, в которых не интерпретируется группа. Его оригинальная конструкция, послужившая основой для построения соответствующего примера, а также для последующего решения других известных теоретико-модельных проблем, стимулировала интенсивное изучение как самой *конструкции Хрушовского* и ее различных (в широком смысле) модификаций, способных создавать "генерические" теории с заданными свойствами (см. Дж. Болдуин [17], [69], [70], [71], [81], [82]; А. С. Колесников [23]; А. Хассон [21], [107], [108], [111]; Дж. Болдуин, С. Шелах [74]; Дж. Болдуин, К. Холланд [76], [77], [79]; А. Баудиш [83], [84]; А. Баудиш, А. Мартин-Пизарро, М. Циглер [88]–[87]; М. де Бонис, А. Несин [91]; О. Шапюи, Е. Хрушовский , П. Куаран, Б. Пуаза [96]; Д. Эванс [98], [100], [101]; Д. Эванс, М. Пантано [99];

А. Хассон, М. Хилс [109]; А. Хассон, Е. Хрушовский [110]; Б. Хервиг [113], [114], [115]; Б. Хервиг, Д. Ласкар [116]; К. Холланд [117], [118]; Е. Хрушовский [121], [123], [124]; Е. Хрушовский, Б. И. Зильбер [126]; К. Икеда [128], [129]; А. А. Иванов [131]; А. Кехрис, К. Розендаль [134]; Б. Ким, А. С. Колесников, А. Цубои [138]; Н. Питфилд, Б. И. Зильбер [162]; А. Пилай, А. Цубои [171]; Б. Пуаза [172], [173]; С. Шелах [187]; С. Солецкий [188]; В. В. Вербовский [200]; В. В. Вербовский, И. Йонеда [201]; А. М. Вершик [202]; А. Виллавесес, П. Замбрано [203]; И. Йонеда [207]; М. Циглер [208]; Б. И. Зильбер [209], [210], [211]), так и аксиоматических основ, позволяющих определить границы применимости этой конструкции (см. А. Бонато [18]; Р. Арефьев, Дж. Болдуин, М. Мазукко [66]; Дж. Болдуин [73]–[80]; Дж. Болдуин, Н. Ши [72]; А. Баудиш [85]; З. Шатзидакис, А. Пилай [97]; Д. Эванс [98]; Дж. Гуд [103]; К. Холланд [119]; К. Икеда, А. Пилай, Х. Кикио А. Цубои, [130]; Д. Куэкер, М. Ласковский [140]; М. Ласковский [146]; Б. Пуаза [174]; М. Пурмахдиан [175]; Р. Раяни [178]; Ф. Вагнер [204]).

Применительно к проблеме Лахлана Б. Хервиг [113] показал плодотворность конструкции Хрушовского, построив на ее основе малую стабильную теорию с типом, имеющим бесконечный вес.

Перейдем к изложению результатов пяти основных разделов книги.

Первая глава начинается (параграф 1.1) с синтаксической характеризации класса полных теорий с конечным числом счетных моделей на основе предпорядков Рудина — Кейслера и функций распределения числа предельных моделей. Основная часть этой характеризации распространяется на класс эренфойхтовых теорий. В параграфе 1.2 определяются основные виды несущественных совмещений и раскрасок моделей, использующиеся в дальнейшем как для описания промежуточных конструкций, так и для решения проблемы Лахлана. В параграфе 1.3 определяется понятие ти́повой редуцированности, согласно которой не меняется структура типа предикатной теории при переходе от насыщенной структуры к ограничению на множество реализаций типа; показывается, что свойство ти́повой редуцированности не выполняется в стабильных эренфойхтовых теориях; строится пример, реализующий отсутствие ти́повой редуцированности в классе стабильных теорий. В параграфе 1.4 определяется понятие властного орграфа, который наряду с властным типом всегда локально присутствует в эренфойхтовых структурах; устанавливается связь властных орграфов с властными типами, всегда присутствующими в эренфойхтовых структурах и исследуются свойства структур с властными графами. Результаты, представленные в первой главе, опубликованы в работах [46]–[50], [52].

Во второй главе описываются ставшие уже классическими семантические генерические конструкции (параграф 2.1); применяемые для решения проблемы Лахлана синтаксические генерические конструкции, обобщающие конструкции семантические (параграф 2.2); свойства различных классов синтаксических генерических конструкций (параграфы 2.3 — 2.5), а также исследуются различные виды слияний генерических конструкций, также применяемые для построения искомых эренфойхтовых теорий (параграф 2.6). Основные результаты, представленные во второй главе, изложены в работах [56], [60].

В третьей главе на основе синтаксической генерической конструкции и несущественной упорядоченной раскраски бесконтурного орграфа строится пример *нестабильного* генерического властного орграфа, имеющего неограниченные длины кратчайших маршрутов и допускающего обогащение до структуры неглавного властного типа (параграф 3.1). Затем на основе генерического властного орграфа строятся теории с властными типами (параграф 3.2), генерические эренфойхтовы теории с тремя счетными моделями (параграф 3.3), а также приводится модификация генерической конструкции, позволяющая реализовать всевозможные характеристики эренфойхтовых теорий по предпорядкам Рудина — Кейслера и функциям распределения числа предельных моделей (параграф 3.4). В параграфе 3.5 эти характеристики распространяются на произвольные малые теории с конечными предпорядками Рудина — Кейслера по модулю гипотезы Воота. В параграфе 3.6 приводится описание предпорядков Рудина — Кейслера в малых теориях, а в параграфе 3.7 — модификации генерической конструкции эренфойхтовых теорий, основанные на неплотных структурах властных орграфов, а также на структурах властных типов, не имеющих властных орграфов. Основные результаты третьей главы представлены в работах [51], [55], [63], [64]. Первые три главы, за исключением параграфа 2.6, составляют первую главу докторской диссертации автора [12].

В четвертой главе на основе генерической конструкции Хрушовского — Хервига с предранговыми функциями в три этапа строятся примеры стабильных генерических властных орграфов. Сначала генерическая конструкция переносится на двудольные орграфы с цветными дугами (параграф 4.1), затем с двудольных цветных орграфов — на безразвилочные орграфы (параграф 4.2), и, наконец, с безразвилочных — на властные орграфы (параграф 4.3). В параграфе 4.4 объясняется недостаток упрощенной конструкции эренфойхтовых теорий из главы 3, которая в силу особенности конструкции помимо нестабильности структуры властного орграфа порождает формульную нестабильность через ти́повую нестабильность. В параграфе 4.5 описываются особенности генерической конструкции, позволяющей строить стабильные эренфойхтовы теории. В параграфах 4.6 — 4.9 на основе стабильных генерических властных орграфов с помощью слияний Хрушовского генерических конструкций властных орграфов с генерическими конструкциями счетного семейства неорграфов строятся искомые стабильные эренфойхтовы теории со всевозможными предпорядками Рудина — Кейслера и функциями распределения числа предельных моделей. Тем самым, в частности, устанавливается существование стабильных эренфойхтовых теорий, что решает проблему Лахлана. Результаты четвертой главы изложены в работах [53], [54], [57]–[61].

В пятой, заключительной главе рассматривается семейство гиперграфов простых моделей произвольной малой теории и представляется механизм структурного описания моделей теории по этим семействам. Тем самым обосновывается, в частности, ключевая роль теоретико-графовых конструкций в построении приводимых в книге примеров эренфойхтовых теорий. Кроме того, обобщаются результаты предыдущих глав на класс всех малых теорий. Результаты пятой главы содержатся в работах [62], [65].

В дальнейшем изложении мы будем использовать обозначения и терминологию:

— по теории моделей из Справочной книги по математической логике [10] и книги С. В. Судоплатова, Е. В. Овчинниковой [14] (см. также книги С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов [2]; Ю. Л. Ершов [4]; Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин [5]; Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн [6]; Дж. Сакс [9]; Дж. Болдуин [16]; У. Ходжес [22]; А. Пилай [24]; Б. Пуаза [25]; С. Шелах [26]; Ф. Вагнер [27]);

— терминологию по теории графов из книги С. В. Судоплатова, Е. В. Овчинниковой [13] (см. также книги [7]; О. Оре [8]; Ф. Харари [15]).

Г л а в а 1

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЭРЕНФОЙХТОВОСТИ. СВОЙСТВА ЭРЕНФОЙХТОВЫХ ТЕОРИЙ

§ 1.1. Синтаксическая характеризация класса полных теорий с конечным числом счетных моделей

В этом параграфе будет приведена синтаксическая характеризация класса элементарных полных теорий с конечным числом счетных моделей, которая является аналогом известной теоремы Рыль-Нардзевского [181] о том, что счетная категоричность теории эквивалентна конечному числу n-типов теории для каждого натурального числа n и фиксированного множества свободных переменных. Приводимая характеризация основана на классификации теорий с конечным числом счетных моделей по двум основным характеристикам: предпорядкам Рудина — Кейслера и функциям распределения числа предельных над типами моделей.

Через $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ (возможно с индексами) будут обозначаться бесконечные модели элементарных теорий, через $M, N, \ldots$ — их соответствующие носители. Тип кортежа $\overline{a}$ в модели $\mathcal{M}$ будет обозначаться через $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$, а также через $\mathrm{tp}(\overline{a})$, если из контекста ясно, о какой модели идет речь. Множество всех типов теории T над пустым множеством будет обозначаться через $S(T)$ или $S(\varnothing)$. При рассмотрении множества n-типов теории T это множество будет обозначаться через $S^n(T)$ или $S^n(\varnothing)$

Число попарно неизоморфных моделей теории T, имеющих мощность λ, обозначается через $I(T, \lambda)$. Теория T называется *эренфойхтовой*, если $1 < I(T, \omega) < \omega$.

Если не оговорено противное, всюду в дальнейшем будут рассматриваться лишь полные теории. Дополнительно к этому в настоящем параграфе все рассматриваемые теории будут счетными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [90]. Тип $p(\overline{x}) \in S(T)$ называется *мощным* или *властным* типом теории T, если в любой модели $\mathcal{M}$ теории T, реализующей тип p, реализуется любой тип $q \in S(T)$: $\mathcal{M} \models S(T)$.

Ясно, что наличие властного типа влечет *малость* теории T, т. е. счетность множества $S(T)$, что в свою очередь влечет существование простой модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ над кортежем $\overline{a}$ для любого типа $p \in S(T)$ и любой его реализации $\overline{a}$. Поскольку все простые модели над реализациями типа p изоморфны, эти модели будем часто обозначать через $\mathcal{M}_p$.

Очевидно, условие властности типа $p(\overline{x})$ равносильно тому, что любой тип из $S(T)$ реализуется в модели $\mathcal{M}_p$: $\mathcal{M}_p \models S(T)$. Также очевидно, что в любой ω-категоричной теории T любой тип из $S(T)$ является властным.

Лемма 1.1.1. [90]. *Любая эренфойхтова теория T имеет неглавный властный тип.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда по индукции существует последовательность типов $p_n \in S(\varnothing)$ таких, что $p_n \subset p_{n+1}$ и в $\mathcal{M}_{p_n}$ опускается тип p_{n+1}. Из $\mathcal{M}_{p_m} \not\simeq \mathcal{M}_{p_n}$ при $m \neq n$ вытекает, что $I(T, \omega) \geq \omega$. $\square$

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие *примеры Эренфойхта* [199] теорий T_n, $n \in \omega$, с условиями $I(T_n, \omega) = n \geq 3$.

П р и м е р 1.1.1. Пусть T_n — теория модели $\mathcal{M}^n$, полученной из модели $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ добавлением констант c_k, $k \in \omega$, таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$, а также добавлением одноместных предикатов $P_0, \ldots, P_{n-3}$, образующих разбиение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с условиями

$$\models \forall x, y\, ((x < y) \to \exists z\, ((x < z) \land (z < y) \land P_i(z))),$$

$i = 0, \ldots, n-3$. Теория T_n имеет ровно n попарно неизоморфных счетных моделей:

простую модель $\mathcal{M}^n$ ($\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$);

простые модели $\mathcal{M}^n_i$ над реализациями типов $p_i(x) \in S^1(\varnothing)$, определяемых множествами формул $\{c_k < x \mid k \in \omega\} \cup \{P_i(x)\}$, $i = 0, \ldots, n-3$ ($\lim\limits_{k\to\infty} c_k \in P_i$);

насыщенную модель $\overline{\mathcal{M}}^n$ (предел $\lim\limits_{k\to\infty} c_k$ иррационален). $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [167]. Говорят, что кортеж $\overline{a}$ *полуизолирует* кортеж $\overline{b}$ (над $\varnothing$), если существует формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$ такая, что $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \vdash \mathrm{tp}(\overline{b})$. При этом говорят, что формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ *свидетельствует о полуизолированности* $\overline{b}$ над $\overline{a}$.

Если $p \in S(T)$, то через SI_p обозначим отношение полуизолированности на реализациях типа p:

$$\mathrm{SI}_p = \{(\overline{a}, \overline{b}) \mid \models p(\overline{a}) \wedge p(\overline{b}) \text{ и } \overline{a} \text{ полуизолирует } \overline{b}\}.$$

Заметим, что для любого типа $p \in S(T)$ отношение SI_p образует предпорядок. Действительно, если для реализаций $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ типа p формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ свидетельствует о полуизолированности $\overline{b}$ над $\overline{a}$, формула $\psi(\overline{y}, \overline{z})$ свидетельствует о полуизолированности $\overline{c}$ над $\overline{b}$, то формула $\exists \overline{y}\, (\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \psi(\overline{y}, \overline{z}))$ свидетельствует о полуизолированности $\overline{c}$ над $\overline{a}$.

Предпорядок SI_p называется *предпорядком полуизолированности* на множестве реализаций типа p.

Лемма 1.1.2. [167]. *Если $p \in S(T)$ — неглавный властный тип, то непустое отношение SI_p несимметрично.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. SI_p — отношение эквивалентности. Тогда все реализации типа p в модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$, где $\models p(\overline{a})$, SI_p-эквивалентны, так как $\overline{a}$ полуизолирует любой кортеж элементов из $M_{\overline{a}}$. С другой стороны, по теореме компактности в силу неизолированности типа p существует такой тип $q(\overline{x}, \overline{y}) \in S(T)$, что $p(\overline{x}) \cup p(\overline{y}) \subset q(\overline{x}, \overline{y})$ и $(\overline{a}', \overline{b}') \notin \mathrm{SI}_p$ для любых реализаций $\overline{a}'\hat{\ }\overline{b}'$ типа q. Следовательно, тип q опускается в модели $\mathcal{M}_p$, а это противоречит властности типа p. $\square$

Таким образом, наличие неглавного властного типа $p(\overline{x})$ предполагает существование формулы $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ теории T, $l(\overline{x}) = l(\overline{y})$, такой, что для любой (некоторой) реализации $\overline{a}$ типа p выполняются следующие условия:

1) $\varphi(\overline{a},\overline{y}) \vdash p(\overline{y})$;

2) $\varphi(\overline{x},\overline{a}) \nvdash p(\overline{x})$ и более того, найдется такой кортеж $\overline{b}$, реализующий тип p, что $\models \varphi(\overline{b},\overline{a})$ и $\overline{a}$ не полуизолирует $\overline{b}$.

Любую формулу $\varphi(\overline{x},\overline{y})$, удовлетворяющую условиям 1 и 2, будем называть *формулой, свидетельствующей о несимметричности отношения* SI_p.

В примерах Эренфойхта о несимметричности отношений SI_{p_i} свидетельствует формула $(x < y)$.

В дальнейшем в этом параграфе, если не оговорено противное, мы будем ограничиваться классом малых теорий.

Пусть p и q — типы из $S(T)$. Будем говорить, что тип p *подчиняется* типу q, или *p не превосходит q по предпорядку Рудина — Кейслера* и писать $p \leq_{RK} q$, если $\mathcal{M}_q \models p$, т. е. модель $\mathcal{M}_p$ является элементарной подмоделью модели $\mathcal{M}_q$: $\mathcal{M}_p \preceq \mathcal{M}_q$. При этом будем также говорить, что модель $\mathcal{M}_p$ *подчиняется* модели $\mathcal{M}_q$, или *$\mathcal{M}_p$ не превосходит модели $\mathcal{M}_q$ по предпорядку Рудина — Кейслера* и писать $\mathcal{M}_p \leq_{RK} \mathcal{M}_q$.

Синтаксически условие $p \leq_{RK} q$ (а, значит, и условие $\mathcal{M}_p \leq_{RK} \mathcal{M}_q$) записывается так: существует формула $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ такая, что совместно множество $q(\overline{y}) \cup \{\varphi(\overline{x},\overline{y})\}$ и выполняется $q(\overline{y}) \cup \{\varphi(\overline{x},\overline{y})\} \vdash p(\overline{x})$. Более того, в силу малости теории формула $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ может быть выбрана так, что для любой формулы $\psi(\overline{x},\overline{y})$ из совместности множества $q(\overline{y}) \cup \{\varphi(\overline{x},\overline{y}),\psi(\overline{x},\overline{y})\}$ следует $q(\overline{y}) \cup \{\varphi(\overline{x},\overline{y})\} \vdash \psi(\overline{x},\overline{y})$. При этом формулу $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ будем называть *(q,p)-главной*.

Типы p и q называются *взаимоподчиняемыми*, *взаимореализуемыми* или *эквивалентными по Рудину — Кейслеру* ($p \sim_{RK} q$), если $p \leq_{RK} q$ и $q \leq_{RK} p$. При этом модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ также называются *взаимоподчиняемыми* или *эквивалентными по Рудину — Кейслеру* ($\mathcal{M}_p \sim_{RK} \mathcal{M}_q$).

Очевидно, что отношения подчинения суть предпорядки, а отношения взаимоподчиняемости являются отношениями эквивалентности.

Ясно, что невзаимоподчиняемые модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ неизоморфны. Кроме того неизоморфные модели могут найтись и среди взаимоподчиняемых.

В примерах Эренфойхта модели $\mathcal{M}^n_{p_0},\ldots,\mathcal{M}^n_{p_{n-3}}$ взаимоподчиняемы, но попарно неизоморфны

Синтаксическая характеризация изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ дается следующим предложением.

Предложение 1.1.3. *Для любых типов $p(\overline{x})$ и $q(\overline{y})$ малой теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) *модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ изоморфны;*

(2) *существуют соответственно (p,q)-главная формула $\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x})$ и (q,p)-главная формула $\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})$ такие, что совместно множество*

$$p(\overline{x}) \cup q(\overline{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x}), \varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})\};$$

(3) *существует одновременно (p,q)-главная и (q,p)-главная формула $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ такая, что совместно множество*

$$p(\overline{x}) \cup q(\overline{y}) \cup \{\varphi(\overline{x},\overline{y})\}.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ — простая модель над реализацией $\overline{a}$ типа $p(\overline{x})$, $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ — простая модель над реализацией $\overline{b}$ типа $q(\overline{y})$.

При наличии изоморфизма моделей $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ и $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ существование (p,q)-главной формулы $\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x})$ и (q,p)-главной формулы $\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})$ с условием совместности множества

$$p(\overline{x}) \cup q(\overline{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x}), \varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})\}$$

следует из того, что $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ реализует лишь главные типы над $\overline{a}$, $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ реализует лишь главные типы над $\overline{b}$ и $\mathcal{M}_{\overline{a}} = \mathcal{M}_{\overline{b}'}$ для некоторого кортежа $\overline{b}'$, реализующего тип $q(\overline{y})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что существует (p,q)-главная формула $\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x})$ и (q,p)-главная формула $\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})$ такие, что совместно множество $p(\overline{x}) \cup q(\overline{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x}), \varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})\}$. Установим наличие изоморфизма моделей $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ и $\mathcal{M}_{\overline{b}}$. Из существования (p,q)-главной формулы $\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x})$ следует, что модель $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ можно выбрать как элементарную подмодель модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$. С другой стороны, наличие (q,p)-главной формулы $\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})$ и совместность множества $p(\overline{x}) \cup q(\overline{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x}), \varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})\}$ влекут возможность выбора модели $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ так, что существует элементарное вложение модели $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ в модель $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ с константным выделением кортежа $\overline{a}\hat{\ }\overline{b}$. Поскольку модель $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ элементарно вкладывается в любую модель, константно содержащую $\overline{a}$, модель $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ также элементарно вкладывается в любую модель, константно содержащую $\overline{a}$. В силу изоморфизма любых двух простых моделей модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ и $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ изоморфны.

(2) $\Rightarrow$ (3). При наличии (p,q)-главной формулы $\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x})$ и (q,p)-главной формулы $\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})$, для которых совместно множество

$$p(\overline{x})\cup q(\overline{y})\cup\{\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x}),\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})\},$$

искомой одновременно (p,q)-главной и (q,p)-главной формулой $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ является формула $\varphi_{p,q}(\overline{y},\overline{x})\wedge\varphi_{q,p}(\overline{x},\overline{y})$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) очевидна. $\square$

Обозначим через $\mathrm{RK}(T)$ множество $\mathbf{PM}$ типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$, $p\in S(T)$, с отношением подчинения, индуцированным отношением подчинения $\leq_{RK}$ между моделями $\mathcal{M}_p$: $\mathrm{RK}(T)=\langle\mathbf{PM};\leq_{RK}\rangle$. Будем говорить, что типы изоморфизма $\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2\in\mathbf{PM}$ *взаимоподчиняемы* ($\mathbf{M}_1\sim_{RK}\mathbf{M}_2$), если взаимоподчиняемы их представители.

Очевидно, что предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ имеет наименьший элемент, представляющий собой тип изоморфизма простой модели.

Предложение 1.1.4. *Если* $I(T,\omega)<\omega$, *то* $\mathrm{RK}(T)$ *— конечное предупорядоченное множество, фактор-множество* $\mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$ *которого по отношению взаимоподчинения* $\sim_{RK}$ *образует ч.у.м. с наибольшим элементом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конечность множества $\mathbf{PM}$ очевидна, а наличие наибольшего элемента в $\mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$ следует из существования властного типа, которому подчиняется любой тип из $S(T)$. $\square$

Очевидными являются следующие два замечания.

Замечание 1.1.5. *Теория* T ω*-категорична тогда и только тогда, когда* $|\mathrm{RK}(T)|=1$.

Замечание 1.1.6. *Если* $|\mathrm{RK}(T)|=2$, *то любой неглавный тип является властным.*

В примерах Эренфойхта предупорядоченные множества $\mathrm{RK}(T_n)$ состоят из наименьшего элемента и $(n-2)$-х взаимоподчиняемых элементов, соответствующих моделям $\mathcal{M}^n_{p_0},\ldots,\mathcal{M}^n_{p_{n-3}}$. Таким образом, упорядоченные множества $\mathrm{RK}(T_n)/{\sim_{RK}}$ двухэлементны и линейно упорядочены.

Напомним, что последовательность моделей $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ называется *элементарной цепью*, если $\mathcal{M}_n$ — элементарная подмодель модели $\mathcal{M}_{n+1}$, $n \in \omega$.

Элементарная цепь $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ называется *элементарной над типом* $p \in S(T)$, если $\mathcal{M}_n \simeq \mathcal{M}_p$ для любого $n \in \omega$.

Предложение 1.1.7. *Если $I(T,\omega) < \omega$, то для любой счетной модели $\mathcal{M}$ теории T существует тип $p \in S(T)$ и элементарная цепь $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ над типом p такая, что $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная счетная модель малой теории T. Построим сначала элементарную цепь $\mathfrak{C}$ простых моделей $\mathcal{M}_{\overline{a}_i}$ над кортежами $\overline{a}_i$, $i \in \omega$, такую, что $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathcal{M}_{\overline{a}_i}$. С этой целью перенумеруем все элементы модели $\mathcal{M}$: $M = \{b_k \mid k \in \omega\}$, а также все формулы вида $\varphi(x,\overline{c})$, $\overline{c} \in M$: $\Phi \rightleftharpoons \{\varphi_m(x,\overline{c}_m) \mid m \in \omega\}$. Построение цепи $\mathfrak{C}$ будем осуществлять по индукции. При этом на каждом шаге k будет определена некоторая конечная последовательность кортежей $\overline{a}_0,\ldots,\overline{a}_n$ и с каждым из этих кортежей связаны соответствующие конечные множества X_i^k, $0 \le i \le n$, которые после объединения по всем k при фиксированных i будут образовывать носители моделей $\mathcal{M}_{\overline{a}_i}$. Если кортеж $\overline{a}_i$ до шага k не определен, то множества X_i^l считаются пустыми для всех $l < k$.

На начальном шаге зафиксируем кортеж $\overline{a}_0 \rightleftharpoons \langle b_0\rangle$ и для формулы $\varphi_m(x,b_0)$ из множества Φ, имеющей минимальный номер и удовлетворяющей условию $\mathcal{M} \models \exists x\,\varphi_m(x,b_0)$, найдем реализацию d_m главного полного типа $p(x,b_0)$, содержащего формулу $\varphi_m(x,b_0)$. Положим $X_0^0 \rightleftharpoons \{b_0,d_m\}$.

Предположим, что на шаге индукции k уже найдены кортежи $\overline{a}_0,\ldots,\overline{a}_n$ и сформированы конечные множества $X_0^k,\ldots,X_n^k$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) все элементы кортежа $\overline{a}_i$ содержатся среди элементов кортежа $\overline{a}_{i+1}$, $i < n$, и принадлежат множеству X_i^k;

2) $\{b_0,\ldots,b_k\} \subseteq X_n^k$;

3) $X_i^k \subset X_{i+1}^k$, $i < n-1$;

4) для выбранной на шаге k минимальной по номеру m не рассмотренной ранее формулы $\varphi_m(x,\overline{c}_m)$, содержащей лишь элементы максимального непустого множества X_j^{k-1} и удовлетворяющей условию $\mathcal{M} \models \exists x\,\varphi_m(x,\overline{c}_m)$, найдена реализация $d_m \in M$

главного полного типа $p(x, X_j^{k-1} \cup \{b_k\})$, содержащего формулу $\varphi_m(x, \overline{c}_m)$ и такого, что для любого кортежа $\overline{a}_i$ с условием $\overline{c}_m \in X_i^{k-1}$ и любого кортежа $\overline{d} \in X_i^{k-1} \cup \{d_m\}$ тип $\mathrm{tp}(\overline{d}/\overline{a}_i)$ является главным; эта реализация помещена в минимальное по индексу i множество X_i^k с условием $\overline{c}_m \in X_i^{k-1}$.

На шаге индукции $k+1$ рассмотрим элемент b_{k+1}. Если этот элемент уже попал в множество X_n^k, то последовательность $\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_n$ не расширяется, а множества X_i^{k+1} получаются из множеств X_i^k добавлением элемента d_m в соответствии с условиями 3 и 4 для значения $k+1$ вместо k.

Если $b_{k+1} \notin X_n^k$ и, начиная с некоторого $i_0 \le n$, все типы $\mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}_i)$, $\overline{b} \in X_i^k \cup \{b_{k+1}\}$, являются главными, то снова последовательность $\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_n$ не расширяется, а элемент b_{k+1} добавляется к множеству $X_{i_0}^k$ и ко всем последующим множествам X_i^k, $i_0 \le i \le n$. Затем множества X_i^{k+1} образуются из полученных множеств добавлением элемента d_m в соответствии с условиями 3 и 4 для значения $k+1$ вместо k.

Если некоторый тип $\mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}_n)$, $\overline{b} \in X_n^k \cup \{b_{k+1}\}$, не является главным, то добавляем к последовательности $\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_n$ кортеж $\overline{a}_{n+1}$, состоящий из всех элементов множества $X_n^k \cup \{b_{k+1}\}$. Образуем множества X_i^{k+1}, $0 \le i \le n+1$ добавлением реализации d_m главного полного типа $p(x, X_n^k \cup \{b_{k+1}\})$, содержащего минимальную по номеру m не рассмотренную ранее формулу $\varphi_m(x, \overline{c}_m)$, включающую лишь элементы множества X_n^k и удовлетворяющую условию $\mathcal{M} \models \exists x \varphi_m(x, \overline{c}_m)$, и такого, что для любого кортежа $\overline{a}_i$ с условием $\overline{c}_m \in X_i^k$ и любого кортежа $\overline{d} \in X_i^k \cup \{d_m\}$ тип $\mathrm{tp}(\overline{d}/\overline{a}_i)$ является главным. Эту реализацию добавляем к минимальному по индексу i множеству X_i^k с условием $\overline{c}_m \in X_i^k$ и ко всем последующим множествам X_j^k, $i \le j \le n$. Положим $X_{n+1}^{k+1} \rightleftharpoons X_n^k \cup \{b_{k+1}, d_m\}$.

В силу конструкции множества $X_i \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k \in \omega} X_i^k$ являются носителями простых моделей $\mathcal{M}_{\overline{a}_i}$ над кортежами $\overline{a}_i$. При этом выполняется $\mathcal{M}_{\overline{a}_i} \preccurlyeq \mathcal{M}_{\overline{a}_{i+1}}$ и $\mathcal{M} = \bigcup\limits_i \mathcal{M}_{\overline{a}_i}$. Если число индексов i конечно, модель $\mathcal{M}$ является простой над наибольшим кортежем $\overline{a}_i$ и элементарную цепь моделей $\mathcal{M}_{\overline{a}_i}$ дополняем до счетной цепи, добавляя счетное число раз модель $\mathcal{M}$.

Поскольку $I(T,\omega) < \omega$, из полученной последовательности моделей $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ можно выбрать бесконечную подпоследовательность моделей $(\mathcal{M}_{i_j})_{j\in\omega}$, все элементы которой изоморфны некоторой модели $\mathcal{M}_p$. Эта последовательность является искомой. $\square$

Модель $\mathcal{M}$ называется *предельной над типом* p, если $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ для некоторой элементарной цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ над типом p и $\mathcal{M} \not\simeq \mathcal{M}_p$.

Предложение 1.1.8. *Существует предельная модель над типом p тогда и только тогда, когда для любой (некоторой) реализации $\overline{a}$ типа p существует реализация $\overline{b}$ типа p в модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ и кортеж $\overline{c} \in M_{\overline{a}}$ такие, что $\mathrm{tp}(\overline{c}/\overline{b})$ — неглавный тип.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует предельная над типом p модель $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_n \simeq \mathcal{M}_p$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{\overline{a}}$, $\models p(\overline{a})$, и не существует $\overline{b} \in p(\mathcal{M}_0)$ и $\overline{c} \in M_0$ таких, что $\mathrm{tp}(\overline{c}/\overline{b})$ — неглавный тип. Тогда в моделях $\mathcal{M}_n$ (а, значит, и в модели $\mathcal{M}$) реализуются лишь главные типы над любыми реализациями типа p, лежащими в $\mathcal{M}_n$ (в $\mathcal{M}$). Следовательно, модель $\mathcal{M}$ является простой над реализацией типа p, что противоречит ее предельности.

Обратно, допустим, что для некоторого $\overline{a} \models p$[1] найдутся кортежи $\overline{b} \in p(\mathcal{M}_0)$ и $\overline{c} \in M_0$ такие, что $q(\overline{x}, \overline{b}) = \mathrm{tp}(\overline{c}/\overline{b})$ — неглавный тип. Построим элементарную цепь $(\mathcal{M}_{\overline{a}_n})_{n\in\omega}$ над типом p, удовлетворяющую следующим условиям: $\overline{a}_0 = \overline{b}$, $\overline{a}_1 = \overline{a}$ и $\mathrm{tp}(\overline{a}_{n+1}/\overline{a}_n) = \mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{b})$. Покажем, что модель $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{\overline{a}_n}$ не изоморфна модели $\mathcal{M}_p$. Предположив противное, найдем кортеж $\overline{d} \in p(\mathcal{M}_{\overline{a}_n})$ такой, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\overline{d}}$. Однако по построению модели $\mathcal{M}$ тип $q(\overline{x}, \overline{a}_n)$ опускается в модели $\mathcal{M}_{\overline{d}}$, но в то же время реализуется в модели $\mathcal{M}$, — противоречие. $\square$

Следствие 1.1.9. *Если отношение полуизолированности SI_p на реализациях типа p в модели $\mathcal{M}_p$ несимметрично, то существует предельная над типом p модель.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 1.1.8 достаточно заметить, что если $\overline{a}$ — реализация типа p, то найдется кортеж

[1] Здесь и далее запись $\overline{a} \models p$ используется в качестве переобозначения записи $\models p(\overline{a})$.

$\overline{b} \in p(\mathcal{M}_{\overline{a}})$ такой, что $\overline{b}$ не полуизолирует $\overline{a}$, и, следовательно, $\mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{b})$ — неглавный тип. $\square$

Следствие 1.1.10. *Если $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ — взаимоподчиняющиеся неизоморфные модели, то существует предельная модель над типом p и предельная модель над типом q.*

Доказательство. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ — реализации типа p, $\overline{c}$ — реализация типа q такие, что $\mathcal{M}_{\overline{b}} \prec \mathcal{M}_{\overline{c}} \prec \mathcal{M}_{\overline{a}}$ (которые существуют в силу $\mathcal{M}_p \sim_{RK} \mathcal{M}_q$). Так как $\mathcal{M}_p \not\simeq \mathcal{M}_q$, то по предложению 1.1.3 тип $\mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{c})$ не является главным. Следовательно, по предложению 1.1.8 существует предельная модель над типом p.

Существование предельной модели над типом q доказывается аналогично. $\square$

Предложение 1.1.11. *Если типы p_1 и p_2 взаимоподчиняемы и существует предельная модель над типом p_1, то существует модель, предельная как над типом p_1, так и над типом p_2.*

Доказательство. Построим по индукции элементарную цепь моделей $(\mathcal{M}_{\overline{a}_n})_{n\in\omega}$ такую, что

а) для четных n модели $\mathcal{M}_{\overline{a}_n}$ являются простыми над типом p_1, а для нечетных n — простыми над типом p_2;

б) модель $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{\overline{a}_n}$ не является простой ни над типом p_1, ни над типом p_2.

Рассмотрим существующий по предложению 1.1.8 тип $q(\overline{x}, \overline{a}_0)$, $\overline{a}_0 \models p_1$, не реализуемый в модели $\mathcal{M}_{\overline{a}_0}$, но реализуемый в некоторой модели $\mathcal{M}_{\overline{b}} \succ \mathcal{M}_{\overline{a}_0}$, $\overline{b} \models p_1$. Обозначим через $\mathcal{M}_{\overline{a}_1}$ простую модель над реализацией $\overline{a}_1$ типа p_2, которая является элементарным расширением модели $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ (такое расширение существует в силу взаимоподчиняемости типов p_1 и p_2). В общем случае на четных шагах $2n+2$ расширяем модель $\mathcal{M}_{\overline{a}_{2n+1}}$, $\overline{a}_{2n+1} \models p_2$, до модели $\mathcal{M}_{\overline{a}_{2n+2}}$, $\overline{a}_{2n+2} \models p_1$, в которой реализуется тип $q(\overline{x}, \overline{a}_{2n})$. На нечетных шагах расширяем модель $\mathcal{M}_{\overline{a}_{2n+2}}$ до модели $\mathcal{M}_{\overline{a}_{2n+3}}$, $\overline{a}_{2n+3} \models p_2$. Очевидно, что модель $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{\overline{a}_n}$ является предельной как над типом p_1, так и над типом p_2. $\square$

Предельные модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ над типом p называются *эквивалентными* (пишем $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$), если существуют элементарные цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ и $(\mathcal{N}_n)_{n\in\omega}$ над типом p, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$;

2) существуют константные обогащения $\mathcal{M}'_{n+1} = \langle \mathcal{M}_{n+1}, c\rangle_{c\in M'_n}$ и $\mathcal{N}'_{n+1} = \langle \mathcal{N}_{n+1}, c\rangle_{c\in N'_n}$, $n \in \omega$, $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}'_0 = \mathcal{N}_0$, такие, что $\mathcal{M}'_{n+1} \simeq \mathcal{N}'_{n+1}$, $n \in \omega$.

Очевидным является следующее предложение.

Предложение 1.1.12. *Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — предельные модели над типом p, то $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$.*

Для любого класса $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$, состоящего из типов изоморфизма взаимоподчиняемых моделей $\mathcal{M}_{p_1}, \ldots, \mathcal{M}_{p_n}$, обозначим через $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ число классов эквивалентности моделей, каждая из которых предельна над некоторым типом p_i.

Из предложений 1.1.4, 1.1.7, 1.1.12 и следствия 1.1.10 вытекает

Теорема 1.1.13. *Для любой счетной полной теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) *$I(T, \omega) < \omega$;*

(2) *теория T мала, $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$ и $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) < \omega$ для любого $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$.*

При выполнении условия (1) (*или* (2)) *теория T обладает следующими свойствами:*

(а) $\mathrm{RK}(T)$ *имеет наименьший элемент* $\mathbf{M}_0$ (*тип изоморфизма простой модели*) *и* $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_0}) = 0$*;*

(б) $\mathrm{RK}(T)$ *имеет наибольший* $\sim_{RK}$*-класс* $\widetilde{\mathbf{M}_1}$ (*класс типов изоморфизма всех простых моделей над реализациями властных типов*), *и из* $|\mathrm{RK}(T)| > 1$ *следует* $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_1}) \geq 1$*;*

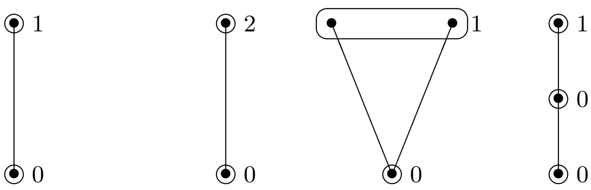
(в) *если* $|\widetilde{\mathbf{M}}| > 1$*, то* $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) \geq 1$.

Более того, справедлива следующая декомпозиционная формула:

$$I(T, \omega) = |\mathrm{RK}(T)| + \sum_{i=0}^{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}|-1} \mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_i}),$$

где $\widetilde{\mathbf{M}_0}, \ldots, \widetilde{\mathbf{M}_{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}|-1}}$ — *все элементы ч.у.м.* $\mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$.

Отметим, что по предложениям 1.1.3 и 1.1.12 условия из пункта 2 теоремы 1.1.13 допускают синтаксическую запись и, тем са-



а *б*

Рис. 1.1

мым, эта теорема является аналогом теоремы Рыль-Нардзевского, дающей синтаксическую характеризацию ω-категоричности.

На рис. 1.1, *а* и *б* представлены возможные варианты диаграмм Хассе предпорядков Рудина — Кейслера $\leq_{RK}$ и значений функций IL распределения числа предельных моделей на классах $\sim_{RK}$-эквивалентности для теорий T с условиями $I(T,\omega)=3$ и $I(T,\omega)=4$, а на рис. 1.2 — соответствующие конфигурации для $I(T,\omega)=5$.

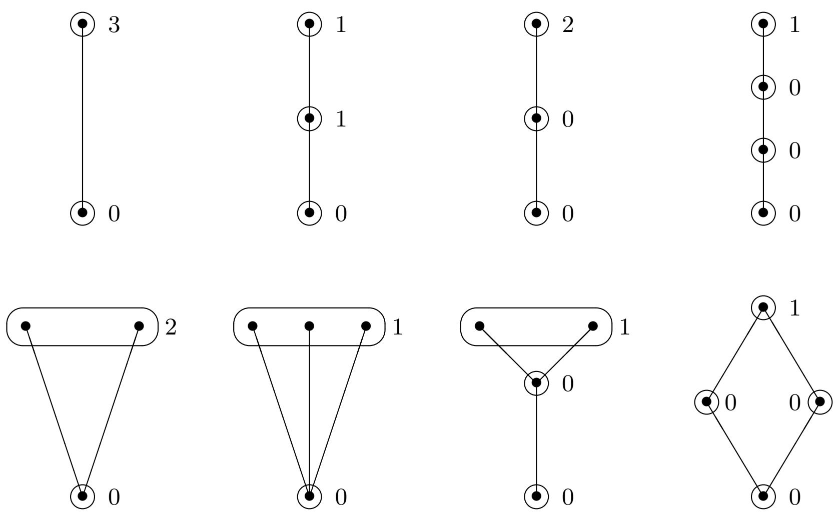


Рис. 1.2

Пусть $p_1, \ldots, p_n \in S(T)$ — типы, простые модели над которыми являются представителями всех типов изоморфизма из конечного предупорядоченного множества $\mathrm{RK}(T)$ теории T. Будем говорить, что теория T обладает *свойством согласованного расширения цепей простых над кортежами моделей* (CEP), если для любого типа p_i любые две предельные модели над типом p_i эквивалентны.

Из предложения 1.1.11 следует, что если теория T удовлетворяет (CEP), то $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) \leq 1$ для любого $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}$. Поскольку предельной над главным типом модели не существует, то при $|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}| = 2$ наличие (CEP) влечет существование единственной с точностью до изоморфизма счетной модели $\mathcal{M}$, тип изоморфизма которой не лежит в $\mathrm{RK}(T)$ (при этом модель $\mathcal{M}$ является насыщенной).

Таким образом, на основании теоремы 1.1.13 справедлива

Теорема 1.1.14. *Пусть теория T удовлетворяет* (CEP). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $I(T,\omega) < \omega$*;*

(2) *теория T мала и* $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$.

При этом справедливо следующее неравенство, которое превращается в равенство при $|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}| \leq 2$*:*

$$I(T,\omega) \leq |\mathrm{RK}(T)| + |\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}| - 1.$$

Из теоремы 1.1.14 непосредственно выводится

Следствие 1.1.15. *Для любой полной теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) $I(T,\omega) = 3$*;*

(2) *теория T мала, обладает* (CEP) *и* $|\mathrm{RK}(T)| = 2$. $\square$

§ 1.2. Несущественные совмещения и раскраски моделей

В первом пункте этого параграфа определяются операции несущественного и почти несущественного совмещения моделей, а также теорий. Устанавливается базируемость (почти) несущественного совмещения теорий, а также сохранение свойств малости и λ-стабильности при переходе к (почти) несущественным совмещениям теорий. Приводится достаточное условие несущественности совмещения теорий при несущественности совмещения их моделей.

Во втором пункте определяются понятия раскраски модели, цветной модели и цветной теории и переносятся результаты первого пункта для (почти) несущественных раскрасок. Приводится пример, показывающий, что несущественность раскраски модели не влечет несущественности раскраски соответствующей теории, а также пример, демонстрирующий отделимость класса теорий с почти несущественными раскрасками от класса теорий с несущественными раскрасками.

В третьем пункте вводится понятие упорядоченной раскраски, исследуется роль таких раскрасок в построении эренфойхтовых теорий, а также приводится пример ω-стабильной теории с упорядоченной раскраской, индуцирующей континуум предельных над данным типом попарно неизоморфных моделей.

1. Совмещения моделей и теорий. Напомним (см. Ю. Заффе, Е. А. Палютин и С. С. Старченко [35]), что теория T называется Δ-*базируемой*, где Δ — некоторое множество формул без параметров, если любая формула теории T эквивалентна в T некоторой булевой комбинации формул из Δ.

Теория T называется *почти* Δ-*базируемой*, где Δ — некоторое множество формул без параметров, если существует функция $f:\omega\to\omega$ такая, что любая формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ теории T эквивалентна в T формуле вида

$$\exists y_1\ldots\exists y_{f(n)}\,\psi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{f(n)}),$$

где $\psi(x_1,\ldots,x_n,\,y_1,\ldots,y_{f(n)})$ — булева комбинация формул из Δ.

Напомним, что через ${}^{\subseteq}S(A)$ обозначается множество всех (полных и неполных) типов над множеством A.

Будем говорить, что тип $q(\overline{x})\in{}^{\subseteq}S(A)$ *изолируется* или *определяется* множеством $\Phi(\overline{x},A)$ формул из q, если $\Phi(\overline{x},A)\vdash q(\overline{x})$.

Доказательство следующих двух утверждений очевидно.

Лемма 1.2.1. *Если тип $q(\overline{x})\in{}^{\subseteq}S(A)$ изолируется множеством $\Phi(\overline{x},A)$, а тип $\Phi(\overline{x},A)$ изолируется множеством $\Psi(\overline{x},A)$, то $q(\overline{x})$ изолируется множеством $\Psi(\overline{x},A)$.*

Лемма 1.2.2. *Если* $\models \Phi(\overline{a}, \overline{b})$*, то тип* $\mathrm{tp}(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ *изолируется множеством* $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$ *тогда и только тогда, когда тип* $\mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$ *изолируется типом* $\Phi(\overline{a}, \overline{y})$ *и тип* $\mathrm{tp}(\overline{a})$ *изолируется множеством* $\left\{\exists\overline{y}\ \left(\bigwedge\limits_i \varphi_i(\overline{x}, \overline{y})\right) \mid \varphi_i(\overline{x}, \overline{y}) \in \Phi(\overline{x}, \overline{y})\right\}$.

Напомним, что счетная модель $\mathcal{M}$ теории T называется *слабо* ω*-универсальной*, если в $\mathcal{M}$ реализуется любой тип над пустым множеством: $\mathcal{M} \models S(T)$.

Пусть Δ — некоторое множество формул теории T, $p(\overline{x})$ — тип теории T, лежащий в $S(T)$. Тип $p(\overline{x})$ называется Δ*-базируемым*, если $p(\overline{x})$ изолируется некоторым множеством формул $\varphi^\delta \in p$, где $\varphi \in \Delta$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Следующая лемма, вытекающая из теоремы компактности, замечена в статье Ю. Заффе, Е. А. Палютина и С. С. Старченко [35].

Лемма 1.2.3. *Теория* T Δ*-базируема тогда и только тогда, когда для любого кортежа* $\overline{a}$ *слабо* ω*-универсальной модели теории* T *тип* $\mathrm{tp}(\overline{a})$ Δ*-базируем.*

Лемма 1.2.4. *Теория* T *почти* Δ*-базируема тогда и только тогда, когда для любого кортежа* $\overline{a}$ *слабо* ω*-универсальной модели* $\mathcal{M}$ *теории* T *найдется кортеж* $\overline{b} \in M$*, содержащий все координаты кортежа* $\overline{a}$ *и такой, что тип* $\mathrm{tp}(\overline{b})$ Δ*-базируем.*

Доказательство. Предположим, что теория T почти Δ-базируема и $\overline{a}$ — кортеж из слабо ω-универсальной модели $\mathcal{M}$ теории T. По условию тип $\mathrm{tp}(\overline{a})$ изолируется некоторым множеством

$$\left\{\exists\overline{y}\ \left(\bigwedge_i \varphi_i(\overline{x}, \overline{y})\right) \mid \varphi_i^{\delta_i}(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta\right\}.$$

Тогда по теореме компактности и слабой ω-универсальности модели $\mathcal{M}$ найдется кортеж $\overline{b} \in M$, расширяющий кортеж $\overline{a}$ и удовлетворяющий всем формулам $\varphi_i^{\delta_i}(\overline{x}, \overline{y})$. По условию совокупность формул $\varphi_i^{\delta_i}(\overline{a}, \overline{y})$ изолирует тип $\mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$. В силу леммы 1.2.2 получаем Δ-базируемость типа $\mathrm{tp}(\overline{b})$.

Предположим теперь, что для любого кортежа $\overline{a}$ слабо ω-универсальной модели $\mathcal{M}$ теории T найдется кортеж $\overline{b} \in M$, расширяющий кортеж $\overline{a}$ и такой, что тип $\mathrm{tp}(\overline{b})$ Δ-базируем. Тогда по теореме компактности найдется функция $f : \omega \to \omega$, ограничивающая минимальные длины кортежей $\overline{b}$ через длины кортежей $\overline{a}$.

С другой стороны, по условию каждая совместная формула $\varphi(\overline{x})$ выводится из некоторой совместной формулы вида $\exists\overline{y}\ \psi(\overline{x},\overline{y})$, где $\psi(\overline{x},\overline{y})$ — конъюнкция формул и отрицаний формул из Δ, $l(\overline{y}) \leq f(l(\overline{x}))$. По теореме компактности получаем, что формула $\varphi(\overline{x})$ эквивалентна дизъюнкции формул вида $\exists\overline{y}\ \psi(\overline{x},\overline{y})$, а, значит, и формуле вида $\exists\overline{y}\,\psi(\overline{x},\overline{y})$, где $\psi(\overline{x},\overline{y})$ — булева комбинация формул из Δ. Таким образом, теория T почти Δ-базируема. $\square$

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — модели некоторых непересекающихся сигнатур Σ_1 и Σ_2 соответственно такие, что $M_1 = M_2$. Модель $\mathcal{M}$ сигнатуры $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ называется *совмещением моделей* $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, если $M = M_1$ и интерпретации сигнатурных символов модели $\mathcal{M}$ совпадают с соответствующими интерпретациями в моделях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. В дальнейшем модель $\mathcal{M}$ будем обозначать через $\mathrm{Comb}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$.

Теория T называется *совмещением теорий* T_1 и T_2 над моделями $\mathcal{M}_i \models T_i$, $i = 1, 2$, если $T = \mathrm{Th}\,(\mathrm{Comb}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2))$.

Пусть $\overline{a}$ — кортеж из модели $\mathrm{Comb}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$. Тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ называется *несущественным совмещением типов* $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a})$ и $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a})$, если $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ изолируется множеством $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a})$. Множество кортежей $\overline{a} \in M$, для которых тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ является несущественным совмещением типов $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a})$ и $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a})$, обозначим через $\mathrm{IECT}_{\mathcal{M}}$.

Совмещение моделей $\mathcal{M} = \mathrm{Comb}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ называется *несущественным* (обозначается $\mathcal{M} = \mathrm{IEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$), если $\mathrm{IECT}_{\mathcal{M}}$ состоит из всех кортежей модели $\mathcal{M}$. Совмещение моделей $\mathcal{M} = \mathrm{Comb}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ называется *почти несущественным* (обозначается $\mathcal{M} = \mathrm{AIEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$), если для любого кортежа $\overline{a} \in M$ существует кортеж $\overline{b} \in \mathrm{IECT}_{\mathcal{M}}$, расширяющий кортеж $\overline{a}$.

Совмещение T теорий T_1 и T_2 называется (*почти*) *несущественным*, если для любой модели $\mathcal{M} \models T$ имеет место равенство $\mathcal{M} = \mathrm{IEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ ($\mathcal{M} = \mathrm{AIEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$), где $\mathcal{M}_i$ — обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1, 2$.

Очевидно, что любое несущественное совмещение теорий почти несущественно.

Лемма 1.2.5. *Пусть T — совмещение теорий T_1 и T_2, $\mathcal{M}$ — слабо ω-универсальная модель теории T. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *совмещение T (почти) несущественно;*

(2) $\mathcal{M} = \mathrm{IEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ ($\mathcal{M} = \mathrm{AIEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$), *где* $\mathcal{M}_i$ — *обеднение модели* $\mathcal{M}$ *до сигнатуры* $\Sigma(T_i)$, $i = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Теорема 1.2.6. *Пусть* T — *совмещение* Δ_i*-базируемых теорий* T_i, $i = 1, 2$. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *совмещение* T *несущественно;*
(2) *теория* T $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$*-базируема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что T — несущественное совмещение теорий T_1 и T_2, $\mathcal{M}$ — слабо ω-универсальная модель теории T. В силу леммы 1.2.3 достаточно показать, что для любого кортежа $\overline{a} \in M$ тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируем. Обозначим через $\mathcal{M}_i$ обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1, 2$. Так как по лемме 1.2.5 выполняется равенство $\mathcal{M} = \mathrm{IEC}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, то тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ изолируется множеством $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a})$. В силу Δ_i-базируемости теории T_i по лемме 1.2.3 тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_i}(\overline{a})$ изолируется некоторым множеством $\Phi_i(\overline{x})$ формул и отрицаний формул из Δ_i, $i = 1, 2$. Тогда по лемме 1.2.1 тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ изолируется множеством $\Phi_1(\overline{x}) \cup \Phi_2(\overline{x})$. Таким образом, тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируем.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть T — $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируемая теория, т. е. каждый тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ кортежа $\overline{a}$ из слабо ω-универсальной модели $\mathcal{M}$ изолируется некоторым множеством $\Phi(\overline{x})$ формул и отрицаний формул из $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Так как $\Sigma(T_1) \cap \Sigma(T_2) = \varnothing$, то $\Phi(\overline{x}) = \Phi_1(\overline{x}) \cup \Phi_2(\overline{x})$, где $\Phi_i(\overline{x})$ — множество формул из $\Phi(\overline{x})$ сигнатуры $\Sigma(T_i)$. При этом по лемме 1.2.3 множество $\Phi_i(\overline{x})$ изолирует тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_i}(\overline{a})$, где $\mathcal{M}_i$ — обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$. Так как $\Phi_i(\overline{x}) \subset \mathrm{tp}_{\mathcal{M}_i}(\overline{a})$, то множество $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a})$ изолирует тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$. Поскольку $\mathcal{M}$ — слабо ω-универсальная модель, по лемме 1.2.5 получаем, что T — несущественное совмещение теорий T_1 и T_2. $\square$

Теорема 1.2.7. *Пусть* T — *совмещение* Δ_i*-базируемых теорий* T_i, $i = 1, 2$. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *совмещение* T *почти несущественно;*
(2) *теория* T *почти* $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$*-базируема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 1.2.6 с использованием леммы 1.2.4 вместо леммы 1.2.3. $\square$

Напомним, что теория T называется *λ-стабильной*, где λ — некоторый бесконечный кардинал, если для любого множества A мощности λ число типов над множеством A не превосходит λ: $|S(A)| \leq \lambda$.

Теорема 1.2.8. *Если T — почти несущественное совмещение теорий T_1 и T_2, то теория T λ-стабильна (мала) тогда и только тогда, когда λ-стабильны (малы) теории T_1 и T_2.*

Доказательство. Поскольку T_1 и T_2 — обеднения теории T, то λ-стабильность (малость) теории T влечет λ-стабильность (малость) теорий T_1 и T_2.

Предположим, что теории T_1 и T_2 λ-стабильны. Рассмотрим модель $\mathcal{M}$ теории T, имеющую мощность λ, и ее элементарное расширение $\mathcal{M}'$ мощности λ, включающее с каждым кортежем $\overline{a}$ расширяющий его кортеж $\overline{b} \in \mathrm{IECT}_{\mathcal{M}'}$. Через $\mathcal{M}'_i$ обозначим обеднение модели $\mathcal{M}'$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1, 2$. Из λ-стабильности теорий T_i следуют неравенства $|S(M_i)| \leq \lambda$. С другой стороны, из почти несущественности совмещения теорий T_1 и T_2 следует

$$|S(M)| \leq |S(M')| \leq |S(M'_1)| \cdot |S(M'_2)| \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

В силу произвольности выбора модели $\mathcal{M}$ теория T λ-стабильна.

Допустим теперь, что теории T_1 и T_2 малы, т. е. $|S(T_1)| = |S(T_2)| = \omega$. Тогда из почти несущественности совмещения теорий T_1 и T_2 получаем, что $|S(T)| \leq |S(T_1)| \cdot |S(T_2)| = \omega \cdot \omega = \omega$, т. е. теория T также является малой. $\square$

Пусть $p(\overline{x})$ — тип из $S(T)$, $\Phi(\overline{x})$ — изолирующее тип $p(\overline{x})$ множество формул $\varphi_n(\overline{x})$, $n \in \omega$, таких, что $\vdash \varphi_{n+1}(\overline{x}) \to \varphi_n(\overline{x})$. Рассмотрим некоторую модель $\mathcal{M}$ теории T. Последовательность $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ кортежей из $\mathcal{M}$ называется *определяющей последовательностью* типа $p(\overline{x})$ (над $\Phi(\overline{x})$), если $\models \varphi_n(\overline{a}_n)$ для любого $n \in \omega$. Определяющая последовательность типа $p(\overline{x})$ называется *сходящейся в модели* $\mathcal{M}$, если тип $p(\overline{x})$ реализуется в модели $\mathcal{M}$. В противном случае определяющая последовательность называется *расходящейся в модели* $\mathcal{M}$.

Ясно, что последовательность кортежей может быть определяющей лишь для одного типа. Поэтому можно не указывать тип, к которому сходится определяющая последовательность.

Если $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ — сходящаяся в $\mathcal{M}$ определяющая последовательность типа $p(\overline{x})$ и $\mathcal{M} \models p(\overline{a})$, то будем говорить, что $\overline{a}$ есть *предел последовательности* $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ в модели $\mathcal{M}$ и этот факт будем обозначать через $\overline{a} \in \left(\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n\right)_{\mathcal{M}}$. При этом множество $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n\right)_{\mathcal{M}}$ есть множество $p(\mathcal{M})$ реализаций типа $p(\overline{x})$ в модели $\mathcal{M}$.

Предложение 1.2.9. *Пусть $\mathcal{M}$ — несущественное совмещение слабо ω-универсальных моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ такое, что любая сходящаяся последовательность $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ в модели $\mathcal{M}_i$ является сходящейся в модели $\mathcal{M}_{2-i}$, $i = 0, 1$, и при этом*

$$\left(\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n\right)_{\mathcal{M}_1} \cap \left(\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n\right)_{\mathcal{M}_2} \neq \varnothing.$$

Тогда $\mathcal{M}$ — слабо ω-универсальная модель и $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *— несущественное совмещение теорий* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1)$ *и* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_2)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный тип $p(\overline{x}) \in S(\varnothing)$ теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ и докажем, что $p(\overline{x})$ реализуется в модели $\mathcal{M}$. Действительно, пусть $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ — определяющая последовательность типа $p(\overline{x})$ в модели $\mathcal{M}$. Тогда последовательность $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ будет определяющей в моделях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Из слабой ω-универсальности моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ следует сходимость этой последовательности как в $\mathcal{M}_1$, так и в $\mathcal{M}_2$. Более того, из условия следует, что найдется кортеж $\overline{a}$ такой, что $\overline{a} \in \left(\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n\right)_{\mathcal{M}_1} \cap \left(\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n\right)_{\mathcal{M}_2}$. Из несущественности совмещения моделей следует, что множество $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a})$ изолирует тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$. Вместе с тем справедливо включение $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(\overline{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\overline{a}) \subset p(\overline{x})$. Следовательно, $p(\overline{x}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ и кортеж $\overline{a}$ является реализацией типа $p(\overline{x})$ в модели $\mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M}$ — слабо ω-универсальная модель.

Несущественность совмещения теорий $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1)$ и $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_2)$ следует из слабой ω-универсальности модели $\mathcal{M}$ и леммы 1.2.5. $\square$

2. Цветные модели. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель. *Раскраской модели* $\mathcal{M}$ называется любая функция $\mathrm{Col}: M \to \lambda \cup \{\infty\}$, где λ — некоторый кардинал, ∞ — символ бесконечности. При этом для любого $a \in M$ значение $\mathrm{Col}(a)$ называется *цветом элемента* a. Пара $\langle \mathcal{M}, \mathrm{Col}\rangle$ называется *цветной моделью*.

В дальнейшем цветная модель $\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle$ будет отождествляться с обогащением модели $\mathcal{M}$ одноместными предикатами $\mathrm{Col}_\mu = \{a \in M \mid \mathrm{Col}(a) = \mu\}$, $\mu < \lambda$. Очевидно, что цветная модель $\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle$ представляет собой совмещение модели $\mathcal{M}$ с *раскраской* ее *носителя*, т. е. с моделью $\langle M,\mathrm{Col}\rangle = \langle M;\mathrm{Col}_\mu\rangle_{\mu<\lambda}$: $\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle = \mathrm{Comb}(\mathcal{M},\langle M,\mathrm{Col}\rangle)$.

Раскраска Col модели $\mathcal{M}$ называется *внутренне несущественной*, если для любого кортежа $\overline{a} \in M$ тип $\mathrm{tp}_{\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle}(\overline{a})$ определяется типом кортежа $\overline{a}$ в модели $\mathcal{M}$, а также цветами элементов кортежа $\overline{a}$.

Очевидно, что внутренняя несущественность раскраски Col модели $\mathcal{M}$ равносильна соотношению $\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle = \mathrm{IEC}(\mathcal{M},\langle M,\mathrm{Col}\rangle)$.

Раскраска Col модели $\mathcal{M}$ называется *внутренне почти несущественной*, если для любого кортежа $\overline{a} \in M$ существует кортеж $\overline{b} \in M$, расширяющий кортеж $\overline{a}$ и такой, что тип $\mathrm{tp}_{\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle}(\overline{b})$ определяется типом кортежа $\overline{b}$ в модели $\mathcal{M}$, а также цветами элементов кортежа $\overline{b}$.

Внутренняя почти несущественность раскраски Col модели $\mathcal{M}$ характеризуется соотношением $\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle = \mathrm{AIEC}(\mathcal{M},\langle M,\mathrm{Col}\rangle)$.

Для любой модели $\mathcal{M}' \models \mathrm{Th}(\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle)$ естественным образом определяется раскраска $\mathrm{Col}' : M' \to \lambda \cup \{\infty\}$ по следующим правилам:

1) $\mathrm{Col}'(a) = \mu$, если $\mathcal{M}' \models \mathrm{Col}_\mu(a)$;

2) $\mathrm{Col}'(a) = \infty$, если $\mathcal{M}' \not\models \mathrm{Col}_\mu(a)$ для любого $\mu < \lambda$.

В дальнейшем модель $\mathcal{M}'$ будет обозначаться через $\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle$, а через $\mathcal{M}'$ будем обозначать обеднение модели $\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle$ до сигнатуры $\Sigma(\mathcal{M})$.

Любое обогащение T' теории T попарно несовместными одноместными предикатами Col_μ, $\mu < \lambda$, называется *цветной теорией*. Очевидно, что любая цветная теория является теорией некоторой цветной модели $\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle$, где $\mathcal{M} \models T$.

Раскраска Col модели $\mathcal{M}$ называется (*почти*) *несущественной*, если для любой модели $\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle$ цветной теории $\mathrm{Th}(\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle)$ соответствующая раскраска Col' внутренне (почти) несущественна.

Следующий пример показывает, что внутренняя несущественность раскраски модели не влечет несущественность раскраски.

П р и м е р 1.2.1. Пусть $\mathcal{M}$ — модель, состоящая из констант $\{c_n^i \mid n \in \omega\}$, $i \in \{0,1,2\}$, и обогащенная подстановкой f, действующей по правилам $f(c_n^0) = c_{2n}^2$, $f(c_{2n}^2) = c_n^0$, $f(c_n^1) = c_{2n+1}^2$, $f(c_{2n+1}^2) = c_n^1$, $n \in \omega$. Рассмотрим раскраску $\mathrm{Col}\colon M \to \{0,1,2\}$, определенную соотношениями $\mathrm{Col}(c_n^i) = i$, $n \in \omega$, $i \in \{0,1,2\}$. Очевидно, любая раскраска модели $\mathcal{M}$ внутренне несущественна, поскольку тип $p(\overline{x})$ любого кортежа $\overline{a} \in M$ изолируется некоторым множеством формул $\{(x_j \approx c_{n_j}^{i_j}) \mid 1 \leq j \leq l(\overline{x})\}$. Вместе с тем раскраска Col' слабо ω-универсальной модели $\langle \mathcal{M}', \mathrm{Col}' \rangle \models \mathrm{Th}(\langle \mathcal{M}, \mathrm{Col} \rangle)$ несущественной не является.

Действительно, рассмотрим элементы $a_k \in M'$ такие, что

$$\models \mathrm{Col}_2(a_k) \wedge \neg(a_k \approx c_n^2) \wedge \exists x_k \, (\mathrm{Col}_k(x_k) \wedge (f(x_k) \approx a_k)),$$

$n \in \omega$, $k = 0,1$. Очевидно, что $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}'}(a_0) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}'}(a_1)$ и $\mathrm{tp}_{\langle M', \mathrm{Col}' \rangle}(a_0) = \mathrm{tp}_{\langle M', \mathrm{Col}' \rangle}(a_1)$, но $\mathrm{tp}_{\langle \mathcal{M}', \mathrm{Col}' \rangle}(a_0) \neq \mathrm{tp}_{\langle \mathcal{M}', \mathrm{Col}' \rangle}(a_1)$, т. е.

$$\langle \mathcal{M}', \mathrm{Col}' \rangle \neq \mathrm{IEC}(\mathcal{M}', \langle M', \mathrm{Col}' \rangle).\square$$

Напомним, что для любого множества A теории T *алгебраическим* (*определимым*) *замыканием* множества A называется объединение множеств решений формул $\varphi(x, \overline{a})$, $\overline{a} \in A$, для которых имеет место $\models \exists^{=n} x \, \varphi(x, \overline{a})$ для некоторого $n \in \omega$ ($\models \exists^{=1} x \, \varphi(x, \overline{a})$). Алгебраическое замыкание множества A обозначается через $\mathrm{acl}(A)$, а определимое замыкание — через $\mathrm{dcl}(A)$.

С помощью следующего утверждения легко строятся примеры внутренне почти несущественных раскрасок, не являющихся внутренне несущественными.

Предложение 1.2.10. *Если в цветной модели* $\langle \mathcal{M}, \mathrm{Col} \rangle$ *существуют кортежи* $\overline{a}$, $\overline{b}$ *и элементы* c, d *такие, что* $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a}\,\hat{}\,c) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{b}\,\hat{}\,d)$, $\mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col} \rangle}(\overline{a}) = \mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col} \rangle}(\overline{b})$, $c \in \mathrm{dcl}(\overline{a})$, $d \in \mathrm{dcl}(\overline{b})$, *но* $\mathrm{Col}(c) \neq \mathrm{Col}(d)$, *то раскраска* Col *не является внутренне несущественной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\mathrm{tp}_{\langle \mathcal{M}, \mathrm{Col} \rangle}(\overline{a}) \neq \mathrm{tp}_{\langle \mathcal{M}, \mathrm{Col} \rangle}(\overline{b})$, поскольку из существования автоморфизма f однородного расширения модели $\langle \mathcal{M}, \mathrm{Col} \rangle$, переводящего $\overline{a}$ в $\overline{b}$, должно следовать $f(c) = d$, что невозможно при $\mathrm{Col}(c) \neq \mathrm{Col}(d)$. Так как $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\overline{b})$ и $\mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col} \rangle}(\overline{a}) = \mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col} \rangle}(\overline{b})$, то $\overline{a}, \overline{b} \notin \mathrm{IECT}_{\mathcal{M}}$. Таким образом, раскраска Col не является внутренне несущественной. $\square$

П р и м е р 1.2.2. Рассмотрим систему $\Gamma = \langle\{a, b, c, d\}; \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}\rangle$ и его внутренне почти несущественную раскраску Col, задаваемую равенствами $\mathrm{Col}(a) = \mathrm{Col}(b) = \mathrm{Col}(c) = 0$, $\mathrm{Col}(d) = 1$. Раскраска Col не является внутренне несущественной, поскольку $\mathrm{tp}_\Gamma(a) = \mathrm{tp}_\Gamma(c)$, но $\mathrm{tp}_{\langle\Gamma,\mathrm{Col}\rangle}(a) \neq \mathrm{tp}_{\langle\Gamma,\mathrm{Col}\rangle}(c)$. $\square$

Заметим, что для любой цветной модели $\langle\mathcal{M}', \mathrm{Col}'\rangle$ теория $\mathrm{Th}(\langle M', \mathrm{Col}'\rangle)$ тотально трансцендентна и Δ_{Col}-базируема, где Δ_{Col} — замыкание относительно подстановок переменных множества $\{(x \approx y)\} \cup \{\mathrm{Col}_\mu(x) \mid \mu < \lambda\}$.

На основании теорем 1.2.6–1.2.8 справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.2.11. *Пусть* Col — *раскраска модели* $\mathcal{M}$ Δ*-базируемой теории* T. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *раскраска* Col (*почти*) *несущественна;*

(2) *теория* $\mathrm{Th}(\langle\mathcal{M}, \mathrm{Col}\rangle)$ (*почти*) $(\Delta \cup \Delta_{\mathrm{Col}})$*-базируема.*

Теорема 1.2.12. *Если* Col — *почти несущественная раскраска модели* $\mathcal{M}$ *мощности* $|\Sigma(\mathcal{M})|+\omega$, *то теория* $\mathrm{Th}(\langle\mathcal{M}, \mathrm{Col}\rangle)$ λ*-стабильна* (*мала*) *тогда и только тогда, когда* λ*-стабильна* (*мала*) *теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

3. Упорядоченные раскраски. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель теории T, $\varphi(x, y)$ — формула теории T. Раскраска $\mathrm{Col} : M \to \lambda \cup \{\infty\}$ (где λ — бесконечный кардинал) называется φ*-упорядоченной*, если выполняются следующие условия:

а) для любых $\mu \leq \nu < \lambda$ существуют элементы $a, b \in M$ такие, что $\models \mathrm{Col}_\mu(a) \wedge \mathrm{Col}_\nu(b) \wedge \varphi(a, b)$;

б) если $\mu < \nu < \lambda$, то не существует элементов $c, d \in M$ такие, что $\models \mathrm{Col}_\mu(c) \wedge \mathrm{Col}_\nu(d) \wedge \varphi(d, c)$.

Напомним, что теория T называется *транзитивной*, если T имеет единственный 1-тип над пустым множеством.

Раскраска Col модели $\mathcal{M}$ называется n*-несущественной*, $n \in \omega\setminus\{0\}$, если $(M')^n \subseteq \mathrm{IECT}_{\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle}$ для любой модели $\langle\mathcal{M}', \mathrm{Col}'\rangle \models \mathrm{Th}(\langle\mathcal{M}, \mathrm{Col}\rangle)$.

Ясно, что любая несущественная раскраска является n-несущественной для любого $n \geq 1$.

Заметим, что если $\mathrm{Col} : M \to \lambda \cup \{\infty\}$ — сюръективная 1-несущественная раскраска модели $\mathcal{M}$ транзитивной теории T, то множество 1-типов теории $\mathrm{Th}(\langle\mathcal{M}, \mathrm{Col}\rangle)$ над $\varnothing$ состоит из типов $p_\mu(x)$, $\mu \in \lambda \cup \{\infty\}$, где $p_\mu(x)$ — тип, изолируемый формулой $\mathrm{Col}_\mu(x)$, $\mu \in \lambda$, а $p_\infty(x)$ — неглавный тип, изолируемый множеством формул $\{\neg\mathrm{Col}_\mu(x) \mid \mu < \lambda\}$.

Отметим, что в примере Эренфойхта теории T_3 с тремя счетными моделями обогащение модели транзитивной теории $\mathrm{Th}(\langle\mathbb{Q};<\rangle)$ константами c_k, $k \in \omega$, можно проинтерпретировать как несущественную раскраску Col, заданную следующими условиями:

$$\mathrm{Col}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a < c_0, \\ 2k+1, & \text{если } a = c_k, \\ 2k+2, & \text{если } c_k < a < c_{k+1}. \end{cases}$$

Легко заметить, что раскраска Col φ-упорядочена, где $\varphi(x,y) \rightleftharpoons x < y$. Кроме того отношение SI_{p_∞} на множестве реализаций властного типа p_∞ несимметрично, о чем свидетельствует формула φ. В примерах Эренфойхта T_n, $n \geq 4$, константные обогащения моделей $\langle\mathbb{Q};<, P_0, \ldots, P_{n-3}\rangle$ также можно рассматривать как цветные модели с несущественными упорядоченными раскрасками.

Укажем достаточные условия того, что φ-упорядоченность 1-несущественной раскраски влечет несимметричность отношения SI_{p_∞} и это свойство выполняется посредством формулы φ.

Предложение 1.2.13. *Пусть $\varphi(x,y)$ — главная (т. е. изолирующая полный тип) формула транзитивной теории T,* Col — *1-несущественная φ-упорядоченная раскраска модели $\mathcal{M}$ теории T такая, что если $\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle \models \mathrm{Th}(\langle\mathcal{M},\mathrm{Col}\rangle)$ и $\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle \models \varphi(a,b)$, то $(a,b) \in \mathrm{IECT}_{\langle\mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle}$. Тогда для любой (некоторой) реализации a типа $p_\infty(x)$ выполняются следующие условия:*

1) *если $\models \varphi(a,b)$, то $\models p_\infty(b)$ и a полуизолирует b;*

2) *если $\models \varphi(a,b)$, то b не полуизолирует a.*

Доказательство. 1. Предположим напротив, что $\models p_\infty(a)$, $\models \varphi(a,b)$ и $\not\models p_\infty(b)$. Тогда для некоторого μ будет совместно множество $\{\neg\mathrm{Col}_\nu(x) \mid \nu < \lambda\} \cup \{\varphi(x,y), \mathrm{Col}_\mu(y)\}$ и, в частности, совместным будет множество $\{\neg\mathrm{Col}_\nu(x) \mid \nu \leq \mu\} \cup \{\varphi(x,y), \mathrm{Col}_\mu(y)\}$. Тогда найдется $\alpha > \mu$ такое, что

$$\models \exists x, y\ (\mathrm{Col}_\mu(y) \wedge \mathrm{Col}_\alpha(x) \wedge \varphi(x,y)),$$

а это противоречит пункту *б*) определения φ-упорядоченности раскраски Col. Таким образом, из $\models \varphi(a,b)$ следует $\models p_\infty(b)$, и, значит, a полуизолирует b.

2. Предположим противное, т. е. $\models p_\infty(a)$, $\models \varphi(a,b)$ и b полуизолирует a. Из условия предложения следует, что формула $\varphi(x,b)$ не может свидетельствовать о полуизолированности элемента a над элементом b. С другой стороны найдется формула $\psi(x,y)$ такая, что $\models \psi(a,b)$ и $\psi(x,b) \vdash p_\infty(x)$. При этом множество $p_\infty(x) \cup p_\infty(y) \cup \{\varphi(x,y) \wedge \psi(x,y)\}$ совместно. В силу теоремы компактности из неглавности типа $p_\infty(x)$ следует совместность множества $p_\infty(x) \cup p_\infty(y) \cup \{\varphi(x,y) \wedge \neg\psi(x,y)\}$. Это означает, что множество $\{\neg\mathrm{Col}_\mu(x) \wedge \neg\mathrm{Col}_\mu(y) \mid \mu < \lambda\} \cup \{\varphi(x,y)\}$ не изолирует полный тип. Последнее противоречит тому, что формула $\varphi(x,y)$ является главной в теории T, а также соотношению $(a,b) \in \mathrm{IECT}_{\langle \mathcal{M}',\mathrm{Col}'\rangle}$ для любых (a,b) с условием $\models \varphi(a,b)$. Таким образом, из $\models \varphi(a,b)$ и $\models p_\infty(a)$ следует, что b не полуизолирует a. $\square$

Заметим, что предложение 1.2.13 остается справедливым, если $\varphi(x,y)$ — дизъюнкция главных формул.

Напомним несколько понятий из теории графов. *Графом* (соответственно *ориентированным графом* или сокращенно *орграфом*, *неориентированным графом* или сокращенно *неорграфом*) называется алгебраическая система $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ с одним (несимметричным, симметричным) двухместным отношением Q. При этом множество X называется множеством *вершин*, а отношение Q — множеством *дуг* графа Γ. *Маршрутом* в графе Γ называется любая непустая последовательность $S = (a_0, \ldots, a_n)$ вершин, для которых выполняется $\Gamma \models Q(a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$. При этом, маршрут S будет также называться (a_0, a_n)-*маршрутом*, а число n — *длиной* маршрута S. *Контуром* в орграфе Γ называется любой (a,a)-маршрут ненулевой длины. Орграф, не имеющий контуров, называется *бесконтурным*. Граф $\langle X; Q\rangle$ называется *связным*, если любые две различные вершины $a, b \in X$ связаны некоторым (a,b)-маршрутом в графе $\langle X; Q \cup Q^{-1}\rangle$. *Циклом* в неорграфе Γ называется любой (a,a)-маршрут $(a_0, \ldots, a_n)$ (в Γ) ненулевой длины такой, что никакая дуга (a_i, a_{i+1}) не повторяется и не совпадает ни с какой дугой (a_{j+1}, a_j) при $a_i \neq a_{i+1}$. Граф $\langle X; Q\rangle$ называется *ациклическим*, если неорграф $\langle X; Q \cup Q^{-1}\rangle$ не имеет циклов.

Следующий пример , построенный на основе найденной независимо А. Пилаем [170] и автором [46] свободной ориентированной псевдоплоскости, показывает, что различные элементарные цепи над одним и тем же типом могут порождать неизоморфные предельные модели и при этом образуется континуум попарно неизоморфных предельных моделей.

П р и м е р 1.2.3. Рассмотрим счетную модель $\mathcal{M}_0$ связного бесконтурного ациклического графа $\langle M_0; Q\rangle$, в котором каждый элемент имеет бесконечное число образов и бесконечное число прообразов. Система $\mathcal{M}_0$ была независимо построена А. Пилаем [170] и автором [46] для реализации несимметричного отношения полуизолированности в классе стабильных теорий. Система $\mathcal{M}_0$ называется *свободной ориентированной псевдоплоскостью*.

Обогатим сигнатуру новыми двухместными предикатами Q_0 и Q_1, образующими разбиение предиката Q со следующим условием: для любого элемента $a \in M_0$ существует бесконечное число образов и бесконечное число прообразов как по Q_0, так и по Q_1. Теперь определим 1-несущественную Q-упорядоченную раскраску $\mathrm{Col}\colon M_0 \to \omega \cup \{\infty\}$ полученной модели так, чтобы каждый элемент цвета n имел

1) для любого $\mu \geq n$ (включая ∞) бесконечное число образов цвета μ как по Q_0, так и по Q_1;

2) для любого $m \leq n$ бесконечное число прообразов цвета m как по Q_0, так и по Q_1.

ω-Стабильность теории $\mathrm{Th}(\langle\langle M_0; Q, Q_0, Q_1\rangle, \mathrm{Col}\rangle)$ следует из ее Δ-базируемости (вытекающей в свою очередь из ацикличности структуры), где Δ — наименьшее замкнутое относительно подстановок переменных множество формул, имеющих не более двух свободных переменных, содержащее формулу $(x \approx y)$ и удовлетворяющее следующему условию: если $\varphi(x,y) \in \Delta$, то $\exists z\ (\varphi(x,z) \wedge Q_i^{\delta_1}(z,y) \wedge \mathrm{Col}_n^{\delta_2}(z)) \in \Delta$, где $\delta_1, \in \{-1,1\}$, $i, \delta_2 \in \{0,1\}$, $Q_i^1(x,y) = Q(x,y)$, $Q_i^{-1}(x,y) = Q(y,x)$, $\mathrm{Col}_n^1(z) = \mathrm{Col}_n(z)$, $\mathrm{Col}_n^0(z) = \neg\mathrm{Col}_n(z)$. При этом счетность числа 1-типов над любым счетным множеством A обеспечивается счетным числом вариантов распределения расстояний от элементов из A до реализаций типов.

В силу ω-стабильности теории $\mathrm{Th}(\langle\langle M_0; Q, Q_0, Q_1\rangle, \mathrm{Col}\rangle)$ существует простая модель $\mathcal{M}_{p_\infty}$ над реализацией типа $p_\infty(x)$. По предложению 1.2.13 отношение SI_{p_∞} несимметрично, о чем свидетельствуют формулы $Q_0(x,y)$ и $Q_1(x,y)$.

Покажем, что существует 2^ω попарно неизоморфных предельных моделей над типом p_∞. С этой целью построим по индукции элементарные цепи $(\mathcal{M}_{\alpha\restriction n})_{n\in\omega}$, $\alpha \in 2^\omega$, над типом p_∞. В качестве модели $\mathcal{M}_{\alpha\restriction 0}$ возьмем любую простую модель над некоторой реализацией $a_{\alpha\restriction 0}$ типа p_∞. Если модели $\mathcal{M}_{\alpha\restriction 0},\ldots,\mathcal{M}_{\alpha\restriction n}$ уже построены и $\mathcal{M}_{\alpha\restriction n}$ — простая модель над реализацией $a_{\alpha\restriction n}$ типа p_∞, то в качестве $\mathcal{M}_{\alpha\restriction n+1}$ возьмем простую модель над реализацией $a_{\alpha\restriction n+1}$ типа p_∞, где $\mathcal{M}_{\alpha\restriction n}\prec\mathcal{M}_{\alpha\restriction n+1}$ и $\models Q_{\alpha(n)}(a_{\alpha\restriction n+1},a_{\alpha\restriction n})$. Обозначим через $\mathcal{M}_\alpha$ модель $\bigcup\limits_{n\in\omega}\mathcal{M}_{\alpha\restriction n}$. Последовательности α и β из 2^ω назовем *эквивалентными*, если существуют $k,m\in\omega$ такие, что $\alpha(k+n)=\beta(m+n)$ для всех $n\in\omega$. Очевидно, что модели $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{M}_\beta$ изоморфны тогда и только тогда, когда α и β эквивалентны. Поскольку каждый класс эквивалентности счетен, имеется 2^ω классов эквивалентности. Выбирая из каждого класса по одной модели, получаем 2^ω попарно неизоморфных предельных моделей над типом p_∞. $\square$

§ 1.3. Ти́повая редуцированность и властные типы

В этом параграфе мы определим понятия p-главного p-типа и редуцированности теории над типом и докажем с одной стороны, что из отсутствия свойства строгого порядка в теории T с неглавным властным типом p следует существование не p-главного p-типа и нередуцированность теории над типом p, а с другой стороны приведем пример ω-стабильной теории, имеющей не p-главный p-тип, реализующийся в модели $\mathcal{M}_p$.

Пусть $p(\overline{x})$ — тип из $S(T)$. Тип $q(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)\in S(T)$ называется *(n,p)-типом*, если $q(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)\supseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}p(\overline{x}_i)$. Множество всех (n,p)-типов теории T обозначается через $S_{n,p}(T)$, а элементы множества $S_p(T)\rightleftharpoons\bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}}S_{n,p}(T)$ называются *p-типами*.

Для простоты изложения в дальнейшем в этом параграфе будем считать, что $p\in S^1(\varnothing)$.

Тип $q(\overline{y})$ из $S(T)$ называется *p-главным*, если найдется формула $\varphi(\overline{y})\in q(\overline{y})$ такая, что $\cup\{p(y_i)\mid y_i\in\overline{y}\}\cup\{\varphi(\overline{y})\}\vdash q(\overline{y})$.

Очевидной является следующая

Лемма 1.3.1. *Для любого типа p и любого натурального числа $n\geq 1$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество (n,p)-типов от набора переменных $(x_1,\ldots,x_n)$ бесконечно;*

(2) *найдется не p-главный (n,p)-тип.*

Пусть $\mathcal{M}$ — счетная насыщенная модель теории T, имеющей предикатную сигнатуру. Рассмотрим индуцированную системой $\mathcal{M}$ подсистему $p(\mathcal{M}) = \langle p(M); \Sigma(T)\rangle$ сигнатуры $\Sigma(T)$ теории T с носителем $p(M) = \{a \in M \mid \models p(a)\}$ и отношениями $R(p(\mathcal{M})) = R(\mathcal{M}) \cap (p(M))^{\mu(R)}$, $R \in \Sigma(T)$. Обозначим через T_p теорию $\mathrm{Th}(p(\mathcal{M}))$.

Теория называется *редуцированной над типом* p, если теории T и T_p допускают элиминацию кванторов.

Предложение 1.3.2. *Если малая теория T редуцирована над типом p, то в модели $\mathcal{M}_p$ опускается любой не p-главный p-тип.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что по элиминации кванторов теорий T и T_p существует биекция $\cdot_p : S_p(T) \to S(T_p)$ такая, что $q_p(p(M)) = q(M)$, $q \in S_p(T)$, и ограничение этой биекции на множество p-главных типов осуществляет взаимно однозначное соответствие с множеством главных типов теории T_p. Обозначим через $\mathcal{M}_0$ простую модель теории T_p, существование которой вытекает из малости теории T. Предположим, что в модели $\mathcal{M}_p$ реализуется не p-главный тип $q(\overline{y})$ из $S^n_p(T)$. Тогда найдется бескванторная формула $\psi(x, \overline{y})$ теории T такая, что

$$T \vdash \exists x\, (\varphi(x) \wedge \exists \overline{y}\, \psi(x, \overline{y}) \wedge \forall \overline{y}\, (\psi(x, \overline{y}) \to \chi(\overline{y})))$$

для любых формул $\varphi(x) \in p(x)$ и бескванторных формул $\chi(\overline{y}) \in q(\overline{y})$. Отсюда следует, что

$$T_p \vdash \exists x\, (\exists \overline{y}\, \psi(x, \overline{y}) \wedge \forall \overline{y}\, (\psi(x, \overline{y}) \to \chi(\overline{y}))),$$

где $\chi(\overline{y})$ — бескванторная формула типа $q_p(\overline{y})$. Так как T_p — транзитивная теория, допускающая элиминацию кванторов, то найдется элемент $a \in M_0$ такой, что

$$\mathcal{M}_0 \models \exists \overline{y}\, \psi(a, \overline{y}) \wedge \forall \overline{y}\, (\psi(a, \overline{y}) \to q_p(\overline{y})).$$

Это означает, что тип $q_p(\overline{y}) \in S^n(T_p)$ реализуется в $\mathcal{M}_0$. Но q_p — неглавный тип, так как является не p-главным соответствующий ему p-тип q. Следовательно, в простой модели $\mathcal{M}_0$ реализуется неглавный тип, — противоречие. □

Зафиксируем теорию T и рассмотрим ее *морлизацию*, т. е. обогащение до полной теории T' сигнатуры $\Sigma(T) \cup \{R_\varphi \mid \varphi$ —

формула теории $T\}$ такой, что для любой формулы $\varphi(\overline{y})$ теории T символ R_φ является $l(\overline{y})$-местным предикатным символом и выполняется соотношение $T' \vdash R_\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow \varphi(\overline{y})$. Обеднение теории T' до полной теории сигнатуры $\{R_\varphi \mid \varphi$ — формула теории $T\}$ обозначим через T^*. Таким образом, мы осуществляем операцию $\cdot^* : T \to T^*$. Нетрудно заметить существование взаимно однозначного соответствия $\cdot^* : S(T) \to S(T^*)$, при котором каждому типу $q(\overline{y}) \in S(T)$ ставится в соответствие полный тип $q^*(\overline{y}) \rightleftharpoons \{\psi(\overline{y}) \mid T^* \vdash R_\varphi(\overline{y}) \to \psi(\overline{y})$ для некоторой формулы $\varphi(\overline{y}) \in q\}$. При этом соответствии сохраняются свойства λ-стабильности, а также *простоты* (см. [27]) и малости теории, а для типов — свойства изолированности и властности. Поэтому при изучении вопросов о существовании неглавного властных типов в перечисленных классах теорий достаточно рассматривать теории вида T^*.

В силу последнего замечания из леммы 1.3.1 и предложения 1.3.2 вытекает

Следствие 1.3.3. *Если $|S_{n,p}(T)| = \omega$ и малая теория T^* редуцирована над типом p^*, то в модели $\mathcal{M}_p$ опускается некоторый (n,p)-тип.*

Напомним, что теория T имеет *свойство строгого порядка*, если существует формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ теории T и кортежи $\overline{a}_i$, $i \in \omega$, для которых справедливо следующее соотношение:

$$\vdash \varphi(\overline{a}_i, \overline{y}) \to \varphi(\overline{a}_j, \overline{y}) \Leftrightarrow i \leq j.$$

Заметим, что свойством строгого порядка обладают теории с формульно определимыми бесконечными линейными порядками. В частности, свойство строгого порядка имеют примеры Эренфойхта (см. пример 1.1.1). При этом, для любого властного типа p и любого натурального числа n число (n,p)-типов от набора переменных $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ конечно и, следовательно, все p-типы являются p-главными.

Следующее предложение, неявно установленное Р. Вудроу [205], показывает что эта ситуация невозможна для теорий, не имеющих свойства строгого порядка.

Предложение 1.3.4. *Если $p(\overline{x})$ — неглавный властный тип теории T, не имеющей свойство строгого порядка, то $|S_{2,p}(T)| = \omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим формулу $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ теории T, свидетельствующую о несимметричности отношения SI_p (такая формула существует по лемме 1.1.2). Положим $\varphi^0(\overline{x},\overline{y}) \rightleftharpoons (\overline{x} \approx \overline{y})$, $\varphi^1(\overline{x},\overline{y}) \rightleftharpoons \varphi(\overline{x},\overline{y})$, $\varphi^{n+1}(\overline{x},\overline{y}) \rightleftharpoons \exists \overline{z}(\varphi^n(\overline{x},\overline{z}) \wedge \varphi(\overline{z},\overline{y}))$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Для доказательства предложения достаточно установить, что в системе $p(\mathcal{M}^*)$ (где $\mathcal{M}^*$ — счетная насыщенная модель теории T^*) для любого $\overline{a} \in p(M)$ выполняется соотношение $R_{\varphi^{n+1}}(\overline{a}, p(\mathcal{M})) \setminus R_{\varphi^n}(\overline{a}, p(\mathcal{M})) \neq \varnothing$ для любого $n \in \omega$. Предположим напротив, что для некоторого n имеет место включение $R_{\varphi^{n+1}}(\overline{a}, p(\mathcal{M})) \subseteq R_{\varphi^n}(\overline{a}, p(\mathcal{M}))$. Рассмотрим формулу $\psi(\overline{x},\overline{y}) \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i=0}^{n} \varphi^i(\overline{x},\overline{y})$. Тогда по предположению для любых $\overline{a},\overline{b} \in p(M)$, удовлетворяющих условиям $\models \varphi(\overline{a},\overline{b})$ и $(\overline{b},\overline{a}) \notin \mathrm{SI}_p$, получаем $\vdash \psi(\overline{b},\overline{y}) \to \psi(\overline{a},\overline{y})$. Поскольку формула $\psi(\overline{b},\overline{y})$ свидетельствует о полуизолированности над $\overline{b}$ любой своей реализации, $\models \psi(\overline{a},\overline{a})$ и $(\overline{b},\overline{a}) \notin \mathrm{SI}_p$, имеем $\models \exists \overline{y}\,(\psi(\overline{a},\overline{y}) \wedge \neg\psi(\overline{b},\overline{y}))$. Так как кортежи $\overline{a}$ и $\overline{b}$ реализуют один и тот же тип p, существует последовательность $(\overline{c}_n)_{n\in\omega}$ реализаций типа p, для которой $\vdash \psi(\overline{c}_i,\overline{y}) \to \psi(\overline{c}_j,\overline{y})$ и $\models \exists \overline{y}\,(\psi(\overline{c}_j,\overline{y}) \wedge \neg\psi(\overline{c}_i,\overline{y}))$, $i < j < \omega$. Последние соотношения противоречат отсутствию свойства строгого порядка в теории T. □

Из следствия 1.3.3 и предложения 1.3.4 вытекает

Теорема 1.3.5. *Если T — теория, не имеющая свойства строгого порядка, $p(x)$ — неглавный властный тип теории T, то теория T^* не редуцирована над типом p^*.*

Покажем, что реализуемость в модели $\mathcal{M}_p$ не p-главных p-типов влечет несимметричность отношения SI_p.

Предложение 1.3.6. *Если не p-главный p-тип q реализуется в модели $\mathcal{M}_a$, где a — реализация типа p, то для любого элемента b_i реализации $\overline{b}$ в модели $\mathcal{M}_a$ типа q выполняется $(a, b_i) \in \mathrm{SI}_p$ и $(b_i, a) \notin \mathrm{SI}_p$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — реализация типа p, $\varphi(a,\overline{y})$ — формула, изолирующая не p-главный p-тип $q(\overline{y})$. Предположим, что некоторый элемент b_i реализации $\overline{b}$ типа $q(\overline{y})$ в модели $\mathcal{M}_a$ полуизолирует элемент a. Рассмотрим формулу $\psi(y_i, x)$, свидетельствующую о полуизолированности a над b_i. Тогда тип $q(\overline{y})$ изолируется множеством $\cup\{p(y_i) \mid y_i \in \overline{y}\} \cup \{\exists x\,(\varphi(x,\overline{y}) \wedge \psi(y_i, x))\}$. Последнее невозможно в силу того, что p-тип $q(\overline{y})$ не является p-главным. □

Напомним, что *связной компонентой* графа $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ называется максимальный по включению связный подграф графа Γ. Любая связная компонента $\mathcal{C}$ графа Γ однозначно определяется любым своим элементом $a \in C$ и обозначается через $\mathcal{C}(a, \Gamma)$, или через $\mathcal{C}(a, Q)$, когда ясно, о каком носителе X идет речь.

Для графа $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ определим по индукции отношения Q^n, $n \in \mathbf{Z}$: $Q^0 \rightleftharpoons \mathrm{id}_X$, $Q^1 \rightleftharpoons Q$, $Q^{n+1} \rightleftharpoons Q^n \circ Q$, $Q^{-n} \rightleftharpoons (Q^n)^{-1}$, $n \in \omega$.

П р и м е р 1.3.1. Построим ω-стабильную теорию, имеющую тип p, у которого в элементарной подмодели $\mathcal{M}_p$ модели $\mathcal{M}$ реализуется некоторый не p-главный p-тип.

Сигнатура Σ будет состоять из одноместных предикатных символов Col_n, $n \in \omega$, двухместных предикатных символов Q, R_1, R_2 и трехместного предикатного символа S.

Предикат Q определяет на носителе M свободную ориентированную псевдоплоскость из примера 1.2.3 с *транзитивной* (т. е. связывающей любые два элемента) группой автоморфизмов, с бесконечным числом компонент связности $C(a, Q)$ и 1-несущественной Q-упорядоченной раскраской Col, соответствующей символам Col_n, $n \in \omega$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) для любых $\mu \geq n$ (включая ∞) любой элемент цвета n имеет бесконечное число образов цвета μ по отношению Q;

2) для любых $m \leq n$ любой элемент цвета n имеет бесконечное число прообразов цвета m по отношению Q.

Предикат R_1 связывает лишь одноцветные элементы a и b, для которых выполняется $\models \exists x(Q(x, a) \wedge Q(x, b))$, и на множестве решений каждой формулы $Q(a, y)$ определяет *функцию следования* (с единственным образом c_1, единственным прообразом c_2 по каждому элементу b с условием $\models Q(a, b)$ и без контуров).

Предикат R_2, также как и Q, определяет на носителе M свободную ориентированную псевдоплоскость с транзитивной группой автоморфизмов, с бесконечным числом компонент связности $C(a, R_2)$ и 1-несущественной R_2-упорядоченной раскраской Col, соответствующей символам Col_n, $n \in \omega$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) для любых $\mu \geq n$ (включая ∞) любой элемент цвета n имеет бесконечное число образов цвета μ по отношению R_2;

2) для любых $m \leq n$ любой элемент цвета n бесконечное число прообразов цвета m по отношению R_2.

При этом любые два различных прообраза любого элемента по отношению $\bigcup\limits_{n\in\omega}(R_2)^n$ лежат в разных компонентах связности по отношению Q, а с любым образом любого элемента a по отношению R_2 R_2-связано ровно два элемента b и c, лежащих в одной компоненте связности по отношению Q. Эти элементы удовлетворяют соотношению $\models \exists x(Q(x,b)\wedge Q(x,c))$, имеют одинаковый цвет и из условия $\mathrm{Col}(a)=n$ следует, что в графе с отношением $R_1\cup(R_1)^{-1}$ длина кратчайшего (b,c)-маршрута не может быть меньше n. Кроме того, потребуем, чтобы для каждой пары одноцветных элементов b и c с условиями $\models \exists x\,(Q(x,b)\wedge Q(x,c))$ и $(b,c)\in R_1^n\cup(R_1)^{-n}$ и любого цвета $m\leq n$ существовал общий прообраз этих элементов по отношению R_2, имеющий цвет m.

Предикат S связывает всевозможные тройки элементов a, b, c таких, что $\models R_2(a,b)\wedge R_2(a,c)$.

Аналогично примеру 1.3.1 устанавливается, что все указанные требования можно реализовать так, чтобы теория T_0 получившейся модели была Δ-базируемой, где Δ — наименьшее замкнутое относительно подстановок переменных множество формул, имеющих не более двух свободных переменных, содержащее формулу $(x\approx y)$ и удовлетворяющее следующему условию: если $\varphi(x,y)\in\Delta$, то $\exists z\,(\varphi(x,z)\wedge\Re^{\delta_1}(z,y)\wedge\mathrm{Col}_n^{\delta_2}(z))\in\Delta$, где $\delta_1\in\{-1,1\}$, $\delta_2\in\{0,1\}$, $\Re^1(x,y)=\Re(x,y)$, $\Re^{-1}(x,y)=\Re(y,x)$, $\Re\in\{Q,R_1,R_2\}$, $\mathrm{Col}_n^1(z)=\mathrm{Col}_n(z)$, $\mathrm{Col}_n^0(z)=\neg\mathrm{Col}_n(z)$. С помощью Δ-базируемости рутинным разбором случаев взаимосвязи элементов кортежей устанавливается ω-стабильность теории T_0.

Множество формул $\{\neg\mathrm{Col}_n(x)\mid n\in\omega\}$ изолирует единственный имеющийся в теории T_0 неглавный 1-тип. Этот тип, который мы обозначим через $p_\infty(x)$, реализуется элементами, имеющими бесконечный цвет.

Для любого элемента a, имеющего бесконечный цвет, формула $S(a,x,y)$ изолирует не p_∞-главный $(2,p_\infty)$-тип $q(x,y)\in S(T_0)$, который определяется множеством формул

$$\{\exists z\,(Q(z,x)\wedge Q(z,y)\wedge\neg\mathrm{Col}_n(z))\wedge\neg R_1^n(x,y)\mid n\in\omega\}.$$

При этом для элементов a_n цвета $n\in\omega$ формулы $S(a_n,x,y)$ изолируют типы, аппроксимирующие описание типа $q(x,y)$. $\square$

§ 1.4. Властные орграфы

В этом параграфе мы определим понятие властного орграфа и установим его "локальное" присутствие в структуре любого неглавного властного типа p. Также мы покажем, что при условии $(2,p)$-инвариантности теории структура властного орграфа содержится в ограничении насыщенной структуры на структуру реализаций любого неглавного властного типа, обладающего глобальным свойством попарного пересечения. Затем мы опишем структуры транзитивных замыканий насыщенных властных орграфов, образующихся в моделях теорий с неглавными властными 1-типами при условии конечного числа неглавных 1-типов. Кроме того докажем, что структура властного орграфа, рассматриваемая в модели *простой* теории [27], индуцирует бесконечный вес. Это означает, что властные орграфы не встречаются в структурах известных классов простых теорий (таких как суперпростые или конечно базируемые теории), не содержащих эренфойхтовых теорий.

Счетный бесконтурный орграф $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ называется *властным*, если выполняются следующие условия:

(а) группа автоморфизмов орграфа Γ *транзитивна*, т. е. любые две вершины связаны некоторым автоморфизмом;

(б) формула $Q(x,y)$ эквивалентна в теории $\mathrm{Th}(\Gamma)$ дизъюнкции главных формул;

(в) $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(\Gamma,a) = \{a\}$ для любой вершины $a \in X$;

(г) $\Gamma \models \forall x,y\, \exists z\, (Q(z,x) \wedge Q(z,y))$ (свойство *попарного пересечения*).

Очевидно, что в примерах Эренфойхта властным является счетный граф с отношением $x < y$, задающим плотный линейный порядок.

Следующий пример, представленный в работах А. И. Мальцева [36] и Е. Бускарен, Б. Пуаза [92], определяет стабильную теорию *ациклической парной функции* со структурой властного орграфа.

Пример 1.4.1. Пусть M — множество с двумя функциями $f_1, f_2 : M \to M$ такими, что $(f_1,f_2) : M \to M \times M$ — биекция, для которой не существует непустой последовательности $i_1,\ldots,i_n$ и элемента $a \in M$ с условием $f_{i_n}(\ldots f_{i_1}(a)\ldots) = a$. Теория $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\langle M; f_1, f_2\rangle)$, будучи теорией локально свободной алгебры[2], стабильна. Рассмотрим *свободный* 1-тип $p \in S^1(T)$, т. е. тип элементов a, для которых

$$f_{i_n}(\dots f_{i_1}(a)\dots) = f_{j_m}(\dots f_{j_1}(a)\dots) \Leftrightarrow i_1\dots i_n = j_1\dots j_m.$$

Непосредственно проверяется, что некоторое счетное множество реализаций типа p с отношением, определяемым формулой $(y \approx f_1(x)) \vee (y \approx f_2(x))$, образует властный орграф. $\square$

В следующем примере теории с тремя счетными моделями, близком к примеру из работы М. Г. Перетятькина [42], властный орграф также включает отношение $<$.

П р и м е р 1.4.2. Пусть $\mathcal{M} = \langle M; \leq\rangle$ — нижняя полурешетка без наименьшего и максимальных элементов такая, что

а) никакие два несравнимых элемента не имеют верхней грани;

б) между любыми двумя различными сравнимыми элементами имеется промежуточный;

в) для любого элемента a существует бесконечное число попарно несравнимых бо́льших элементов, инфимум которых равен a.

Обогатим систему $\mathcal{M}$ константами c_n, $n \in \omega$, такими, что $c_n < c_{n+1}$, $n \in \omega$. Теория T полученной системы имеет ровно три счетные модели: простую, насыщенную, а также простую над реализацией властного типа $p_\infty(x)$, изолируемого множеством формул $\{c_n < x \mid n \in \omega\}$. $\square$

Кроме приведенных примеров достаточно богатый класс властных орграфов образуют бесконтурные орграфы вида $\langle P; Q\rangle = \langle P; \{(p, p') \mid p' = pg_0$ на некото-рой линии$\}\rangle$, соответствующие полигонометриям $\mathrm{pm}(G, \langle P, L, \in\rangle, g_0)$ на проективной плоскости [190].

Пусть $\mathcal{M}$ — модель теории T, $p(\overline{x})$ — полный тип теории T над пустым множеством, $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ — формула теории T, $l(\overline{x}) = l(\overline{y})$. Обозначим через $p(M)$ множество реализаций типа $p(\overline{x})$ в модели $\mathcal{M}$, а через $R^p_\psi(\mathcal{M})$ — бинарное отношение $\{(\overline{a}, \overline{b}) \in (p(M))^2 \mid \mathcal{M} \models \psi(\overline{a}, \overline{b})\}$.

Следующее утверждение показывает, что властные орграфы "локально" присутствуют в структуре любого неглавного властного типа.

[2]Стабильность теорий локально свободных алгебр доказана О. В. Белеградеком [31].

Предложение 1.4.1. *Если $p(\overline{x})$ — неглавный властный тип теории T и $\mathcal{M}$ — счетная насыщенная модель теории T, то для любой формулы $\varphi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ существует формула $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ теории T (где $l(\overline{x}) = l(\overline{y})$), удовлетворяющая следующим условиям:*

1) для любого $\overline{a} \in p(M)$ формула $\psi(\overline{a}, \overline{x})$ эквивалентна дизъюнкции главных формул $\psi_i(\overline{a}, \overline{x})$, $i \leq n$, таких, что $\psi_i(\overline{a}, \overline{x}) \vdash p(\overline{x})$ и из $\models \psi_i(\overline{a}, \overline{b})$ следует, что $\overline{b}$ не полуизолирует $\overline{a}$;

2) для любых $\overline{a}, \overline{b} \in p(M)$ существует такой набор $\overline{c}$, что $\models \varphi(\overline{c}) \wedge \psi(\overline{c}, \overline{a}) \wedge \psi(\overline{c}, \overline{b})$.

Доказательство. По условию, в силу леммы 1.1.2, существуют реализации $\overline{a}$ и $\overline{b}$ типа $p(\overline{x})$ в модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ такие, что $\overline{b}$ не полуизолирует $\overline{a}$. Поскольку $\mathcal{M}_{\overline{b}} \prec \mathcal{M}_{\overline{a}}$, то для любой реализации $\overline{c} \in M_{\overline{b}}$ найдется главная формула $\chi_{\overline{c}}(\overline{a}, \overline{y})$ такая, что $\models \chi_{\overline{c}}(\overline{a}, \overline{c})$. Перенумеруем все реализации типа $p(\overline{x})$ в модели $\mathcal{M}_{\overline{b}}$: $p(M_{\overline{b}}) = \{\overline{c}_n \mid n \in \omega\}$. Положим $\chi_n(\overline{a}, \overline{y}) \rightleftharpoons \chi_{\overline{c}_n}(\overline{a}, \overline{y})$, $n \in \omega$.

Зафиксируем формулу $\varphi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ и покажем, что некоторую формулу $\bigvee_{i=0}^{m} \chi_i(\overline{x}, \overline{y})$ можно взять в качестве формулы $\psi(\overline{x}, \overline{y})$. Очевидно, что любая из этих формул удовлетворяет условию 1. Предполагая, что ни одна из указанных формул не удовлетворяет условию 2, по теореме компактности получаем совместность множества

$$r(\overline{x}, \overline{y}) \rightleftharpoons p(\overline{x}) \cup p(\overline{x}) \cup$$

$$\left\{\neg\exists\overline{z}\left(\left(\bigvee_{i=0}^{m} \chi_i(\overline{z}, \overline{x})\right) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{m} \chi_i(\overline{z}, \overline{y})\right) \wedge \varphi(\overline{z})\right) \mid m \in \omega\right\}.$$

В силу властности типа $p(\overline{x})$ тип $r(\overline{x}, \overline{y})$ реализуется в модели $\mathcal{M}_{\overline{b}}$ посредством некоторых кортежей $\overline{d}_1$ и $\overline{d}_2$: $\mathcal{M}_{\overline{b}} \models r(\overline{d}_1, \overline{d}_2)$. Значит, найдутся формулы $\chi_{\overline{d}_1}(\overline{x}, \overline{y})$ и $\chi_{\overline{d}_2}(\overline{x}, \overline{y})$ такие, что $\models \chi_{\overline{d}_1}(\overline{a}, \overline{d}_1) \wedge \chi_{\overline{d}_2}(\overline{a}, \overline{d}_2)$, а это противоречит совместности множества $r(\overline{x}, \overline{y})$. Таким образом, множество $r(\overline{x}, \overline{y})$ несовместно, откуда следует для некоторого m_0 несовместность множества

$$p(\overline{x}) \cup p(\overline{y}) \cup \left\{\neg\exists\overline{z}\left(\left(\bigvee_{i=0}^{m_0} \chi_i(\overline{z}, \overline{x})\right) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{m_0} \chi_i(\overline{z}, \overline{y})\right) \wedge \psi_n(\overline{z})\right) \mid n \in \omega\right\}.$$

Полагая $\psi(\overline{x}, \overline{y}) \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{m_0} \chi_i(\overline{x}, \overline{y})$, получаем требуемое. $\square$

Свойство 2, приведенное в предложении 1.4.1, будем называть *локальным свойством попарного пересечения* и обозначать через (LPIP). Если же для формулы $\psi(\overline{x},\overline{y})$ выполняется более сильное свойство:

$2'$) для любых $\overline{a},\overline{b}\in p(M)$ существует такой набор $\overline{c}\in p(M)$, что $\models\psi(\overline{c},\overline{a})\wedge\psi(\overline{c},\overline{b})$,

то это свойство будем называть *глобальным свойством попарного пересечения* для типа $p(\overline{x})$ относительно формулы $\psi(\overline{x},\overline{y})$ и обозначать через (GPIP).

При наличии формулы $\psi(\overline{x},\overline{y})$, удовлетворяющей свойствам 1 и $2'$, будем называть орграф $\left\langle p(M);R^p_\psi(\mathcal{M})\right\rangle$ *предвластным.*

Напомним, что теории T_0 и T_1 сигнатур Σ_0 и Σ_1 соответственно называются *подобными*, если для любой модели $M_i\models T_i$, $i=0,1$, существуют формулы теории T_i, определяющие в M_i таким образом предикаты, функции и константы сигнатуры Σ_{1-i}, что соответствующая алгебраическая система сигнатуры Σ_{1-i} является моделью теории T_{1-i}.

Теория T называется (n,p)-*инвариантной*, если для любой формулы $\psi(\overline{x})$ (где $l(\overline{x})=n$) теории T_p обеднение морлизации теории T_p на сигнатуру $\{R_\psi\}$ подобно обеднению морлизации теории структуры некоторого формульного множества $\varphi(\mathcal{M})$ (где $\varphi\in p$) на ту же самую сигнатуру.

Покажем, что из существования предвластной структуры на множестве реализаций неглавного властного типа p $(2,p)$-инвариантной теории следует существование формулы, определяющей структуру властного орграфа на этом множестве.

Предложение 1.4.2. *Если $p(x)$ — неглавный властный тип $(2,p)$-инвариантной теории T и $\left\langle p(M);R^p_\psi(\mathcal{M})\right\rangle$ — предвластный орграф, то для некоторой формулы $\theta(x,y)$ с условием $T\vdash\theta(x,y)\to\psi(x,y)$ орграф $\langle p(M);R^p_\theta(\mathcal{M})\rangle$ является властным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $(2,p)$-инвариантности теории T следует, что можно выбрать главными формулы $R^p_{\chi'_i}(x,y)$, соответствующие в T формулам $\chi_i(x,y)$ таким, что $\psi(a,x)=\bigvee_{i=0}^m\chi_i(a,x)$ и формулы $\chi_i(a,x)$ являются главными для любого $a\in p(M)$ и любого $i=1,\dots,m$. Действительно, элемент a принадлежит простой модели $\mathcal{M}_0$ обеднения морлизации теории T_p на сигнатуру $\{R_\psi\}$. Этой же модели принадлежат некоторые реализации d_i главных формул, соответствующих формулам $\chi_i(a,y)$ $i=0,\ldots,m$. Рассмотрим формулы $\chi'_i(x,y)$ сигнатуры $\{R_\psi\}$, соответствующие полным формулам типов $\mathrm{tp}(a\,\hat{}\,d_i)$, $i=0,\ldots,m_0$. Возьмем в качестве $\theta(x,y)$ формулу теории T, для которой выполняются следующие условия:

1) обеднение морлизации теории структуры некоторого формульного множества $\varphi(\mathcal{M})$ (где $\varphi\in p$) на сигнатуру $\{R_\theta\}$ подобно обеднению морлизации теории T_p на ту же самую сигнатуру;
2) $\vdash((\varphi(x)\wedge\varphi(y))\to(\theta(x,y)\leftrightarrow\bigvee_{i=0}^{m}\chi'_i(x,y))$;
3) $\vdash\theta(\overline{x},\overline{y})\to\psi(\overline{x},\overline{y})$.

В силу насыщенности модели $\mathcal{M}$ группа автоморфизмов орграфа $\Gamma=\big\langle p(M);R^p_\theta(\mathcal{M})\big\rangle$ транзитивна.

Заметим, что для любого $a\in p(M)$ из $\models\theta(a,b)$ следует $b\in p(M)$ и b не полуизолирует a. Тогда в силу транзитивности отношения полуизолированности орграф Γ является бесконтурным.

Несимметричность отношения полуизолированности SI_p, обусловленная формулой θ, влечет равенство

$$\mathrm{acl}(\{b\})\cap\bigcup_{n\in\omega}(R^p_\theta(\mathcal{M}))^n(\Gamma,b)=\{b\}$$

для любого $b\in p(\mathcal{M})$. Действительно, предполагая, что существует элемент

$$d\in\mathrm{acl}(\{b\})\cap\bigcup_{n\in\omega}(R^p_\theta(\mathcal{M}))^n(\Gamma,b)\setminus\{b\},$$

получаем, что b полуизолирует d в модели $\mathcal{M}$. Значит, в силу транзитивности отношения полуизолированности элемент b будет полуизолировать a, где $\models\theta(a,b)$ и $a\in p(M)$, — противоречие.

Из (GPIP) для типа $p(\overline{x})$ относительно формулы $\psi(x,y)$ следует это же свойство относительно формулы $\theta(x,y)$, а значит, и свойство попарного пересечения для орграфа Γ. Таким образом, Γ — властный орграф. $\square$

Заметим, что в условиях предложения 1.4.2 конечное число неглавных 1-типов влечет соотношение

$$\operatorname{acl}(\{a\}) \cap \bigcup_{n\in\omega} (R^p_\theta(\mathcal{M}))^n(a,\Gamma) = \{a\} \tag{1.1}$$

для любой вершины a из орграфа $\Gamma = \big\langle p(M); R^p_\theta(\mathcal{M})\big\rangle$.

Действительно, предполагая, что тип $\operatorname{tp}(b/a)$ алгебраичен для некоторого $b \in (R^p_\theta(\mathcal{M}))^n(\overline{a},\Gamma)$, $b \neq a$, в исходной теории найдется полуизолирующая формула $\theta(a,y)$ такая, что $\models \theta(a,b) \wedge \exists^{=k}\overline{y}\ \theta(a,y)$ для некоторого $k \in \omega$. Из того, что b не полуизолирует a и число неглавных 1-типов конечно, следует существование кортежа c, реализующего главный тип и такого, что $\models \theta(c,b) \wedge \exists^{=k}\overline{y}\ \theta(c,y)$. Это означает, что в простой модели реализуется неглавный тип $p(x)$, — противоречие.

В предположении, что число неглавных 1-типов бесконечно, соотношение (1.1) может не выполняться. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример ω-стабильной теории с неглавным 1-типом $p_0(x)$, имеющим несимметричное отношение полуизолированности посредством формулы $Q(x,y)$ с условием $\operatorname{acl}(\{a\}) = \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a,\mathcal{M})$ для любой реализации a типа $p_0(x)$.

П р и м е р 1.4.3. Обозначим через Ω множество непустых конечных последовательностей $\overline{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ таких, что $\alpha_i \in \omega$, $i \leq n$, $l(\overline{\alpha}) = \alpha_0 + 2$.

Пусть T_0 — теория сигнатуры $\langle P^{(1)}_{\overline{\alpha}}, Q^{(2)}\rangle_{\overline{\alpha}\in\Omega}$ со следующими аксиомами:

1) если $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}'\,\hat{}\,m \in \Omega$, то

$$\vdash \big(P_{\overline{\alpha}'\,\hat{}\,(m+1)}(x) \to P_{\overline{\alpha}'\,\hat{}\,m}(x)\big) \wedge \exists^{\geq\omega} x\, \big(P_{\overline{\alpha}'\,\hat{}\,m}(x) \wedge \neg P_{\overline{\alpha}'\,\hat{}\,(m+1)}(x)\big)\,;$$

2) если $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}'_1\,\hat{}\,0$, $\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}'_2\,\hat{}\,0$ — кортежи из Ω и $\overline{\alpha}'_1 \neq \overline{\alpha}'_2$, то $\vdash \neg\exists x\ (P_{\overline{\alpha}_1}(x) \wedge P_{\overline{\alpha}_2}(x))$;

3) отношение Q образует график свободного (без циклов) унара с бесконечным числом прообразов у каждого элемента;

4) $\vdash \forall x, y\ ((P_{\langle 0,m\rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(x) \wedge Q(x,y)) \to (P_{\langle 0,m\rangle}(y) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(y)))$, $m \in \omega$;

5) если $\models P_{\langle 0,m\rangle}(a) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(a)$, то множество реализаций формулы $Q(x,a)$ состоит из бесконечного числа реализаций формулы $P_{\langle 0,m\rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(x)$, а также бесконечного числа реализаций формул $P_{\langle 1,k,m\rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 1,k,m+1\rangle}(x)$ для каждого $k \in \omega$;

6) если $\overline{\alpha} = k \,\hat{}\, \overline{\alpha}' \,\hat{}\, l \,\hat{}\, m$ — кортеж из Ω, $k \geq 1$, то

$$\vdash \forall x, y \left(\left(P_{k \,\hat{}\, \overline{\alpha}' \,\hat{}\, l \,\hat{}\, m}(x) \wedge \neg P_{k \,\hat{}\, \overline{\alpha}' \,\hat{}\, l \,\hat{}\, (m+1)}(x) \wedge Q(x,y)\right) \to \right.$$

$$\left. \left(P_{(k-1) \,\hat{}\, \overline{\alpha}' \,\hat{}\, m}(y) \wedge \neg P_{(k-1) \,\hat{}\, \overline{\alpha}' \,\hat{}\, (m+1)}(y)\right) \right),$$

$m \in \omega$;

7) если $k \neq 0$ и $\models P_{k \,\hat{}\, \overline{\alpha} \,\hat{}\, m}(a) \wedge \neg P_{k \,\hat{}\, \overline{\alpha} \,\hat{}\, (m+1)}(a)$, то множество реализаций формулы $Q(x,a)$ состоит из бесконечного числа реализаций формул $P_{(k+1) \,\hat{}\, \overline{\alpha} \,\hat{}\, l \,\hat{}\, m}(x) \wedge \neg P_{(k+1) \,\hat{}\, \overline{\alpha} \,\hat{}\, l \,\hat{}\, (m+1)}(x)$ для каждого $l \in \omega$.

Построение насыщенной модели, удовлетворяющей аксиомам 1–7, позволяет проверить полноту теории T_0. Ее ω-стабильность вытекает из того, что каждая формула без параметров эквивалентна булевой комбинации формул вида $P_{\overline{\alpha}}(x)$, $\overline{\alpha} \in \Omega$, и $\exists z\, (Q^{n_1}(x,z) \wedge Q^{n_2}(y,z))$, $n_1, n_2 \in \omega$. При этом как и в примере 1.2.3 счетность числа 1-типов над любым счетным множеством A вытекает из счетного числа вариантов распределения расстояний от элементов из A до реализаций типов.

Для типа $p_0(x) \in S^1(\varnothing)$, определяемого множеством формул $\left\{P_{\langle 0,m\rangle} \mid m \in \omega\right\}$, отношение полуизолированности несимметрично посредством формулы $Q(x,y)$. Для любого $a \models p_0$ множество реализаций формулы $Q(x,a)$ исчерпывается реализациями типа p_0, а также реализациями неглавных типов $p_{\langle 1,k\rangle}(x) \in S^1(\varnothing)$, определяемых множествами формул $\left\{P_{\langle 1,k,m\rangle} \mid m \in \omega\right\}$, $k \in \omega$. В силу того, что отношение Q образует график свободного унара с бесконечным числом прообразов у каждого элемента, для любого элемента a модели $\mathcal{M} \models T_0$ выполняется

$$\mathrm{acl}(\{a\}) = \mathrm{dcl}(\{a\}) = \bigcup_{n\in\omega} Q^n(a, \mathcal{M}). \quad \Box$$

В связи с приведенными выше рассуждениями представляется перспективной проблема описания властных орграфов, обогащаемых до структур неглавных властных 1-типов как в случае конечного числа неглавных 1-типов, так и их бесконечного числа.

Напомним, что частично упорядоченное множество $\langle X; \leq\rangle$ называется *направленным вниз* (*вверх*), если для любых $x, y \in X$ существует $z \in X$ с условиями $z \leq x$ и $z \leq y$ ($x \leq z$ и $y \leq z$).

Укажем основные возможности, которыми исчерпываются структуры транзитивных замыканий властных орграфов, полученных из структур неглавных властных типов $p(\overline{x})$, для которых число неглавных $l(\overline{x})$-типов конечно.

Теорема 1.4.3. *Пусть* $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ *— насыщенный властный орграф, в котором* $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a,\Gamma) = \{a\}$ *для любого* $a \in X$. *Тогда его транзитивное замыкание* $\mathrm{TC}(\Gamma) = \left\langle X; \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n \right\rangle$ *изоморфно направленному вниз множеству с транзитивной группой автоморфизмов и имеющему один из следующих порядков:*

(1_α) *плотный частичный порядок с максимальными антицепями, содержащими* α *элементов,* $\alpha \in (\omega+1) \setminus \{0\}$*;*

(2) *частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов для любого элемента.*

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность отношения $\leq$ орграфа $\mathrm{TC}(\Gamma) = \langle X; \leq\rangle$ очевидны. Антисимметричность отношения $\leq$ вытекает из бесконтурности орграфа Γ. Существование в частично упорядоченном множестве $\mathrm{TC}(\Gamma)$ нижних граней для любых двух элементов вытекает из свойства попарного пересечения. Если порядок $\leq$ не является плотным, то бесконечность числа покрывающих элементов для любого элемента $a \in X$ вытекает из условия $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a,\Gamma) = \{a\}$, поскольку в этой ситуации совместная формула $a < x \wedge \neg\exists y\,(a < y \wedge y < x)$ не принадлежит алгебраическому типу над элементом a. $\square$

Заметим, что указанные плотные частичные порядки с максимальными антицепями мощности α реализуются заменой каждого элемента в плотном линейном порядке без концевых элементов на класс эквивалентности, содержащий α попарно несравнимых элементов.

Отметим, что частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов над каждым элементом получается лишь из властных орграфов, у которых формула $Q(x,y)$ не является главной.

Действительно, если $Q(x,y)$ — главная формула, то из истинности $\models Q(a,b) \wedge Q(a,c) \wedge Q(c,b)$ для любого элемента a и некоторых элементов b, c и существования автоморфизмов, фиксирующих a и связывающих любые элементы из $Q(a,\Gamma)$, следует, что для любого элемента b из $Q(a,\Gamma)$ найдется элемент c, принадлежащий $Q(a,\Gamma) \cap Q(\Gamma,b)$. Следовательно, в графе $\mathrm{TC}(\Gamma)$ между любыми двумя различными элементами имеется промежуточный элемент. Таким образом, справедливо

Следствие 1.4.4. *Если* $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ *— властный орграф с главной формулой* $Q(x,y)$, *то отношение* $\bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n$ *является плотным частичным порядком.*

Заметим, что если отношение $\leq$ в транзитивном замыкании насыщенного властного орграфа $\Gamma = \langle X, Q\rangle$ не является формульно определимым в языке графа Γ (т. е. если длины кратчайших маршрутов не ограничены), то по теореме компактности в $\mathrm{TC}(\Gamma)$ над каждым элементом a имеется бесконечная антицепь, принадлежащая $Q(a,\Gamma)$. Таким образом, из теоремы 1.4.3 вытекает

Следствие 1.4.5. *Пусть* $\Gamma = \langle X; Q\rangle$ *— насыщенный властный орграф с неограниченными длинами кратчайших маршрутов и такой, что* $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a,\Gamma) = \{a\}$ *для любого* $a \in X$. *Тогда его транзитивное замыкание* $\mathrm{TC}(\Gamma) = \left\langle X; \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n \right\rangle$ *изоморфно направленному вниз множеству с транзитивной группой автоморфизмов и имеющему один из следующих порядков:*

(1) *плотный частичный порядок бесконечными антицепями;*

(2) *частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов для любого элемента.*

Отметим, что наряду с доказанной необходимостью локального наличия властных орграфов в структурах неглавных властных типов открытым является вопрос о достаточности, т. е. о возможности обогащения любого властного орграфа до структуры властного типа.

Напомним несколько понятий из теории стабильности, относящихся к классу простых теорий [10], [26], [27]. Говорят, что формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ в теории T *копируется над множеством* A, если существуют натуральное число m и кортежи $\overline{a}^n$, $n \in \omega$, для которых выполняются условия:

(1) $\mathrm{tp}(\overline{a}/A) = \mathrm{tp}(\overline{a}^n/A)$, $n \in \omega$;

(2) множество формул $\{\varphi(\overline{x}, \overline{a}^n) \mid n \in \omega\}$ *m-несовместно*, т. е. для любого множества $w \subset \omega$ мощности m формула $\bigwedge\limits_{n \in w} \varphi(\overline{x}, \overline{a}^n)$ не совместна в T.

Кортежи $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *зависимыми над* A, если найдется формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ в теории T, которая копируется над A и удовлетворяет условию $\models \varphi(\overline{b}, \overline{a})$. Если кортежи $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не являются зависимыми над A, то они называются *независимыми над* A. Кортежи, зависимые (независимые) над $\varnothing$, называются просто *зависимыми* (*независимыми*). Последовательность кортежей называется *независимой*, если каждый кортеж этой последовательности независим с любым кортежем, составленным из координат остальных элементов последовательности.

Говорят, что тип $p(\overline{x})$ *имеет бесконечный собственный вес*, если существует реализация $\overline{a}$ типа $p(\overline{x})$ и бесконечная независимая последовательность $(\overline{a}_n)_{n \in \omega}$ реализаций типа $p(\overline{x})$ такая, что кортежи $\overline{a}$ и $\overline{a}_n$ зависимы для любого $n \in \omega$.

Следующее утверждение показывает, что властные орграфы не встречаются в структурах известных классов простых теорий, не содержащих эренфойхтовых теорий.

Предложение 1.4.6. *Если $T = \mathrm{Th}(\Gamma)$ — простая теория властного орграфа $\Gamma = \langle X; Q\rangle$, то (единственный) тип $p \in S^1(\varnothing)$ имеет бесконечный собственный вес.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $\models Q^k(a, b)$ для некоторого $k > 0$, то элементы a и b зависимы. Для этого достаточно установить, что формула $Q^k(a, x)$ копируется над $\varnothing$. Действительно, существует такое число $m \in \omega$, что для любого элемента a_0 найдется не более m элементов $a_1, \ldots, a_m$, удовлетворяющих условиям $Q^k(a_i, a_j)$ для всех $1 \leq i < j \leq m$, поскольку в противном случае по теореме компактности и в силу бесконтурности орграфа Γ найдется бесконечная последовательность $(a_n)_{n \in \omega}$ с условием

$$\models Q^k(a_i, a_j) \Leftrightarrow i < j,$$

что противоречит простоте теории T.

Определим по индукции последовательность $(a_n)_{n\in\omega}$. Элемент a_0 выберем из множества X произвольно. Если элементы $a_0, \ldots, a_{n-1}$ уже выбраны, то в качестве элемента a_n выберем элемент с условием $\Gamma \models Q^k(a_{n-1}, a_n)$, принадлежащий максимально большому числу множеств $Q^k(a_i, \Gamma)$, $i < n$. Из замеченного выше следует, что множество $\{Q^k(a_n, x) \mid n \in \omega\}$ m-несовместно. Поскольку любые два элемента связаны автоморфизмом, то формула $Q^k(a, x)$ копируется над $\varnothing$.

Теперь заметим, что в силу свойства попарного пересечения, для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in X$ существует элемент

$$a \in Q(\Gamma, a_1) \cap Q^2(\Gamma, a_2) \cap \ldots \cap Q^n(\Gamma, a_n),$$

и, в частности, любые n элементов, образующих независимую последовательность, зависят от некоторого элемента a. В силу того, что любые два элемента связаны автоморфизмом, а число n не ограничено, существует бесконечное число элементов, образующих независимую последовательность и зависящих от элемента a. $\square$

Глава 2

ГЕНЕРИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

§ 2.1. Семантические генерические конструкции

Построение генерической структуры, удовлетворяющей требуемым свойствам, начинается с определения класса $\mathbf{K}_0$ конечных структур счетной предикатной сигнатуры, наделенного инвариантным относительно перехода к изоморфным структурам отношением частичного порядка $\leqslant$ "быть самодостаточной подструктурой" (или "быть сильной подструктурой") и удовлетворяющего следующим аксиомам:

1) если $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$;

2) если $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0$ и $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, то $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$;

3) $\varnothing$ — наименьший элемент системы $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$;

4) (*свойство амальгамирования*) для любых структур $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in \mathbf{K}_0$, имеющих вложения $f_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $g_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ с условиями $f_0(\mathcal{A}) \leqslant \mathcal{B}$ и $g_0(\mathcal{A}) \leqslant \mathcal{C}$, существует структура $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0$ и вложения $f_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, $g_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, для которых $f_1(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{D}$, $g_1(\mathcal{C}) \leqslant \mathcal{D}$ и $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.

После определения класса $\mathbf{K}_0$ из конечных структур класса $\mathbf{K}_0$ с помощью *операции амальгамирования* (т. е. погружения структур $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ в структуры $\mathcal{D}$ согласно свойству амальгамирования) шаг за шагом строится счетная $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$-*генерическая модель* $\mathcal{M}$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) для любой конечной подструктуры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ существует структура $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, для которой $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{B}'$ для любой структуры $\mathcal{B}' \in \mathbf{K}_0$ с условием $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{M}$;

б) для любой конечной подструктуры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ и любой структуры $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0$ с условием $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ существует структура $\mathcal{B}' \leqslant \mathcal{M}$, для которой $\mathcal{B} \simeq_{\mathcal{A}} \mathcal{B}'$.

Таким образом, справедлива следующая теорема (теорема 2.12 из работы Дж. Болдуина, Н. Ши [72],).

Теорема 2.1.1. *Для любого частично упорядоченного класса* $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$, *удовлетворяющего условиям* 1–4, *существует* $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$*-генерическая модель.*

Приведенная схема представляет *семантический подход* к построению генерической модели $\mathcal{M}$ и соответствующей *генерической теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Удобство семантического подхода для реализации заданных теоретико-модельных свойств демонстрируется многочисленными примерами (см. библиографию, отраженную в историческом обзоре), в которых каждый предикат не определим через остальные.

§ 2.2. Синтаксические генерические конструкции

При построении генерических теорий, в которые закладывается формульная выразимость некоторых предикатов через остальные, более предпочтительным (а иногда и неизбежным) является *синтаксический подход*, в котором вместо конечных структур рассматриваются полные или неполные типы над конечными множествами, содержащие некоторую внешнюю информацию об элементах.

Синтаксический подход к построению генерических теорий, излагаемый в этом параграфе, обобщает описанный выше семантический подход и так же приводит к построению генерических моделей. Этот подход будет использоваться ниже в третьей и четвертой главах для построения генерических теорий, представляющих всевозможные как стабильные, так и нестабильные эренфойхтовы теории относительно предпорядков Рудина — Кейслера и функций распределения числа предельных моделей. Приводимые в последующих параграфах примеры показывают, что синтаксический подход образует собственное обобщение семантического подхода к построению генерических моделей.

В дальнейшем в этом параграфе через $X, Y, Z, \ldots$ мы будем обозначать конечные множества переменных, через $A, B, C, \ldots$ — конечные множества элементов, а также конечные множества в алгебраических системах или сами алгебраические системы с конечными носителями, через $\Phi(A), \Psi(B), \mathrm{X}(C), \ldots$ — *диаграммы*, т. е. полные или неполные типы над соответствующими множествами, не имеющие свободных переменных.

Если $\Phi(A)$ — тип, то через $[\Phi(A)]^A_X$ будет обозначаться тип $\Phi(X)$, который получается в результате некоторой биективной подстановки в тип $\Phi(A)$ переменных X вместо констант из A, а через $[\Phi(A)]^A_B$ — тип $\Phi(B)$, который получается в результате некоторой биективной подстановки в тип $\Phi(A)$ констант из B вместо констант из A.

Зафиксируем не более чем счетную сигнатуру Σ и рассмотрим класс $\mathbf{T}_0$ (полных или неполных) типов $\Phi(A)$ над конечными множествами A таких, что $\varphi(\overline{a}) \in \Phi(A)$ или $\neg\varphi(\overline{a}) \in \Phi(A)$ для любой бескванторной формулы $\varphi(\overline{x})$ и любого кортежа $\overline{a} \in A$. Предположим, что класс $\mathbf{T}_0$ снабжен частичным порядком $\leqslant$, замкнутым относительно биективных подстановок $[\Phi(A)]^A_{A'}$ попарно различных констант из A' вместо констант из A в типы $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$. Кроме того, предположим, что результаты биективных подстановок $[\Phi(A)]^A_X$ множеств переменных X вместо констант из A в типы $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ (по всем множествам A) образуют счетное множество.

Частично упорядоченный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ называется *генерическим*, если $\mathbf{T}_0$ замкнут относительно пересечений и выполняются следующие условия:

i) если $\Phi \leqslant \Psi$, то $\Phi \subseteq \Psi$;

ii) если $\Phi \leqslant \mathrm{X}$, $\Psi \in \mathbf{T}_0$ и $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathrm{X}$, то $\Phi \leqslant \Psi$;

iii) некоторый тип $\Phi_0(\varnothing)$ — наименьший элемент системы $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$;

iv) (*свойство t-амальгамирования*) для любых типов $\Phi(A)$, $\Psi(B)$, $\mathrm{X}(C) \in \mathbf{T}_0$ если существуют инъекции $f_0 : A \to B$ и $g_0 : A \to C$ с условиями $[\Phi(A)]^A_{f_0(A)} \leqslant \Psi(B)$ и $[\Phi(A)]^A_{g_0(A)} \leqslant \mathrm{X}(C)$, то существует тип $\Theta(D) \in \mathbf{T}_0$ и инъекции $f_1 : B \to D$ и $g_1 : C \to D$, для которых $[\Psi(B)]^B_{f_1(B)} \leqslant \Theta(D)$, $[\mathrm{X}(C)]^C_{g_1(C)} \leqslant \Theta(D)$ и $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$;

v) (*свойство локальной реализуемости*) если $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ и $\Phi(A) \vdash \exists x \varphi(x)$ (соответственно t — терм сигнатуры $\Sigma \cup A$, не содержащий свободных переменных), то существуют тип $\Psi(B) \in \mathbf{T}_0$, $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$, и элемент $b \in B$, для которых $\Psi(B) \vdash \varphi(b)$ ($(t \approx b) \in \Psi(B)$);

vi) (*свойство t-однозначности*) для любых типов $\Phi(A)$, $\Psi(A) \in \mathbf{T}_0$ из совместности множества $\Phi(A) \cup \Psi(A)$ следует $\Phi(A) = \Psi(A)$.

Если $\Phi \leqslant \Psi$, то будем говорить, что Φ — *сильный подтип* типа Ψ.

Тип $\Phi(A)$ называется (*сильно*) *вложимым* в тип $\Psi(B)$, если существует инъекция $f : A \to B$ такая, что $[\Phi(A)]^A_{f(A)} \subseteq \Psi(B)$ ($[\Phi(A)]^A_{f(A)} \leqslant \Psi(B)$). При этом, инъекция f называется (*сильным*) *вложением* типа $\Phi(A)$ в тип $\Psi(B)$ и обозначается через $f : \Phi(A) \to \Psi(B)$.

Тип $\Phi(A)$ называется (*сильно*) *вложимым* в модель $\mathcal{M}$, если $\Phi(A)$ (сильно) вложим в некоторый тип $\Psi(B)$, где $\mathcal{M} \models \Psi(B)$. При этом, соответствующее вложение $f : \Phi(A) \to \Psi(B)$ называется (*сильным*) *вложением* типа $\Phi(A)$ в модель $\mathcal{M}$ и обозначается $f : \Phi(A) \to \mathcal{M}$.

Пусть $\mathbf{T}_0$ — класс типов, $\mathbf{P}$ — класс моделей, $\mathcal{M}$ — модель из класса $\mathbf{P}$. Класс $\mathbf{T}_0$ называется *конфинальным* в модели $\mathcal{M}$, если для любого конечного множества $A \subseteq M$ существует конечное множество B, $A \subseteq B \subseteq M$, и тип $\Phi(B) \in \mathbf{T}_0$ такой, что $\mathcal{M} \models \Phi(B)$. Класс $\mathbf{T}_0$ называется *конфинальным* в классе $\mathbf{P}$, если $\mathbf{T}_0$ конфинален в любой модели из класса $\mathbf{P}$. Через $\overline{\mathbf{T}}_0$ будем обозначать класс всех моделей $\mathcal{M}$ с условием конфинальности класса $\mathbf{T}_0$ в $\mathcal{M}$, а через $\mathbf{P}$ — подкласс класса $\overline{\mathbf{T}}_0$ такой, что каждый тип $\Phi \in \mathbf{T}_0$ является истинным в некоторой модели из $\mathbf{P}$.

Расширим отношение $\leqslant$ с генерического класса $(\mathbf{T}_0, \leqslant)$ на класс подмножеств из моделей класса $\overline{\mathbf{T}}_0$.

Пусть $\mathcal{M}$ — модель из класса $\overline{\mathbf{T}}_0$, A и B — конечные множества в модели $\mathcal{M}$, $A \subseteq B$. Будем говорить, что A — *сильное подмножество* множества B (в модели $\mathcal{M}$) и писать $A \leqslant B$, если $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$ для некоторых типов $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{T}_0$ с условием $\mathcal{M} \models \Psi(B)$.

Конечное множество A называется *сильным подмножеством* множества $M_0 \subseteq M$ (в модели $\mathcal{M}$), где $A \subseteq M_0$, если $A \leqslant B$ для любого конечного множества B такого, что $A \subseteq B \subseteq M_0$ и $\Phi(A) \subseteq \Psi(B)$ для некоторых типов $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{T}_0$ с условием $\mathcal{M} \models \Psi(B)$. Если A — сильное подмножество множества M_0, то как и выше будем писать $A \leqslant M_0$. Если $A \leqslant M$ в модели $\mathcal{M}$, то будем говорить, что A — *самодостаточное множество* (в модели $\mathcal{M}$).

Заметим, что в силу свойства t-однозначности типы $\Phi(A)$ и $\Psi(B)$ из определения сильных подмножеств задаются единственным образом. Тип $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$, соответствующий самодостаточному множеству A в модели $\mathcal{M}$, называется *самодостаточным типом* (в модели $\mathcal{M}$).

Следующее утверждение, обобщающее лемму 2.8 из работы Дж. Болдуина и Н. Ши [72], показывает, что для конечных множеств, соответствующих генерическим классам, типы которых порождены равномерно конечными типами, условие самодостаточности типово определимо.

Предложение 2.2.1. *Пусть* $\mathbf{T}_0$ *— генерический класс, состоящий из типов* $\Phi(A)$*, выводимых из конечных подтипов, мощности которых равномерно ограничены в зависимости от мощностей* $|A|$*, и пусть* $\mathcal{M}$ *— модель из класса* $\overline{\mathbf{T}}_0$*. Тогда для любого конечного множества* $A \leqslant M$ *существует тип* $\Gamma_A(X)$ *такой, что* $\mathcal{M} \models \Gamma_A(A)$*, и для любого множества* $A' \subseteq M$ *из* $\mathcal{M} \models \Gamma_A(A')$ *следует* $A' \leqslant M$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — самодостаточное множество в модели $\mathcal{M}$, $\Phi(A)$ — тип из $\mathbf{T}_0$, $\mathcal{M} \models \Phi(A)$. Для любого множества B, $A \subseteq B \subseteq M$, и любых типов $\Psi(B) \in \mathbf{T}_0$ с условиями $\Phi(A) \not\leqslant \Psi(B)$ обозначим через $\Psi_0(X,Y)$ минимальный по включению конечный тип, из которого выводится тип $[[\Psi(B)]^A_X]^{B\setminus A}_Y$, где $X \cap Y = \varnothing$. Искомым является тип

$$\Gamma_A(X) \rightleftharpoons \Phi(X) \cup \{\forall Y \neg \wedge \Psi(X,Y) \mid A \subseteq B, \Phi(A) \not\leqslant \Psi(B)\}. \ \square$$

Будем говорить, что класс $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ обладает *свойством совместного вложения* (JEP), если для любых типов $\Phi(A),\Psi(B) \in \mathbf{T}_0$ существует тип $\mathrm{X}(C) \in \mathbf{T}_0$ такой, что типы $\Phi(A)$ и $\Psi(B)$ сильно вложимы в $\mathrm{X}(C)$.

Очевидно, что каждый генерический класс обладает JEP.

Будем говорить, что модель $\mathcal{M} \in \mathbf{P}$ имеет *конечные замыкания* относительно класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$, если любое конечное множество $A \subseteq M$ содержится в некотором самодостаточном множестве в $\mathcal{M}$. Класс $\mathbf{P}$ имеет *конечные замыкания* относительно класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$, если конечные замыкания имеет любая модель из $\mathbf{P}$.

Очевидно, что счетная модель $\mathcal{M}$ имеет конечные замыкания относительно класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ тогда и только тогда, когда $M = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$ для некоторых самодостаточных множеств A_i с условиями $A_i \leqslant A_{i+1}$, $i \in \omega$.

Счетная модель $\mathcal{M} \in \overline{\mathbf{T}}_0$ называется $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$-*генерической*, если выполняются следующие условия:

а) $\mathcal{M}$ имеет конечные замыкания;

б) если $A \leqslant M$, $\Phi(A),\Psi(B) \in \mathbf{T}_0$, $\mathcal{M} \models \Phi(A)$ и $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$, то существует множество $B' \leqslant M$ такое, что $A \subseteq B'$ и $\mathcal{M} \models \Psi(B')$.

Аналогично построению $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$-генерической модели наличие генерического класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ позволяет с помощью t-амальгамирования шаг за шагом построить $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическую модель $\mathcal{M}$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.2.2. *Для любого генерического класса* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ *существует* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-генерическая модель.*

Теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерической модели $\mathcal{M}$ называется $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-генерической теорией.* Теория T называется *генерической,* если T — $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая теория для некоторого генерического класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$.

Модель $\mathcal{M}$ называется $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-универсальной*, если каждый тип из класса $\mathbf{T}_0$ сильно вложим в $\mathcal{M}$.

Модель $\mathcal{M}$ называется $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-однородной*, если для любых самодостаточных множеств A и B в $\mathcal{M}$ таких, что для соответствующих типов $\Phi(A)$ и $\Psi(B)$, свидетельствующих о самодостаточности, из равенства $[\Phi(A)]^A_B = \Psi(B)$ и из наличия отображения f, осуществляющего подстановку $[\Phi(A)]^A_B$, равную $\Psi(B)$, следует существование автоморфизма модели $\mathcal{M}$, содержащего f.

Легко заметить, что $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая модель является $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-универсальной и $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-однородной.

Генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, состоящий из бескванторных типов, называется *бескванторным.*

Следующая теорема показывает, что конструкция любой $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$-генерической модели представляется в виде конструкции некоторой $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерической модели.

Теорема 2.2.3. *Для любой* $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$*-генерической модели* $\mathcal{M}$ *существует такой бескванторный класс* $(\mathbf{T}_0; \leqslant')$*, что* $\mathcal{M}$ — $(\mathbf{T}_0; \leqslant')$*-генерическая модель.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Искомым является бескванторный генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant')$, где $\mathbf{T}_0 \rightleftharpoons \{\Phi(A) \mid \Phi(X)$ — бескванторный тип $\mathrm{tp}^{qf}(A), A \in \mathbf{K}_0\}$, $\Phi(A) \leqslant' \Psi(B) \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. $\square$

Любой генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, состоящий из типов $\Phi(A)$, соответствующих конечным структурам $\mathcal{A}$ с носителями A, позволяет построить класс $\mathbf{K}_0$, состоящий из всех конечных структур, изоморфных структурам $\mathcal{A}$, удовлетворяющим бескванторным подтипам $\Phi(A)^{qf}$ типов $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$. После введения класса $\mathbf{K}_0$ определим отношение $\leqslant'$ со следующим условием: $\mathcal{A} \leqslant'$

$\mathcal{B} \Leftrightarrow \Phi(A) \leqslant \Psi(B)$ для некоторых $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{T}_0$ с условиями $\mathcal{A} \models \Phi(A)^{qf}$ и $\mathcal{B} \models \Psi(B)^{qf}$.

Полученный класс $(\mathbf{K}_0; \leqslant')$ удовлетворяет вышеперечисленным условиям 1–4, накладываемым на класс, порождающий $(\mathbf{K}_0; \leqslant)$-генерическую модель. При этом, $(\mathbf{K}_0; \leqslant')$-генерическая модель может быть не изоморфна $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерической модели. Однозначность восстановления $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерической модели по системе $(\mathbf{K}_0; \leqslant')$ предполагает для каждой структуры $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0$ и соответствующих типов $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ включение в эти типы информации о числе всевозможных расширений $\mathcal{B}$ структуры $\mathcal{A}$ с условием $\mathcal{A} \leqslant' \mathcal{B}$, а также взаимосвязи элементов этих расширений. При наличии и использовании такой информации $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая модель определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

§ 2.3. Самодостаточные классы

Генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ называется *самодостаточным*, если выполняется следующая аксиома:

vii) если $\Phi, \Psi, \mathrm{X} \in \mathbf{T}_0$, $\Phi \leqslant \Psi$ и $\mathrm{X} \subseteq \Psi$, то $\Phi \cap \mathrm{X} \leqslant \mathrm{X}$.

В дальнейшем в этом и в следующих двух параграфах мы будем через $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ обозначать самодостаточный генерический класс, через $\overline{\mathcal{M}}$ — $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическую модель, через T — теорию $\mathrm{Th}(\overline{\mathcal{M}})$, через $\mathbf{K}$ — подкласс класса $\overline{\mathbf{T}}_0$, состоящий из всех моделей теории T.

Для иллюстрации последнего условия ($\mathrm{Mod}(T) \subseteq \overline{\mathbf{T}}_0$) приведем два класса примеров.

Очевидно, что условию $\mathrm{Mod}(T) \subseteq \overline{\mathbf{T}}_0$ удовлетворяет любой бескванторный генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ конечной сигнатуры, замкнутый относительно ограничений типов $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ на любые подмножества множества A. Этому же условию удовлетворяет любой самодостаточный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, удовлетворяющий следующему *свойству t-покрытия*:

viii) каждый тип $\Phi(X)$ теории T выводится из некоторого типа $[\Psi_\Phi(B)]^B_{X \cup Y}$, где $\Psi_\Phi(B) \in \mathbf{T}_0$.

Пусть Φ и Ψ — типы из класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$. Пара (Φ, Ψ) называется *минимальной*, если $\Phi \subseteq \Psi$, $\Phi \not\leqslant \Psi$ и для любого типа $\Psi' \in \mathbf{T}_0$ из условия $\Phi \subseteq \Psi' \subsetneqq \Psi$ следует $\Phi \leqslant \Psi'$.

Пусть $\mathcal{M}$ — модель из класса $\overline{\mathbf{T}}_0$, S — множество в модели $\mathcal{M}$. Будем говорить, что множество S *замкнуто* в модели $\mathcal{M}$ и писать $S \leqslant M$, если для любой минимальной пары $(\Phi(A), \Psi(B))$ с условием $\mathcal{M} \models \Psi(B)$ из $A \subseteq S$ следует $B \subseteq S$.

Покажем, что запись $S \leqslant M$ согласуется с записью $A \leqslant M$ в случае, когда S — конечное множество и некоторый тип $\Phi(S)$ принадлежит классу $\mathbf{T}_0$, $\mathcal{M} \models \Phi(S)$.

Предложение 2.3.1. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— модель из класса* $\overline{\mathbf{T}}_0$, $\Phi(A)$ *— тип из класса* $\mathbf{T}_0$, $\mathcal{M} \models \Phi(A)$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) A *— самодостаточное множество в модели* $\mathcal{M}$*;*

(2) *для любой минимальной пары* $(\Phi'(A'), \Psi(B))$ *с условием* $\mathcal{M} \models \Psi(B)$ *из* $A' \subseteq A$ *следует* $B \subseteq A$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть A — самодостаточное множество в $\mathcal{M}$, $(\Phi'(A'), \Psi(B))$ — минимальная пара с условием $\mathcal{M} \models \Psi(B)$ и $A' \subseteq A$. По аксиоме vii имеем $\Phi(A) \cap \Psi(B) \leqslant \Psi(B)$. Тогда из минимальности пары $(\Phi'(A'), \Psi(B))$ получаем $A' \subseteq A \cap B$ и $B = A \cap B$, т. е. $B \subseteq A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $A \nleqslant M$, т. е. найдется конечное множество $B \subseteq M$ такое, что $A \subset B$ и для соответствующих типов $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{T}_0$ выполняется $\Phi(A) \nleqslant \Psi(B)$. Тогда из конечности множества B и из аксиомы vii следует существование минимальной пары $(\Phi(A), \Psi_0(B_0))$ с условием $\mathcal{M} \models \Psi_0(B_0)$, и при этом $B_0 \nsubseteq A$. Последнее противоречит условию 2. $\Box$

Отметим, что из аксиомы vii вытекает следующее свойство моделей, аналогичное этой аксиоме: если $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \overline{\mathbf{T}}_0$, $M \leqslant N$ и $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$, то $M \cap N' \leqslant N'$.

Установим утверждение, обобщающее лемму 2.18 из работы Дж. Болдуина и Н. Ши [72].

Предложение 2.3.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *в классе* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ *нет бесконечной возрастающей цепи минимальных пар;*

(2) *класс* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания;*

(3) *любая* ω*-насыщенная модель из класса* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания;*

(4) *некоторая* ω*-насыщенная модель из класса* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из того, что если класс $\mathbf{K}$ не имеет конечных замыканий, т.е. если некоторое конечное множество A некоторой модели $\mathcal{M} \in \mathbf{K}$ не расширяется до самодостаточного множества, то не расширяется до самодостаточного множества конечное множество B с условиями $A \subseteq B \subseteq M$, $\mathcal{M} \models \Phi(B)$, $\Phi(B) \in \mathbf{T}_0$, которое существует в силу $\mathbf{K} \subseteq \overline{\mathbf{T}}_0$. Тогда по индукции строится бесконечная возрастающая цепь минимальных пар, начинающаяся с некоторой пары $(\Phi(B), \Psi(C))$.

Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) и (3) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) справедлива, поскольку из существования бесконечной возрастающей цепи минимальных пар в $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ следует ее вложимость в любую ω-насыщенную модель из класса $\mathbf{K}$, а это невозможно в моделях с конечным замыканием. $\square$

Из предложения 2.3.2 вытекает

Следствие 2.3.3. *Если генерическая модель* $\overline{\mathcal{M}}$ *насыщена, то класс* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания.*

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — некоторые модели из класса $\overline{\mathbf{T}}_0$, S — замкнутое множество в модели $\mathcal{M}$. Инъекция $f : S \to N$ называется *сильным вложением множества* S в модель $\mathcal{N}$, если $f(S)$ — замкнутое множество в модели $\mathcal{N}$ и для любого типа $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ такого, что $\mathcal{M} \models \Phi(A)$ и $A \subseteq S$, имеет место $\mathcal{N} \models \Phi(f(A))$.

Будем говорить, что генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ имеет *амальгамирование над замкнутыми (самодостаточными) множествами*, если для любых моделей $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \in \mathbf{K}$ и любого замкнутого (самодостаточного) множества S в некоторой модели из класса $\mathbf{K}$ из существования сильных вложений $f : S \to M_0$ и $g : S \to M_1$ следует существование модели $\mathcal{N} \models T$ и элементарных вложений $f' : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{N}$ и $g' : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{N}$ таких, что $f \circ f' = g \circ g'$. При этом будем также говорить, что $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая теория T имеет *амальгамирование над замкнутыми (самодостаточными) множествами.*

Следующая теорема обобщает лемму 2.21 из работы Дж. Болдуина и Н. Ши [72].

Теорема 2.3.4. *Пусть* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ *— самодостаточный генерический класс,* $\overline{\mathcal{M}}$ *—* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-генерическая модель,* $\mathbf{K}$ *— класс всех моделей теории* $T = \mathrm{Th}(\overline{\mathcal{M}})$*, имеющий конечные замыкания.*

Следующие условия эквивалентны:

(1) *теория T имеет амальгамирование над замкнутыми множествами;*

(2) *теория T имеет амальгамирование над самодостаточными множествами;*

(3) $\overline{\mathcal{M}}$ — *ω_1-универсальная модель;*

(4) $\overline{\mathcal{M}}$ — *ω-насыщенная модель.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из теоремы компактности и того, что класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mathcal{N}$ — счетная модель теории T. Покажем, что модель $\mathcal{N}$ элементарно вложима в $\overline{\mathcal{M}}$. Представим множество N в виде объединения $\bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$ возрастающей $\leqslant$-цепи самодостаточных в $\mathcal{N}$ множеств A_i, $i \in \omega$. В силу того, что $\overline{\mathcal{M}}$ — генерическая модель, множества A_i сильно вложимы в модель $\overline{\mathcal{M}}$ посредством сильных вложений $f_i : A_i \to \overline{M}$, так, что $f_i \subseteq f_{i+1}$, $i \in \omega$. Обозначим через f вложение $\bigcup\limits_{i\in\omega} f_i$, а через N' — образ $f(N)$. Легко заметить, что N' является носителем подмодели $\mathcal{N}'$ модели $\overline{\mathcal{M}}$. Покажем, что $\mathcal{N}' \preccurlyeq \overline{\mathcal{M}}$. Достаточно установить, что $(\mathcal{N}', \overline{a}) \equiv (\overline{\mathcal{M}}, \overline{a})$ для любого кортежа $\overline{a} \in N'$. Так как класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания, кортеж $\overline{a}$ расширяется до некоторого кортежа $\overline{b}$, нумерующего образ $f(A_i)$ некоторого множества A_i. Из самодостаточности множества A_i вытекает самодостаточность множества $f(A_i)$ как в модели $\mathcal{N}'$, так и в модели $\overline{\mathcal{M}}$. Поскольку теория T имеет амальгамирование над самодостаточными множествами, справедливо $(\mathcal{N}', \overline{b}) \equiv (\overline{\mathcal{M}}, \overline{b})$ и, значит, $(\mathcal{N}', \overline{a}) \equiv (\overline{\mathcal{M}}, \overline{a})$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\overline{\mathcal{M}}$ — ω_1-универсальная модель. Поскольку класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания, достаточно показать, что в $\overline{\mathcal{M}}$ реализуются все 1-типы над самодостаточными множествами в $\overline{\mathcal{M}}$. Пусть A — самодостаточное множество в $\overline{\mathcal{M}}$, $\Phi(A)$ — тип из $\mathbf{T}_0$, для которого $\overline{\mathcal{M}} \models \Phi(A)$, p — тип из $S^1(A)$. Рассмотрим счетное элементарное расширение $\mathcal{N}$ модели $\overline{\mathcal{M}}$, в котором реализуется тип p посредством некоторого элемента a, а также элементарное вложение f модели $\mathcal{N}$ в модель $\overline{\mathcal{M}}$. Поскольку $f(A)$ является самодостаточным множеством в $\overline{\mathcal{M}}$ и $\overline{\mathcal{M}} \models \Phi(f(A))$, существует автоморфизм g модели $\overline{\mathcal{M}}$, переводящий $f(A)$ на A. Тогда элемент $g(f(b))$ является искомой реализацией типа p в модели $\overline{\mathcal{M}}$.

(4) $\Rightarrow$ (2). Зафиксируем сильные вложения $f : A \to M_0$ и $g : A \to M_1$ и тип $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$, для которого $\mathcal{M}_0 \models \Phi(f(A))$ и $\mathcal{M}_1 \models \Phi(g(A))$. По теореме компактности можно считать, что $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$ — счетные модели. Так как $\overline{\mathcal{M}}$ — насыщенная модель, существуют элементарные вложения $f_1 : \mathcal{M}_0 \to \overline{\mathcal{M}}$ и $g_1 : \mathcal{M}_1 \to \overline{\mathcal{M}}$. Но тогда $f_1(f(A))$ и $g_1(g(A))$ — самодостаточные множества в модели $\overline{\mathcal{M}}$ и выполняется $\overline{\mathcal{M}} \models \Phi(f_1(f(A)))$, $\overline{\mathcal{M}} \models \Phi(g_1(g(A)))$. Следовательно, существует автоморфизм h модели $\overline{\mathcal{M}}$, переводящий $f_1(f(A))$ на $g_1(g(A))$. Отображения g_1 и $f_1 \circ h$ свидетельствуют о том, что $\overline{\mathcal{M}}$ является требуемой амальгамой моделей $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$. $\square$

Пусть $\mathbf{K}$ — класс, имеющий конечные замыкания, $\mathcal{M}$ — модель из класса $\mathbf{K}$, S — множество в модели $\mathcal{M}$. Наименьшее по включению замкнутое множество в модели $\mathcal{M}$, содержащее множество S, называется *внутренним замыканием* множества S в модели $\mathcal{M}$ и обозначается через $\mathrm{icl}_{\mathcal{M}}(S)$ или через $\overline{S}$, если из контекста ясно о какой модели $\mathcal{M}$ идет речь. Если множество $\overline{S}$ конечно, то оно называется *самодостаточным замыканием* множества S. Тип из класса $\mathbf{T}_0$, соответствующий самодостаточному замыканию $\overline{A}$ множества A, обозначается через $\overline{\Phi}(\overline{A})$. Если $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ и $\mathcal{M} \models \Phi(A)$, то тип $\overline{\Phi}(\overline{A})$ называется *самодостаточным замыканием* типа $\Phi(A)$.

Теорема 2.3.5. *Если класс* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания, то для любой модели* $\mathcal{M} \in \mathbf{K}$ *и любого конечного множества* $A \subseteq M$ *существует самодостаточное замыкание* $\overline{A}$. *При этом справедливо соотношение* $\overline{A} \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$.

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 — самодостаточные множества в $\mathcal{M}$, содержащие множество A. Тогда по аксиоме vii их пересечение $A_1 \cap A_2$ также будет самодостаточным множеством в $\mathcal{M}$, содержащим множество A. Так как мощности самодостаточных множеств конечны, существует единственное самодостаточное множество в $\mathcal{M}$, содержащее множество A и имеющее наименьшую мощность.

Покажем, что $\overline{A} \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$. Пусть $\mathcal{N}$ — ω-насыщенное элементарное расширение модели $\mathcal{M}$. Предположим, что $p \rightleftharpoons \mathrm{tp}(\overline{A}/A)$ — неалгебраический тип. Тогда в модели $\mathcal{N}$ существует реализация A' типа p, отличная от $\overline{A}$. Однако $\mathrm{icl}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{icl}_{\mathcal{N}}(A) = \overline{A}$. Следовательно, существование A' противоречит единственности $\mathrm{icl}_{\mathcal{N}}(A)$. $\square$

Следствие 2.3.6. *Если класс* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания, то генерическая модель* $\overline{\mathcal{M}}$ *однородна.*

Доказательство. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два кортежа в модели $\overline{\mathcal{M}}$, имеющие один и тот же тип, A и B — множества, состоящие из элементов кортежей $\overline{a}$ и $\overline{b}$ соответственно. Тогда из условий $\overline{A} \subseteq \mathrm{acl}_{\overline{\mathcal{M}}}(A)$ и $\overline{B} \subseteq \mathrm{acl}_{\overline{\mathcal{M}}}(B)$ получаем, что для типов $\overline{\Phi}(\overline{A}), \overline{\Psi}(\overline{B}) \in \mathbf{T}_0$ (где $\overline{\mathcal{M}} \models \overline{\Phi}(\overline{A})$, $\overline{\mathcal{M}} \models \overline{\Psi}(\overline{B})$) выполняется соотношение $\overline{\Phi}(\overline{B}) = \overline{\Psi}(\overline{B})$. Поскольку $\overline{\mathcal{M}}$ — генерическая модель, это означает, что существует автоморфизм $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}})$, переводящий $\overline{A}$ на $\overline{B}$ с условием $f(A) = B$. $\square$

§ 2.4. Генеричность счетных однородных моделей

Генерический класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ называется (*минимально*) *наследственным*, если $\mathbf{T}_0$ состоит из (минимальных по включению) типов $\Phi(A)$, содержащих всевозможные формулы, описывающие число копий системы элементов множества B над системой элементов множества A, а также взаимосвязь элементов копий, для каждого множества $B \supseteq A$, где соответствующий тип $\Psi(B)$ принадлежит $\mathbf{T}_0$ и удовлетворяет условию $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$.

Теорема 2.4.1. *Любая не более чем счетная однородная* (*насыщенная*) *алгебраическая система* $\mathcal{M}$ *является* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-генерической моделью для некоторого наследственного генерического класса* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ (*со свойством* t*-покрытия*).

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — счетная однородная алгебраическая система. Искомым классом является наследственный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, где $\mathbf{T}_0$ состоит из всех копий полных типов $\Phi(A)$ всевозможных конечных множеств $A \subseteq M$, а $\leqslant$ — отношение включения. Если $\mathcal{M}$ — насыщенная модель, то из малости теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ следует, что класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ обладает свойством t-покрытия. $\square$

Поскольку каждая полная счетная теория имеет однородную модель, из теоремы 2.4.1 вытекает

Следствие 2.4.2. *Любая полная счетная теория является генерической.*

Известно, что из малости теории T следует существование ее счетной насыщенной модели. Следовательно, по теореме 2.4.1 теория T является $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерической для некоторого генерического класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ со свойством t-покрытия.

Обратно, если T — $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$-генерическая теория для некоторого генерического класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ со свойством t-покрытия, то из счетности числа типов $[\Phi(A)]^A_X$, где $\Phi(A)\in\mathbf{T}_0$, и из свойства t-покрытия вытекает счетность множества $S(T)$ типов теории T, т. е. малость теории T.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.4.3. *Для любой полной счетной теории T следующие условия эквивалентны*:

(1) T *— малая теория*;

(2) T — $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$*-генерическая теория для некоторого генерического класса* $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ *со свойством t-покрытия.*

Генерический класс $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ называется *полным*, если некоторый тип $\Phi(A)\in\mathbf{T}_0$ содержит некоторую полную теорию сигнатуры Σ.

Очевидно, что из полноты генерического класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ следует, что совокупность формул, входящих в типы из множества $\mathbf{T}_0$, порождают $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$-генерическую теорию. Вместе с тем условие наследственности класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ не может гарантировать порождение полной теории. Например, при генерическом построении бесконечного линейно упорядоченного множества посредством минимально наследственного класса $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ формула $\forall x,y\,((x\leq y)\vee(y\leq x))$ не выводится из совокупности формул, входящих в типы $\Phi(X)$, где $\Phi(A)\in\mathbf{T}_0$ для некоторых A.

Напомним, что в доказательстве теоремы 2.4.1 о представимости любой счетной однородной модели в качестве генерической используются полные генерические классы. Вместе с тем, при решении различных задач генерические классы определяются для построения заранее неизвестной теории. Поэтому в генерические классы предпочтительно включать типы, содержащие минимум необходимой информации с тем, чтобы требуемая теория обладала необходимыми свойствами.

Пусть $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ и $(\mathbf{T}'_0;\leqslant')$ — генерические классы сигнатур Σ и Σ' соответственно, $\Sigma\subseteq\Sigma'$. Будем говорить, что класс $(\mathbf{T}'_0;\leqslant')$ *доминирует* класс $(\mathbf{T}'_0;\leqslant')$ и писать $\mathbf{T}_0\trianglelefteq\mathbf{T}'_0$, если для любого типа $\Phi(A)\in\mathbf{T}_0$ существует тип $\Phi'(A')\in\mathbf{T}'_0$ такой, что $\Phi(A)\subseteq\Phi'(A')$ и из условия существования некоторых конечных систем, являющихся расширениями над A, а также наличия информации о взаимосвязи элементов этих расширений, записанной в типе $\Phi(A)$, следует существование таких же расширений над A, а также наличие аналогичной информации о взаимосвязи элементов этих расширений, записанной в типе $\Phi'(A')$.

Очевидно, что отношение $\trianglelefteq$ образует предпорядок на классе генерических классов.

Легко видеть, что если модель $\mathcal{M}$ изоморфно вложима в модель $\mathcal{M}' \upharpoonright \Sigma$, то минимально наследственный класс $(\mathbf{T}'_0; \leqslant')$, совпадающий с замыканием множества типов $\Phi'(B)$ всевозможных конечных множеств $B \in M'$ относительно биективных подстановок констант и отношением включения $\leqslant'$, доминирует минимально наследственный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, совпадающий с замыканием множества типов $\Phi(A)$ всевозможных конечных множеств $A \in M$ относительно биективных подстановок констант и отношением включения $\leqslant$.

Вместе с тем, из условия $\mathbf{T}_0 \trianglelefteq \mathbf{T}'_0$ вытекает, что $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая модель изоморфно вложима в обеднение $(\mathbf{T}'_0; \leqslant')$-генерической модели до сигнатуры Σ.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.4.4. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ — счетные однородные модели сигнатур Σ и Σ' соответственно. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *модель $\mathcal{M}$ изоморфно вложима в модель $\mathcal{M}' \upharpoonright \Sigma$;*

(2) *существуют генерические классы $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ и $(\mathbf{T}'_0; \leqslant')$ такие, что $\mathcal{M}$ — $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая модель, $\mathcal{M}'$ — $(\mathbf{T}'_0; \leqslant')$-генерическая модель и $\mathbf{T}_0 \trianglelefteq \mathbf{T}'_0$.*

§ 2.5. Свойство однородного t-амальгамирования и насыщенные генерические модели

Предположим, что $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ — самодостаточный класс, удовлетворяющий следующим условиям:

а) для любого типа $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ из типа $\overline{\Phi}(\overline{A})$ выводится формула $\chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, описывающая условие самодостаточности замыкания $\overline{\Phi}(\overline{A})$; при этом формула $\chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$ также содержит формулу, выводимую из $\Phi(A)$, описывающую верхнюю оценку мощности множества $\overline{A}$;

б) для любых самодостаточных типов $\overline{\Phi}(\overline{A})$ и $\overline{\Psi}(\overline{B})$, где $\overline{\Phi}(\overline{A}) \leqslant \overline{\Psi}(\overline{B})$, и любой формулы $\psi(X, Y)$ из $\overline{\Psi}(X \cup Y)$ (здесь X и Y — непересекающиеся множества переменных, биективные с множествами $\overline{A}$ и $\overline{B} \setminus \overline{A}$) существует формула $\varphi(X)$, выводимая из $\overline{\Phi}(X)$, такая, что следующая формула истинна в модели $\overline{\mathcal{M}}$:

$$\forall X\ ((\chi_{\overline{\Phi}}(X) \wedge \varphi(X)) \to \exists Y\ (\chi_{\overline{\Psi}}(X, Y) \wedge \psi(X, Y))).$$

При наличии всех указанных условий будем говорить, что класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ обладает *свойством однородного t-амальгамирования*.

Заметим, что понятие однородного t-амальгамирования обобщает понятие *однородного амальгамирования*, определенное в работе Дж. Болдуина и Н. Ши [72]. При этом, в отличие от свойства однородного амальгамирования, при выполнении свойства однородного t-амальгамирования не предполагается наличие функции $f \in \omega^\omega$, представляющей единые верхние оценки $f(n)$ для мощностей самодостаточных замыканий $\overline{A}$, зависящих лишь от мощностей n данных множеств A.

В качестве примера генерического класса, обладающего свойством однородного t-амальгамирования, но не имеющего указанной верхней оценки, можно взять класс типов, соответствующих конечным ациклическим неорграфам с неограниченными валентностями всех элементов. Действительно, при рассмотрении элементов a_n и b_n, связанных кратчайшими маршрутами длины n, получаем неограниченные мощности самодостаточных замыканий, образуемых добавлениями всех элементов кратчайших маршрутов: $|\overline{\{a_n, b_n\}}| = n + 1$.

Следующая теорема обобщает теорему 2.28 из работы Дж. Болдуина и Н. Ши [72].

Теорема 2.5.1. *Если $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ — самодостаточный класс, обладающий свойством однородного t-амальгамирования, и класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания, то $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая модель $\overline{\mathcal{M}}$ ω-насыщена. При этом любое конечное множество $A \subseteq \overline{M}$ расширяется до своего самодостаточного замыкания $\overline{A} \subseteq \overline{M}$, тип $\mathrm{tp}(\overline{A})$ содержит тип $\overline{\Phi}(Y)$ для самодостаточного типа $\overline{\Phi}(\overline{A})$ и выполняется $\overline{\Phi}(Y) \vdash \mathrm{tp}(\overline{A})$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathcal{M}}$ — $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая модель, $\mathcal{N}$ — ω-насыщенная модель теории $\mathrm{Th}(\overline{\mathcal{M}})$. Покажем, что модели $\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{N}$ $L_{\infty,\omega}$-эквивалентны. Для этого достаточно установить между $\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{N}$ взаимную продолжаемость конечных частичных изоморфизмов $f : A \simeq A'$ для любых самодостаточных множеств $A \subseteq \overline{M}$ и $A' \subseteq N$, реализующих самодостаточные типы $\Phi(A)$ и $\Phi'(A')$, где $\Phi'(A') = \Phi(A')$.

Пусть $f : A \simeq A'$ — конечный частичный изоморфизм, удовлетворяющий указанным выше условиям. Рассмотрим самодостаточный тип $\Psi'(B') \in (\mathbf{T}_0; \leqslant)$ с условиями $\Phi'(A') \leqslant \Psi'(B')$

и $\mathcal{N} \models \Psi'(B')$. Поскольку $\overline{\mathcal{M}}$ — $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$-генерическая модель, в $\overline{\mathcal{M}}$ имеется изоморфная копия B множества B' над A', реализованная над A такая, что $\overline{\mathcal{M}} \models \Psi(B)$, $\Psi(B) = \Psi'(B)$ и $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$ для самодостаточного типа $\Psi(B)$. Это означает, что существует требуемое расширение $g : B \simeq B'$ частичного изоморфизма f.

Рассмотрим самодостаточный тип $\Psi(B) \in (\mathbf{T}_0;\leqslant)$ с условиями $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$ и $\mathcal{M} \models \Psi(B)$. Из истинности формул

$$\forall \overline{x}\, ((\chi_{\overline{\Phi}}(X) \wedge \varphi(X)) \to \exists Y\, (\chi_{\overline{\Psi}}(X, Y) \wedge \psi(X, Y))).$$

в модели $\mathcal{M}$ следует их истинность в модели $\mathcal{N}$. Из локальной выполнимости множества $\{(\chi_{\Psi}(A', Y)\} \cup \{\psi(A', Y) \mid \psi(A, B \setminus A) \in \Psi(B)\}$ и ω-насыщенности модели $\mathcal{N}$ следует выполнимость в $\mathcal{N}$ этого множества, т. е. наличие множества $B' \subseteq N$ с условием $\mathcal{N} \models \Psi'(B')$, $\Psi'(B') = \Psi(B')$ и $\Phi'(A') \leqslant \Psi'(B')$ для самодостаточного типа $\Psi'(B')$. Это снова означает, что существует требуемое расширение $g : B \simeq B'$ частичного изоморфизма f.

Из доказанной возможности расширений изоморфизмов $f : A \simeq A'$, сохраняющих формулы соответствующих самодостаточных типов $\Phi(A)$ и $\Phi'(A')$ на основе известного метода перекидки получаем, что модель $\overline{\mathcal{M}}$ с константно выделенным множеством A изоморфна счетной элементарной подмодели модели $\mathcal{N}$ с константно выделенным множеством A'. Тогда в силу произвольности выбора множеств A и A' и насыщенности модели $\mathcal{N}$ заключаем, что в модели $\overline{\mathcal{M}}$ реализуется любой тип над конечным множеством и $\overline{\mathcal{M}}$ — насыщенная модель.

Из возможности расширения частичных изоморфизмов $f : B \simeq B'$, сохраняющих формулы соответствующих самодостаточных типов $\Psi(B)$ и $\Psi'(B')$, также следует, что если $\Psi(B) = \Psi'(B)$, то существует автоморфизм модели $\overline{\mathcal{M}}$, расширяющий исходный частичный изоморфизм между B и B'. Следовательно, $\mathrm{tp}_{\overline{\mathcal{M}}}(B) = \mathrm{tp}_{\overline{\mathcal{M}}}(B')$. Из возможности расширения любого типа $\Phi(A)$ до его самодостаточного замыкания $\overline{\Phi}(\overline{A})$, вытекающей из теоремы 2.3.5, следует, что любое конечное множество $A \subseteq M$ расширяется до своего самодостаточного замыкания $\overline{A} \subseteq M$ такого, что тип $\mathrm{tp}(\overline{A})$ содержит тип $\overline{\Phi}(Y)$ для самодостаточного типа $\overline{\Phi}(\overline{A})$ и выполняется $\overline{\Phi}(Y) \vdash \mathrm{tp}(\overline{A})$. $\square$

Из теоремы 2.5.1, теоремы компактности и леммы 1.2.3 вытекает, что для любого самодостаточного класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, обладающего свойством однородного t-амальгамирования, если класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания, то $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая теория $T = \mathrm{Th}(\overline{\mathcal{M}})$ $\Delta(\mathbf{T}_0)$-базируема, где $\Delta(\mathbf{T}_0)$ — множество, состоящее из всевозможных формул, которые получаются навешиванием кванторов существования на конъюнкции $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(X)$ формул $\varphi_i(X) \in \Phi(X)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\Phi(A) \in \mathbf{T}_0$ для некоторого множества A. Таким образом, из теоремы 2.5.1 вытекает

Следствие 2.5.2. *Если P — некоторое свойство формул, сохраняющееся при переходе к булевым комбинациям формул, $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ — самодостаточный класс, обладающий свойством однородного t-амальгамирования, и класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания, то любая формула $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерической теории обладает свойством P тогда и только тогда, когда свойством P обладает любая формула из множества $\Delta(\mathbf{T}_0)$.*

В работе В. Харника и Л. Харрингтона [104] установлено, что любая булева комбинация стабильных формул является стабильной формулой. На основании следствия 2.5.2 получаем

Следствие 2.5.3. *Если $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ — самодостаточный класс, обладающий свойством однородного t-амальгамирования, и класс $\mathbf{K}$ имеет конечные замыкания, то $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$-генерическая теория стабильна тогда и только тогда, когда стабильна любая формула из множества $\Delta(\mathbf{T}_0)$.*

§ 2.6. О свойстве конечных замыканий в слияниях генерических классов

В работе [123] Е. Хрушовский определил механизм слияния двух генерических теорий для получения сильно минимальной теории, имеющей структуру с полями двух разных характеристик. Его техника получила в последнее время существенное развитие в связи с вопросами существования слияний полей и слияний векторных пространств, имеющих различные заданные свойства (см. А. Баудиш, А. Мартин-Пизарро, М. Циглер [88]–[87];

А. Хассон, М. Хилс [109]; К. Холланд [117], [118]; М. Циглер [208]). Рассмотренные в параграфе 1.2 совмещения и раскраски моделей в случае их счетности и однородности можно проинтерпретировать как частные случаи слияния соответствующих генерических классов.

Как показано в параграфе 2.3, каждый самодостаточный генерический класс порождает операцию самодостаточного замыкания на своей генерической модели. При слиянии генерических классов эти операции посредством транзитивного замыкания расширяются до операции самодостаточного замыкания на генерической модели этого слияния. Тем самым возникает система конечных замыканий, порождающая новую, более общую операцию конечных замыканий.

Поскольку насыщенность генерической модели обусловлена формульной определимостью операции самодостаточного замыкания $\overline{A}$ каждого конечного множества A, возникает естественный вопрос о возможности построения слияния генерических теорий, имеющих формульно определимые операции самодостаточных замыканий, с условием формульной определимости результирующей операции самодостаточного замыкания.

В этом параграфе мы дадим точную формулировку обозначенной проблемы слияния генерических классов и приведем достаточные условия существования таких слияний, при которых все модели имеют конечные замыкания.

Пусть $(\mathbf{T};\leqslant)$ — генерический класс. Будем говорить, что $(\mathbf{T};\leqslant)$ обладает *свойством конечных замыканий*, если конечные замыкания имеет любая модель $(\mathbf{T};\leqslant)$-генерической теории.

Следующая теорема представляет характеризацию свойства конечных замыканий для генерических классов, использующую отношение доминирования.

Теорема 2.6.1. *Генерический класс $(\mathbf{T};\leqslant)$ сигнатуры Σ обладает свойством конечных замыканий тогда и только тогда, когда $(\mathbf{T};\leqslant)$ доминируется некоторым генерическим классом $(\mathbf{T}';\leqslant')$ сигнатуры Σ, удовлетворяющим следующим условиям:*

1) *каждый тип $\Phi(A)$ из класса $\mathbf{T}'$ содержит описание некоторого своего минимального самодостаточного расширения и ограничивается до типа над A из класса $\mathbf{T}$;*

2) *каждый тип* $p(\overline{x}) \in S(\varnothing)$ $(\mathbf{T}';\leqslant')$*-генерической теории расширяется до некоторого типа* $q(\overline{y}) \in S(\varnothing)$, *содержащего некоторый тип* $[\Phi(A)]^A_Y$, *где* Y *— множество координат кортежа* $\overline{y}$, $\Phi(A) \in \mathbf{T}'$.

Доказательство. Предположим, что класс $(\mathbf{T};\leqslant)$ обладает свойством конечных замыканий. Тогда каждое конечное множество в модели $(\mathbf{T};\leqslant)$-генерической теории T расширяется до самодостаточного множества. Из счетности множества всех типов $[\Phi(A)]^A_X$, соответствующих типам $\Phi(A) \in \mathbf{T}$, вытекает, что всевозможные попарно несовместные расширения типов $\Phi(A)$ до типов $\Psi(A)$, содержащих описания их самодостаточных расширений, формируют искомый генерический класс $(\mathbf{T}';\leqslant')$, в котором отношение $\leqslant'$ наследует отношение $\leqslant$.

Обратно, предположим, что генерический класс $(\mathbf{T};\leqslant)$ доминируется некоторым генерическим классом $(\mathbf{T}';\leqslant')$ той же сигнатуры и таким, что каждый тип $\Phi(A)$ из класса $\mathbf{T}'$ содержит описание некоторого своего минимального самодостаточного расширения и ограничивается до типа над A из класса $\mathbf{T}$, а каждый тип $p(\overline{x}) \in S(\varnothing)$ $(\mathbf{T}';\leqslant')$-генерической теории T расширяется до некоторого типа $q(\overline{y}) \in S(\varnothing)$, содержащего некоторый тип $[\Phi(A)]^A_Y$, где Y — множество координат кортежа $\overline{y}$, $\Phi(A) \in \mathbf{T}'$. Тогда $(\mathbf{T}';\leqslant')$-генерическая модель является $(\mathbf{T};\leqslant)$-генерической. Поскольку в каждом типе $p \in S(T)$ содержится информация о существовании самодостаточных расширений его реализаций, имеет место свойство конечных замыканий для генерического класса $(\mathbf{T};\leqslant)$. $\square$

На основании условия 2 теоремы 2.6.1 из наличия свойства конечных замыканий для класса $(\mathbf{T};\leqslant)$ вытекает счетность числа ограничений типов $q(\overline{y}) \in S(\varnothing)$ на типы $[\Phi(A)]^A_Y$.

Генерический класс $(\mathbf{T}';\leqslant')$, о котором идет речь в теореме 2.6.1, называется *генерическим классом, свидетельствующем о свойстве конечных замыканий для класса* $(\mathbf{T};\leqslant)$. Подобное добавление внешней информации о свойствах типов данного генерического класса $(\mathbf{T};\leqslant)$, образующее *обогащение* генерического класса, будем также называть *свидетельством* о соответствующем свойстве.

Пусть $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$, $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ — генерические классы сигнатур Σ_0, Σ_1 и Σ_2 соответственно, $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\leqslant_0 = \leqslant_1 \cap \leqslant_2$. *Слиянием* или *сплавом* классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ над классом

$(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$ называется генерический класс $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ сигнатуры $\Sigma_1\cup\Sigma_2$, для которого $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)\restriction\Sigma_i=(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$, $i=1,2$. При этом $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерическая модель (теория) называется *слиянием* или *сплавом* $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$-генерической и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$-генерической моделей (теорий).

Слияния генерических классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ над $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$ будем обозначать через

$$(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2).$$

Слияние $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$-генерической модели $\mathcal{M}_1$ (теории T_1) и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$-генерической модели $\mathcal{M}_2$ (теории T_2) над $(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)$-генерической моделью $\mathcal{M}_0$ (теорией T_0) обозначается через $\mathcal{M}_1\,\mathcal{F}_{\mathcal{M}_0}\,\mathcal{M}_2$ ($T_1\,\mathcal{F}_{T_0}\,T_2$).

Очевидно, что слияние классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ может не существовать (если, например, цепь самодостаточных замыканий данного множества относительно $\leqslant_1$ и $\leqslant_2$ не стабилизируется), а если существует, то, вообще говоря, определяется неоднозначно. При этом наличие свойства конечных замыканий или однородного t-амальгамирования для каждого из классов $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ не влечет выполнение соответствующего свойства для слияния.

Кроме того заметим, что свойство конечных замыканий может выполняться как при наличии единых оценок мощностей замыканий в зависимости от мощностей исходных конечных множеств, так и в случае отсутствии этих оценок при условии, что мощность и структура замыкания описана в типе любого данного конечного множества. Генерические классы, имеющие указанные мощностные оценки будем называть PE-*классами*, а генерические классы без таких оценок — NPE-*классами*.

PE-Классами являются все примеры генерических классов, подобных примерам Хрушовского, порождаемых неотрицательными предразмерностными функциями δ и имеющих насыщенные генерические модели (см. обзоры Дж. Болдуин [73], [75]; Б. Пуаза [174]), а генерические классы свободных ациклических (о них пойдет речь в третьей главе) и кубических теорий, являющиеся NPE-классами, описаны в работах автора [51] и [59].

На основании теоремы 2.6.1 свойство конечных замыканий для слияний генерических классов очевидным образом характеризуется в терминах обогащений генерических классов.

Пусть $\mathcal{M}_i$ — $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$-генерические модели, $i=0,1,2$, $\mathcal{M}_3$ — $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$-генерическая модель, где $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$ и $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$ — самодостаточные генерические классы.

Очевидно, что модель $\mathcal{M}_0$ элементарно вложима в модели $\mathcal{M}_1\upharpoonright\Sigma_0$ и $\mathcal{M}_2\upharpoonright\Sigma_0$, а модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — в модели $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_1$ и $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_2$ соответственно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathcal{M}_0$ — элементарная подмодель моделей $\mathcal{M}_1\upharpoonright\Sigma_0$ и $\mathcal{M}_2\upharpoonright\Sigma_0$, а $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в свою очередь являются элементарными подмоделями моделей $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_1$ и $\mathcal{M}_3\upharpoonright\Sigma_2$, и при этом $\mathcal{M}_3=\mathcal{M}_1\,\mathcal{F}_{\mathcal{M}_0}\,\mathcal{M}_2$.

Обозначим через Cl_i операции самодостаточных замыканий в моделях $\mathcal{M}_i$, $i=1,2,3$.

Очевидно, что для любого конечного множества $A\subseteq M_3$ справедливо соотношение $\mathrm{Cl}_3(A)\supseteq\bigcup\limits_{n\in\omega}A_n$, где $A_0=A$, $A_{n+1}=\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_2(A_n))$. Более того, в силу конечности множества $\mathrm{Cl}_3(A)$ цепь множеств A_n, $n\in\omega$, стабилизируется, начиная с некоторого n. Это число будем называть *итерационным числом* и обозначать через $n_A(\mathcal{M}_3)$ или просто n_A.

При наличии равенства $\mathrm{Cl}_3(A)=\bigcup\limits_{n\in\omega}A_n$ для любого конечного множества $A\subseteq M_3$ будем говорить, что операция Cl_3 *порождается* операциями Cl_1 и Cl_2 и писать $\mathrm{Cl}_3=\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$.

Заметим, что условия совпадения или несовпадения операторов Cl_3 и $\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$ свидетельствуются некоторым обогащением данного слияния генерических классов.

Слияния генерических классов в стиле Хрушовского (*сплавы Хрушовского*) (см. Е. Хрушовский [123]; А. Баудиш, А. Мартин-Пизарро, М. Циглер [88]–[87]; А. Хассон, М. Хилс [109]; К. Холланд [117], [118]; М. Циглер [208]), определяемые неотрицательными линейными предразмерностными функциями δ_i классов $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$, $i=0,1,2$, с неотрицательными линейными предразмерностными функциями слияния

$$\delta(A)=\delta_1(A)+\delta_2(A)-\delta_0(A),$$

вообще говоря, не имеют замыкания вида $\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$, поскольку замкнутые относительно Cl_1 и Cl_2 множества (с неуменьшаемыми значениями $\delta_1(A)$ и $\delta_2(A)$) могут быть незамкнуты относительно Cl_3 (суммарное число весов связей относительно $\delta_1(A)$

и $\delta_2(A)$ может превосходить число элементов учитываемых при подсчете $\delta(A)$). При этом, итерационные числа n_A могут быть неограниченными: $\sup\{n_A\} = \infty$.

Теории *графов Хервига* [113] и теории орграфов, о которых пойдет речь в четвертой главе, также можно рассматривать как сплавы Хрушовского. При этом, счетная графовая сигнатура, снабженная весами ребер или дуг, позволяет проинтерпретировать эти теории T как слияния счетного множества теорий T_k сигнатур $\{I_k^{(2)}\}$, $k \in \omega$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Cl}_T \neq \langle \mathrm{Cl}_k \rangle_{k\in\omega}$, где Cl_T — самодостаточное замыкание в генерической модели теории T, а Cl_k — самодостаточные замыкания в генерических моделях теорий T_k, $k \in \omega$.

Несущественные совмещения $\mathcal{M}_3$ моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ с тождественными замыканиями Cl_1 и Cl_2 порождают тождественное замыкание Cl_3. Другие примеры слияний генерических классов с условием $\mathrm{Cl}_3 = \langle \mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2 \rangle$ представлены в третьей главе.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать операции замыкания Cl_3, порожденные операциями Cl_1 и Cl_2. Зафиксируем некоторое слияние генерических классов

$$(\mathbf{T}_3; \leqslant_3) \rightleftharpoons (\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\, \mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\, (\mathbf{T}_2; \leqslant_2).$$

Следующее утверждение представляет очевидную (в силу теоремы компактности) характеризацию сохранения свойства конечных замыканий при переходе от классов $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$ к классу $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$.

Предложение 2.6.2. *Генерический класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *не обладает свойством конечных замыканий тогда и только тогда, когда в* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$*-генерической модели найдется последовательность* A_n, $n \in \omega$, *равномощных конечных множеств, у которых замыкания* $\mathrm{Cl}_3(A_n)$ *получаются применением не менее* n *итераций относительно* Cl_1 *и* Cl_2, *и описание неограниченного числа итераций для указанных множеств совместно с* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$*-генерической теорией.*

В качестве иллюстрации приведем пример слияния $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ генерических классов, для которого выполняется $\mathrm{Cl}_3 = \langle \mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2 \rangle$ и не имеет место свойство конечных замыканий.

П р и м е р 2.6.1. Пусть $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$ — генерические классы графовых сигнатур $\{Q_i^{(2)}\}$, $i = 1, 2$, типы которых описывают попарно непересекающиеся ребра так, что каждая вершина либо изолирована, либо принадлежит ровно одному ребру, не являющемуся петлей. При этом потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

1) число ребер и число изолированных вершин не ограничены;

2) каждый конечный граф с заданным числом ребер и с заданным числом изолированных вершин представлен некоторым типом из $\mathbf{T}_i$;

3) если вершина a принадлежит множеству A, где $\Phi(A) \in \mathbf{T}_i$ и в описании $\Phi(A)$ указано, что a принадлежит ребру $[a, b]$, то $b \in A$;

4) отношения $\leqslant_1$ и $\leqslant_2$ совпадают с отношениями включения.

Заметим, что самодостаточное замыкание любого конечного множества A в $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$-генерической модели получается добавлением к каждому концу ребра, лежащему в A, другого конца этого ребра.

Определим теперь слияние генерических классов $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)$ и $(\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$, позволив каждой вершине быть либо изолированной, либо принадлежать одному ребру, либо принадлежать двум ребрам разных цветов (Q_1 и Q_2), так, чтобы в описаниях типов содержалась информация лишь о *конечных* цепях, но имеющих любую заданную длину.

Самодостаточными множествами $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической модели являются конечные множества, замкнутые относительно добавления противоположных концов ребер. Вместе с тем, наличие неограниченных цепей означает существование счетной модели $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической теории, имеющей бесконечную цепь. Никакой элемент этой цепи не содержится в самодостаточном множестве, которое по определению должно быть конечным. $\square$

При практическом построении операции Cl_3 с нетождественными замыканиями Cl_1 и Cl_2 и сохранением свойства конечных замыканий уместно пользоваться *принципом минимизации итераций*, или MI-*принципом*, при котором итерационные числа n_A минимальны. Эта минимизация может *мажорироваться* оценками f чисел n_A в зависимости от мощностей $|A|$: $n_A \le f(|A|)$. Если существует *мажорирующая оценка числа итераций* f для всех множеств A, входящих в самодостаточные типы $\Phi(A) \in \mathbf{T}_3$, сохраняющаяся при переходе к самодостаточным амальгамам в классе $\mathbf{T}_3$, то эта оценка будет иметь место во всех моделях $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерической теории. Из наличия мажорирующей оценки для генерического класса $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ вытекает свойство конечных замыканий для этого класса. Тем самым, справедливо следующее

Предложение 2.6.3. *Пусть класс* $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ *совпадает с генерическим классом* $(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2)$, $\mathrm{Cl}_3=\langle\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2\rangle$, *классы* $(\mathbf{T}_i;\leqslant_i)$ *обладают свойством конечных замыканий,* $i=1,2$*, и существует мажорирующая оценка числа итераций для класса* $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$*. Тогда класс* $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$ *обладает свойством конечных замыканий.*

Укажем достаточное условие существования минимальной мажорирующей оценки ($n_A\equiv 1$) для слияния

$$(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)\rightleftharpoons(\mathbf{T}_1;\leqslant_1)\,\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0;\leqslant_0)}\,(\mathbf{T}_2;\leqslant_2),$$

при котором замыкания Cl_1 и Cl_2 могут быть одновременно нетождественными.

Предположим, что на носителе $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерической модели $\mathcal{M}_3$ можно определить (не обязательно формулой) отношение эквивалентности E, удовлетворяющее следующим условиям для любого конечного множества $A\subseteq M_3$:

1) $\mathrm{Cl}_1(A)=\bigcup\limits_{a\in A}\mathrm{Cl}_1(A\cap E(a))$;

2) $\mathrm{Cl}_2(C)=C$ для любого множества C, удовлетворяющего условию $\mathrm{Cl}_2(A)\subseteq C\subseteq\bigcup\limits_{a\in\mathrm{Cl}_2(A)}E(a)$.

Тогда будем говорить, что $(\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2)$ — E-*ступенчатая специальная система замыканий с условием минимальности*, или ESSM-*система.*

Покажем, что при наличии ESSM-системы $(\mathrm{Cl}_1,\mathrm{Cl}_2)$ существует минимальная мажорирующая оценка числа итераций для самодостаточного класса $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$. Действительно, пусть A — конечное множество в модели $(\mathbf{T}_3;\leqslant_3)$-генерической теории. Тогда множество $B\rightleftharpoons\mathrm{Cl}_1(\mathrm{Cl}_2(A))$ Cl_1-замкнуто, поскольку операция Cl_1 транзитивна, а Cl_2-замкнутость множества B вытекает из того, что $B\subseteq\bigcup\limits_{a\in\mathrm{Cl}_2(A)}E(a)$.

Следующее обобщение понятия ESSM-системы гарантирует существование мажорирующей оценки числа итераций для слияния $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$.

Предположим, что на носителе $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической модели $\mathcal{M}_3$ можно определить (не обязательно формулой) отношение эквивалентности E, удовлетворяющее следующим условиям для любого конечного множества $A \subseteq M_3$, где $\mathcal{M}_3 \models \Phi(A)$ для некоторого типа $\Phi(A) \in \mathbf{T}_3$:

1) $\mathrm{Cl}_1(A) = \bigcup\limits_{a \in A} \mathrm{Cl}_1(A \cap E(a))$;

2) если $C \subseteq \bigcup\limits_{a \in \mathrm{Cl}_2(A)} E(a)$ и $\mathrm{Cl}_2(C) \subseteq \bigcup\limits_{a \in \mathrm{Cl}_2(A)} E(a)$, то $\mathrm{Cl}_2(C) = C$;

3) существует конечное число m_A E-классов $E_1, \ldots, E_{m_A}$, описанное некоторой формулой из $\Phi(A)$ и такое, что $\mathrm{Cl}_3(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m_A} E_i$.

Тогда будем говорить, что $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ — *E-ступенчатая специальная система замыканий*, или ESS-*система*.

Покажем, что при наличии ESS-системы $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ существует минимальная мажорирующая оценка числа итераций для самодостаточного класса $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$. Действительно, пусть A — конечное множество в модели $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$-генерической теории. Тогда число итераций ограничивается значением $m_A + 1$, поскольку каждая итерация определяет подмножество $\bigcup\limits_{i=1}^{m_A} E_i$, а при стабилизации числа E-классов, содержащих результат двух последовательных итераций, в силу условий 1 и 2 получается одновременно Cl_1- и Cl_2-замкнутое множество.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.6.4. *Пусть класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *совпадает с генерическим классом* $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\mathcal{F}_{(\mathbf{T}_0; \leqslant_0)}(\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$, $(\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2)$ — ESS-*система, и классы* $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$, $i = 1, 2$, *обладают свойством конечных замыканий. Тогда класс* $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$ *обладает свойством конечных замыканий.*

Генерический класс $(\mathbf{T}_3; \leqslant_3)$, о котором идет речь в теореме 2.6.4, обозначим через $(\mathbf{T}_1; \leqslant_1)\, \mathcal{F}^{\mathrm{ESS}}_{(\mathbf{T}_0; \leqslant_0)}\, (\mathbf{T}_2; \leqslant_2)$.

Пусть $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$, $(\mathbf{T}'_i; \leqslant'_i)$, $i = 1, \ldots, n$, — генерические классы, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $(\mathbf{T}'_1; \leqslant'_1) = (\mathbf{T}_1; \leqslant_1)$;

2) $(\mathbf{T}'_{i+1}; \leqslant'_{i+1}) = (\mathbf{T}'_i; \leqslant'_i)\, \mathcal{F}^{\mathrm{ESS}}_{(\mathbf{T}'_i; \leqslant'_i) \cap (\mathbf{T}_i; \leqslant_i)}(\mathbf{T}_i; \leqslant_i), \quad i = 1, \ldots, n-1$.

Генерический класс $(\mathbf{T}'_n; \leqslant'_n)$ обозначим через

$$(\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}})_{i=1}^{n}(\mathbf{T}_i; \leqslant_i).$$

Из теоремы 2.6.4 вытекает, что свойство конечных замыканий сохраняется при конечном итерировании процессов построения генерических классов на основе ESS-систем, т. е. при переходе от классов $(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$, $i = 1, \ldots, n$, к классу $(\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}})_{i=1}^{n}(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$.

Следствие 2.6.5. *Любой класс вида* $(\mathcal{F}^{\mathrm{ESS}})_{i=1}^{n}(\mathbf{T}_i; \leqslant_i)$ *обладает свойством конечных замыканий.*

Г л а в а 3

ГЕНЕРИЧЕСКИЕ ЭРЕНФОЙХТОВЫ ТЕОРИИ

§ 3.1. Генерическая теория с несимметричным отношением полуизолированности

Приводимое в этом и следующем параграфах построение устанавливает существование властного орграфа $\Gamma_{\rm gen} = \langle X, Q\rangle$ с неограниченными длинами кратчайших маршрутов, который с помощью некоторой несущественной Q-упорядоченной раскраски обогащается до счетной насыщенной модели $\mathcal{M}$ с неглавным властным типом $p_\infty(x) \in S^1(\varnothing)$ таким, что орграф

$$\left\langle p_\infty(\mathcal{M}); R_Q^{p_\infty}(\mathcal{M})\right\rangle$$

изоморфен орграфу $\Gamma_{\rm gen}$, где

$$R_Q^{p_\infty}(\mathcal{M}) = \{(a,b) \in (p_\infty(\mathcal{M}))^2 \mid \mathcal{M} \models Q(a,b)\}.$$

Построение орграфа $\Gamma_{\rm gen}$ будем проводить одновременно с его раскрашиванием. При этом будет использоваться описанный в предыдущей главе синтаксический подход к построению генерических моделей.

Пусть $\Gamma_1 = \langle X_1; Q_1\rangle$ — цветной подграф бесконтурного цветного орграфа $\Gamma_2 = \langle X_2; Q_2\rangle$ с раскраской ${\rm Col} : X_2 \to \omega \cup \{\infty\}$, a и b — вершины из X_1, S — (a,b)-маршрут, не лежащий целиком в Γ_1. Маршрут S называется *внешним* (над Γ_1), если лишь концы из S принадлежат X_1. Обозначим через $W(\Gamma_1,\Gamma_2)$ множество троек (a,b,n), $a,b\in X_1$, $n\in\omega\setminus\{0,1\}$, таких, что элементы a и b связаны в Γ_2 кратчайшим (a,b)-маршрутом длины n, и при этом любой кратчайший (a,b)-маршрут является внешним над Γ_1. Тройка $\langle X_1,Q_1,W_1\rangle$, где $W_1 = W(\Gamma_1,\Gamma_2)$, называется *$c_0$-подграфом* орграфа Γ_2, если множество вершин X_1 конечно.

Отношение "быть c_0-подграфом" обозначим через $\subseteq_{c_0}$, т. е. при наличии множества W_1 будем писать $\langle\Gamma_1,W_1\rangle \subseteq_{c_0} \Gamma_2$. Система $\langle\Gamma_1,W_1\rangle$ часто будет рассматриваться самостоятельно, называться *c-графом* и обозначаться также через $\langle X_1,Q_1,W_1\rangle$, где $\Gamma_1 = \langle X_1;Q_1\rangle$. При этом множество X_1 будет называться *носителем* c-графа $\langle\Gamma_1,W_1\rangle$.

Для c-графа $\Gamma_1 = \langle X_1,Q_1,W_1\rangle$ обозначим через $cc(\Gamma_1)$ минимальный орграф $\Gamma\supseteq\Gamma_1$, содержащий для каждой тройки $(a,b,n)\in W_1$ кратчайший (a,b)-маршрут длины n и такой, что каждая вершина из $\Gamma\setminus\Gamma_1$ имеет степень 2.

Определим отношение $\subseteq_c$ на классе c-графов. c-Граф $\tilde\Gamma_1 = \langle X_1,Q_1,\,W_1\rangle$ называется *c-подграфом* c-графа $\tilde\Gamma_2 = \langle X_2,Q_2,W_2\rangle$ и пишем $\tilde\Gamma_1\subseteq_c\tilde\Gamma_2$, если $X_1\subseteq X_2$, $Q_1 = Q_2\cap(X_1)^2$ и $W_1 = W(\tilde\Gamma_1,cc(\tilde\Gamma_2))$.

Очевидно, что отношение $\subseteq_c$ образует частичный порядок на любом множестве c-графов.

В дальнейшем в этом параграфе через $\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots$ (возможно с индексами) будем обозначать c-графы, через $A,B,\ldots$ — их соответствующие носители. При этом пустое множество $\varnothing$ считается носителем c-графа, имеющего вид $\langle\varnothing,\varnothing,\varnothing\rangle$. Запись $\mathcal{A}\subseteq_c\mathcal{N}$ будет часто использоваться также вместо записи $\mathcal{A}\subseteq_{c_0}\mathcal{N}$.

Обозначим через $\mathbf{K}^*$ класс всех c-графов $\mathcal{A} = \langle A,Q_\mathcal{A},W_\mathcal{A}\rangle$ таких, что для любых вершин $a,b\in A$ существование (a,b)-маршрута (в графе $\langle A;Q_\mathcal{A}\rangle$ или в виде условия $(a,b,n)\in W_\mathcal{A}$) влечет неравенство $\mathrm{Col}(a)\le\mathrm{Col}(b)$.

Очевидно, что любой c-подграф c-графа из класса $\mathbf{K}^*$ также является c-графом из класса $\mathbf{K}^*$.

Обозначим через $\mathbf{K}$ класс всех цветных бесконтурных орграфов, у которых каждый c-подграф принадлежит классу $\mathbf{K}^*$.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_0-подграфы орграфа $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}$, то множества $A\cap B$ и $A\cup B$ являются носителями c_0-подграфов орграфа $\mathcal{N}$, которые будем обозначать через $\mathcal{A}\cap_\mathcal{N}\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\cup_\mathcal{N}\mathcal{B}$ соответственно.

Очевидно, что значение $\mathcal{A}\cap_{\mathcal{N}}\mathcal{B}$ не зависит от выбора орграфа $\mathcal{N}$, а значение $\mathcal{A}\cup_{\mathcal{N}}\mathcal{B}$ может меняться при смене орграфа $\mathcal{N}$. В дальнейшем в вышеуказанных записях мы будем опускать индекс $_{\mathcal{N}}$, если из контекста будет ясно о каком орграфе идет речь.

Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}=\langle B,Q_{\mathcal{B}},W_{\mathcal{B}}\rangle$ и $\mathcal{C}=\langle C,Q_{\mathcal{C}},W_{\mathcal{C}}\rangle$ — c-графы, $\mathcal{A}=\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$, то *свободной c-амальгамой* c-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемой через $\mathcal{B}*_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$) называется c-граф $\langle B\cup C,Q_{\mathcal{B}}\cup Q_{\mathcal{C}},W_{\mathcal{B}}\cup W_{\mathcal{C}}\rangle$.

Очевидно, что свободная c-амальгама $\mathcal{B}*_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ существует для любых c-графов $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ с условием $\mathcal{A}=\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$. При этом c-графы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ являются c-подграфами c-графа $\mathcal{B}*_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$.

Разнозначное отображение $f:A\to B$ называется *c-вложением* c-графа $\mathcal{A}=\langle A,Q_{\mathcal{A}},W_{\mathcal{A}}\rangle$ в c-граф $\mathcal{B}=\langle B,Q_{\mathcal{B}},W_{\mathcal{B}}\rangle$ (обозначается $f:\mathcal{A}\to_c\mathcal{B}$), если f — вложение цветного графа $\mathcal{A}=\langle A,Q_{\mathcal{A}}\rangle$ в цветной граф $\mathcal{B}=\langle B,Q_{\mathcal{B}}\rangle$ такое, что $W_{\mathcal{B}}\cap(f(A)\times f(A)\times\omega)=\{(f(a_1),f(a_2),n)\mid(a_1,a_2,n)\in W_{\mathcal{A}}\}$.

c-Графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *c-изоморфными*, если существует c-вложение $f:\mathcal{A}\to_c\mathcal{B}$ с условием $f(A)=B$. При этом отображение f называется *c-изоморфизмом* между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а c-графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — *c-изоморфными копиями*.

Разнозначное отображение $f:A\to N$ называется *c-вложением* c-графа $\mathcal{A}$ в орграф $\mathcal{N}$ (обозначается $f:\mathcal{A}\to_c\mathcal{N}$), если f — c-вложение c-графа $\mathcal{A}$ в c_0-подграф $f(\mathcal{A})$ орграфа $\mathcal{N}$, имеющий носитель $f(A)$.

Лемма 3.1.1. (амальгамационная лемма). Класс $\mathbf{K}^*$ удовлетворяет c-амальгамационному свойству (c-AP), т. е. для любых c-вложений $f_0:\mathcal{A}\to_c\mathcal{B}$ и $g_0:\mathcal{A}\to_c\mathcal{C}$, где $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\in\mathbf{K}^*$, существует c-граф $\mathcal{D}\in\mathbf{K}^*$ и c-вложения $f_1:\mathcal{B}\to_c\mathcal{D}$ и $g_1:\mathcal{C}\to_c\mathcal{D}$ такие, что $f_0\circ f_1=g_0\circ g_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A}\subseteq_c\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\subseteq_c\mathcal{C}$. Очевидно, что в качестве $\mathcal{D}$ годится c-граф $\mathcal{B}*_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{K}_0^*$ подкласс класса $\mathbf{K}^*$, порожденный из множества цветных орграфов $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}=\langle\{0,1,2\},\{(0,1),(0,2),(1,2)\}\rangle$, где $\mathrm{Col}(0)=\alpha$, $\mathrm{Col}(1)=\beta$, $\mathrm{Col}(2)=\gamma$, $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, $\gamma\in\omega\cup\{\infty\}$, операциями взятия c-подграфов, c-изоморфных копий, свободных c-амальгам, операции, позволяющей для любого c-графа $\mathcal{A}$ и любой его пары вершин (a,b), $\mathrm{Col}(a)\leq\mathrm{Col}(b)$, не связанной маршрутами в графе $cc(\mathcal{A})$, добавлять к множеству $W_{\mathcal{A}}$ одну произвольно выбранную тройку (a,b,m), где m —

натуральное число, большее максимальной из длин кратчайших маршрутов в графе $cc(\mathcal{A})$, а также обратной операции, позволяющей удалять произвольную тройку (a, b, m) из множества $W_{\mathcal{A}}$ c-графа $\mathcal{A}$.

Операцию добавления к записям W информации об указанных выше маршрутах назовем операцией *трассировки*, а операцию удаления информации об этих маршрутов — операцией *детрассировки.*

По определению каждый c-граф $\mathcal{A}$ снабжен некоторой раскраской $\mathrm{Col} : A \to \omega \cup \{\infty\}$. Функция $\mathrm{Col}' : A \to \omega \cup \{\infty\}$ называется *допустимой перераскраской* c-графа $\mathcal{A}$, если после замены функции Col на функцию Col' образуется c-граф из класса $\mathbf{K}_0$. c-Граф, получаемый в результате перераскраски, обозначим через $\mathcal{A}(\mathrm{Col}')$.

Лемма 3.1.2. *Если $\mathcal{A}$ — c-граф из класса $\mathbf{K}_0^*$, Col' — его допустимая перераскраска, то c-граф $\mathcal{A}(\mathrm{Col}')$ принадлежит классу $\mathbf{K}_0^*$.*

Доказательство легко проводится индукцией по числу шагов построения c-графа $\mathcal{A}$ из графов $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{K}_0$ класс всех цветных бесконтурных орграфов, у которых каждый конечный подграф образует c-граф из класса $\mathbf{K}_0^*$.

Теорема 3.1.3. *Существует счетный цветной насыщенный орграф $\mathcal{M} \in \mathbf{K}_0$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *если $f : \mathcal{A} \to_c \mathcal{M}$ и $g : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ — c-вложения и $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^*$, то существует c-вложение $h : \mathcal{B} \to_c \mathcal{M}$ такое, что $f = g \circ h$;*

2) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c-изоморфные c-подграфы орграфа $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

3) *раскраска обеднения $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ модели $\mathcal{M}$ до графовой сигнатуры $\Sigma = \{Q\}$ несущественна и Q-упорядочена;*

4) *формула $Q(x, y)$ является главной формулой в теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \upharpoonright Q)$.*

Доказательство. Модель $\mathcal{M}$ строится с помощью амальгамационной леммы в виде объединения c-графов $(\mathcal{A}_n)_{n\in\omega}$, $\mathcal{A}_n \subseteq_c \mathcal{A}_{n+1}$, из класса $\mathbf{K}_0^*$. При этом требуется выполнение следующего свойства: для любого c-графа $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{A}_n$ и любого c-графа $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^*$ с условием $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$ существует копия $\mathcal{C} \subseteq_c \mathcal{M}$

c-графа $\mathcal{B}$ над $\mathcal{A}$, такая, что $\mathcal{C}$ является c-подграфом орграфа $\mathcal{A}_m$ при некотором $m > n$. Более того, цвета элементов из $C \setminus A$ при взятии графовых копий над A распределяются произвольным допустимым способом, т. е. так, чтобы для любых вершин $a, b \in C$ из существования (a, b)-маршрута следовало неравенство $\mathrm{Col}(a) \leq \mathrm{Col}(b)$. Возможность осуществления всевозможных указанных распределений цветов вытекает из леммы 3.1.2.

Из счетности числа требований следует существование счетной модели $\mathcal{M}$, удовлетворяющей всем указанным условиям.

Покажем, что модель $\mathcal{M}$ насыщена. Пусть $\mathcal{M}'$ — ω-насыщенная модель теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{M}$, $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{M}'$ и $f : \mathcal{A} \to_c \mathcal{A}'$ — c-изоморфизм. Если $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{B}' \subseteq_c \mathcal{M}'$, то из конструкции модели $\mathcal{M}$ следует существование c-изоморфной копии $\mathcal{B}$ c-графа $\mathcal{B}'$ над $\mathcal{A}'$, реализующейся над $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$. Это означает, что существует c-изоморфизм $g : \mathcal{B} \to_c \mathcal{B}'$, расширяющий c-изоморфизм f.

Пусть теперь $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{M}$, X и Y — непересекающиеся множества переменных, биективно соответствующие множествам A и $B \setminus A$, $\varphi_n(X)$ (соответственно $\psi_n(X, Y)$), $n \in \omega$, — формула, описывающая

а) конечные цвета элементов из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$);

б) отрицания цветов, не превосходящих n, для элементов из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$) бесконечного цвета;

в) существование и длины маршрутов, связывающих элементы из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$);

г) отсутствие связывающих элементы из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$) маршрутов длины, не превосходящей n, если элементы маршрутами не связаны.

Тогда в силу конструкции модели $\mathcal{M}$ справедливо

$$\mathcal{M} \models \forall X\, (\varphi_n(X) \to \exists Y\, \psi_n(X, Y)),$$

и, значит,

$$\mathcal{M}' \models \forall X\, (\varphi_n(X) \to \exists Y\, \psi_n(X, Y)).$$

Отсюда следует, что множество формул $\{\psi_n(A', Y) \mid n \in \omega\}$ локально выполнимо в $\mathcal{M}'$ и, следовательно, выполнимо в $\mathcal{M}'$ в силу ω-насыщенности модели $\mathcal{M}'$. Это означает, что найдется c-граф $\mathcal{B}' \subseteq_c \mathcal{M}'$, где $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{B}'$, и c-изоморфизм $g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, расширяющий c-изоморфизм f.

Из доказанной возможности расширений любых c-изоморфизмов $f : \mathcal{A} \to_c \mathcal{A}'$ на основе известного метода перекидки получаем, что модель $\mathcal{M}$ с выделенными константами, образующими носитель c-графа $\mathcal{A}$, изоморфна счетной элементарной подмодели модели $\mathcal{M}'$ с выделенными константами, образующими носитель c-графа $\mathcal{A}'$. Тогда в силу произвольности выбора c-изоморфных c-графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ и насыщенности модели $\mathcal{M}'$ заключаем, что в модели $\mathcal{M}$ реализуется любой тип над конечным множеством, $\mathcal{M}$ — насыщенная модель и теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ мала.

Из возможности расширения c-изоморфизмов c-графов, лежащих в насыщенных моделях, также следует, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c-изоморфные c-подграфы цветного орграфа $\mathcal{M}$, то существует автоморфизм модели $\mathcal{M}$, расширяющий исходный c-изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$.

Поскольку тип любого c-графа из $\mathcal{M}$ определяется формулами, содержащими не более двух свободных переменных и описывающими цвета элементов, а также существование маршрутов между элементами, раскраска орграфа $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ несущественна. Из неубывания номеров цветов при движении по маршрутам следует Q-упорядоченность раскраски.

Если в модели $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ элементы a и b связаны дугой, то тип $\mathrm{tp}(a\,\hat{}\,b)$ определяется формулой $Q(x, y)$ и, следовательно, $Q(x, y)$ — главная формула теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \upharpoonright Q)$. $\square$

Отметим, что доказательство теоремы 3.1.3 по существу повторяет доказательство теоремы 2.5.1 применительно к генерическому классу $\mathbf{T}_0$ типов, соответствующих c-графам. При этом, установлено, что класс $\mathbf{T}_0$ обладает свойством однородного t-амальгамирования.

Теория $T_0 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ цветного орграфа, построенного при доказательстве теоремы 3.1.3, называется $\mathbf{K}_0^*$*-генерической теорией*, а ее счетная насыщенная модель $\mathcal{M}$ — $\mathbf{K}_0^*$*-генерической моделью*.

Из конструкции теории T_0 следует, что для любой модели $\mathcal{M}'$ теории T_0 из $\mathcal{M}' \models Q(a, b)$ следует $(a, b) \in \mathrm{IECT}_{\mathcal{M}'}$, т. е. тип $\mathrm{tp}_{x\,\hat{}\,y}(a\,\hat{}\,b)$ определяется формулой $Q(x, y)$, а также цветами элементов a и b. Таким образом, из предложения 1.2.13 и теоремы 3.1.3 вытекает

Следствие 3.1.4. *Отношение полуизолированности* $\mathrm{SI}_{p_\infty(x)}$ *несимметрично.*

В дальнейшем мы установим, что орграф $\Gamma_{\mathrm{gen}} \rightleftharpoons \mathcal{M} \upharpoonright Q$ обладает свойствами, указанными в начале настоящего параграфа.

Пусть $\mathcal{A}$ — c-подграф модели $\mathcal{M}$, a, b — элементы из A. Рассмотрим c-граф $\mathcal{B}$, полученный добавлением к c-графу $\mathcal{A}$ элемента c такого, что $\mathrm{Col}(c) \leq \min\{\mathrm{Col}(a), \mathrm{Col}(b)\}$, а также добавлением дуг (c, a) и (c, b). Очевидно, что c-граф $\mathcal{B}$ принадлежит классу $\mathbf{K}_0^*$ и его копия расширяет c-граф $\mathcal{A}$ в модели $\mathcal{M}$. Тогда выполняется

$$T_0 \vdash \forall x, y\, (\mathrm{Col}_k(x) \wedge \mathrm{Col}_m(y) \to \exists^{\geq\omega} z\, (\mathrm{Col}_n(z) \wedge Q(z, x) \wedge Q(z, y)))$$

для любых k, m, n с условием $n \leq \min\{k, m\}$. В частности, если a и b — реализации типа $p_\infty(x)$, то найдется реализация $c \models p_\infty$ такая, что $\models Q(c, a) \wedge Q(c, b)$. Следовательно, орграф $\Gamma_\infty = \left\langle p_\infty(M); R_Q^{p_\infty}(\mathcal{M}) \right\rangle$ обладает свойством попарного пересечения. Транзитивность группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_\infty)$ очевидна. Формула $R_Q^{p_\infty}(x, y)$ является главной в теории $\mathrm{Th}(\Gamma_\infty)$ по теореме 3.1.3. Из конструкции теории T_0 вытекает равенство $\mathrm{acl}_{\Gamma_\infty}(\{a\}) = \{a\}$ для любого $a \in p_\infty(\mathcal{M})$. Следовательно, Γ_∞ — властный орграф.

По конструкции орграф Γ_∞ изоморфен орграфу Γ_{gen} и последний также является властным орграфом. Заметим также, что в силу конструкции орграф $\Gamma_{\mathrm{gen}}^{-1} = \langle M; Q^{-1}\rangle$ изоморфен орграфу Γ_{gen}.

Таким образом, справедливо

Следствие 3.1.5. *Орграфы* Γ_{gen} *и* $\Gamma_{\mathrm{gen}}^{-1}$ *являются властными.*

В силу конструкции модели $\mathcal{M}$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ найдутся элементы $b_i \in Q(a_i, \mathcal{M})$, $i = 1, \ldots, n$, попарно несравнимые относительно $\bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n$. Из определения класса $\mathbf{K}_0^*$ следует существование элемента $c \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} Q(b_i, \mathcal{M})$ и, значит, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Q^2(a_i, \mathcal{M}) \neq \varnothing$. По теореме компактности, а также в силу бесконтурности орграфа с отношением Q^2 найдется последовательность $(a_n)_{n\in\omega}$ с условием $\models Q^2(a_i, a_j) \Leftrightarrow i < j$. Отсюда и из бесконтурности орграфа Γ_{gen} вытекает, что формула $\varphi(x, y_1\hat{\ }y_2) \rightleftharpoons Q^2(y_1, x) \wedge Q^2(x, y_2)$ имеет свойство дерева (см. [10]) и на основании критерия простоты (см. следствие 2.8.9 в книге Ф. Вагнера [27]) справедливо

Следствие 3.1.6. *Теория* T_0 *не проста.*

Остается открытым вопрос об отсутствии свойства строгого порядка теории T_0. В пользу позитивного ответа на него указывает тот факт, что на универсуме нет бесконечных частичных порядков по отношениям Q^n, а в процессе построения генерической модели используются лишь свободные амальгамы.

Теорема 3.1.7. 1. *Тип q теории T_0 является главным тогда и только тогда, когда любые два различных элемента a_i и a_j из любой реализации $\overline{a}$ типа q соединены некоторым (a_i, a_j)-маршрутом или (a_j, a_i)-маршрутом, и все элементы реализаций типа q имеют конечные цвета.*

2. *Тип q теории T_0 реализуется в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ тогда и только тогда, когда для любой реализации $\overline{a}$ типа q любые два ее различных элемента a_i и a_j соединены некоторым (a_i, a_j)-маршрутом или (a_j, a_i)-маршрутом и выполняются следующее условие: если среди элементов кортежа $\overline{a}$ есть элементы конечного цвета, a_f — элемент конечного цвета, являющийся общим концом маршрутов, связывающих все элементы конечных цветов с элементом a_f, и если среди элементов кортежа $\overline{a}$ есть элементы бесконечного цвета, a_∞ — элемент бесконечного цвета, являющийся общим началом маршрутов, связывающих все элементы бесконечных цветов с элементом a_f, то существует (a_f, a_∞)-маршрут.*

Доказательство. Пусть q — произвольный тип теории T_0, $\overline{a}$ — реализация типа q.

1. Предположим, что q — главный тип. Тогда из неизолированности типа p_∞ следует, что цвета всех элементов $a_i \in \overline{a}$ конечны. Предположим, что существуют различные элементы $a_i, a_j \in \overline{a}$, не связанные ни (a_i, a_j)-маршрутами, ни (a_j, a_i)-маршрутами. Тогда по определению класса $\mathbf{K}_0^*$, начиная с некоторого n, существуют кортежи $\overline{a}^n$, у которых соответствующие элементы a_i^n и a_j^n соединены (a_i^n, a_j^n)-маршрутом длины n и не соединены более короткими маршрутами, а остальные длины кратчайших маршрутных связей те же, что и у элементов $\overline{a}$, и при этом цвета элементов кортежей $\overline{a}^n$ совпадают с соответствующими цветами элементов кортежа $\overline{a}$. Это означает, что тип q не изолируется одной формулой, т. е. не может быть главным.

Предположим теперь, что любые два различных элемента $a_i, a_j \in \overline{a}$ соединены некоторым (a_i, a_j)- или (a_j, a_i)-маршрутом и все элементы из $\overline{a}$ имеют конечные цвета. Тогда в силу пункта 2 теоремы 3.1.3 формула, описывающая цвета элементов, а также длины кратчайших маршрутов, изолирует тип q, т. е. q — главный тип.

2. Предположим, что q — тип, реализующийся в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$, a — реализация типа p_∞, $\varphi(a,\overline{y})$ — совместная формула, для которой выполняется $\varphi(a,\overline{y}) \vdash q(\overline{y})$ и $\models \varphi(a,\overline{a})$. Покажем, что все различные элементы кортежа $a\,\hat{}\,\overline{a}$ попарно связаны некоторыми маршрутами. Действительно, если это не так, т. е. некоторые различные элементы $a_i, a_j \in a\hat{}\overline{a}$ не связаны ни (a_i,a_j)-маршрутами, ни (a_j,a_i)-маршрутами, то по определению класса $\mathbf{K}_0^*$, начиная с некоторого n, существуют кортежи $a^n\,\hat{}\,\overline{a}^n$, у которых соответствующие элементы a_i^n, a_j^n соединены (a_i^n,a_j^n)-маршрутом длины n и не соединены более короткими маршрутами, а остальные длины кратчайших маршрутных связей те же, что и у элементов $a\,\hat{}\,\overline{a}$, и при этом цвета элементов кортежей $a^n\,\hat{}\,\overline{a}^n$ совпадают с соответствующими цветами элементов кортежа $a\hat{}\overline{a}$. В силу элиминации кванторов теории T_0 согласно пункту 2 теоремы 3.1.3 для формулы $\varphi(x,\overline{y})$ справедливо $\models \varphi(a^n,\overline{a}^n)$, начиная с некоторого n. Поскольку $\models p_\infty(a^n)$, условие $\models \varphi(a^n,\overline{a}^n)$ противоречит тому, что $\varphi(a,\overline{y}) \vdash q(\overline{y})$. Таким образом, все различные элементы кортежа $a\,\hat{}\,\overline{a}$ попарно связаны некоторыми маршрутами.

Теперь заметим, что из бесконтурности орграфа $\Gamma_{\rm gen}$ и упорядоченности раскраски следует существование элемента $a_f \in \overline{a}$ максимального конечного цвета среди всех элементов конечного цвета (если элементы конечного цвета существует) и такого, что все маршруты, связывающие элемент a_f с элементами из $\overline{a}$, имеющими конечные цвета, заканчиваются элементом a_f.

Вместе с тем, среди всех элементов из $\overline{a}$, имеющих бесконечный цвет (если такие элементы существуют), найдется элемент a_∞ бесконечного цвета такой, что все маршруты, связывающие a_∞ с остальными элементами бесконечного цвета, начинаются с элемента a_∞.

Осталось заметить, что из упорядоченности раскраски следует существование (a_f,a)-маршрута, а из условия полуизолированности a_∞ над a (поскольку $\mathcal{M}_{p_\infty} = \mathcal{M}_a$) следует существование (a,a_∞)-маршрута. Таким образом, существует (a_f,a_∞)-маршрут, и необходимость условия, описанного в доказываемом утверждении, для реализуемости типа q в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ установлена.

Предположим теперь, что в кортеже $\overline{a}$ все различные элементы попарно связаны маршрутами. Если в $\overline{a}$ нет элементов бесконечного цвета, то в силу пункта 1 тип q является главным и, значит, реализуется в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$. Если $\overline{a}$ содержит элементы бесконечного цвета, то в силу упорядоченности раскраски тип q изолируется множеством формул $p_\infty(y_\infty)$ (где a_∞ — элемент бесконечного цвета из $\overline{a}$, из которого выходят все маршруты, связывающие элемент a_∞ со всеми элементами $\overline{a}$, имеющими бесконечный цвет), а также формулой, описывающей конечные цвета элементов из $\overline{a}$, а также длины кратчайших маршрутов, связывающих элементы из $\overline{a}$. Это означает, что тип q реализуется в модели $\mathcal{M}_{a_\infty}$. $\square$

§ 3.2. Генерические теории с неглавными властными типами

В этом параграфе будет описана конструкция, позволяющая строить теории с неглавными властными типами в виде обогащения теории T_0 цветного орграфа $\mathcal{M}$ из предыдущего параграфа.

Очевидно, что неограниченность длин кратчайших маршрутов влечет существование не p_∞-главного p_∞-типа в теории T_0. В примере 1.3.1 показан механизм реализации не p-главного p-типа в модели $\mathcal{M}_p$. Мы будем пользоваться приведенным в этом примере приемом для нахождения обогащения теории T_0, имеющего властный 1-тип, определяемый множеством $p_\infty(x)$.

Тип $r(y_1,\ldots,y_k)$ из $S(T_0)$ называется (p_∞,y_1)-*главным*, если $p_\infty(y_1)\subseteq r(y_1,\ldots,y_k)$ и для некоторой формулы $\varphi(y_1,\ldots,y_k)\in r$ выполняется $\{\varphi(y_1,\ldots,y_k)\}\cup p_\infty(y_1)\vdash r(y_1,\ldots,y_k)$.

Очевидно, что в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ реализуются в точности такие типы $q(y_2,\ldots,y_k)$ из $S(T_0)$, которые содержатся в (p_∞,y_1)-главных типах $r(y_1, y_2,\ldots,y_k)\in S(T_0)$.

В дальнейшем для превращения типа p_∞ во властный тип мы будем вводить для каждого типа $q(y_2,\ldots,y_k)$, не содержащегося ни в одном (p_∞,y_1)-главном типе $r(y_1,y_2,\ldots,y_k)$, новый k-местный предикат R_q так, чтобы множество $\{R_q(y_1,\ldots,y_k)\}\cup p_\infty(y_1)$ было совместно и выполнялось $\{R_q(y_1,\ldots,y_k)\}\cup p_\infty(y_1)\vdash q(y_2,\ldots,y_k)$.

С этой целью перенумеруем множество $\mathbf{q}$ всех типов $q(y_1,\ldots,y_k)$ кортежей $\overline{a}_q$ с попарно различными координатами, для которых множества элементов из $\overline{a}_q$ содержат не равное единице число элементов конечного цвета и модель $\mathcal{M}_{\overline{a}_q}$ не изоморфна простой модели или модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$: $\mathbf{q} = \{q_m(y_1, \ldots, y_{k_m}) \mid m \in \omega\}$. При этом на основании теоремы 3.1.3 типы $q_m(y_1, \ldots, y_{k_m})$ определяются типами c-изоморфизма $\mathbf{A}_m$ своих реализаций $\overline{a}_m$. Поэтому в дальнейшем типы $q_m(y_1, \ldots, y_{k_m})$ будут отождествляться с типами c-изоморфизма $\mathbf{A}_m$.

Для каждого типа $q_m(\overline{y}) \in \mathbf{q}$ и соответствующего типа c-изоморфизма $\mathbf{A}_m$ зафиксируем изолирующее тип $q_m(\overline{y})$ множество $\Phi_{\mathbf{A}_m}(\overline{y})$ формул $\varphi_n(\overline{y})$, $n \in \omega$, описывающих

а) конечные цвета элементов из $\overline{a}_m$;

б) отрицания цветов, меньших n, для элементов из $\overline{a}_m$, имеющих бесконечный цвет;

в) существование и длины кратчайших маршрутов, связывающих элементы из $\overline{a}_m$;

г) отсутствие связывающих элементы из $\overline{a}_m$ маршрутов длины, меньшей n, если элементы маршрутами не связаны.

Теперь рассмотрим тип c-изоморфизма $\mathbf{A}$ произвольного кортежа $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ множества $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ мощности k, не лежащего в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ и содержащего $s \neq 1$ элементов конечного цвета.[1] Обозначим через $\max_{\mathbf{A}}$ значение $\max\{\mathrm{Col}(a_i) \mid \mathrm{Col}(a_i) \in \omega, a_i \in A\}$, если множество A содержит элементы конечного цвета. В противном случае, т. е. если цвета всех элементов из A бесконечны, положим $\max_{\mathbf{A}} \rightleftharpoons 0$.

Определим $(k+1)$-местные отношения $R_{\mathbf{A}}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\vdash \exists \overline{y}\, R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{n < \max_{\mathbf{A}}} \neg \mathrm{Col}_n(x)$;

2) для любого $n \geq \max_{\mathbf{A}}$ формула $R_{\mathbf{A}}(x, y_1, \ldots, y_k) \wedge \mathrm{Col}_n(x)$ эквивалентна конъюнкции формулы $\varphi_n(\overline{y}) \in \Phi_{\mathbf{A}}(\overline{y})$,[2] и формулы, описывающей следующие свойства:

---

[1] Ограничение $s \neq 1$ вводится лишь для удобства дальнейшего изложения. Оно не умаляет общности рассмотрения типов c-изоморфизма для последующей реализации соответствующих типов в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$, поскольку к любому множеству, имеющему один элемент конечного цвета, можно добавить еще один элемент конечного цвета, а для любых типов q_1 и q_2 из условий $\mathcal{M}_{p_\infty} \models q_2$ и $q_1 \subseteq q_2$ следует $\mathcal{M}_{p_\infty} \models q_1$.

[2] Типы изоморфизма кортежей, реализующих формулу $R_{\mathbf{A}}(a, \overline{y})$, $\mathrm{Col}(a) = n \geq \max_{\mathbf{A}}$, аппроксимируют описание типа c-изоморфизма кортежа $\overline{a}$, которое при $n \to \infty$ соответствует описанию типа c-изоморфизма кортежа $\overline{a}$.

а) если $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\rangle$ (где $i_1 < \ldots < i_r$) — кортеж всех элементов a_i из $\overline{a}$, имеющих бесконечный цвет, $\langle a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}\rangle$ (где $j_1 < \ldots < j_s$) — кортеж всех элементов a_j из $\overline{a}$, имеющих конечные цвета, то существуют элементы $z_0, \ldots, z_{r-1}$ и $u_0, \ldots, u_{s-1}$ такие, что $z_{r-1} = y_{i_r}$, выполняется $Q(z_{m-1}, z_m) \wedge Q(z_{m-1}, y_{i_m})$, $\mathrm{Col}(z_{m-1}) = n$, $m = 1, \ldots, r-1$, $u_{s-1} = y_{j_s}$, выполняется $Q(u_m, u_{m-1}) \wedge Q(y_{j_m}, u_{m-1})$, $m = 1, \ldots, s-1$, $\mathrm{Col}(u_{m-1}) = \max\{\mathrm{Col}(u_m), \mathrm{Col}(y_{j_m})\}$ при $1 < m < s$, $\mathrm{Col}(u_0) = n$ при $s > 1$; если $s = 0$, то $x = z_0$; если $r = 0$, то $x = u_0$; если $r \geq 1$ и $s \geq 2$, то $\vdash Q(x, z_0) \wedge Q(x, u_0)$;

б) в c-графе, состоящем из элементов $x, y_1, \ldots, y_k, z_0, \ldots, z_{r-1}$, $u_0, \ldots, u_{s-1}$, нет дуг кроме дуг, указанных в пункте a и в описании $\mathbf{A}$ для элементов $\overline{y}$, а также нет внешних кратчайших маршрутов длины, не превосходящей n, кроме внешних кратчайших маршрутов, связывающих элементы $\overline{y}$ и описанных в $\mathbf{A}$.[3]

Из пункта 2 вытекает, что если A и A' — множества, несовпадающие или совпадающие, но не являющиеся c-изоморфными при сохранении фиксированных нумераций, то соответствующие отношения $R_{\mathbf{A}}$ и $R_{\mathbf{A}'}$ не пересекаются, начиная с некоторого цвета по первой координате.

Заметим, что предикаты $R_{\mathbf{A}}$, где $\mathbf{A}$ — типы изоморфизмов элементов, имеющих бесконечный цвет, утончают графовую структуру, не увеличивая множества двухместных отношений, определяемых проекциями

$$\exists y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_k\, (R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \wedge \varphi(x)) \tag{3.1}$$

и

$$\exists x, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_k\, (R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \wedge \varphi(x)), \tag{3.2}$$

где $\varphi(x)$ — формула, выделяющая некоторое множество элементов, имеющих конечное или коконечное множество цветов. Действительно, в силу определения отношения $R_{\mathbf{A}}$ любое отношение, соответствующее проекции вида (3.1), определяется формулой, описывающей переходы от x к y_i с помощью некоторых Q-маршрутов. Отношения, соответствующие проекциям вида (3.2),

[3]Это означает, что типы c-изоморфизмов множеств A имеют однозначное расширение до типов c-изоморфизма, включающих элементы $x, z_0, \ldots, z_{r-1}$, $u_0, \ldots, u_{s-1}$, где x удовлетворяет типу p_∞.

определяются формулами, описывающими наличие или отсутствие связей между y_i и y_j с помощью Q-маршрутов некоторой ограниченной длины.

Тот же эффект наблюдается при взятии проекций отношений $R_{\mathbf{A}}$, где $\mathbf{A}$ — типы изоморфизмов элементов, имеющих конечные цвета.

При наличии в кортеже $\overline{a}$ как элементов бесконечного цвета, так и элементов конечных цветов отношение $R_{\mathbf{A}}$ для соответствующего типа изоморфизма $\mathbf{A}$ приводит к образованию новых бинарных отношений посредством формул $\psi(x, y_i)$ вида (3.1), где y_i соответствует элементу некоторого конечного цвета l. При этом, выполнимость или невыполнимость формулы $\psi(a^n, a_i^l)$ на реализациях a^n и a_i^l натуральных цветов n и l соответственно характеризуется соотношением между цветом n и длиной кратчайшего (a_i^l, a_n)-Q-маршрута. Формулы вида (3.2) сохраняют, как замечено выше, прежнюю графовую структуру.

Покажем, что при наличии указанного выше утончения графовой структуры посредством отношений $R_{\mathbf{A}}$, требуемое обогащение можно осуществить новым построением генерической модели $\mathcal{M}$ из c-графов, обогащенных конечными записями о позитивных связях между элементами через промежуточные элементы посредством проекций отношений $R_{\mathbf{A}}$.

Это построение начнем с описания класса $\mathbf{K}_1^*$ конечных структур, снабженных конечными записями о взаимоотношении элементов, удовлетворяющими условиям 1 и 2. Поскольку искомая генерическая модель обогащает $\mathbf{K}_0^*$-генерическую модель, будем считать, что каждое конечное множество A, входящее в $\mathbf{K}_1^*$ и ограниченное на графовую сигнатуру $\{Q\}$ с раскраской Col, образует c-граф $\langle A, Q, W\rangle$ из класса $\mathbf{K}_0^*$. Кроме того, введение отношений $R_{\mathbf{A}_m}$ требует добавления к записи W позитивной информации о взаимоотношении элементов по проекциям $\exists y_{l_1}, \ldots, y_{l_t}\, R_{\mathbf{A}_m}(x, \overline{y})$ в соответствии с пунктом 2.

Перед завершением определения структур класса $\mathbf{K}_1^*$ отметим следующее. Как показано в теореме 3.1.3, тип c-изоморфизма каждого c-графа $\mathcal{A}$ (т. е. информация о цветах элементов и о попарной связи элементов через кратчайшие маршруты) определяет тип множества A в генерической модели. В определении каждого отношения $R_{\mathbf{A}}$ принадлежность каждого набора $a\hat{\ }\overline{a}$ этому отношению задается либо главной формулой, описывающей соотношение между элементами, лежащими в простой модели, либо последовательностью формул (описанных в пункте 2), в которых локально описывается отсутствие связей между какими-то элементами из $\overline{a}$ посредством маршрутов при сохранении фиксированных по длине связей между элементом a и элементами из $\overline{a}$.

Последнее описание, как замечено выше для бинарных отношений, напрямую зависит от соотношения между цветами аппроксимаций a^n (в простой модели) элемента a (эти аппроксимации назовем *источниками*) и длинами кратчайших routes между соответствующими элементами аппроксимаций $\overline{a}^n$ (в простой модели) кортежа $\overline{a}$ (эти аппроксимации назовем *последователями*): если номер цвета источника a^n не превосходит (неограниченных при $n \to \infty$) длин кратчайших routes между элементами последователей $\overline{a}^n$, то при наличии элементов $z_0, \ldots, z_{r-1}, u_0, \ldots, u_{s-1}$, описанных в пункте 2, отношение $R_{\mathbf{A}}$ выполняется, а если номер цвета источника a^n больше какой-то из неограниченных при $n \to \infty$ длин кратчайших маршрутов между элементами последователя $\overline{a}^n$, то при тех же условиях отношение $R_{\mathbf{A}}$ выполняться не будет. В дальнейшем соотношения "номер цвета источника a^n — попарные, неограниченные при $n \to \infty$ длины кратчайших маршрутов между элементами последователя $\overline{a}^n$", а также между источниками и элементами последователей, имеющими конечные цвета, будем для краткости называть *соотношениями* CL.

Поскольку в генерической теории все n-типы определяются 2-типами, описывающими цвета элементов и длины кратчайших маршрутов, соотношения CL можно охарактеризовать формулами $\rho(x, y_i, y_j)$, описывающими следующие условия:

i) возможность прохождения Q-маршрутом от элемента x, соответствующего a^n, к промежуточному элементу z, имеющему тот же цвет, что и x, и находящемся на удалении от элемента x, равном максимальной из длин кратчайших (a^n, a_i^n)-маршрутов и (a^n, a_j^n)-маршрутов, если цвета элементов a_i и a_j бесконечны;

ii) возможность прохождения Q^{-1}-маршрутом от элемента x, соответствующего a^n, к промежуточному элементу z, имеющему тот же цвет, что и x, и находящемся на удалении от элемента x, равном максимальной из длин кратчайших (a_i^n, a^n)-маршрутов и (a^n, a_j^n)-маршрутов, если цвета элементов a_i и a_j конечны;

iii) возможность перехода от промежуточного элемента z к элементам y_i и y_j по некоторому фиксированному трехместному отношению $R_{\mathbf{A}^*}(z, y_i, y_j)$, если цвета элементов a_i и a_j одновременно бесконечны или одновременно конечны;

iv) возможность прохождения Q-маршрутом фиксированной длины от элемента x, соответствующего a^n, к элементу y_i, соответствующего элементу a_j^n, а также отсутствие возможности прохождения Q^{-1}-маршрутом длины, не превосходящей n, от элемента x к элементу y_j, где элемент a_j имеет цвет, меньший n.[4]

Действительно, если набор $a^n \hat{} \, \overline{a}^n$ принадлежит отношению $R_{\mathbf{A}}$, то выполняется условие на соотношение CL. Тогда в силу конструкции генерической модели найдутся промежуточные элементы z, о которых идет речь в описании формул $\rho(x, y_i, y_j)$, имеющие цвет элемента a^n и связанные с y_i и y_j указанными выше отношениями.

Обратно, при наличии для набора $a^n \hat{} \, \overline{a}^n$, описаний фиксированных цветов элементов и длин кратчайших маршрутов, соответствующих отношению $R_{\mathbf{A}}$, а также формул $\rho(x, y_i, y_j)$, из совпадения цветов промежуточных элементов z и элемента x вытекает условие CL. Следовательно, по определению набор $a^n \hat{} \, \overline{a}^n$ принадлежит отношению $R_{\mathbf{A}}$.

В дальнейшем будем считать, что проекции вида (3.1) с элементами y_i, имеющими конечные цвета, также представлены формулами $\rho(x, y_i, y_j)$, и при этом $y_i = y_j$.

Заметим также, что использование различных отношений $R_{\mathbf{A}}$ в формулах ρ эквивалентно использованию фиксированных отношений $R_{\mathbf{A}^*}$, взятие которых зависит лишь от конфигурации цветов и длин кратчайших маршрутов для пар элементов. Таким образом, формулы $\rho(x, y_i, y_j)$ с отношениями $R_{\mathbf{A}^*}$ являются трехместными индикаторами позитивных или негативных вхождений формул $\exists y_{l_1} ... y_{l_t} \, R_{\mathbf{A}_m}(x, \overline{y})$ в типы теории рассматриваемой генерической модели. Эти индикаторы мы присоединим как к описаниям типов c-изоморфизма $\mathbf{A}_m$ при определении самих отношений $R_{\mathbf{A}_m}$ (формулы $\rho(y_i, y_j, y_k)$ или их отрицания конъюнктивно добавляются к формулам $\varphi_n(\overline{y})$), так и к общим описаниям типов кортежей. При этом за счет добавления фор-

[4] Описанное в этом пункте соотношение для (x, y_i, y_j) соответствует проекции некоторого отношения $R_{\mathbf{A}}$, оставляющей свободными координаты x, y_i и y_j.

мул ρ расширяется и сама сигнатура, обусловленная типами c-изоморфизма $\mathbf{A}_m$ с добавлениями формул $\rho^\delta(y_i, y_j, y_k)$, $\delta \in \{0, 1\}$. Эта расширенная сигнатура остается счетной в силу конечного числа вариантов добавления позитивных формул ρ к каждому типу c-изоморфизма.

Окончательно определяем, что класс $\mathbf{K}_1^*$ состоит из всех конечных систем сигнатуры $\mathrm{Col} \cup \{Q\} \cup \{R_{\mathbf{A}_m} \mid m \in \omega\}$, которые получаются из c-графов, принадлежащих классу $\mathbf{K}_0^*$, добавлением согласованных с пунктом 2 отношений $R_{\mathbf{A}_m}$ (с расширенными с помощью формул ρ типами c-изоморфизмов $\mathbf{A}_m$) и всевозможных допустимых формул $\rho(a_i, a_j, a_k)$.

Конечные структуры $\mathcal{A}$ с конечными записями $W_{\mathcal{A}}$, образующие класс $\mathbf{K}_1^*$, называются c_1-*структурами*. Обозначим через $\mathbf{K}_1$ класс всех моделей сигнатуры $\mathrm{Col} \cup \{Q\} \cup \{R_{\mathbf{A}_m} \mid m \in \omega\}$, у которых каждое конечное подмножество образует c_1-структуру из класса $\mathbf{K}_1^*$.

Понятие c_1-*вложения* $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{B}$ для c_1-структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, при котором сохраняется соответствующая запись $W_{\mathcal{A}}$ ($W_{f(\mathcal{A})} = W_{\mathcal{B}} \upharpoonright f(A)$), естественным образом обобщает понятие c-вложения. Тем самым определяется и понятие c_1-вложения $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{N}$ c_1-структуры $\mathcal{A}$ в модель $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}_1$.

c_1-Структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются c_1-*изоморфными*, если существует c_1-вложение $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{B}$ с условием $f(A) = B$.

Теорема 3.2.1. *Существует счетная насыщенная модель $\mathcal{M} \in \mathbf{K}_1$, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *если $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{M}$ и $g : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{B}$ — c_1-вложения и $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_1^*$, то существует c_1-вложение $h : \mathcal{B} \to_{c_1} \mathcal{M}$ такое, что $f = g \circ h$;*

б) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_1-изоморфные c_1-структуры в модели $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

в) *обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры* $\mathrm{Col} \cup \{Q\}$ *является $\mathbf{K}_0^*$-генерической моделью;*

г) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(a, \overline{y})$, где $\models p_\infty(a)$, является главной, и тип c_1-изоморфизма каждой реализации формулы $R_{\mathbf{A}}(a, \overline{y})$ совпадает с типом c_1-изоморфизма $\mathbf{A}$.*

Доказательство существования счетной насыщенной модели $\mathcal{M}$ из класса $\mathbf{K}_1$, удовлетворяющей условиям *а–в*, почти слово в слово повторяет доказательство теоремы 3.1.3. При этом в описание формул $\varphi_n(X)$ и $\psi_n(X, Y)$ для каждой пары вершин (a, b) добавляется следующая информация:

а) позитивная информация о связях троек элементов с помощью формул ρ, если указанные связи в c_1-структурах существуют;

б) отрицание связей троек элементов с помощью формул ρ, в которых длины кратчайших маршрутов до промежуточных элементов z не превосходят n, если указанные связи в c_1-структурах отсутствуют.

Покажем, что для любой реализации a типа p_∞ и любого предикатного символа $R_{\mathbf{A}}$ формула $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ является главной. Пусть $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — произвольные кортежи, для которых $\models R_{\mathbf{A}}(a,\overline{b})\wedge R_{\mathbf{A}}(a,\overline{c})$. Тогда по определению отношения $R_{\mathbf{A}}$ получаем, что c_1-структуры $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, состоящие из элементов $a\,\hat{}\,\overline{b}$ и $a\,\hat{}\,\overline{c}$ будут c_1-изоморфны. Из совпадения типов $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$ и $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(C)$ вытекает существование автоморфизма, фиксирующего элемент a и переводящего $\overline{b}$ в $\overline{c}$. Тем самым, $\mathrm{tp}(\overline{b}/a)=\mathrm{tp}(\overline{c}/a)$ и, следовательно, $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ — главная формула. Совпадение типов c_1-изоморфизма кортежей $\overline{b}$ и $\overline{c}$ с типом c_1-изоморфизма $\mathbf{A}$ следует из определения формулы $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})$. $\square$

Теория $T_1 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$, которая строится для доказательства теоремы 3.2.1, называется $\mathbf{K}_1^*$*-генерической теорией*, а сама счетная насыщенная модель $\mathcal{M}$ — $\mathbf{K}_1^*$*-генерической моделью.*

Поскольку в теории T_1 каждый тип над пустым множеством определяется типом соответствующей c_1-структуры, а для каждого типа q c_1-структуры, не лежащей в простой модели, найдется главная формула $\exists y_{l_1}...y_{l_t} R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ (где $\models p_\infty(a)$), для которой $\exists y_{l_1}...y_{l_t}\ R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})(a,\overline{y})\vdash q$, то в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ реализуются все типы теории T_1. Таким образом, тип $p_\infty(x)$ является властным типом и справедлива следующая

Теорема 3.2.2. *Существует полная теория с неглавным властным типом, обогащающая теорию* T_0.

Укажем требования, приводящие к построению теории $T_2\supset T_0$, в которой все неглавные типы являются властными.

С этой целью переопределим отношения $R_{\mathbf{A}}$, заменив условие 1 на следующее условие:

$$1')\vdash\left(\exists\overline{y}\,R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})\leftrightarrow\bigwedge_{n<\max_{\mathbf{A}}}\neg\mathrm{Col}_n(x)\right)\wedge$$

$$\left(\exists\overline{y}\,(R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})\wedge\varphi_n(\overline{y}))\leftrightarrow\bigwedge_{t<\max\{\max_{\mathbf{A}},n\}}\neg\mathrm{Col}_t(x)\right),\ n\in\omega,$$

а условие 2 на условие $2'$, которое получается из условия 2 заменой формул $\varphi_n(\overline{y})$ на формулы $\varphi_n(\overline{y})\wedge\neg\varphi_{n+1}(\overline{y})$ с внесенными в них формулами ρ.

Повторив описание класса $\mathbf{K}_1^*$ с условиями $1'$ и $2'$, получаем класс $\mathbf{K}_2^*$ счетной сигнатуры, которую с точностью до переименования символов можно считать совпадающей с сигнатурой класса $\mathbf{K}_1^*$. Конечные структуры $\mathcal{A}$ с конечными записями, образующие класс $\mathbf{K}_2^*$, называются *c_2-структурами.* Обозначим через $\mathbf{K}_2$ класс всех моделей сигнатуры $\mathrm{Col}\cup\{Q\}\cup\{R_{\mathbf{A}_m}\mid m\in\omega\}$, у которых каждое конечное подмножество образует c_2-структуру из класса $\mathbf{K}_2^*$. Аналогично понятию c_1-вложения понятие *c_2-вложения* $f:\mathcal{A}\to_{c_2}\mathcal{B}$ для c_2-структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, при котором сохраняется соответствующая запись $W_{\mathcal{A}}$ ($W_{f(\mathcal{A})}=W_{\mathcal{B}}\restriction f(A)$), обобщает понятие c-вложения. Тем самым определяется и понятие c_2-вложения $f:\mathcal{A}\to_{c_2}\mathcal{N}$ c_2-структуры $\mathcal{A}$ в модель $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}_2$.

Теорема 3.2.3. *Существует счетная насыщенная модель $\mathcal{M}\in\mathbf{K}_2$, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *если $f:\mathcal{A}\to_{c_2}\mathcal{M}$ и $g:\mathcal{A}\to_{c_2}\mathcal{B}$ — c_2-вложения и $\mathcal{B}\in\mathbf{K}_2^*$, то существует c_2-вложение $h:\mathcal{B}\to_{c_2}\mathcal{M}$ такое, что $f=g\circ h$;*

б) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_2-изоморфные c_2-структуры в модели $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A)=\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

в) *обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры $\mathrm{Col}\cup\{Q\}$ является $\mathbf{K}_0^*$-генерической моделью;*

г) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$, где $\models p_\infty(a)$, является главной, и тип c_2-изоморфизма каждой реализации формулы $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ совпадает с типом c_2-изоморфизма $\mathbf{A}$;*

д) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$, где $\mathbf{A}$ — тип c_2-изоморфизма кортежа $\overline{a}$, является главной, и каждая реализация формулы $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$ является реализацией типа p_∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о пунктов (а)–(г) повторяет доказательство соответствующих пунктов теоремы 3.2.1.

Докажем пункт (д). Рассмотрим произвольную формулу $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$, где $\mathbf{A}$ — тип c_2-изоморфизма кортежа $\overline{a}$. Покажем, что $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$ — главная формула. Пусть b и c — произвольные элементы, для которых $\models R_{\mathbf{A}}(b,\overline{a}) \wedge R_{\mathbf{A}}(c,\overline{a})$. Тогда по определению отношения $R_{\mathbf{A}}$ получаем, что c_2-структуры $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, состоящие из элементов $b\hat{\ }\overline{a}$ и $c\hat{\ }\overline{a}$ будут c_2-изоморфны. Из совпадения типов $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$ и $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(C)$ вытекает существование автоморфизма, фиксирующего кортеж $\overline{a}$ и переводящего b в c. Тем самым, $\mathrm{tp}(b/\overline{a}) = \mathrm{tp}(c/\overline{a})$ и, следовательно, $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$ — главная формула. Условие $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a}) \vdash p_\infty(x)$ следует из определения формулы $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})$. $\Box$

Теория $T_2 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$, которая строится для доказательства теоремы 3.2.3, называется *$\mathbf{K}_2^*$-генерической теорией*, а сама счетная насыщенная модель $\mathcal{M}$ — *$\mathbf{K}_2^*$-генерической моделью.*

Из пункта (д) теоремы 3.2.3 вытекает, что для каждого неглавного типа $q(\overline{y})$ теории T_2 в модели $\mathcal{M}_q$ реализуется тип p_∞ и, следовательно, каждый неглавный тип является властным. Более того, в силу предложения 1.1.3 введение предикатов $R_{\mathbf{A}}$ позволяет для любого кортежа $\overline{a}$, имеющего некоторый тип c_2-изоморфизма $\mathbf{A}_m$, найти реализацию a типа $p_\infty(x)$ такую, что $\models R_{\mathbf{A}}(a,\overline{a})$, и, следовательно, в силу предложения 1.1.3 модель $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ совпадает с моделью $\mathcal{M}_a$. Таким образом, все простые модели над кортежами, реализующими неглавные типы, изоморфны модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.4. *Существует малая теория T_2, обогащающая теорию T_0 и удовлетворяющая условию $|\mathrm{RK}(T_2)| = 2$.*

§ 3.3. Теория с тремя счетными моделями

Укажем сначала общие принципы обогащения теории T_2, приводящие к построению теории T с $|\mathrm{RK}(T)| = 2$ и свойством (CEP).

Пусть $a_0, a_0', a_1, a_1', \ldots, a_n, a_n', a_n'', b_0, b_1$, где $b_0 \neq b_1$, — реализации властного типа $p_\infty(x)$ теории T_2 такие, что $\mathcal{M}_{a_i} = \mathcal{M}_{a_i'}$, $i = 0, \ldots, n$, $\mathcal{M}_{a_n} = \mathcal{M}_{a_n''}$, $\mathcal{M}_{a_i} \prec \mathcal{M}_{a_{i+1}}$, $\models Q(a_{i+1}, a_i')$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\mathcal{M}_{a_n} \prec \mathcal{M}_{b_0}$, $\mathcal{M}_{a_n} \prec \mathcal{M}_{b_1}$, $\models Q(b_0, a_n') \wedge Q(b_1, a_n'')$, элементы b_0 и b_1 не связаны ни (b_0, b_1)-маршрутами, ни (b_1, b_0)-маршрутами. *Амальгамой взаимореализуемости* моделей $\mathcal{M}_{b_0}$ и $\mathcal{M}_{b_1}$ над типом q кортежа $\langle a_0, a_0', a_1, a_1', \ldots, a_n, a_n', a_n'', b_0, b_1\rangle$

называется модель $\mathcal{M}$ (обозначаемая через $\mathcal{M}_{b_0} *_q \mathcal{M}_{b_1}$), являющаяся обогащением объединения $\mathcal{M}_{b_0} \cup \mathcal{M}_{b_1}$ двухместными предикатами $R_q = \{(b_0, b_1)\}$ и $R'_q = \{(b_1, b_0)\}$.[5]

Обогатим теорию T_2 до теории T с помощью всевозможных двухместных предикатных символов R_q и R'_q так, чтобы для любых указанных выше реализаций $a_0, a'_0, a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, a''_n, b_0, b_1$ типа p_∞ модель $\mathcal{M}_{b_0}$ расширялась до простой модели над b_0, содержащей амальгаму взаимореализуемости $\mathcal{M}_{b_0} *_q \mathcal{M}_{b_1}$.

Более того, потребуем, чтобы в насыщенной модели обогащенной теории выполнялись условия $1'$ и $2'$ из параграфа 3.2, а также следующие условия:

3) $R_q(b_0, y)$ и $R'_q(b_1, y)$ — главные формулы для любого типа q;

4) отношение $R^* = \bigcup\limits_q (R_q \cup R'_q)$ образует ациклический неориентированный граф с неограниченными длинами кратчайших маршрутов, составленный из попарно непересекающихся отношений $R_q \cup R'_q$, где $R'_q = (R_q)^{-1}$, $R_q \cap R'_q = \varnothing$ или $R_q = R'_q$, с бесконечным числом образов и прообразов каждого элемента по каждому из отношений R_q, R'_q;

5) каждая компонента связности по отношению R^* состоит из одноцветных элементов, и для каждого цвета $\alpha \in \omega \cup \{\infty\}$ существует бесконечно много компонент связности, состоящих из элементов цвета α;

6) транзитивное замыкание отношения R^* не пересекается с транзитивным замыканием отношения Q;

7) компоненты связности по отношению R^* образуют классы эквивалентности, частично упорядоченные транзитивным замыканием отношения $Q \cup \mathrm{id}$.

При выполнении указанных условий модели $\mathcal{M}_{b_0}$ будут элементарно включать модели $\mathcal{M}_{b_1}$ и наоборот. При этом в силу конструкции для любых моделей $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$, где $a, b \models p_\infty$, если $\mathcal{M}_a \prec \mathcal{M}_b$ и в модели $\mathcal{M}_b$ реализуется некоторый неглавный тип над a, то найдется такая последовательность $a_0, a'_0, \ldots, a_n, a'_n$ реализаций типа p_∞, что $a_0 = a$, $\mathcal{M}_{a_i} = \mathcal{M}_{a'_i}$, $i = 0, \ldots, n$,

[5] Заметим, что для c_2-структур при рассмотрении амальгам взаимореализуемости элементы a_i и a'_i совпадают, поскольку каждая модель $\mathcal{M}_{p_\infty}$ имеет лишь один элемент, над которым все реализующиеся в этой модели типы являются главными. После введения отношений R_q и R'_q таких элементов становится бесконечно много, и при рассмотрении элементарных цепей нужно учитывать возможное различие элементов a_i и a'_i.

$\mathcal{M}_{a_i} \prec \mathcal{M}_{a_{i+1}}$, $\models Q(a_{i+1}, a'_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\mathcal{M}_{a_n} = \mathcal{M}_b$. Тогда любая предельная над типом p_∞ модель $\mathcal{M}$ будет представляться в виде объединения элементарной цепи $(\mathcal{M}_{a_n})_{n\in\omega}$ над типом p_∞, равной элементарной цепи $(\mathcal{M}_{a'_n})_{n\in\omega}$, где $\models Q(a_{n+1}, a'_n)$, $\models p_\infty(a'_n)$, и в силу конструкции любые две модели, предельные над типом p_∞, будут изоморфны. Таким образом выполнится условие (CEP), что по следствию 1.1.15 с учетом $|\mathrm{RK}(T)| = 2$ повлечет равенство $I(T, \omega) = 3$.

Перед построением теории T изучим описанную в пунктах 4 и 5 теорию T_a сигнатуры $\Sigma = \mathrm{Col} \cup \{R_q \mid q \in \mathcal{Q}\} \cup \{R'_q \mid q \in \mathcal{Q}\}$, где $\mathcal{Q}$ — некоторое счетное множество индексов. Эта теория будет являться подтеорией теории T и называться *свободной ациклической теорией с цветопостоянными компонентами связности* или сокращенно facc-*теорией*.

Пусть $\mathcal{M}$ — модель теории T_a, A — конечное множество в $\mathcal{M}$. c_a-*Графом* называется система $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ, состоящая из носителя A, раскрашенного с помощью функции Col, отношений R_q, R'_q на множестве A и конечной записи W о существовании, длинах и наборах имен дуг кратчайших маршрутов, попарно связывающих элементы из A. По аналогии с c-графами c_a-графы $\mathcal{A}$ с соответствующими носителями A обозначаются через $\langle A, R_q, R'_q, W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$.

Для c_a-графа $\mathcal{A} = \langle A, R_q, R'_q, W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ обозначим через $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$ минимальный граф $\Gamma \supseteq \langle A, R_q, R'_q\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ с помеченными дугами, содержащий для каждой пары $(a, b) \in A^2$, связанной маршрутом согласно записи из W, сам кратчайший (a, b)-маршрут с указанным в W наборов имен дуг.

Определим отношение $\subseteq_{c_a}$ на классе c_a-графов. c_a-Граф $\mathcal{A} = \langle A, R_{q,\mathcal{A}}, R'_{q,\mathcal{A}}, W_\mathcal{A}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ называется c_a-*подграфом* c_a-графа $\mathcal{B} = \langle B, R_{q,\mathcal{B}}, R'_{q,\mathcal{B}}, W_\mathcal{B}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ и пишем $\mathcal{A} \subseteq_{c_a} \mathcal{B}$, если $A \subseteq B$, $R_{q,\mathcal{A}} = R_{q,\mathcal{B}} \cap A^2$ и $W_\mathcal{A}$ — запись о кратчайших маршрутах, связывающих элементы из A в графе $\mathrm{cc}(\mathcal{B})$.

c_a-Граф $\mathcal{A} = \langle A, R_q, R'_q, W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ называется *замкнутым*, если $\mathcal{A}$ содержит все маршруты, указанные в записи W, т. е. $\mathcal{A} = \mathrm{cc}(\mathcal{A})$.

Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \langle B, R_{q,\mathcal{B}}, R'_{q,\mathcal{B}}, W_\mathcal{B}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ и $\mathcal{C} = \langle C, R_{q,\mathcal{C}}, R'_{q,\mathcal{C}}, W_\mathcal{C}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ — замкнутые c_a-графы, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, то *свободной* c_a-*амальгамой* c_a-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемой через $\mathcal{B} *_\mathcal{A} \mathcal{C}$) называется c_a-граф $\langle B \cup C, R_{q,\mathcal{B}} \cup R_{q,\mathcal{C}}, R_{q,\mathcal{B}} \cup R_{q,\mathcal{C}}, W_\mathcal{B} \cup W_\mathcal{C}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$.

Разнозначное отображение $f : A \to B$ называется *c_a-вложением* c_a-графа $\mathcal{A} = \langle A, R_{q,\mathcal{A}}, R'_{q,\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ в c_a-граф $\mathcal{B} = \langle B, R_{q,\mathcal{B}}, R'_{q,\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ (обозначается $f : \mathcal{A} \to_{c_a} \mathcal{B}$), если f — вложение цветного графа $\mathcal{A} = \langle A, R_{q,\mathcal{A}}, R'_{q,\mathcal{A}}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ в цветной граф $\mathcal{B} = \langle B, R_{q,\mathcal{B}}, R'_{q,\mathcal{B}}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ такое, что запись $W_{f(\mathcal{A})}$ c_a-подграфа c_a-графа $\mathcal{B}$ с носителем $f(A)$ совпадает с записью, которая получается из записи $W_{\mathcal{A}}$ заменой всех элементов $a \in A$ на элементы $f(a)$.

c_a-Графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *c_a-изоморфными*, если существует c_a-вложение $f : \mathcal{A} \to_{c_a} \mathcal{B}$ с условием $f(A) = B$. При этом отображение f называется *c_a-изоморфизмом* между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а c_a-графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — *c_a-изоморфными копиями*.

Лемма 3.3.1. (c_a-амальгамационная лемма). *Класс всех замкнутых c_a-графов удовлетворяет c_a-амальгамационному свойству* (c_a-AP)*, т. е. для любых c_a-вложений $f_0 : \mathcal{A} \to_{c_a} \mathcal{B}$ и $g_0 : \mathcal{A} \to_{c_a} \mathcal{C}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — замкнутые c_a-графы, существует замкнутый c_a-граф $\mathcal{D}$ и c_a-вложения $f_1 : \mathcal{B} \to_{c_a} \mathcal{D}$ и $g_1 : \mathcal{C} \to_{c_a} \mathcal{D}$ такие, что $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq_{c_a} \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \subseteq_{c_a} \mathcal{C}$. Очевидно, что в качестве $\mathcal{D}$ можно взять замкнутый c_a-граф $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$. □

Очевидно, что насыщенная модель facc-теории может быть представлена в виде генерической модели, которая строится из всевозможных замкнутых c_a-графов с помощью c_a-амальгамационной леммы.

В следующем предложении перечисляются основные свойства facc-теорий.

Предложение 3.3.2. *Для любой* facc*-теории T_a справедливы следующие утверждения:*

(1) *счетная насыщенная модель $\mathcal{M}$ теории T_a состоит из счетного числа компонент связности для каждого цвета $\alpha \in \omega \cup \{\infty\}$;*

(2) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_a-изоморфные c_a-подграфы счетной насыщенной модели $\mathcal{M}$ теории T_a, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

(3) *тип $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A)$ теории T_a является главным тогда и только тогда, когда цвета всех элементов из A конечны и любые одноцветные элементы принадлежат одной компоненте связности; при этом простая модель $\mathcal{M}_0$ состоит из элементов конечных цветов, образующих по одной компоненте связности для каждого конечного цвета;*

(4) *тип* $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A)$ *теории* T_a *реализуется в модели* $\mathcal{M}_{p_\infty}$ *тогда и только тогда, когда подтип всех элементов из* A*, имеющих конечные цвета, является главным и элементы из* A*, имеющие бесконечный цвет, принадлежат одной компоненте связности.*

Доказательство очевидно. □

Построение теории T, обогащающей как теорию T_2, так и некоторую facc-теорию, проводится по шагам, аналогичным построению теории T_2.

Определим понятие *c_3-графа* в соответствии со следующими условиями. При этом будем считать, что сигнатура каждого c_3-графа состоит из одноместных предикатных символов раскраски Col, двухместного предикатного символа Q и счетного вполне упорядоченного множества двухместных предикатных символов R_q и R'_q для некоторых типов c_3-изоморфизма, соответствующих типам q.

I. Если $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ — c-граф из класса $\mathbf{K}_0^*$, то система $\langle A, Q, R_q, R'_q, W'\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, полученная из $\mathcal{A}$ добавлением пустых отношений R_q, R'_q и записей о длинах *всех* кратчайших Q-маршрутов, связывающих элементы из A, является c_3-графом.

II. Каждый c_a-граф с добавленным пустым отношением Q является c_3-графом.

III. Пусть $\Gamma_\delta = \langle A_\delta, Q, R_{q,\delta}, R'_{q,\delta}, W_\delta\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $\delta \in \{0,1\}$, — c_3-графы с носителями $A_\delta = \{a_0, a'_0, a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, a''_n, b_\delta\}$, a_i и a'_i — элементы одного цвета, связанные (единственным) кратчайшим маршрутом в неорграфе с отношением R^*, $i = 0, 1, \ldots, n$, a_n и a''_n — также элементы одного цвета, связанные (единственным) кратчайшим маршрутом в неорграфе с отношением R^*, $\models Q(a_{i+1}, a'_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\models Q(b_0, a'_n) \wedge Q(b_1, a''_n)$, b_0 и b_1 — элементы одного цвета, не связанные ни (b_0, b_1)-маршрутами, ни (b_1, b_0)-маршрутами в графе с отношением, представляющемся в виде объединения отношения Q и (конечного числа) отношений $R_q \cup R'_q$, участвующих в кратчайших маршрутах, связывающих элементы из $A_0 \cup A_1$. Тогда c_3-графом является система

$$\Gamma = \langle A_0 \cup A_1, Q, R_q, R'_q, W_0 \cup W_1 \cup W_r(b_0, b_1)\rangle_{q\in\mathcal{Q}},$$

называемая *амальгамой взаимореализуемости* Γ_0 и Γ_1 где отношения Q и R_q, определенные в c_3-графах Γ_0 и Γ_1, объединяются, а к пустым отношениям R_r и R'_r (где r — тип, описывающий бескванторные связи между элементами $A_0 \cup A_1$, а также взаимоотношения элементов из $A_0 \cup A_1$ согласно записи $W_0 \cup W_1$)

добавляются пары (b_0, b_1) и (b_1, b_0) соответственно; $W_r(b_0, b_1)$ — запись о существовании множества $A_0 \cup A_1$, расширяющего до системы Γ граф $\langle \{b_0, b_1\}, Q, R_q, R'_q \rangle_{q \in \mathcal{Q}}$ с пустыми отношениями Q, R_q и R'_q за исключением $R_r = \{(b_0, b_1)\}$ и $R'_r = \{(b_1, b_0)\}$.

IV. Определим иррефлексивное отношение $<$ на множестве $\mathcal{Q}$: $q_1 < q_2 \Leftrightarrow$ в записи $W_{q_2}(b_0, b_1)$ упоминается об отношении R_{q_1}. Очевидно, что при пошаговом определении отношений R_q и R'_q согласно пункту III транзитивное замыкание отношения $<$ можно расширить до отношения полного порядка $\leqslant$ на множестве $\mathcal{Q}$, состоящем из всех типов r, описанных в пункте III. В дальнейшем будем считать, что множество двухместных сигнатурных символов $\Sigma_2 \rightleftharpoons \{Q\} \cup \{R_q \mid q \in \mathcal{Q}\} \cup \{R'_q \mid q \in \mathcal{Q}\}$ вполне упорядочено, где Q — наименьший элемент, символ R_{q_1} не превосходит символа R_{q_2}, если $q_1 \leqslant q_2$, а символ R'_{q_1} находится между символом R_{q_1} и непосредственно следующим за ним символом R_{q_2}. [6]

V. Если $\Gamma = \langle A, Q, R_q, R'_q, W \rangle_{q \in \mathcal{Q}}$ — c_3-граф, то для любого множества $A_0 \subseteq A$ c_3-графом, называемым *c_3-подграфом* c_3-графа Γ, является система

$$\langle A_0, Q \cap A_0^2, R_q \cap A_0^2, R'_q \cap A_0^2, W_0 \rangle_{q \in \mathcal{Q}},$$

где W_0 состоит из индуцированных c_3-графом Γ следующих записей:

а) $W_q(b_0, b_1)$ для всех пар (b_0, b_1), принадлежащих отношениям $R_q \cap A_0^2$;

б) описание длин кратчайших маршрутов в c-подграфе c-графа $\langle A, Q, W_c \rangle$, имеющем носитель A_0, где W_c — запись о кратчайших маршрутах по отношению Q в c_3-графе Γ;

в) описание длин и наборов имен дуг кратчайших маршрутов в c_a-подграфе c_a-графа $\langle A, R_q, R'_q, W_{c_a} \rangle_{q \in \mathcal{Q}}$, имеющем носитель A_0, где W_{c_a} — запись о длинах и наборах имен дуг кратчайших маршрутов по отношениям R_q, R'_q, $q \in \mathcal{Q}$, в c_3-графе Γ;

г) записи о существовании и длинах n кратчайших (a, b)-маршрутов (если такие маршруты существуют) через промежуточные элементы c, для которых существуют (a, c)-маршруты

[6] В силу полной упорядоченности символов из Σ_2 каждая запись $W_r(b_0, b_1)$ при построении генерической модели позволит расширить c_3-граф с носителем $\{b_0, b_1\}$ и этой записью до *конечного* c_3-графа, в котором все участвующие в нем записи вида $W_q(a, b)$ реализованы.

по отношению Q и $(c, b) \in R_0$, где R_0 — наименьший сигнатурный символ из $\mathcal{Q}$; при этом формула $\theta_n(x, y)$, описывающая кратчайшие (a, b)-маршруты через промежуточные элементы c, эквивалентна каждой формуле, описывающей кратчайшие (a, b)-маршруты через промежуточные элементы c', где (a, c')-маршруты по отношению Q, имеют ту же длину n, а элементы c' и b связаны в c_a-графе заданным набором имен дуг.

Потребуем, чтобы записи, указанные в пунктах а–г, взаимоисключали друг друга для любой фиксированной пары вершин (a, b), а сама запись W также состояла из взаимоисключающих записей для пар $(a, b) \in A^2$, описанных в пунктах а–г. Кроме того потребуем, чтобы некоторая формула $\theta_n(a, b)$ присутствовала в записи W для любой пары (a, b), связанной некоторым маршрутом в графе с отношением $Q \cup R^*$ и не связанной маршрутами ни в графе с отношением Q, ни в графе с отношением R^*.

VI. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, R_{q,\mathcal{B}}, R'_{q,\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ и $\mathcal{C} = \langle C, Q_{\mathcal{C}}, R_{q,\mathcal{C}}, R'_{q,\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}}\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ — *замкнутые* c_3-графы, т. е. c_3-графы, которые вместе с любыми двумя вершинами, принадлежащими одной компоненте связности по отношению R^*, содержат кратчайший R^*-маршрут, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Тогда c_3-графом является *свободная c_3-амальгама* $\langle B \cup C, Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}}, R_{q,\mathcal{B}} \cup R_{q,\mathcal{C}}, W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}} \cup W\rangle$ c_3-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемая через $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$), где W — запись, включающая все формулы $\theta_n(a, b)$ для вершин $a, b \in B \cup C$, не принадлежащих одновременно ни B, ни C и связанных кратчайшим маршрутом с участием наименьшего числа $n \geq 1$ Q-дуг и не менее одной R^*-дуги.

VII. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, Q, R_q, R'_q, W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ — c_3-граф, (a, b) — пара вершин, для которых некоторая формула $\theta_n(a, b)$ принадлежит записи W, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — набор сигнатурных символов из Σ_2, в котором символ Q участвует не менее n раз, а символы из $\mathcal{Q}$ — не менее одного раза. Тогда c_3-графом является система, которая получается добавлением к $\mathcal{A}$ внешнего (a, b)-маршрута, последовательность дуг которого имеет тот же набор имен, что и $\overline{\alpha}$, а степени новых вершин равны двум. Операция добавления указанного внешнего маршрута называется операцией *c_3-трассировки*.

Обозначим через $\mathbf{\Delta}_0$ класс, состоящий из всех c_3-графов, соответствующих какому-либо c-графу или c_a-графу согласно пунктам I и II, а также включающий всевозможные c_3-графы вида:

— $\Gamma_{0,q} = \langle\{0,1,2\},\{(0,1),(0,2)\},R_q,\ R'_q,W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Col}(0)\le\mathrm{Col}(1)$, $\mathrm{Col}(1)=\mathrm{Col}(2)$, $\Gamma_{1,q} = \langle\{0,1,2\},\{(1,0),\ (2,0)\},R_q,R'_q,W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Col}(0)\ge\mathrm{Col}(1)$, $\mathrm{Col}(1)=\mathrm{Col}(2)$, где $R_q=\{(1,2)\}$, если $R_q\cap R'_q=\varnothing$, $R_q=\{(1,2),\ (2,1)\}$, если $R_q=R'_q$, $W=W_q(1,2)$;

— $\Gamma_{0,q_1,\delta_1,\ldots,q_n,\delta_n} = \langle\{0,1,2\},\{(0,1),(0,2)\},R_q,\ R'_q,W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Col}(0)\le\mathrm{Col}(1)$, $\mathrm{Col}(1)=\mathrm{Col}(2)$, $\Gamma_{1,q_1,\delta_1,\ldots,q_n,\delta_n} = \langle\{0,1,2\},\{(1,0),(2,0)\},R_q,R'_q,\ W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $n\ge 2$, где отношения R_q и R'_q пусты, а запись W содержит информацию о наличии кратчайшего R^*-маршрута, соединяющего 1 и 2 с помощью последовательности дуг, имеющей набор имен $((R_{q_1})^{\delta_1},\ldots,(R_{q_n})^{\delta_n})$, $\delta_1,\ldots,\delta_n\in\{-1,1\}$;

— $\Gamma_{0,n} = \langle\{0,1,2\},\{(0,1),(0,2)\},R_q,\ R'_q,W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Col}(0)\le\mathrm{Col}(1)\le\mathrm{Col}(2)$, $\Gamma_{1,n} = \langle\{0,1,2\},\{(1,0),\ (2,0)\},R_q,R'_q,W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Col}(1)\le\mathrm{Col}(2)\le\mathrm{Col}(0)$, $n\ge 2$, где отношения R_q и R'_q пусты, а запись W содержит формулу $\theta_n(1,2)$.

Аналогично понятиям c_1-вложения и c_2-вложения понятие *c_3-вложения* $f:\mathcal{A}\to_{c_3}\mathcal{B}$ для c_3-графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, при котором сохраняется соответствующая запись $W_\mathcal{A}$ ($W_{f(\mathcal{A})}=W_\mathcal{B}\upharpoonright f(A)$), обобщает как понятие c-вложения, так и понятие c_a-вложения.

Дваc_3-графа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *c_3-изоморфными*, если существует c_3-вложение $f:\mathcal{A}\to_{c_3}\mathcal{B}$ с условием $f(A)=B$. При этом отображение f называется *c_3-изоморфизмом* между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а c_3-графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — *c_3-изоморфными копиями.*

VIII. Любой c_3-граф является конечной системой и получается из c_3-графов, принадлежащих классу $\mathbf{\Delta}_0$, некоторым конечным числом применений операций взятия допустимых перераскрасок, амальгам взаимореализуемости, c_3-подграфов, свободных c_3-амальгам, c_3-трассировок и c_3-изоморфных копий согласно пунктам III–VII, операции, позволяющей для любого c_3-графа $\mathcal{A}=\langle A,Q,R_q,R'_q,W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ и любой его пары вершин $(a,b)\in A^2$, $\mathrm{Col}(a)\le\mathrm{Col}(b)$, не связанной Q-маршрутами или R^*-маршрутами в минимальном графе, включающем все описанные в W маршруты, добавлять к записи W одну из произвольно выбранных записей о существовании кратчайшего (a,b)-маршрута длины, большей максимальной длины кратчайших маршрутов по отношению Q, а также обратной операции, позволяющей для любой пары элементов удалять из записи позитивную информацию о внешних кратчайших Q-маршрутах, информацию о принадлежности элементов одному классу $R^* \cup \mathrm{id}$-эквивалентности или о связи элементов формулами θ_n.

Обозначим класс всех c_3-графов через $\mathbf{K}_3^*$, а через $\mathbf{K}_3$ класс всех цветных графов, у которых каждый конечный подграф образует c_3-граф из класса $\mathbf{K}_3^*$.

Разнозначное отображение $f : A \to N$ называется *c_3-вложением* c_3-графа $\mathcal{A}$ в граф $\mathcal{N} \in \mathbf{K}_3$ (обозначается $f : \mathcal{A} \to_{c_3} \mathcal{N}$), если f — c_3-вложение c_3-графа $\mathcal{A}$ в c_3-подграф $f(\mathcal{A})$ графа $\mathcal{N}$, имеющий носитель $f(A)$.

Комбинируя доказательство лемм 3.1.1 и 3.3.1 устанавливаем следующую амальгамационную лемму.

Лемма 3.3.3. (c_3-амальгамационная лемма). *Класс $\mathbf{K}_3^*$ удовлетворяет c_3-амальгамационному свойству* (c_3-AP)*, т. е. для любых c_3-вложений $f_0 : \mathcal{A} \to_{c_3} \mathcal{B}$ и $g_0 : \mathcal{A} \to_{c_3} \mathcal{C}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — замкнутые c_3-графы из класса $\mathbf{K}_3^*$, существует замкнутый c_3-граф $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_3^*$ и c_3-вложения $f_1 : \mathcal{B} \to_{c_3} \mathcal{D}$ и $g_1 : \mathcal{C} \to_{c_3} \mathcal{D}$ такие, что $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.*

Теорема 3.3.4. *Существует счетный цветной насыщенный граф $\mathcal{M} \in \mathbf{K}_3$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *если $f : \mathcal{A} \to_{c_3} \mathcal{M}$ и $g : \mathcal{A} \to_{c_3} \mathcal{B}$ — c_3-вложения и $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_3^*$, то существует c_3-вложение $h : \mathcal{B} \to_{c_3} \mathcal{M}$ такое, что $f = g \circ h$;*

2) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_3-изоморфные замкнутые c_3-подграфы графа $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

3) *раскраска обеднения $\mathcal{M} \restriction Q$ модели $\mathcal{M}$ до графовой сигнатуры $\Sigma = \{Q\}$ несущественна и Q-упорядочена;*

4) *формула $Q(x, y)$ является главной формулой в теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \restriction \Sigma_2)$, а формулы $R_q(a, y)$ и $R'_q(a, y)$ являются главными для любого элемента $a \in M$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.3 с заменой c-графов на замкнутые c_3-графы и применением леммы 3.3.3 для замкнутых c_3-графов. При этом в описание формул $\varphi_n(X)$ и $\psi_n(X, Y)$ для каждой пары вершин (a, b) добавляется следующая информация:

а) позитивная информация о наборах имен кратчайших R^*-маршрутов, если такие (a, b)-маршруты существуют;

б) отрицание связывающих элементы a и b R^*-маршрутов длины не превосходящей n и состоящих из дуг, имена которых принадлежат начальному отрезку длины n вполне упорядоченного множества $\mathcal{Q}$, если элементы a и b не связаны R^*-маршрутами;

в) формулы θ_m от соответствующих переменных для всех элементов, удовлетворяющих этим формулам;

г) формулы $\neg\theta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\theta_n$ от соответствующих переменных для всех элементов, не удовлетворяющих ни одной из формул θ_m.

Из описания c_3-графов вытекает несущественность и Q-упорядоченность раскраски Col, а из замкнутости c_3-графов, состоящих из одной Q-дуги или R^*-дуги — изолированность формулы $Q(x, y)$ в теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \upharpoonright \Sigma_2)$ и изолированность формул $R_q(a, y)$ и $R'_q(a, y)$ для любого элемента $a \in M$. $\square$

Теория $T_3 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$, которая строится для доказательства теоремы 3.3.4, называется $\mathbf{K}_3^*$-*генерической теорией*, а сама счетная насыщенная модель $\mathcal{M}$ — $\mathbf{K}_3^*$-*генерической моделью.*

Аналогично теореме 3.1.7 доказывается

Теорема 3.3.5. 1. *Тип q теории T_3 является главным тогда и только тогда, когда q расширяется до типа r теории T_3, реализующегося замкнутыми c_3-графами, в которых любые два различных элемента соединены некоторым Q-маршрутом или R^*-маршрутом, и все элементы реализаций типа r имеют конечные цвета.*

2. *Тип q теории T_3 реализуется в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ тогда и только тогда, когда q расширяется до типа r теории T_3, реализующегося замкнутыми c_3-графами $\mathcal{A}$, в которых любые два различных элемента a_i и a_j соединены некоторым Q-маршрутом или R^*-маршрутом и выполняются следующее условие: если среди элементов множества A есть элементы конечного цвета и элементы бесконечного цвета, то*

(а) *найдутся связанные R^*-маршрутами элементы $a_{f,1}, \ldots, a_{f,k}$ конечного цвета, такие, что для каждого элемента $a \in A \setminus \{a_{f,1}, \ldots, a_{f,k}\}$ конечного цвета и для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ существует Q-маршрут из a в $a_{f,i}$,;*

(б) *найдутся связанные R^*-маршрутами элементы $a_{\infty,1}, \ldots, a_{\infty,l}$ бесконечного цвета, такие, что для каждого элемента $a \in A \setminus \{a_{\infty,1}, \ldots, a_{\infty,l}\}$ бесконечного цвета и для каждого $j \in \{1, \ldots, l\}$ существует Q-маршрут из $a_{\infty,j}$ в a;*

(в) *для любых $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$ существуют Q-маршруты из $a_{f,i}$ в $a_{\infty,j}$.*

Определим класс $\mathbf{K}_4^*$ конечных структур, снабженных конечными записями о взаимоотношении элементов, удовлетворяющими условиям $1'$ и $2'$ из предыдущего параграфа, где вместо типов c_1-изоморфизма $\mathbf{A}$ рассматриваются всевозможные типы c_3-изоморфизма, снабженные формулами ρ и такие, что простые модели над этими типами не изоморфны ни простой модели, ни модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$. Будем считать, что каждое конечное множество A, входящее в $\mathbf{K}_4^*$ и ограниченное на графовую сигнатуру Σ_2 с раскраской Col, образует c_3-граф $\langle A, Q, R_q, R'_q, W\rangle_{q\in\mathcal{Q}}$ из класса $\mathbf{K}_3^*$, а к записи к записи W добавлена позитивная информация о взаимоотношении элементов по проекциям $\exists y_{l_1}...y_{l_t}\ R_{\mathbf{A}_m}(x,\overline{y})$ и по формулам ρ в соответствии с пунктом $2'$.

Конечные структуры $\mathcal{A}$ с конечными записями $W_{\mathcal{A}}$, образующие класс $\mathbf{K}_4^*$, называются *c_4-структурами.* c_4-Структуры, являющиеся замкнутыми c_3-графами, также называются *замкнутыми.*

Обозначим через $\mathbf{K}_4$ класс всех моделей сигнатуры $\mathrm{Col}\cup\Sigma_2\cup\{R_{\mathbf{A}_m}\mid m\in\omega\}$, у которых каждое конечное подмножество образует c_4-структуру из класса $\mathbf{K}_4^*$.

Понятие *c_4-вложения* $f:\mathcal{A}\to_{c_4}\mathcal{B}$ для c_4-структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, при котором сохраняется соответствующая запись $W_{\mathcal{A}}$ ($W_{f(\mathcal{A})}=W_{\mathcal{B}}\upharpoonright f(A)$), естественным образом обобщает ранее введенные понятия c_i-вложений. Тем самым определяется и понятие c_4-вложения $f:\mathcal{A}\to_{c_4}\mathcal{N}$ c_4-структуры $\mathcal{A}$ в модель $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}_4$.

Две c_4-структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *c_4-изоморфными*, если существует c_4-вложение $f:\mathcal{A}\to_{c_4}\mathcal{B}$ с условием $f(A)=B$.

Теорема 3.3.6. *Существует счетная насыщенная модель $\mathcal{M}\in\mathbf{K}_4$, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *если $f:\mathcal{A}\to_{c_4}\mathcal{M}$ и $g:\mathcal{A}\to_{c_4}\mathcal{B}$ — c_4-вложения и $\mathcal{B}\in\mathbf{K}_4^*$, то существует c_4-вложение $h:\mathcal{B}\to_{c_4}\mathcal{M}$ такое, что $f=g\circ h$;*

б) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_4-изоморфные замкнутые c_4-структуры в модели $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A)=\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

в) *обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры $\mathrm{Col}\cup\Sigma_2$ является $\mathbf{K}_3^*$-генерической моделью;*

г) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$, где $\models p_\infty(a)$, является главной, и тип c_4-изоморфизма каждой реализации формулы $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ совпадает с типом c_4-изоморфизма $\mathbf{A}$;*

д) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$, где $\mathbf{A}$ — тип c_4-изоморфизма кортежа $\overline{a}$, является главной, и каждая реализация формулы $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$ является реализацией типа p_∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в очевидной комбинации доказательств теоремы 3.2.3 и теоремы 3.3.4. □

Теория $T_4 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$, которая строится для доказательства теоремы 3.3.7, называется $\mathbf{K}_4^*$-*генерической теорией*, а сама счетная насыщенная модель $\mathcal{M}$ — $\mathbf{K}_4^*$-*генерической моделью*.

Повторяя доказательство теоремы 3.2.4 с использованием теоремы 3.3.6, устанавливаем следующую теорему.

Теорема 3.3.7. *Теория* T_4 *удовлетворяет условию* $|\mathrm{RK}(T_4)| = 2$.

Теорема 3.3.8. *Существует единственная с точностью до изоморфизма предельная модель теории* T_4 *над типом* p_∞.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование предельной модели вытекает из предложения 1.1.8 и следствия 1.1.9 в силу несимметричности отношения полуизолированности SI_{p_∞} по формуле $Q(x,y)$. Для доказательства единственности предельной модели достаточно показать, что любая предельная модель $\mathcal{M}$ над типом p_∞ насыщена.

Пусть $(\mathcal{M}_{a_n})_{n\in\omega}$ — произвольная элементарная цепь над типом p_∞, объединение которой совпадает с предельной моделью $\mathcal{M}$. В силу теоремы 3.3.5 для каждого элементарного расширения модели $\mathcal{M}_{a_n}$ до модели $\mathcal{M}_{a_{n+1}}$ существует R^*-маршрут из a_{n+1} в a_n или существует Q-маршрут из a_{n+1} в a_n. Поскольку предельная модель не изоморфна модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$, а в случае существования R^*-маршрута из a_{n+1} в a_n модель $\mathcal{M}_{a_n}$ элементарно расширяется до простой модели над a_n, совпадающей с моделью $\mathcal{M}_{a_{n+1}}$, из элементарной цепи $(\mathcal{M}_{a_n})_{n\in\omega}$ можно удалить все модели $\mathcal{M}_{a_n}$, для которых существуют R^*-маршруты из a_n в a_{n-1}.

После удаления всех указанных моделей в силу конструкции генерической модели полученную элементарную цепь $(\mathcal{M}_{a'_n})_{n\in\omega}$ можно расширить с помощью моделей $\mathcal{M}_a$, где a — элементы, составляющие для каждого $n \in \omega$ при наличии Q-маршрутов из a'_{n+1} в a'_n один из этих кратчайших Q-маршрутов. Кроме того, полученная элементарная цепь расширяется до элементарной цепи, в которой с каждой моделью с одной стороны соседствует совпадающая с ней модель, а с другой стороны — собственная элементарная подсистема или надсистема.

Рассмотрим теперь произвольный 1-тип $q(x, \overline{b}) \in S(\overline{b})$, где $\overline{b}$ — кортеж из M. Покажем, что $q(x, \overline{b})$ реализуется в модели $\mathcal{M}$. Действительно, кортеж $\overline{b}$ принадлежит некоторой модели $\mathcal{M}_{a_n}$, и в силу определения отношений $R_{\mathbf{A}}$, для некоторого типа c_4-изоморфизма $\mathbf{A}$, содержащего реализации типа $q(x, \overline{y})$, и для некоторого $n' \geq n$ найдется элемент $c \in M_{a_{n'}}$ такой, что некоторая проекция $\exists z_{i_1}, \ldots, z_{i_m} R_{\mathbf{A}}(c, \overline{z})$ реализуется кортежем $\overline{b}$. Поскольку $R_{\mathbf{A}}(c, \overline{z})$ — главная формула, то существует реализующий ее кортеж $\overline{d} \in M$, расширяющий кортеж $\overline{b}$, и по выбору типа c_4-изоморфизма $\mathbf{A}$ некоторая координата кортежа $\overline{d}$ реализует тип $q(x, \overline{b})$. Поскольку тип q выбран произвольно, модель $\mathcal{M}$ является насыщенной. $\square$

На основании следствия 1.1.15 и теорем 3.3.7, 3.3.8 справедлива следующая

Теорема 3.3.9. *Существует генерическая теория T, обогащающая генерическую теорию T_3 и удовлетворяющая условию $I(T, \omega) = 3$.*

§ 3.4. Реализации основных характеристик полных теорий с конечным числом счетных моделей

Напомним, что в теореме 1.1.13 приведена характеризация класса полных теорий с конечным числом счетных моделей. Покажем, что любая из описанных в этой теореме ситуаций реализуется.

Теорема 3.4.1. *Для любого конечного предупорядоченного множества $\langle X; \leq \rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X; \leq \rangle / \sim$ по отношению $\sim$ (где $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$), а также для любой функции $f : X/\sim \to \omega$, удовлетворяющей условиям $f(\widetilde{x_0}) = 0$, $f(\widetilde{x_1}) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\widetilde{y}) > 0$ при $|\widetilde{y}| > 1$, существует полная теория T и изоморфизм $g : \langle X; \leq \rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{RK}(T)$ такой, что $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/\sim$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\langle X; \leq \rangle$ — конечное предупорядоченное множество с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X; \leq \rangle / \sim$, $f : X/\sim \to \omega$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: $f(\widetilde{x_0}) = 0$, $f(\widetilde{x_1}) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\widetilde{y}) > 0$ при $|\widetilde{y}| > 1$. Без ограничения общности будем считать, что $|X| > 1$. Зафиксируем нумерацию $\nu : |X| \to X$ такую, что из $\nu(m) < \nu(n)$ и $\nu(m) \not\sim \nu(n)$ следует $m < n$, а любому $\sim$-классу соответствует интервал в $|X|$. Рассмотрим теорию T_0 одноместных предикатов $P_1, \ldots, P_{|X|-1}$, образующих разбиение на $|X|-1$ бесконечных классов, с несущественной раскраской $\mathrm{Col}\colon M \to \omega \cup \{\infty\}$ такой, что $\vdash \exists^{\geq\omega}\, (P_i(x) \wedge \mathrm{Col}_n(x))$, $i = 1, \ldots, |X|-1$, $n \in \omega$. Покажем, что существует обогащение T теории T_0 с изоморфизмом $g : \langle X; \leq\rangle \,\widetilde{\to}\, \mathrm{RK}(T)$ таким, что:

а) $g(\nu(i)) = \mathbf{M}_{p_i}$, где $\mathbf{M}_{p_i}$ — тип изоморфизма простой модели $\mathcal{M}_{p_i}$ над реализацией типа $p_i(x)$ из $S^1(\varnothing)$, изолируемого множеством формул $\{P_i(x) \wedge \neg\mathrm{Col}_n(x) \mid n \in \omega\}$, $i = 1, \ldots, |X|-1$, а $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}(x)$ — все неглавные 1-типы над $\varnothing$ от переменной x;

б) $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/{\sim}$.

Построение теории $T = \bigcup\limits_{i<|X|} T_i$ проведем по индукции в соответствии с нумерацией ν. Пусть уже построены теории $T_0, \ldots, T_{k-1}$, а элементы $\nu(k), \nu(k+1), \ldots, \nu(k+l)$ образуют $\sim$-класс.

Если $f(\widetilde{\nu(k)}) = 0$, то $l = 0$ и теорию T_k зададим обогащением сигнатуры теории T_{k-1} новыми двухместными предикатными символами R_{ki} (где класс $\widetilde{\nu(k)}$ покрывает класс $\widetilde{\nu(i)}$, $i \neq 0$) с выполнением следующих условий:

1) $R_{ki}(a, y)$ — главная формула и $R_{ki}(a, y) \vdash p_i(y)$ для любого $a \models p_k$;

2) для любых $a, b \models p_i$ существует бесконечно много элементов $c \models p_k$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}$, таких, что

$$\models R_{ki}(c, a) \wedge R_{ki}(c, b) \wedge R_{ki}(d, a) \wedge R_{ki}(d, b);$$

при этом из $c \models p_k$ и $\models R_{ki}(c, a)$ следует, что a не полуизолирует c.

Очевидно, условия 1–2 можно реализовать так, что модель $\mathcal{M}_{p_k}$ теории T_k будет иметь единственную реализацию типа p_k и, значит, $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = 0 = f(\widetilde{\nu(k)})$. Кроме того, в $\mathcal{M}_{p_k}$ по индукции будут реализовываться все типы p_i, подчиняющиеся типу p_k, т. е. удовлетворяющие соотношению $\nu(i) \leq \nu(k)$.

Предположим, что $f(\widetilde{\nu(k)}) = r > 0$. Зададим теорию T_k^0 обогащением сигнатуры теории T_{k-1} новыми двухместными предикатными символами R_{ki} (где класс $\widetilde{\nu(k)}$ покрывает класс $\widetilde{\nu(i)}$,

$i \neq 0$) с условиями 1 и 2, а также двухместными предикатными символами R'_{ij} (где $\nu(i), \nu(j) \in \widetilde{\nu(k)}$) со следующими условиями:

3) $R'_{ij}(a, y)$ — главная формула и $R'_{ij}(a, y) \vdash p_j(y)$ для любого $a \models p_i$;

4) для любых $a, b \models p_j$ существует бесконечно много элементов $c \models p_i$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}$, таких, что

$$\models R'_{ij}(c, a) \wedge R'_{ij}(c, b) \wedge R'_{ij}(d, a) \wedge R'_{ij}(d, b);$$

при этом из $c \models p_i$ и $\models R'_{ij}(c, a)$ следует, что a не полуизолирует c;

5) для любых элементов a и b, не реализующих типы $p_{k+l+1}, \ldots, p_{|X|-1}$, существует бесконечно много элементов $c \models p_j$ таких, что $\models R'_{ij}(a, c) \wedge R'_{ij}(b, c)$;

6) отношение $R'_k = \bigcup\limits_{\nu(i),\nu(j) \in \widetilde{\nu(k)}} R'_{ij}$ образует орграф, изоморфный орграфу Γ_{gen}.

Как и выше предикаты R_{ki} обеспечивают подчинение типов p_i типу p_k при $\nu(i) < \nu(k)$ и $\nu(i) \not\sim \nu(k)$, а отношения R'_{ij} — взаимоподчиняемость типов p_i и p_j, а также неизоморфность моделей $\mathcal{M}_{p_i}$ и $\mathcal{M}_{p_j}$ при $i \neq j$.

Теперь аналогично условиям $1'$ и $2'$ из параграфа 3.2 с заменой предиката Q на предикат R'_k расширим сигнатуру предикатными символами $R_{\mathbf{A}}$ так, чтобы типам p_i, $i = k, \ldots, k+l$, подчинялись все типы $q(\overline{x}) \in S(T_k)$ с условиями $p_j(x_i) \not\subseteq q(\overline{x})$ для $j > k + l$, и указанным типам q, не подчиняющимся типам p_i, $i < k$, подчинялись все типы $p_k, \ldots, p_{k+l}$, а модели $\mathcal{M}_q$ были изоморфны модели $\mathcal{M}_{p_k}$.

Для выполнения условия $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = r$ зададим на структуре реализаций типа p_k графовую структуру с двухместными отношениями $R''_1, \ldots, R''_r$ такими, что

7) $R''_i(a, y)$ — главная формула и $R''_i(a, y) \vdash p_k(y)$ для любого $a \models p_k$, $i \leq r$;

8) для любых $a, b \models p_k$ существует бесконечно много элементов $c \models p_k$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}$, таких, что:

$$\models R''_i(c, a) \wedge R''_i(c, b) \wedge R''_i(d, a) \wedge R''_i(d, b);$$

при этом из $\models R''_i(c, a)$ и $c \models p_j$ следует, что a не полуизолирует c;

9) отношение $R'_k \bigcup \bigcup\limits_{i=1}^{r} R''_i$ образует орграф, изоморфный орграфу Γ_{gen}.

Если $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$ — простые модели над реализациями a и b типа p_k соответственно, такими, что $\models R''_i(a,b)$ и $\mathcal{M}_b \prec \mathcal{M}_a$, то будем называть модель $\mathcal{M}_a$ *R''_i-расширением* модели $\mathcal{M}_b$. Элементарная цепь $(\mathcal{M}_s)_{s\in\omega}$ над типом p_k называется *R''_i-цепью*, если $\mathcal{M}_{s+1}$ — R''_i-расширение модели $\mathcal{M}_s$ для любого s.

Если $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$ — простые модели над реализациями a и b типа p_i соответственно, $\nu(i) \sim \nu(k)$, такими, что $\models R'_{ii}(a,b)$ и $\mathcal{M}_b \prec \mathcal{M}_a$, то модель $\mathcal{M}_a$ называется *R'_{ii}-расширением* модели $\mathcal{M}_b$.

Аналогично условиям 3–7 из параграфа 3.3 расширим сигнатуру символами R_q так, чтобы выполнялись следующие условия:

10) для любой предельной над типом p_{k+i}, $0 \le i \le l$, модели $\mathcal{M}$ найдется отношение R''_j такое, что $\mathcal{M}$ является объединением R''_j-цепи $(\mathcal{M}_s)_{s\in\omega}$ над типом p_k;

11) предельные над типом p_k модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется предикат R''_i такой, что $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ являются объединениями R''_i-цепей и не являются объединениями R''_j-цепей для $j > i$.

Заметим, что свойства 10–11 реализуются с помощью предикатов R_q, "говорящих" о том, что:

а) любое R'_{kk}-расширение $\mathcal{M}_a$ модели $\mathcal{M}_b$ содержит R''_1-расширение и наоборот;

б) для любого i, $\nu(i) \sim \nu(k)$, $i \ne k$, и любой конечной элементарной цепи $\mathcal{M}_{a_1}, \ldots, \mathcal{M}_{a_s}$, $a_1, \ldots, a_s \models p_i$, существуют реализации $b_1, \ldots, b_{s-1}$ типа p_k такие, что последовательность $\mathcal{M}_{a_1}, \mathcal{M}_{b_1}, \ldots, \mathcal{M}_{b_{s-1}}, \mathcal{M}_{a_s}$ также образует элементарную цепь;

в) если $\mathcal{M}_{b_0}$ и $\mathcal{M}_{b_1}$ — R''_s-расширения модели $\mathcal{M}_{a_n}$, q — тип кортежа $\langle a_0, a'_0 \ldots, a_n, a'_n, a''_n, b_0, b_1\rangle$ элементов, реализующих тип p_k и таких, что $\mathcal{M}_{a_{i+1}}$ — R''_{t_i}-расширение модели $\mathcal{M}_{a'_i}$, равной $\mathcal{M}_{a_i}$, $\models R''_{t_i}(a_{i+1}, a'_i)$, $\mathcal{M}_{b_0}$, $\mathcal{M}_{b_1}$ — R''_{t_n}-расширения модели $\mathcal{M}_{a_n}$, равной $\mathcal{M}_{a'_n}$ и $\mathcal{M}_{a''_n}$, $\models R''_{t_n}(b_0, a'_n) \wedge R''_{t_i}(b_1, a''_n)$, и элементы b_0 и b_1 не связаны ни (b_0, b_1)-маршрутами, ни (b_1, b_0)-маршрутами, то модель $\mathcal{M}_{b_0}$ содержит амальгаму взаимореализуемости $\mathcal{M}_{b_0} *_q \mathcal{M}_{b_1}$;

г) если $\mathcal{M}_{a_1}, \ldots, \mathcal{M}_{a_s}$ — конечная элементарная цепь такая, что модель $\mathcal{M}_{a_{j+1}}$ является R''_{i_j}-расширением модели $\mathcal{M}_{a_j}$, $j = 1, \ldots, s-1$, и $\max\{i_1, \ldots, i_{s-2}\} < i_{s-1}$, то $\mathcal{M}_{a_s}$ содержит $R''_{i_{s-1}}$-расширение модели $\mathcal{M}_{a_1}$ и наоборот.

В результате указанных обогащений образуется теория $T_k = T_{k+1} = \ldots = T_{k+l}$ такая, что типы $p_k, \ldots, p_{k+l}$ взаимоподчиняются друг другу, модели $\mathcal{M}_{p_k}, \ldots, \mathcal{M}_{p_{k+l}}$ попарно неизоморфны, а число предельных моделей над типами $p_k, \ldots, p_{k+l}$ равно $f(\widetilde{\nu(k)})$.

Продолжая процесс, на шаге $|X|-1$ получаем теорию $T = T_{|X|-1}$ и изоморфизм $g : \langle X; \leq\rangle \widetilde{\rightarrow} \mathrm{RK}(T)$ такой, что $g(\nu(0))$ — тип изоморфизма простой модели теории T, $g(\nu(m))$ — тип изоморфизма модели $\mathcal{M}_{p_m}$, $1 \leq m \leq |X|-1$, и $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/{\sim}$.

Возможность реализации вышеуказанных свойств проверяется по схеме, аналогичной схеме построения теории с тремя счетными моделями, приведенной в предыдущем параграфе с помощью теоремы 2.5.1. $\square$

§ 3.5. Теории с конечными предпорядками Рудина — Кейслера

В предыдущих параграфах раскрыт механизм построения всех возможных теорий с конечным числом попарно неизоморфных счетных моделей относительно предпорядков Рудина — Кейслера и функций распределения числа предельных моделей. В настоящем параграфе будет доказано обобщение основного результата параграфа 3.4, переносящее классификацию теорий с конечным числом счетных моделей на случай произвольной теории с конечным предпорядком Рудина — Кейслера, имеющим не более чем счетное или континуальное число предельных моделей для каждого класса эквивалентности:

Теорема 3.5.1. *Для любого конечного предупорядоченного множества $\langle X; \leq\rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X; \leq\rangle/\sim$ по отношению $\sim$ (где $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$), а также для любой функции $f : X/{\sim} \to \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, удовлетворяющей условиям $f(\widetilde{x_0}) = 0$, $f(\widetilde{x_1}) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\widetilde{y}) > 0$ при $|\widetilde{y}| > 1$, существует полная малая теория T и изоморфизм $g : \langle X; \leq\rangle \widetilde{\rightarrow} \mathrm{RK}(T)$ такой, что $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/{\sim}$.*

В дальнейшем в этом параграфе будем предполагать, что система $\mathrm{RK}(T)$ конечна.

Как показано в параграфе 1.1, любое предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ содержит наименьший элемент, соответствующий простой модели, а из конечности системы $\mathrm{RK}(T)$ следует существование наибольшего $\sim_{RK}$-класса, соответствующего простым моделям над реализациями властных типов.

Повторяя доказательство предложения 1.1.7 и используя условие $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$ вместо условия $I(T,\omega) < \omega$, мы получаем следующее

Предложение 3.5.2. *Если $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$, то любая счетная модель теории T является простой над реализацией некоторого типа из $S(T)$ или предельна над некоторым типом из $S(T)$.*

Заметим, что в силу теоремы Морли (см. М. Морли [158]) для любого класса $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$ число предельных моделей $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ принадлежит множеству $\omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$.

Используя последнее замечание, аналогично теореме 1.1.13 мы получаем следующую теорему, которая может рассматриваться как синтаксическая характеризация класса полных теорий с конечными предпорядками Рудина — Кейслера.

Теорема 3.5.3. *Любая малая теория T с конечным предпорядком Рудина – Кейслера удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *система $\mathrm{RK}(T)$ имеет наименьший элемент $\mathbf{M}_0$ (тип изоморфизма простой модели) и $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_0}) = 0$;*

(б) *система $\mathrm{RK}(T)$ имеет наибольший $\sim_{RK}$-класс $\widetilde{\mathbf{M}_1}$ (класс типов изоморфизма всех простых моделей над реализациями властных типов) и из $|\mathrm{RK}(T)| > 1$ следует $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_1}) \geq 1$;*

(в) *если $|\widetilde{\mathbf{M}}| > 1$, то $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) \geq 1$.*

Более того, справедлива следующая декомпозиционная формула:

$$I(T,\omega) = |\mathrm{RK}(T)| + \sum_{i=0}^{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}|-1} \mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_i}),$$

где $\widetilde{\mathbf{M}_0}, \ldots, \widetilde{\mathbf{M}_{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}|-1}}$ — все элементы ч.у.м. $\mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}$ и $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_i}) \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ для любого i.

Таким образом, подобно теориям с конечным числом счетных моделей число и взаимосвязь счетных моделей теории с конечным предпорядком Рудина — Кейслера определяется следующими двумя характеристиками: самим предпорядком Рудина — Кейслера, а также функцией $\mathrm{IL}(\cdot)$ распределения числа предельных моделей, которая для любого $\sim_{RK}$-класса может принимать значение из множества $\omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$.

Покажем, что все возможности, описанные в теореме 3.5.3 и удовлетворяющие условию

$$\mathrm{rang}(\mathrm{IL}(\cdot)) \subset \omega \cup \{\omega, 2^{\omega}\}$$

можно реализовать. Таким образом, будет установлена теорема 3.5.1, являющаяся обращением теоремы 3.5.3 в предположении континуум-гипотезы.

Мы воспользуемся доказательством теоремы 3.4.1. Построение теории T^0 с заданным предпорядком подчинения $\langle X; \leq \rangle$ шаг за шагом повторяет конструкцию аналогичной теории с конечным числом счетных моделей. Требуемое расширение T теории T^0, удовлетворяющее условиям $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/\!\sim$, будет построено по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы 3.4.1.

В силу конструкции теории T^0 достаточно рассмотреть индукционный шаг k для случая $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = \lambda$, $\lambda \in (\omega \cup \{\omega, 2^{\omega}\}) \setminus \{0\}$. Определим на структуре реализаций типа p_k графовую структуру с дугами, раскрашенными попарно несовместными двухместными отношениями R''_n, $n \in \omega$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $R''_n(a, y)$ — главная формула и $R''_n(a, y) \vdash p_k(y)$ для любого $a \models p_k$, $n \in \omega$;

2) для любых $a, b \models p_k$ существует бесконечно много элементов $c \models p_k$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}(x)$, для которых

$$\models R''_n(c, a) \wedge R''_n(c, b) \wedge R''_n(d, a) \wedge R''_n(d, b),$$

$n \in \omega$; более того из $\models R''_n(c, a)$ и $c \models p_i$ следует, что a не полуизолирует c;

3) отношение $R'_k \bigcup \bigcup\limits_{i=1}^{r} R''_i$ образует орграф, изоморфный орграфу Γ_{gen}.

Пусть $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$ — простые модели над реализациями a и b типа p_k, для которых $\models R''_n(a, b)$ и $\mathcal{M}_b \prec \mathcal{M}_a$. Тогда модель $\mathcal{M}_a$ называется *n-расширением* модели $\mathcal{M}_b$, $n \in \omega$. Пусть $w = \langle n_1, \ldots, n_m \rangle \in \omega^m$ — m-ка, $\mathcal{M}_{a_i}$, $i = 1, \ldots, m+1$, — такие модели, что $\mathcal{M}_{a_{i+1}}$ является n_i-расширением модели $\mathcal{M}_{a_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда модель $\mathcal{M}_{a_{m+1}}$ называется *w-расширением* модели $\mathcal{M}_{a_1}$. Элементарная цепь $(\mathcal{M}_s)_{s \in \omega}$ называется *f-цепью* (где $f \in \omega^{\omega}$), если $\mathcal{M}_{s+1}$ — $f(s)$-расширение модели $\mathcal{M}_s$ для любого $s \in \omega$.

Аналогично доказательству теоремы 3.4.1, расширяя теорию предикатами R_q и R'_q, мы получаем теорию, в которой любая предельная модель с типом изоморфизма из $g(\widetilde{\nu(k)})$ представима в виде объединения f-цепи для некоторой последовательности $f \in \omega^\omega$. Следовательно, число $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)}))$ равно числу попарно неизоморфных объединений f-цепей. Введением дополнительных предикатов R_q и R'_q существование изоморфизма объединений f_1- и f_2-цепей сводится к существованию слов $w_1^m, w_2^m \in \omega^{<\omega}$, $m \in \omega$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) последовательность f_i "подобна" счетной конкатенации слов $w_i^0, w_i^1, \ldots, w_i^m, \ldots$, $i = 0, 1$;

б) любое w_0^m-расширение является w_1^m-расширением и наоборот, $m \in \omega$.

Таким образом, проблема построения расширения теории с условием $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = \lambda$ сводится к проблеме нахождения такой факторизации множества ω^ω отождествлениями слов w_1^m и w_2^m, чтобы результат факторизации содержал ровно λ классов. Теперь определим формально и исследуем возможности факторизации множества ω^ω.

Рассмотрим полугруппу $S_0 = \langle W; \hat{\ } \rangle$, состоящую из всех *непустых* слов алфавита ω и операции $\hat{\ }$ конкатенации. Если w_1 и w_2 — слова из W, формула $w_1 \approx w_2$ как обычно будет называться *тождеством*. Для данного множества I тождеств $w_1^j \approx w_2^j$, $j \in J$, содержащего множество I_0 всевозможных тождеств вида $w \approx w$, определим множество тождеств, выводимых из I. Тождество $w_1 \approx w_2$ называется *выводимым* из I, если существует конечная последовательность тождеств $w_1^1 \approx w_2^1, \ldots, w_1^t \approx w_2^t$ такая, что $w_1^t = w_1$, $w_2^t = w_2$ и любое тождество из этой последовательности принадлежит I или получается из предыдущих тождеств применением одного из следующих правил вывода:

1) $\dfrac{w_1 \approx w_2}{w_2 \approx w_1}$, где $w_1, w_2 \in W$;

2) $\dfrac{w_1 \approx w_2;\ w_2 \approx w_3}{w_1 \approx w_3}$, где $w_1, w_2, w_3 \in W$;

3) $\dfrac{w_1 \approx w_2;\ w'_1 \approx w'_2}{w_1 w'_1 \approx w_2 w'_2}$, где $w_1, w'_1, w_2, w'_2 \in W$;

4) $\dfrac{w_1 w_2 w_3 \approx w_1 w'_2 w_3}{w_2 \approx w'_2}$, где $w_1, w_2, w'_2, w_3 \in W$.

В дальнейшем будут рассматриваться множества тождеств $I \supseteq I_0$, замкнутые относительно выводимости. Любое множество тождеств I биективно полугруппе $S_I = \langle W; \hat{} \rangle / I$, которая является результатом факторизации полугруппы S_0 по следующему отношению конгруэнции $\sim_I$:

$$w_1 \sim_I w_2 \Leftrightarrow (w_1 \approx w_2) \in I.$$

Пусть $\langle \mathcal{L}, \leq \rangle$ — пара, в которой $\mathcal{L}$ — множество всех полугрупп S_I, а $S_{I_1} \leq S_{I_2}$ равносильно $I_1 \subseteq I_2$. Очевидно, система $\langle \mathcal{L}; \leq \rangle$ является полной решеткой, где $\sup \left\{ S_{I_j} \;\middle|\; j \in J \right\} = S_I$, I — множество всех тождеств выводимых из $\bigcup\limits_{j \in J} I_j$, $\inf \left\{ S_{I_j} \;\middle|\; j \in J \right\} = S_{\bigcap\limits_{j \in J} I_j}$. Полугруппа S_0 является нулевым элементом в решетке $\langle \mathcal{L}; \leq \rangle$, а одноэлементная полугруппа, в которой все слова отождествлены, — ее единичным элементом.

Определим факторизации множества ω^ω, соответствующие множествам тождеств I. Две последовательности f_0 и f_1 из ω^ω называются *почти одинаковыми*, если существуют такие числа $l_0, l_1 \in \omega$, что $f_0(n + l_0) = f_1(n + l_1)$ для любых $n \in \omega$. Последовательности f_0 и f_1 называются *сильно I-эквивалентными*, если f_i почти одинакова со счетной конкатенацией слов $w_i^m \in W$, $m \in \omega$, $i = 0, 1$, где тождество $w_0^m \approx w_1^m$ принадлежит I, $m \in \omega$. Последовательности f и f' называются *I-эквивалентными*, если существует последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \omega^\omega$, в которой $f_0 = f$, $f_n = f'$, f_i и f_{i+1} сильно I-эквивалентны для любого $i = 0, \ldots, n-1$.

Очевидно, что после попарных отождествлений w_1- и w_2-цепей для всех тождеств $w_1 \approx w_2$ из I существование изоморфизма объединений f- и f'-цепей становится равносильно I-эквивалентности f и f'.

Для любого множества тождеств I обозначим через ω^ω / I фактор-множество множества ω^ω по отношению I-эквивалентности. Через T^0/I обозначим теорию, полученную из T^0 попарными отождествлениями w_1- и w_2-цепей для всех тождеств $w_1 \approx w_2$ из I. Очевидно, можно предполагать, что множества ω^ω / I биективны теориям T^0/I.

Обозначим через $\mathrm{IL}_k(T^0/I)$ число $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ для класса $\widetilde{\mathbf{M}}$ типов изоморфизма моделей теории T^0/I, содержащего тип изоморфизма модели $\mathcal{M}_{p_k}$.

Лемма 3.5.4. 1. *Если* $I_1 \subseteq I_2$, *то* $\mathrm{IL}_k(T^0/I_1) \geq \mathrm{IL}_k(T^0/I_2)$.
2. $\mathrm{IL}_k(T^0/I_0) = 2^\omega$.
3. $\mathrm{IL}_k(T^0/\{w_1 \approx w_2 \mid w_1, w_2 \in W\}) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Следующая лемма неявно доказана в параграфе 3.4.

Лемма 3.5.5. *Для любого* $n \in \omega \setminus \{0\}$ *существует такое множество тождеств* I_n, *что* $\mathrm{IL}_k(T^0/I_n) = n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем число $n \geq 1$ и рассмотрим множество I_n тождеств, выводимых из множества тождеств

$$n - 1 \approx m,$$

$m \geq n$, и

$$n_1 n_2 \ldots n_s \approx n_s,$$

$\max\{n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}\} < n_s$. Нетрудно заметить, что любая последовательность из ω^ω I_n-эквивалентна некоторой константной последовательности f_r, $f_r(j) \equiv r$, $j \in \omega$, $0 \leq r < n$. Действительно, из выписанных тождеств вытекает, что любая последовательность f I_n-эквивалентна последовательности f_r, где r равно наибольшему значению $< n - 1$ бесконечных константных подпоследовательностей f, если такие подпоследовательности существуют, и $r = n - 1$, если таких подпоследовательностей нет. Кроме того, очевидно, последовательности $f_0, \ldots, f_{n-1}$ попарно не I_n-эквивалентны. Таким образом, $\mathrm{IL}_k(T^0/I_n) = n$. $\square$

Лемма 3.5.6. *Существует такое множество тождеств* I_ω, *что* $\mathrm{IL}_k(T^0/I_\omega) = \omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через I_ω множество тождеств, выводимых из тождеств

$$n_1 n_2 \ldots n_s \approx n_s,$$

$\max\{n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}\} < n_s$, и

$$n_1 n_2 \approx n_1 (n_1 + 1)(n_1 + 2) \ldots (n_2 - 1) n_2,$$

$n_1 < n_2$. Покажем, что $\mathrm{IL}_k(T^0/I_\omega) = \omega$. Действительно, в силу первой системы тождеств любая ограниченная последовательность $f \in \omega^\omega$ I_ω-эквивалентна константной последовательности $f_r \in \omega^\omega$, $f_r(j) \equiv r$, $j \in \omega$, где r — наибольшее значение бесконечной константной подпоследовательности f. Кроме того, из первой и второй систем тождеств вытекает, что любая неограниченная последовательность I_ω-эквивалентна последовательности $f_\omega \in \omega^\omega$, где $f_\omega(j) = j$, $j \in \omega$. Таким образом, любая последовательность $f \in \omega^\omega$ I_ω-эквивалентна некоторой последовательности f_μ, $\mu \leq \omega$. Очевидно, последовательности f_μ попарно не I_ω-эквивалентны. Следовательно, $\mathrm{IL}_k(T^0/I_\omega) = \omega$. $\square$

Теорема 3.5.1 непосредственно вытекает из лемм 3.5.4 — 3.5.6.

Остается открытым вопрос о существовании такого множества I_{ω_1}, что $\mathrm{IL}_k(T^0/I_{\omega_1}) = \omega_1$. По-видимому положительный ответ может представить альтернативный по отношению к конструкции Р. Найта [139] подход для построения контрпримера к гипотезе Воота об отсутствии теории T, для которой $I(T, \omega) = \omega_1$.

§ 3.6. Предпорядки Рудина — Кейслера в малых теориях

Следующая модификация теоремы 3.4.1 представляет описание предупорядоченных множеств $\mathrm{RK}(T)$ малых теорий T.

Теорема 3.6.1. 1. *Для любой малой теории T предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ не более чем счетно, направлено вверх и имеет наименьший элемент.*

2. *Для любого не более чем счетного предупорядоченного направленного вверх множества $\langle X; \leq \rangle$, имеющего наименьший элемент, существует малая теория T, для которой $\mathrm{RK}(T) \simeq \langle X; \leq \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Соотношение $|\mathrm{RK}(T)| \leq \omega$ вытекает из малости теории T. Направленность вверх предупорядоченного множества $\mathrm{RK}(T) = \langle \mathbf{PM}; \leq_{RK} \rangle$ следует из того, что если $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — типы изоморфизма из $\mathbf{PM}$, соответствующие моделям $\mathcal{M}_{\overline{a}_1}$ и $\mathcal{M}_{\overline{a}_2}$, то типы $\mathrm{tp}(\overline{a}_1)$ и $\mathrm{tp}(\overline{a}_2)$ подчиняются типу $q = \mathrm{tp}(\overline{a}_1 \hat{\ } \overline{a}_2)$, а, значит, $\mathbf{M}_1 \leq_{RK} \mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_2 \leq_{RK} \mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ — тип изоморфизма модели $\mathcal{M}_q$. Наименьший элемент в $\mathrm{RK}(T)$ представляет собой тип изоморфизма простой модели.

2. В силу теоремы 3.4.1 без ограничения общности можно предполагать, что множество X счетно. Построение малой теории T с условием $\mathrm{RK}(T) \simeq \langle X; \leq \rangle$ проводится аналогично построению теорий для доказательства теоремы 3.4.1 с заменой теории одноместных предикатов $P_1, \ldots, P_{|X|-1}$ на теорию попарно непересекающихся одноместных предикатов P_i, $i \in \omega$, каждый из которых содержит бесконечное число элементов. $\square$

§ 3.7. Теории с неплотными структурами властных орграфов и теории с властными типами, не имеющие властных орграфов

Опишем модификацию конструкции из параграфа 3.2, приводящую к построению властного орграфа $\hat{\Gamma} = \langle \hat{X}; \hat{Q} \rangle$, транзитивное замыкание которого образует частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов для любого элемента из $\hat{X}$.

Отношение $\hat{Q}$ будет представляться в виде непересекающегося объединения отношений Q_0 и Q_1 таких, что $Q_0(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ — главные формулы с условиями

$$\vdash Q_i(x, y) \leftrightarrow \hat{Q}(x, y) \wedge \Big(\exists z \, (\hat{Q}(x, z) \wedge \hat{Q}(y, z))\Big)^{1-i} \wedge \Big(\exists u \, (\hat{Q}(x, u) \wedge \hat{Q}(u, y))\Big)^{i},$$

$i = 0, 1$. При этом множество $Q_0(a, \hat{\Gamma})$ будет множеством последователей элемента a в $\mathrm{TC}(\hat{\Gamma})$.

Обозначим через $\hat{\mathbf{K}}^*$ класс всех c-графов $\mathcal{A} = \langle A, \hat{Q}, W \rangle$, $\hat{Q} = Q_0 \dot{\cup} Q_1$ таких, что из $\models Q_0(a, b)$ следует отсутствие (c, b)-маршрутов для любого элемента $c \in \hat{Q}(a, \mathcal{A}) \setminus \{b\}$, а из $\models Q_1(a, b)$ следует отсутствие (b, c)-маршрутов для любого элемента $c \in \hat{Q}(a, \mathcal{A}) \setminus \{b\}$. При этом если $(a, b) \in Q_i$, то индекс i будет называться *цветом дуги* (a, b).

Далее при рассмотрении c-графов из класса $\hat{\mathbf{K}}_0$ мы будем различать цвета дуг и использовать в орграфах и c-графах сигнатуру $\langle Q_0, Q_1 \rangle$ вместо (или как дополнение к) $\hat{Q}$.

Понятия c-вложения и c-изоморфизма очевидным образом переносятся на класс c-графов сигнатуры $\langle Q_0, Q_1 \rangle$ с сохранением цветов дуг при действии отображений.

Обозначим через $\hat{\mathbf{K}}_0^*$ подкласс класса $\hat{\mathbf{K}}^*$, порожденный из нижеперечисленных c-графов $\langle A, Q_0, Q_1, W\rangle$ операциями взятия c-подграфов, c-изоморфных копий, свободных c-амальгам, операциями трассировки (позволяющими для любой выбранной пары не связанных маршрутами вершин (a, b), где $\mathrm{Col}(a) \le \mathrm{Col}(b)$, добавлять к записям W информацию о кратчайших (a, b)-маршрутах произвольной длины m, превосходящей длины всех кратчайших маршрутов данного c-графа), а также операциями детрассировки (позволяющими удалять указанную информацию):

а) $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,0} = \langle\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2)\}, \{(0, 2)\}, W\rangle$, где $W = \varnothing$;

б) $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,1} = \langle\{0, 1, 2\}, \{(0, 1)\}, \{(0, 2), (1, 2)\}, W\rangle$, где $W = \varnothing$;

в) $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,s} = \langle\{0, 1, 2\}, \{(0, 1)\}, \{(0, 2)\}, W\rangle$, где $W = \{(1, 2, s)\}$, $2 \le s < \omega$, $\mathrm{Col}(0) = \alpha$, $\mathrm{Col}(1) = \beta$, $\mathrm{Col}(2) = \gamma$, $\alpha \le \beta \le \gamma$, $\gamma \in \omega \cup \{\infty\}$.

Лемма 3.7.1. (^-амальгамационная лемма). *Класс $\hat{\mathbf{K}}_0^*$ удовлетворяет ^-амальгамационному свойству* (^-AP)*, т. е. для любых c-вложений $f_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ и $g_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{C}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \hat{\mathbf{K}}_0^*$, существует c-граф $\mathcal{D} \in \hat{\mathbf{K}}_0^*$ и c-вложения $f_1 : \mathcal{B} \to_c \mathcal{D}$ и $g_1 : \mathcal{C} \to_c \mathcal{D}$ такие, что $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. □

Обозначим через $\hat{\mathbf{K}}_0$ класс цветных бесконтурных орграфов, у которых каждый конечный подграф образует c-граф из класса $\hat{\mathbf{K}}_0^*$.

Теорема 3.7.2. *Существует счетный цветной насыщенный орграф $\hat{\mathcal{M}} \in \hat{\mathbf{K}}_0$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *если $f : \mathcal{A} \to_c \hat{\mathcal{M}}$ и $g : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ — c-вложения и $\mathcal{B} \in \hat{\mathbf{K}}_0^*$, то существует c-вложение $h : \mathcal{B} \to_c \hat{\mathcal{M}}$ такое, что $f = g \circ h$;*

2) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c-изоморфные c-подграфы орграфа $\hat{\mathcal{M}}$, то $\mathrm{tp}_{\hat{\mathcal{M}}}(A) = \mathrm{tp}_{\hat{\mathcal{M}}}(B)$;*

3) *раскраска обеднения $\hat{\mathcal{M}} \upharpoonright \hat{Q}$ модели $\hat{\mathcal{M}}$ до графовой сигнатуры $\Sigma = \{\hat{Q}\}$ несущественна и $\hat{Q}$-упорядочена;*

4) *формула $\hat{Q}(x, y)$ эквивалентна в теории $\mathrm{Th}(\hat{\mathcal{M}} \upharpoonright \hat{Q})$ дизъюнкции двух главных формул $Q_0(x, y)$ и $Q_1(x, y)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 3.1.3. Конструкция насыщенной модели $\hat{\mathcal{M}}$ повторяет конструкцию модели $\mathcal{M}$ из доказательства теоремы 3.1.3 с заменой класса $\mathbf{K}_0^*$ на класс $\hat{\mathbf{K}}_0^*$, а класса $\mathbf{K}_0$ — на класс $\hat{\mathbf{K}}_0$. □

Элементы из $Q_0(a,\hat{\mathcal{M}})$ являются последователями элемента a в орграфе $\mathrm{TC}(\hat{\Gamma})$, где $\hat{\Gamma}=\hat{\mathcal{M}}|_{\hat{Q}}$, поскольку в силу конструкции не существует элемента $b\in\hat{Q}(a,\hat{\mathcal{M}})$, для которого существует (b,c)-маршрут с элементом $c\in Q_0(a,\hat{\mathcal{M}})\setminus\{b\}$. Таким образом, в орграфе $\mathrm{TC}(\hat{\Gamma})$ частичный порядок не является плотным.

Аналогично следствиям 3.1.4–3.1.6 устанавливается, что отношение $\mathrm{SI}_{p_\infty(x)}$ несимметрично, орграф $\left\langle p_\infty(\hat{M}); R_{\hat{Q}}^{p_\infty}(\hat{\mathcal{M}})\right\rangle$ является властным, а теория $\mathrm{Th}(\hat{\mathcal{M}})$ не проста.

Заметим, что построения, описанные в параграфе 3.2, применимы к модели $\hat{\mathcal{M}}$ и также приводят к образованию не ω-категоричной, не простой теории, у которой любой неглавный тип является властным. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.7.3. *Существует генерическая теория T, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $|\mathrm{RK}(T)|=2$*;*

2) *структура реализаций некоторого властного типа $p\in S(T)$ содержит властный орграф Γ с неограниченными длинами кратчайших маршрутов и бесконечным числом покрывающих элементов над любым элементом для транзитивного замыкания* $\mathrm{TC}(\Gamma)$.

Приведем еще одну модификацию описанной выше конструкции, позволяющую построить малую генерическую теорию, имеющую тип с локальным свойством попарного пересечения, но не обладающий глобальным свойством попарного пересечения.

Пусть $\mathcal{A}=\langle A,Q,W\rangle$ — c-граф. Заменим графовую сигнатуру введением последовательности попарно непересекающихся двухместных предикатов Q_n, $n\in\omega$, таких, что $Q=\dot{\bigcup\limits_{n\in\omega}}Q_n$, а записи из W о существовании внешних маршрутов, связывающих элементы из A, заменим записями о существовании этих маршрутов с указанием цветов m_i последовательных дуг $(b_i,b_{i+1})\in Q_{m_i}$, составляющих эти маршруты. Кроме того, позволим в полученной записи W' для любых двух элементов $a,b\in A$ указывать формульную информацию вида

$$\varphi_{k,m}(a,b)\rightleftharpoons\exists x\left(\bigwedge_{i=0}^{k}\neg\mathrm{Col}_i(x)\wedge\left(\bigvee_{i=0}^{m}Q_i(x,a)\right)\wedge\left(\bigvee_{i=0}^{m}Q_i(x,b)\right)\right)\wedge$$

$$\neg\exists y \left(\bigwedge_{i=0}^{k} \neg \mathrm{Col}_i(y) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{k} Q_i^j(y,a)\right) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{k} Q_i^j(y,b)\right)\right)$$

так, чтобы совокупность формул над множеством A, соответствующих записям из W' была совместна. Полученную систему $\mathcal{A} = \langle A, Q_n, W' \rangle_{n\in\omega}$ будем называть cv-*графом*.

Понятия c-вложения и c-изоморфизма как и выше переносятся на класс cv-графов сигнатуры $\langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots \rangle$ с сохранением цветов дуг при действии отображений, а также истинности формул вида $\varphi_{k,m}(a,b)$, имеющихся в записях.

cv-Граф $\mathcal{A} = \langle A, Q_{n,\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}} \rangle_{n\in\omega}$ называется cv-*подграфом* cv-графа $\mathcal{B} = \langle B, Q_{n,\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}} \rangle_{n\in\omega}$ (обозначается $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cv}} \mathcal{B}$), если $A \subseteq B$, $Q_{n,\mathcal{A}} = Q_{n,\mathcal{B}} \cap A^2$, $n \in \omega$, а $W_{\mathcal{A}}$ состоит из всех записей, входящих в $W_{\mathcal{B}}$, в которых участвуют пары элементов из A, а также записей, индуцируемых cv-графом $\mathcal{B}$, о существовании или отсутствии элементов x и y в соответствии с формулами $\varphi_{k,m}(a,b)$.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, Q_{n,\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}} \rangle_{n\in\omega}$, $\mathcal{B} = \langle B, Q_{n,\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}} \rangle_{n\in\omega}$ и $\mathcal{C} = \langle C, Q_{n,\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}} \rangle_{n\in\omega}$ — cv-графы, для которых $A = B \cap C$, $Q_{n,\mathcal{A}} = Q_{n,\mathcal{B}} \cap Q_{n,\mathcal{C}}$, $n \in \omega$, $W_{\mathcal{A}}$ состоит из всех записей, входящих как в $W_{\mathcal{B}}$, так и в $W_{\mathcal{C}}$, в которых участвуют пары элементов из A и которые индуцируются cv-графами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. cv-*Амальгамой* cv-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ называется cv-граф $\langle B \cup C, Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}} \cup W \rangle$, где W состоит из всевозможных формул, описывающих для любых элементов $b \in B \setminus A$ и $c \in C \setminus A$ наличие и цвета элементов d, для которых существуют (d,b)- и (d,c)-маршруты (если их существование вытекает из отношений $Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}}$ и $W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}}$), и наличие элементов e всех конечных цветов m, не превосходящих $\min\{\mathrm{Col}(b), \mathrm{Col}(c)\}$, для которых выполняется $\models \bigvee\limits_{i=0}^{m} Q_i(e,b) \wedge \bigvee\limits_{i=0}^{m} Q_i(e,c)$, а также в W включается конечное множество формул вида $\varphi_{m-1,m}(b,c)$, $m \leq \min\{\mathrm{Col}(b), \mathrm{Col}(c)\}$, $m \in \omega$, для всех остальных пар (b,c), где $b \in B \setminus A$, $c \in C \setminus A$.

Обозначим через $\check{\mathbf{K}}_0$ класс cv-графов, которые получаются всевозможными описанными выше преобразованиями c-графов из класса $\mathbf{K}_0$. Обозначим через $\check{\mathbf{K}}_0^*$ подкласс класса $\check{\mathbf{K}}_0$, порожденный операциями взятия всевозможных cv-подграфов, cv-изоморфных копий и свободных cv-амальгам, а также операциями трассировки и детрассировки из следующих cv-графов $\langle A, Q_n,$

$W\rangle_{n\in\omega}$, где индекс $\cdot_n$ в записи $(a,b)_n$ указывает, что $(a,b)\in Q_n$:

$$\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,n_1,n_2,n_3,W} = \langle\{0,1,2\},\{(0,1)_{n_1},(1,2)_{n_2},(0,2)_{n_3}\},W\rangle,$$

где $\mathrm{Col}(0)=\alpha$, $\mathrm{Col}(1)=\beta$, $\mathrm{Col}(2)=\gamma$, $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, $\gamma\in\omega\cup\{\infty\}$, W состоит из непустого конечного множества формул $\varphi_{m-1,m}(0,1)$, $m\leq\min\{\mathrm{Col}(0),\mathrm{Col}(1)\}$, $m\in\omega$, а также непустого конечного множества формул $\varphi_{m-1,m}(0,2)$, $m\leq\min\{\mathrm{Col}(0),\mathrm{Col}(2)\}$, $m\in\omega$.

Лемма 3.7.4. ($\check{}$-амальгамационная лемма). *Класс* $\check{\mathbf{K}}_0^*$ *удовлетворяет* $\check{}$*-амальгамационному свойству* ($\check{}$-AP)*, т. е. для любых* cv*-вложений* $f_0:\mathcal{A}\to_{\mathrm{cv}}\mathcal{B}$ *и* $g_0:\mathcal{A}\to_{\mathrm{cv}}\mathcal{C}$*, где* $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\in\check{\mathbf{K}}_0^*$*, существует* cv*-граф* $\mathcal{D}\in\check{\mathbf{K}}_0^*$ *и* cv*-вложения* $f_1:\mathcal{B}\to_{\mathrm{cv}}\mathcal{D}$ *и* $g_1:\mathcal{C}\to_{\mathrm{cv}}\mathcal{D}$ *такие, что* $f_0\circ f_1=g_0\circ g_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. □

Обозначим через $\check{\mathbf{K}}$ класс цветных бесконтурных орграфов, у которых каждый конечный подграф образует cv-граф из класса $\check{\mathbf{K}}_0^*$.

Теорема 3.7.5. *Существует счетный цветной насыщенный орграф* $\check{\mathcal{M}}\in\check{\mathbf{K}}$*, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *если* $f:\mathcal{A}\to_{\mathrm{cv}}\check{\mathcal{M}}$ *и* $g:\mathcal{A}\to_{\mathrm{cv}}\mathcal{B}$ — cv*-вложения и* $\mathcal{B}\in\check{\mathbf{K}}_0^*$*, то существует* cv*-вложение* $h:\mathcal{B}\to_{\mathrm{cv}}\check{\mathcal{M}}$ *такое, что* $f=g\circ h$*;*

2) *если* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ — cv*-изоморфные* cv*-подграфы орграфа* $\check{\mathcal{M}}$*, то* $\mathrm{tp}_{\check{\mathcal{M}}}(A)=\mathrm{tp}_{\check{\mathcal{M}}}(B)$*;*

3) *раскраска обеднения* $\check{\mathcal{M}}\restriction\hat{Q}$ *модели* $\check{\mathcal{M}}$ *до графовой сигнатуры* $\Sigma=\langle Q_0,Q_1,\ldots,Q_n,\ldots\rangle$ *несущественна и* Q_n*-упорядочена для каждого* $n\in\omega$*;*

4) *тип* $p_\infty(x)$ *обладает* (LPIP)*, но не имеет* (GPIP).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 3.1.3. Конструкция насыщенной модели $\hat{\mathcal{M}}$ повторяет конструкцию модели $\mathcal{M}$ из доказательства теоремы 3.1.3 с заменой класса $\mathbf{K}_0^*$ на класс $\check{\mathbf{K}}_0^*$, а класса $\mathbf{K}$ — на класс $\check{\mathbf{K}}$. Свойство (LPIP) для типа $p_\infty(x)$ вытекает из того, что в силу генерической конструкции для любых двух одноцветных элементов a и b цвета, большего n, найдется элемент c цвета n такой, что $\models\bigvee\limits_{i=0}^{n}Q_i(c,a)\wedge\bigvee\limits_{i=0}^{n}Q_i(c,b)$. Отсутствие (GPIP) следует из того, что по теореме компактности для любого $n\in\omega$ найдутся реализации a и b типа p_∞, не имеющие реализаций c типа p_∞ таких, что $(c,a),(c,b)\in\cup\left\{\bigcup\limits_{i=0}^{n}Q_i^j\mid j\in\omega\right\}$. $\square$

В силу конструкции в модели $\check{\mathcal{M}}$ для любых двух реализаций a и b типа $p_\infty(x)$ найдутся номера $m,n\in\omega$ и реализация c типа p_∞ такие, что $\models Q_m(c,a)\wedge Q_n(c,b)$. Кроме того для любых элементов d_1 и d_2 и любого цвета $\alpha\geq\max\{\mathrm{Col}(d_1),\mathrm{Col}(d_2)\}$ найдется элемент e цвета α, для которого $\models Q_0(d_1,e)\wedge Q_0(d_2,e)$. Поэтому очевидная модификация конструкции из параграфа 3.2, примененная к генерической модели $\check{\mathcal{M}}$, устанавливает следующую теорему.

Теорема 3.7.6. *Существует генерическая теория T, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $|\mathrm{RK}(T)|=2$*;*

2) *некоторый властный тип $p\in S(T)$ имеет* (LPIP)*, но не имеет* (GPIP).

Построениями, аналогичными построениям, проведенным в параграфах 3.3–3.6, генерические модели $\hat{\mathcal{M}}$ и $\check{\mathcal{M}}$ расширяются до моделей, теории которых имеют заданный предпорядок подчинения и заданную функцию распределения числа предельных моделей.

Г л а в а 4

СТАБИЛЬНЫЕ ГЕНЕРИЧЕСКИЕ ЭРЕНФОЙХТОВЫ ТЕОРИИ (РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛАХЛАНА)

§ 4.1. Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Двудольные орграфы

Б. Хервиг [113] описал генерическую конструкцию, модифицировавшую *конструкцию Хрушовского* [121] и позволившую построить малую стабильную теорию графа с раскрашенными ребрами, у которой имеется единственный 1-тип и его собственный вес бесконечен. Тем самым была построена реализация одного из существенных условий, которыми обладают все стабильные эренфойхтовы теории.

В этом параграфе на основе *конструкции Хервига* [113] мы описываем генерическую конструкцию, приводящую к построению семейства малых стабильных двудольных безреберных орграфов с раскрашенными дугами таких, что все 1-типы имеют бесконечный вес. Тем самым решается вопрос о существовании малого стабильного бесконтурного орграфа с раскрашенными дугами, у которого имеются типы с бесконечным весом.

1. Определения и свойства. Сигнатура $\Sigma_{\rm bp}$ генерического двудольного графа $\Gamma_{\rm bp}$ будет состоять из бинарных символов I_p, $p \in \omega$, а также из одноместных символов J_0 и J_1. Отношения, соответствующие символам J_0 и J_1, не будут иметь общих элементов и образуют разбиение носителя на две доли. Отношения, соответствующие символам I_p будут иррефлексивными, антисимметричными и попарно непересекающимися, т. е. каждая пара вершин (a, b) будет принадлежать не более, чем одному отношению I_p. При этом, если $(a, b) \in I_p$, то $a \in J_0$, $b \in J_1$. В дальнейшем в этом параграфе под *графами* будут пониматься двудольные орграфы сигнатуры Σ_{bp}, удовлетворяющие указанным выше условиям. При этом, структура, состоящая из пустого множества и пустых отношений тоже будет считаться графом, обозначаемым через $\varnothing$. Класс всех рассматриваемых графов обозначим через $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{bp}}$.

Зафиксируем положительное вещественное число β. Обозначим через $\frac{l_n}{m_n}$ его *наилучшую рациональную аппроксимацию* с условиями $\frac{l_n}{m_n} \leq \beta$ и $m_n \leq n$. *Индексом числа* β называется значение $\mathrm{Ind}(\beta) = \sum\limits_{i>0}(\beta - \frac{l_i}{m_i})$. В работе Б. Хервига [113] замечено, что множество $\{\beta \in \mathbb{R}^+ \mid \mathrm{Ind}(\beta) > N\}$ плотно и открыто для любого $N \in \omega$. Поэтому множество $\{\beta \mid \mathrm{Ind}(\beta) = \infty\}$ плотно в $\mathbb{R}^+$. Кроме того, если $\mathrm{Ind}(\beta) = \infty$ и $q \in \mathbb{Q}$, то $\mathrm{Ind}(\beta q) = \infty$.

Выберем положительное вещественное число $\alpha_1 < \frac{1}{2}$, где $\mathrm{Ind}(\frac{1}{\alpha_1}) = \infty$. Ниже мы определим последовательность $(\alpha_k)_{k\in\omega\setminus\{0\}}$ весов I_k-дуг, где $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{N_k}$, а N_k — достаточно большие натуральное числа.

Определим *предранговую функцию* y, которая каждому конечному графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие некоторое вещественное число по правилу

$$y(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}),$$

где $e_k(\mathcal{A})$ — число I_k-дуг в графе $\mathcal{A}$.

Заметим, что сумма в определении предранговой функции всегда конечна в силу конечности графов $\mathcal{A}$.

p-Аппроксимацией предранговой функции y называется функция y_p, которая каждому конечному графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие вещественное число по правилу

$$y_p(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}).$$

Для каждого графа $\mathcal{A}$ рассмотрим его представление в виде точки $s^1_{\mathcal{A}} = (|A|; y_1(\mathcal{A}))$ в *решетке*[1]

$$L_1 = \{(n; n - \alpha_1 \cdot m) \mid n, m \in \omega\}.$$

Определим монотонно возрастающую неограниченную последовательность $(b^1_n)_{n\geq 1}$: $b^1_1 \rightleftharpoons 1$, $b^1_{n+1} \rightleftharpoons b^1_n + (1 - \alpha_1 \cdot \frac{l_n}{m_n})$, где $\frac{l_n}{m_n}$ — наилучшая рациональная аппроксимация числа $\frac{1}{\alpha_1}$, удовлетворяющая неравенству $m_n \leq n$. Неограниченность последовательности вытекает из условия $\mathrm{Ind}(\frac{1}{\alpha_1}) = \infty$.

Для графа $\mathcal{A}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}^{\mathrm{bp}}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ конечен и $y_1(\mathcal{A}') \geq b^1_n$ для любого непустого графа $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, где $n = |A'|$. Положим $k_1 \rightleftharpoons 1$ и, тем самым, завершим определение шага 1.

Пусть на шаге p уже определено число α_p, решетка L_p возможных y_p-значений, а также неограниченно возрастающая последовательность $(b^p_n)_{n\geq k_p}$. Выберем натуральное число $k_{p+1} > k_p$ с условием $b^p_{k_{p+1}} > p + 2$ и достаточно малое вещественное число $\varepsilon_{p+1} > 0$ ($\varepsilon_{p+1} < \varepsilon_p$ при $p > 1$) такое, что для любых $(p_1, y_1), (p_2, y_2) \in L_p$ с условиями $p_1, p_2 \leq k_{p+1}$ и $y_1 \neq y_2$ имеет место $|y_1 - y_2| > \varepsilon_{p+1}$. Выберем теперь число $\alpha_{p+1} = \frac{\alpha_p}{N_p}$ ($N_p \in \omega$, $N_p > 2$) так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_{p+1} \cdot \frac{k_{p+1}(k_{p+1}-1)}{2} < \varepsilon_{p+1}$. Решетка

$$L_{p+1} \rightleftharpoons \{(n; n - \alpha_{p+1} \cdot m) \mid n, m \in \omega\}$$

утончает решетку L_p.

Построение последовательности $(b^{p+1}_n)_{n\geq k_{p+1}}$ проводится в соответствии со следующими соотношениями: $b^{p+1}_{k_{p+1}} = b^p_{k_{p+1}} - 2\varepsilon_{p+1}$, $b^{p+1}_{n+1} = b^{p+1}_n + (1 - \alpha_{p+1} \cdot \frac{l_n}{m_n})$, где $\frac{l_n}{m_n}$ — наилучшая рациональная аппроксимация числа $\frac{1}{\alpha_{p+1}}$, удовлетворяющая неравенству $m_n \leq n$. Из условия $\mathrm{Ind}(\frac{1}{\alpha_{p+1}}) = \infty$ получаем неограниченность монотонно возрастающей последовательности $(b^{p+1}_n)_{n\geq k_{p+1}}$. При этом, для наименьшего элемента $b^{p+1}_{k_{p+1}}$ этой последовательности

[1] Следуя [113], здесь и далее под решеткой понимается некоторое дискретное множество точек на координатной плоскости.

имеет место неравенство

$$b^{p+1}_{k_{p+1}} > p + 1 + \varepsilon_2, \qquad (4.1)$$

поскольку $\varepsilon_2 < \frac{1}{3}$.

Лемма 4.1.1. *Для любого положительного числа $p \in \omega$ и любых конечных графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ — собственный подграф графа $\mathcal{B}$, $|B| = n < k_{p+1}$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется $y_p(\mathcal{B}) - y(\mathcal{B}) < \varepsilon_{p+1}$.*

2. *Выполняется $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $y(\mathcal{A}) < y(\mathcal{B})$, и выполняется $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $y_q(\mathcal{A}) < y_q(\mathcal{B})$ для любого $q \geq p$.*

3. *Наименьший возможный положительный наклон*[2] $\mathrm{sl}((p_1, y_1), (p_2, y_2))$ *между точками (p_1, y_1) и (p_2, y_2) ($p_1 < p_2 \leq n$, $n \geq k_p$) в решетке L_p совпадает с наклоном* $\mathrm{sl}((n, b^p_n)$, $(n + 1, b^p_{n+1}))$ *между точками (n, b^p_n) и $(n + 1, b^p_{n+1})$.*

4. *Если $q < p$ и $m \geq k_p$, то $b^p_m \leq b^q_m - 2\varepsilon_{q+1}$.*

Доказательство. 1. Поскольку при подсчете значений $e_k(\mathcal{B})$ используются лишь неупорядоченные пары различных элементов из B, каждая такая пара участвует в подсчете не более одного значения $e_k(\mathcal{B})$, а число таких пар не превосходит $\frac{k_{p+1}(k_{p+1}-1)}{2}$, то $y_p(\mathcal{B})$ может отличаться от $y(\mathcal{B})$ менее, чем на $\alpha_{p+1} \cdot \frac{k_{p+1}(k_{p+1}-1)}{2} < \varepsilon_{p+1}$.

2. Поскольку $y(\mathcal{A}) = y_q(\mathcal{A})$ и $y(\mathcal{B}) = y_q(\mathcal{B})$, начиная с некоторого q, достаточно установить эквивалентности $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B}) \Leftrightarrow y_q(\mathcal{A}) < y_q(\mathcal{B})$ для любого $q \geq p$. Выберем произвольно $q \geq p$ и предположим, что $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B})$. Тогда справедливо $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B}) - \varepsilon_{p+1}$ по определению числа ε_{p+1}. В силу утверждения 1 имеем

$$y_q(\mathcal{A}) \leq y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B}) - \varepsilon_{p+1} < y(\mathcal{B}) \leq y_q(\mathcal{B}).$$

Таким образом, $y_q(\mathcal{A}) < y_q(\mathcal{B})$.

Для доказательства обратной импликации предположим, что $y_p(\mathcal{A}) \geq y_p(\mathcal{B})$ и без ограничения общности будем считать, что $A \neq B$. Покажем, что тогда $y_p(\mathcal{A}) > y_p(\mathcal{B})$. Действительно, по условию положительная часть $|A|$ значения $y_p(\mathcal{A})$ меньше положительной части $|B|$ значения $y_p(\mathcal{B})$. Так как значения $y_p(\mathcal{A})$

[2] т.е тангенс угла наклона отрезка, соединяющего точки.

и $y_p(\mathcal{B})$ имеют вид $|A| - M_{\mathcal{A}} \cdot \alpha_p$ и $|B| - M_{\mathcal{B}} \cdot \alpha_p$ соответственно, из иррациональности числа α_p получаем $y_p(\mathcal{A}) \neq y_p(\mathcal{B})$.

Теперь неравенство $y_q(\mathcal{A}) > y_q(\mathcal{B})$ выводится из следующей цепочки неравенств:

$$y_q(\mathcal{A}) \geq y(\mathcal{A}) > y_p(\mathcal{A}) - \varepsilon_{p+1} > y_p(\mathcal{B}) \geq y_q(\mathcal{B}).$$

3. Минимальный возможный положительный наклон равен $\min\left\{\frac{p_1-\alpha_p\cdot m_1}{p_1}\;\middle|\;\frac{p_1}{m_1} > \alpha_p, p_1 \leq n\right\}$, что в свою очередь равно $1 - \alpha_p \cdot \frac{l_n}{m_n}$, где $\frac{l_n}{m_n}$ — наилучшая рациональная аппроксимация числа $\frac{1}{\alpha_p}$ с условием $m_n \leq n$.

4. Достаточно доказать, что $b_m^{q+1} \leq b_m^q - 2\varepsilon_{q+1}$. Это устанавливается индукцией по m, используя утверждение 3 и тот факт, что L_{q+1} является утончением L_q. $\square$

2. Генерический класс и генерическая теория. Для конечного графа $\mathcal{A}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_{p+1}^{\mathrm{bp}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_p^{\mathrm{bp}}$ и $y_p(\mathcal{A}') \geq b_n^p$ для любого графа $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, где $n = |A'|$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Положим $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}} \rightleftharpoons \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathbf{K}_p^{\mathrm{bp}}$. Обозначим через $\mathbf{K}^{\mathrm{bp}}$ класс всех графов, у которых каждый конечный подграф принадлежит классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — подграф графа $\mathcal{M}$, принадлежащего классу $\mathbf{K}^{\mathrm{bp}}$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *самодостаточный подграф* графа $\mathcal{M}$ и писать $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$, если $y(\mathcal{A}) \leq y(\mathcal{B})$ для любого конечного графа $\mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. Если $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — конечный граф, то $\mathcal{A}$ называется *сильным подграфом* графа $\mathcal{M}$.

Нам предстоит показать, что класс $\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}}$ всех бескванторных типов, соответствующих графам из класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$, с отношением $\leqslant'$ (где $\Phi(A) \leqslant' \Psi(B) \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$) является самодостаточным генерическим классом, обладающим (после добавления к типам необходимых формул, описывающих самодостаточные замыкания) свойством однородного t-амальгамирования. А из этого, согласно теореме 2.5.1, будет выводиться ω-насыщенность $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}}; \leqslant')$-генерической модели.

Начнем со следующего замечания.

Замечание 4.1.2. 1. *Из условий* $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ *и* $k_p \leq |A| = n < k_{p+1}$ *не следует* $y(\mathcal{A}) \geq b_n^p$. *Вместе с тем, значение* $y(\mathcal{A})$ *не может быть намного меньше* b_n^p*: поскольку* $y_p(\mathcal{A}) - y(\mathcal{A}) < \varepsilon_{p+1}$, *имеем* $y(\mathcal{A}) > b_n^p - \varepsilon_{p+1}$.

Кроме того, с учетом неравенства (4.1) *для графов* $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ *мощности* $|A| \geq \max\{2, k_p\}$ *справедливо неравенство* $y(\mathcal{A}) > p$.

2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— граф из класса* $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$, $|A| = p$, $\mathcal{M}$ *— граф из класса* $\mathbf{K}^{\mathrm{bp}}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. *Тогда* $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ *в том и только в том случае, когда* $y_p(\mathcal{A}) \leq y_p(\mathcal{B})$ *для всех конечных графов* $\mathcal{B}$, *где* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

Действительно, если $|B| < k_{p+1}$, то $y_p(\mathcal{A}) \leq y_p(\mathcal{B})$ равносильно $y(\mathcal{A}) \leq y(\mathcal{B})$ в силу леммы 4.1.1, п. 2. Если же $|B| \geq k_p$, то

$$y_p(\mathcal{B}) \geq y(\mathcal{B}) > p \geq y_p(\mathcal{A}).$$

Более того, для проверки самодостаточности графа $\mathcal{A}$ в графе $\mathcal{M}$ достаточно выбрать число $n_{\mathcal{A}} = k_p$ и проверить соотношения $y_p(\mathcal{A}) \leq y_p(\mathcal{B})$ лишь для графов $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, с условием $|B| < n_{\mathcal{A}}$.

Таким образом, условие $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ формульно определимо с помощью формулы, описывающей отсутствие $n < n_{\mathcal{A}}$ новых элементов из $M \setminus A$ таких, что $n < \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_p \cdot e_p$, где $p = |A|$, e_s — число новых I_s-дуг.

Непосредственно из определения вытекает

Лемма 4.1.3. 1. *Если* $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, *то* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

2. *Если* $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ *и* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, *то* $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$.

3. *Пустой граф* $\varnothing$ *является наименьшим элементом системы* $(\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}; \leqslant)$.

Лемма 4.1.4. *Если* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$, $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ *и* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, *то* $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда существуют некоторые n новых элементов из $C \setminus A$, для которых $n < \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots \alpha_p \cdot e_p$, где e_s — число новых I_s-дуг. Поскольку все новые элементы лежат в $B \setminus A$, они будут нарушать условие $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. □

Лемма 4.1.5. *Отношение* $\leqslant$ *является частичным порядком на классе* $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рефлексивность и антисимметричность отношения $\leqslant$ очевидны.

Покажем, что отношение $\leqslant$ транзитивно. Предположим противное и рассмотрим конечные графы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$, для которых $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$, но $\mathcal{A} \nleqslant \mathcal{C}$. Обозначим через p мощность графа $\mathcal{A}$. Выберем граф $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{C}$, с наименьшим возможным значением $y_p(\mathcal{A}')$. Это наименьшее значение достижимо графом мощности, меньшей $n_{\mathcal{A}}$, поскольку множество $\{y_p(\mathcal{D}) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}, y_p(\mathcal{D}) \leq y_p(\mathcal{A})\}$ является подмножеством конечного множества $\{n - \alpha_p \cdot m \mid n < n_{\mathcal{A}}, m < \frac{n_{\mathcal{A}}}{\alpha_p}\}$.

Докажем, что $\mathcal{A}'$ — минимальный сильный подграф графа $\mathcal{C}$, содержащий $\mathcal{A}$. Действительно, $\mathcal{A}' \leqslant \mathcal{C}$, поскольку для любого графа $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, если $|D| < k_{p+1}$, то $y(\mathcal{D}) \geq y(\mathcal{A}')$ в силу $y_p(\mathcal{D}) \geq y_p(\mathcal{A}')$ на основании леммы 4.1.1, п. 2, а если $|D| \geq k_{p+1}$, то $y(\mathcal{D}) > y(\mathcal{A}) \geq y(\mathcal{A}')$. Кроме того, любой граф $\mathcal{D}$ с условиями $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{A}'$ не является сильным подграфом $\mathcal{C}$, поскольку в силу минимальности $y_p(\mathcal{A}')$ выполняется $y_p(\mathcal{D}) \geq y_p(\mathcal{A}')$, а из $|A'| \neq |D|$ по лемме 4.1.1, п. 2 получаем $y(\mathcal{D}) > y(\mathcal{A}')$.

Из минимальности $\mathcal{A}'$ и наличия собственного сильного подграфа $\mathcal{B}$ графа $\mathcal{C}$ следует, что $A' \subsetneq C$. Теперь из $|A'| \neq |C|$ и иррациональности чисел α_s выводим $y_p(\mathcal{A}') \neq y_p(\mathcal{C})$ и на основании леммы 4.1.1, п.2 получаем $y(\mathcal{A}') < y(\mathcal{C})$. В силу леммы 4.1.4 имеем $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}' \leqslant \mathcal{A}'$. Поэтому $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$. Последнее соотношение противоречит $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \langle B; I_{p,\mathcal{B}}, J_{0,\mathcal{B}}, J_{1,\mathcal{B}} \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle C; I_{p,\mathcal{C}}, J_{0,\mathcal{C}}, J_{1,\mathcal{C}} \rangle$ — графы, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. *Свободной амальгамой* графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемой через $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$) называется система $\langle B \cup C; I_{p,\mathcal{B}} \cup I_{p,\mathcal{C}}, J_{0,\mathcal{B}} \cup J_{0,\mathcal{C}}, J_{1,\mathcal{B}} \cup J_{1,\mathcal{B}} \rangle$.

Заметим, что при построении свободной амальгамы начала (соответственно концы) дуг могут соединяться только с началами (концами) дуг. Поэтому система $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ является графом (двудольным графом с иррефлексивными и антисимметричными попарно непересекающимися отношениями I_p и одноместными отношениями J_0 и J_1, не имеющими общих элементов и образующими разбиение носителя на две доли так, что если $(a, b) \in I_p$, то $a \in J_0$ и $b \in J_1$), содержащим $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в качестве подграфов.

Вложение f графа $\mathcal{A}$ в граф $\mathcal{B}$ ($f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) называется *сильным*, если $f(\mathcal{A}) \leqslant \mathcal{B}$.

Лемма 4.1.6. (*амальгамационная лемма*). *Класс* $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ *удовлетворяет амальгамационному свойству* (AP), *т. е. для любых сильных вложений* $f_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *и* $g_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, *где* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$, *существует граф* $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ *и сильные вложения* $f_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ *и* $g_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *такие, что* $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Покажем, что граф $\mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ является искомым. Для этого, в силу симметричности определения свободной амальгамы, достаточно установить $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$.

Предположим, что $\mathcal{B} \not\leqslant \mathcal{D}$. Тогда существуют некоторые n новых элементов из $D \setminus B$, для которых $n < \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots \alpha_p \cdot e_p$, где $p = |B|$, а e_s — число новых I_s-дуг. Поскольку все новые элементы лежат в $C \setminus A$, они будут нарушать условие $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$.

Поскольку каждый подграф графа $\mathcal{D}$ имеет вид $\mathcal{B}_0 *_{\mathcal{A}_0} \mathcal{C}_0$, где $\mathcal{A}_0 \leqslant \mathcal{B}_0$ и $\mathcal{A}_0 \leqslant \mathcal{C}_0$, для проверки $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ достаточно убедиться, что $y_p(\mathcal{D}) \geq b_n^p$, где $n = |D|$, $k_p \leq n < k_{p+1}$. Предположим, что $|B| \leq |C| = m$, $k_q \leq m < k_{q+1}$ и $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$. Из леммы 4.1.1, п. 3 и условия $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ вытекает

$$\mathrm{sl}((|A|, y_q(\mathcal{A})), (|B|, y_q(\mathcal{B}))) \geq \mathrm{sl}((l, b_l^q), (l+1, b_{l+1}^q))$$

для любого $l \geq m$. Тогда из равенства

$$\mathrm{sl}((|C|, y_q(\mathcal{C})), (|D|, y_q(\mathcal{D}))) = \mathrm{sl}((|A|, y_q(\mathcal{A})), (|B|, y_q(\mathcal{B})))$$

получаем

$$\mathrm{sl}((|C|, y_q(\mathcal{C})), (|D|, y_q(\mathcal{D}))) \geq \mathrm{sl}((m, b_m^q), (|D|, b_{|D|}^q)). \tag{4.2}$$

Из принадлежности графа $\mathcal{C}$ классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ следует, что точка $(|C|, y_q(\mathcal{C}))$ находится выше точки (m, b_m^q). Тогда на основании неравенства (4.2) заключаем, что точка $(|D|, y_q(\mathcal{D}))$ находится выше точки $(|D|, b_{|D|}^q)$, т. е. $y_q(\mathcal{D}) \geq b_{|D|}^q$.

Если $p = q$, то требуемое неравенство $y_p(\mathcal{D}) \geq b_n^p$ установлено. В противном случае, т. е. если $q < p$, $y_p(\mathcal{D})$ будет отличаться от $y_q(\mathcal{D})$ меньше, чем на $\alpha_{q+1} \cdot k_{q+1} \cdot (k_{q+1} - 1) < 2\varepsilon_{q+1}$, поскольку $\mathcal{D}$ содержит менее $k_{q+1} \cdot (k_{q+1} - 1)$ дуг. В силу леммы 4.1.1, п. 4 заключаем, что $y_p(\mathcal{D}) \geq b_n^p$. $\square$

На основании лемм 4.1.3–4.1.6 получаем

Следствие 4.1.7. *Класс* $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}}; \leqslant')$ *самодостаточен.*

Обозначим $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}}; \leqslant')$-генерическую теорию через T^{bp}.

Покажем, что после добавления к каждому бескванторному типу $\overline{\Phi}(\overline{A}) \in \mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}}$ некоторой формулы $\chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, для которой $(T^{\mathrm{bp}}, \overline{A}) \vdash \chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, получается самодостаточный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant'')$, обладающий свойством однородного t-амальгамирования.

Действительно, на основании замечания 4.1.2 для любого графа $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ мощности p и любого графа $\mathcal{M} \models T^{\mathrm{bp}}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, имеет место следующее соотношение:

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M} \Leftrightarrow y_p(\mathcal{A}) \leq y_p(\mathcal{B}) \text{ для любого графа } \mathcal{B}$$
$$\text{с условиями } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \text{ и } |B| \leq k_p.$$

Поскольку мощности графов $\mathcal{B}$ ограничены в зависимости лишь от мощности графа $\mathcal{A}$, а проверка условия $y_p(\mathcal{A}) \leq y_p(\mathcal{B})$ предполагает лишь подсчет связей по отношениям $I_1, \ldots, I_p$, условие самодостаточности $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ выразимо некоторой универсальной формулой $\chi_{\mathcal{A}}(X)$ сигнатуры $\{I_1, \ldots, I_p\}$, где множество переменных X биективно с множеством A.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — графы из класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$, $\mathcal{M}$ — генерическая модель теории T^{bp}, $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \leqslant \mathcal{M}$. Обозначим через $\psi_{\mathcal{A},s}(X)$ (соответственно $\psi_{\mathcal{B},s}(X,Y)$) бескванторную формулу, описывающую бескванторный $\{I_1, \ldots, I_s, J_0, J_1\}$-тип графа $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$), где X и Y — непересекающиеся множества переменных, биективные с множествами A и $B \setminus A$. Тогда для любого $s \geq |B|$ в модели $\mathcal{M}$ истинна следующая формула:

$$\forall X \ \left((\chi_{\mathcal{A}}(X) \wedge \psi_{\mathcal{A},s}(X)) \to \exists Y \ (\chi_{\mathcal{B}}(X,Y) \wedge \psi_{\mathcal{B},s}(X,Y)) \right).$$

Из последнего соотношения вытекает свойство однородного t-амальгамирования для класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant'')$, который получается из класса $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}}; \leqslant')$ добавлением к типам формул, устанавливающих мощностные границы и $\{I_1, \ldots, I_p, J_0, J_1\}$-структуры самодостаточных замыканий, а также формул $\chi_{\mathcal{A}}(A)$ к типам самодостаточных множеств A.

Добавление указанных выше формул обеспечивает наличие конечных замыканий у любых конечных множеств моделей теории T^{bp}.

На основании теоремы 2.5.1 справедлива следующая

Теорема 4.1.8. $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}};\leqslant')$*-Генерическая модель* $\mathcal{M}$ *насыщена. При этом любое конечное множество* $A\subseteq M$ *расширяется до своего самодостаточного замыкания* $\overline{A}\subseteq M$*, и тип* $\mathrm{tp}_X(\overline{A})$ *выводится из множества* $\{\chi_{\overline{\mathcal{A}}}(X)\}\cup\{\psi_{\overline{\mathcal{A}},s}(X)\mid s\in\omega\setminus\{0\}\}$.

Пусть $\mathcal{N}$ — ω-насыщенная модель теории T^{bp}.

Предложение 4.1.9. *Для любого конечного множества* A *из модели* $\mathcal{N}$ *справедливо соотношение* $\mathrm{acl}(A)=\overline{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\overline{A}\subseteq\mathrm{acl}(A)$ следует из единственности множества $\overline{A}$ в модели $\mathcal{N}$. Возьмем теперь произвольный элемент $b\in N\setminus\overline{A}$ и положим $B\rightleftharpoons\overline{A\cup\{b\}}$. В силу конструкции генерической модели существует бесконечное число изоморфных попарно непересекающихся копий множества $B\setminus A$ над множеством A, т. е. $b\notin\mathrm{acl}(A)$. $\square$

3. Стабильность генерической теории. Покажем, что генерическая теория T^{bp} стабильна. Пусть $\mathcal{N}$ — некоторая достаточно насыщенная модель теории T^{bp}. *Ранговой функцией* в модели $\mathcal{N}$ называется функция

$$r_{\mathcal{N}}:\{\mathcal{A}\mid\mathcal{A}\text{ — конечный подграф }\mathcal{N}\}\to\mathbb{R}^+,$$

определяемая равенством $r_{\mathcal{N}}(\mathcal{A})=\inf\{y(\mathcal{B})\mid\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\subseteq_{\mathrm{fin}}\mathcal{N}\}$ (здесь и далее запись $\mathcal{B}\subseteq_{\mathrm{fin}}\mathcal{N}$ означает, что $\mathcal{B}$ — конечная подструктура структуры $\mathcal{N}$, а запись $B\subseteq_{\mathrm{fin}}N$ — B является конечным подмножеством N).

Заметим, что в силу самодостаточности класса $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{bp}};\leqslant')$ инфимум в указанном выше равенстве всегда достижим и совпадает со значением $y(\overline{\mathcal{A}})$: $r_{\mathcal{N}}(\mathcal{A})=y(\overline{\mathcal{A}})$.

В дальнейшем модель $\mathcal{N}$ будет зафиксирована, функция $r_{\mathcal{N}}$ будет для краткости обозначаться через r, а графы $\mathcal{A}$ будут заменяться их носителями в модели $\mathcal{N}$. При этом все рассматриваемые множества будут считаться подмножеством множества N.

Относительная предранговая функция $y(A/B)$ графа A над графом B задается соотношением

$$y(A/B)=y(A\cup B)-y(B),$$

а *относительная ранговая функция* $r(A/B)$ графа A над графом B — соотношением

$$r(A/B) = r(A \cup B) - r(B).$$

Установим необходимые в дальнейшем свойства относительной ранговой функции.

Очевидно, $r(A/B) \geq 0$.

Лемма 4.1.10. *Для любых конечных множеств B и C справедливо неравенство*

$$y(B) + y(C) \geq y(B \cup C) + y(B \cap C).$$

Неравенство превращается в равенство в том и только в том случае, когда $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{B} *_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} \mathcal{C}$.

Доказательство. По определению значение

$$y(B) + y(C) - y(B \cup C) - y(B \cap C)$$

равно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k$, где e_k — число I_k-дуг, связывающих элементы из $B \setminus C$ с элементами из $C \setminus B$. Таким образом, требуемое неравенство имеет место, и оно превращается в равенство в точности при отсутствии указанных I_k-дуг, т. е. когда граф с носителем $B \cup C$ является свободной амальгамой $\mathcal{B} *_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} \mathcal{C}$. $\square$

Лемма 4.1.11. *Если $B_1 \subseteq B_2$, то $r(A/B_1) \geq r(A/B_2)$.*

Доказательство. Положим $C \rightleftharpoons \overline{A \cup B_1}$, $D \rightleftharpoons \overline{B_1}$, $E \rightleftharpoons \overline{B_2}$. Из леммы 4.1.10 и соотношений $D \subseteq C$, $D \subseteq E$ и $D \leq C \cap E$ следует

$$y(C) + y(E) \geq y(C \cup E) + y(C \cap E) \geq y(C \cup E) + y(D).$$

Тогда $y(C) - y(D) \geq y(C \cup E) - y(E)$. Отсюда получаем

$$r(A/B_1) = y(C) - y(D) \geq y(C \cup E) - y(E) \geq y(\overline{C \cup E}) - y(E) =$$

$$r(A \cup B_2) - r(B_2) = r(A/B_2). \ \square$$

Если A — конечное множество, X — некоторое (не обязательно конечное) множество, то

$$r(A/X) \rightleftharpoons \inf\{r(A/B) \mid B \subseteq_{\text{fin}} X\}.$$

Лемма 4.1.12. *Пусть A_1 и A_2 — конечные множества, X — некоторое множество, для которого $A_1 \setminus X = A_2 \setminus X$. Тогда $r(A_1/X) = r(A_2/X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное и без ограничения общности будем считать, что $r(A_1/X) = r(A_2/X) + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выберем конечное множество $B_2 \subseteq X$ такое, что $r(A_2/B_2) < r(A_2/X) + \varepsilon$. Обозначим через C множество $(A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup B_2$. Тогда

$$r(A_1/X) \leq r(A_1/C) = r(A_2/C) \leq r(A_2/B_2) < r(A_2/X) + \varepsilon.$$

Получаем неравенство $r(A_1/X) < r(A_2/X) + \varepsilon$, которое противоречит выбору ε. $\square$

Множество $X \subseteq N$ называется *замкнутым* (в модели $\mathcal{N}$) (обозначается $X \leqslant N$), если для любого конечного множества $A \subseteq X$ выполняется $\overline{A} \subseteq X$. Последнее условие равносильно отсутствию в $N \setminus X$ каких-либо n новых элементов, для которых $n < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k$, где e_k — число новых I_k-дуг.

Лемма 4.1.13. *Пусть X и Y — множества из модели $\mathcal{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $X \leqslant N$ и $Y \leqslant N$, то $X \cap Y \leqslant N$;*

2) *существует наименьшее замкнутое множество $\overline{X} \supseteq X$; при этом выполняются соотношения $\overline{X} = \bigcup\{\overline{A} \mid A$ — конечное подмножество множества $X\}$ и $\overline{X} = \mathrm{acl}(X)$;*

3) *если $X \subset Y$, то $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.*

Множество $\overline{X}$ называется *внутренним замыканием* множества X (в модели $\mathcal{N}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Предположим, что $X \leqslant N$ и $Y \leqslant N$. Пусть A — конечное подмножество множества $X \cap Y$.

Так как $A \subset X$ и $A \subset Y$, а X и Y — замкнутые множества, то $\overline{A} \subseteq X$ и $\overline{A} \subseteq Y$. Следовательно, $\overline{A} \subseteq X \cap Y$. Таким образом, $X \cap Y$ — замкнутое множество.

2. Обозначим множество $\bigcup\{\overline{A} \mid A$ — конечное подмножество множества $X\}$ через Z. Очевидно, любое замкнутое надмножество множества X содержит множество Z и $X \subseteq Z$. С другой стороны, если A — конечное подмножество Z, то существует конечное множество $B \subseteq X$ такое, что $A \subseteq \overline{B}$. Тогда $\overline{A} \subseteq \overline{B} \subseteq Z$. Таким образом, Z — наименьшее замкнутое множество, содержащее множество X. Теперь равенство $\overline{X} = \mathrm{acl}(X)$ вытекает из предложения 4.1.9.

3. Достаточно заметить, что для любых конечных графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ если $A \subseteq B$, то $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Действительно, $A \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \leqslant N$. Следовательно, $\overline{A} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

Аналогично определению 3.30 из работы Дж. Болдуина, Н. Ши [72] будем говорить, что конечные множества A и B *независимы* над Z и писать $A \downarrow^r_Z B$, если $r(A/Z) = r(A/(Z \cup B))$ и $\overline{A \cup Z} \cap \overline{B \cup Z} \subseteq \overline{Z}$.

Будем говорить, что множества X и Y *независимы* над Z и писать $X \downarrow^r_Z Y$, если $A \downarrow^r_Z B$ для любых конечных множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$.

Аналогом леммы 3.31 из работы Дж. Болдуина, Н. Ши [72] является

Лемма 4.1.14. *Если X и Y — замкнутые множества, $Z = X \cap Y$ и $X \downarrow^r_Z Y$, то $X \cup Y$ — замкнутое множество.*

Доказательство. Заметим сначала, что по лемме 4.1.13, п. 1 множество Z замкнуто.

Предположим теперь, что множество $X \cup Y$ не замкнуто. Тогда существуют конечные множества $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ и C такие, что $(A \cup B, C)$ — минимальная пара и C не содержится в $A \cup B$. Положим $\varepsilon \rightleftharpoons y(A \cup B) - y(C)$. По выбору множеств A, B и C для любых конечных множеств A' и B', удовлетворяющих условиям $A \subseteq A' \subseteq X$, $B \subseteq B' \subseteq Y$, выполняется $y(C/(A' \cup B')) \leq -\varepsilon$. Тогда $r(A' \cup B' \cup C) \leq y(A' \cup B' \cup C) \leq y(A' \cup B') - \varepsilon$. Для получения противоречия мы выберем (используя независимость множеств X и Y над Z) пару (A_1, B_1) такую, что $A \subseteq A_1 \subseteq X$, $B \subseteq B_1 \subseteq Y$ и $r(A_1 \cup B_1 \cup C) > y(A_1 \cup B_1) - \varepsilon$.

В силу $X \downarrow^r_Z Y$ имеем $r(A/Z) = r(A/(Z \cup B))$. Выберем конечное множество $Z_0 \subseteq Z$, для которого $r(A/Z_0) < r(A/Z) + \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $A_0 = A \cup Z_0$, $B_0 = B \cup Z_0$ и $D_0 = A_0 \cap B_0$. В силу леммы 4.1.12 имеем $r(A/Z) = r(A_0/Z)$. Более того, из $A \cup Z_0 = A_0$ получаем $r(A/Z_0) = r(A_0/Z_0) \geq r(A_0/D_0)$. Поэтому $r(A_0/D_0) < r(A_0/Z) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $D_1 \rightleftharpoons \overline{D_0}$, $A_1 \rightleftharpoons \overline{A_0}$, $B_1 \rightleftharpoons \overline{B_0}$. Очевидно, $y(A_1/D_1) = r(A_1/D_1)$ и $|y(A_1/D_1) - r(A_0/Z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, $D_1 \subseteq A_1 \cap B_1$.

Покажем, что A_1 и B_1 — требуемые множества. Поскольку $r(A_1 \cup B_1 \cup C) \geq r(A_0 \cup B_0)$, достаточно установить, что $r(A_0 \cup B_0) > y(A_1 \cup B_1) - \varepsilon$. Имеем

$$r(A_0 \cup B_0) = r(A_0/B_0) + r(B_0) \geq r(A_0/B_0 \cup Z) + r(B_0) =$$

$$r(A_0/Z) + r(B_0) > r(A_0/Z_0) - \frac{\varepsilon}{2} + r(B_0) >$$

$$\Big(y(A_1/D_1) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) - \frac{\varepsilon}{2} + y(B_1) = y(A_1/D_1) + y(B_1) - \varepsilon.$$

В силу самодостаточности множества D_1 имеем $y((A_1 \cap B_1)/D_1) \geq 0$. Тогда

$$y(A_1/D_1) + y(B_1) - \varepsilon =$$

$$y(A_1/(A_1 \cap B_1)) + y((A_1 \cap B_1)/D_1) + y(B_1) - \varepsilon \geq$$

$$y(A_1/(A_1 \cap B_1) + y(B_1) - \varepsilon \geq y(A_1 \cup B_1) - \varepsilon.$$

Сопоставляя начало и конец цепочки неравенств, получаем

$$r(A_0 \cup B_0) > y(A_1 \cup B_1) - \varepsilon. \ \square$$

Следующее определение естественным образом обобщает введенное выше понятие свободной амальгамы графов. Множество U (в модели $\mathcal{N}$) называется *свободной амальгамой* множеств X и Y над множеством Z и обозначается $X *_Z Y$, если $X \cup Y = U$, $X \cap Y = Z$ и нет дуг, связывающих элементы из $X \setminus Y$ с элементами из $Y \setminus X$.

Лемма 4.1.15. *Если X — самодостаточное множество, Y — замкнутое множество и $Z = \overline{X \cup Z} \cap Y$, то $X \downarrow^r_Z Y$ тогда и только тогда, когда $\overline{X \cup Z} \cup Y$ — замкнутое множество, совпадающее со свободной амальгамой $\overline{X \cup Z} *_Z Y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим множество $\overline{X \cup Z}$ через X'. Предположим, что $X \downarrow^r_Z Y$. Замкнутость множества $X' \cup Y$ установлена в лемме 4.1.14. Покажем, что $X' \cup Y = X' *_Z Y$. Предположим, что $X' \cup Y \neq X' *_Z Y$, т. е. существует I_p-дуга, связывающая элемент $x \in X' \setminus Z$ с элементом $y \in Y \setminus Z$. Выберем конечное множество $Z_0 \subseteq Z$, для которого $x \in \overline{X \cup Z_0}$. Тогда для любого конечного самодостаточного множества $Y_0 \supseteq Z_0 \cup \{y\}$ справедливо $r(X/Z \cap Y_0) \geq r(X/Y_0) + \alpha_p$ и, значит, $r(X/Z) \geq r(X/Y) + \alpha_p$. Последнее противоречит равенству $r(X/Z) = r(X/Y)$, вытекающему из $X \downarrow^r_Z Y$.

Предположим теперь, что $X' \cup Y$ — замкнутое множество, совпадающее со свободной амальгамой $\overline{X \cup Z} *_Z Y$. Покажем, что $X \downarrow^r_Z Y$. Достаточно установить, что

$$\inf\{r(X/A) \mid A \subseteq_{\mathrm{fin}} Z\} \leq \inf\{r(X/B) \mid B \subseteq_{\mathrm{fin}} Y\}.$$

Выберем произвольное конечное множество $B \subseteq Y$. Обозначим через C самодостаточное множество $\overline{B \cup X}$, которое по условию содержится в $X' \cup Y$. Поскольку $C = (C \cap X') *_{C \cap Z} (C \cap Y)$ и множество $C = (C \cap X') \cup (C \cap Y)$ самодостаточно, множество $\overline{X \cup (C \cap Z)} \cup (C \cap Y)$ также самодостаточно и совпадает с $\overline{X \cup (C \cap Z)} *_{C \cap Z} C \cap Y$. Поскольку $B \subseteq C \cap Y$, $r(X/B) \geq r(X/C \cap Y)$. Осталось заметить, что $r(X/C \cap Z) = r(X/C \cap Y)$. Действительно, обозначив множество $\overline{X \cup (C \cap Z)}$ через X'', получаем

$$r(X/C \cap Z) = y(X'') - y(C \cap Z) \geq y(X'') - y(X'' \cap (C \cap Y)) \geq$$

$$y(X'' \cup (C \cap Y)) - y(C \cap Y) \geq r(X''/C \cap Y) = r(X/C \cap Y).$$

Первое неравенство является равенством, поскольку $C \cap Z = X'' \cap (C \cap Y)$. Второе неравенство является равенством по лемме 4.1.10, так как $X'' \cup (C \cap Y) = X'' *_{C \cap Z} (C \cap Y)$. Третье неравенство также является равенством, поскольку множество $X'' \cup (C \cap Y)$ самодостаточно. □

Непосредственно из леммы 4.1.15 вытекает

Следствие 4.1.16. *Если X — самодостаточное множество, Y — замкнутое множество, $Z = \overline{X \cup Z} \cap Y$ и $X \downarrow^r_Z Y$, то тип $\mathrm{tp}(X/Y)$ однозначно определяется типом $\mathrm{tp}(X/Z)$, описанием замкнутости множества $\overline{X \cup Z} \cup Y$ и бескванторным типом, описывающим совпадение $\overline{X \cup Z} \cup Y$ со свободной амальгамой $X *_Z Y$.*

Лемма 4.1.17. *Если X — замкнутое множество, a — элемент модели $\mathcal{N}$, не принадлежащий X, то существует не более чем счетное замкнутое подмножество $X' \subseteq X$ такое, что $\{a\} \downarrow^r_{X'} X$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.32 из работы Дж. Болдуина, Н. Ши [72]. Выберем последовательность X_n, $n \in \omega$, конечных подмножеств множества X таких, что $X_{n-1} \subseteq X_n$ и $r(\{a\}/X_n) - r(\{a\}/X) < \frac{1}{n}$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Положим $U \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n \in \omega} X_n$ и $X' \rightleftharpoons X \cap \overline{\{a\} \cup U}$. Множество X' замкнуто и не более чем счетно в силу леммы 4.1.13. Применяя лемму 4.1.11, получаем $r(\{a\}/X') = r(\{a\}/X) = r(\{a\}/(X' \cup X))$. Кроме того $(\overline{\{a\} \cup X'}) \cap X = X'$. Следовательно, $\{a\} \downarrow^r_{X'} X$. $\square$

Напомним понятие веса (см. С. Шелах [26]). Пусть p — тип теории T, λ — некоторый кардинал. *Вес $w(p)$ типа p* больше либо равен λ, если существует неответвляющееся расширение $\mathrm{tp}(a/A)$ типа p и независимая над A последовательность $(a_i)_{i\in\lambda}$ такая, что каждый элемент a_i зависим с a над A. Полагается $w(p) \rightleftharpoons \lambda$, если $w(p) \geq \lambda$, но $w(p) \not\geq \lambda^+$.

Теорема 4.1.18. 1. *Теория T^{bp} стабильна, мала и имеет ровно два 1-типа (элементов цвета J_0 и элементов цвета J_1).*

2. *Любой 1-тип теории T^{bp} имеет бесконечный вес: для любого элемента a цвета J_i, $i = 0, 1$, существует бесконечное множество независимых элементов b_n, $n \in \omega$, цвета J_{1-i}, зависящих от элемента a.*

Доказательство. 1. Малость теории T^{bp} вытекает из теоремы 4.1.8. Для доказательства стабильности теории T^{bp} найдем оценку числа 1-типов из $S(N)$, где $\mathcal{N}$ — некоторая модель теории T^{bp}. Рассмотрим произвольный элемент a. По лемме 4.1.17 существует не более чем счетное замкнутое множество $X \subseteq N$ такое, что $\overline{\{a\} \cup X} \cap N = X$ и $\{a\} \downarrow^r_X N$. По следствию 4.1.16 тип $\mathrm{tp}(a/N)$ определяется типом $\mathrm{tp}(a/X)$, описанием замкнутости множества $\overline{\{a\} \cup X} \cup N$ и бескванторным типом, описывающим совпадение $\overline{\{a\} \cup X} \cup N$ со свободной амальгамой $\overline{\{a\} \cup X} *_X N$. Таким образом, для подсчета числа типов из $S(N)$ достаточно посчитать число типов из $S(X)$ и число выборов счетных множеств X из N. Тогда

$$|S(N)| \leq 2^{\omega} \cdot |N|^{\omega} = |N|^{\omega}.$$

Следовательно, теория T^{bp} стабильна.

По построению каждое одноэлементное множество $\{a\}$ самодостаточно. По теореме 4.1.8 это означает, что существуют ровно два 1-типа теории T^{bp}: один из этих типов содержит формулу $J_0(x)$, а другой — $J_1(x)$.

2. Пусть $\mathcal{A}$ — граф с носителем $\{a\}$, $A_p = \{a, b_p\}$ — носитель двухэлементного графа $\mathcal{A}_p$, содержащего I_p-дугу между a и b_p. Положим $\mathcal{B}_1 \rightleftharpoons \mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_{p+1} \rightleftharpoons \mathcal{B}_p *_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{p+1}$, $\mathcal{B} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{p\in\omega\setminus\{0\}} \mathcal{B}_p$. По построению граф $\mathcal{B}$ является замкнутым подграфом некоторой генерической модели $\mathcal{M}$ теории T^{bp}. Поскольку $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p+1} < 1$ и $\{b_1, \ldots, b_{p+1}\} \leqslant \{a, b_1, \ldots, b_{p+1}\} \leqslant B \leqslant M$, справедливо $\{b_{p+1}\} \downarrow^r_{\varnothing} \{b_1, \ldots, b_p\}$. Таким образом, $(b_p)_{p\in\omega\setminus\{0\}}$ — бесконечная независимая последовательность элементов одного и того же типа, где каждый элемент b_p зависим с элементом a. $\square$

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель, $\varphi(x)$, $\psi(x, y)$ — некоторые формулы теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, X — множество в модели $\mathcal{M}$, определимое формулой $\varphi(x)$: $X = \varphi(\mathcal{M})$. Будем говорить, что множество X обладает *свойством попарного ψ-пересечения*, если

$$\mathcal{M} \models \forall x, y\, (\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to \exists z\, (\psi(z, x) \wedge \psi(z, y))).$$

Поскольку $\alpha_p < \frac{1}{2}$ для любого натурального числа $p \geq 1$, любые два элемента a и b цвета J_0 связаны через некоторый элемент c цвета J_1 так, что aI_pc и bI_pc. Точно так же, любые два элемента a и b цвета J_1 связаны через некоторый элемент c цвета J_1 так, что cI_pa и cI_pb. При этом, в каждом из случаев указанных элементов c существует бесконечно много. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 4.1.19. *Для любого натурального числа $p \geq 1$ множество элементов цвета J_i обладает свойством попарного $I_p^{(-1)^{1-i}}$-пересечения, $i = 0, 1$.*

В следующих двух утверждениях проясняется структура простых моделей $\mathcal{M}_A$ над конечными множествами A.

Лемма 4.1.20. *Если A и B — самодостаточные множества в модели $\mathcal{N}$ и $A \leqslant B$, то тип $\mathrm{tp}(B/A)$ изолирован тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — полный двудольный граф над $\mathcal{A}$, т. е. любые два J-разноцветных элемента $a \in B$ и $b \in B \setminus A$ связаны некоторой I_p-дугой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y — множество переменных, биективное с множеством $B \setminus A$. Если $\mathcal{B}$ — полный двудольный граф над $\mathcal{A}$, то по теореме 4.1.8 тип $\mathrm{tp}((B \setminus A)/A)$ изолируется формулой $\chi_{\overline{\mathcal{B}}}(A \cup Y) \wedge \psi_{\overline{\mathcal{B}},s}(A \cup Y)$, где s — число, большее всех номеров цветов дуг из $\mathcal{B}$. Если же $\mathcal{B}$ не является полным двудольным графом над $\mathcal{A}$, то по теореме 4.1.8 тип $\mathrm{tp}((B \setminus A)/A)$ изолируется множеством формул $\{\chi_{\overline{\mathcal{B}}}(A \cup Y)\} \cup \{\psi_{\overline{\mathcal{B}},s}(A \cup Y) \mid s \in \omega\}$, но не изолируется никакой конечной частью этого множества. $\square$

Из леммы 4.1.20 вытекает

Следствие 4.1.21. *Пусть A — самодостаточное множество в модели $\mathcal{N}$. Модель $\mathcal{M}_A$ является полным двудольным графом над A. Множество типов изоморфизма простых моделей над конечными множествами совпадает с множеством типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_A$, где A — самодостаточные множества такие, что $\mathcal{M}_A$ — полные двудольные графы над A.*

§ 4.2. Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Безразвилочные орграфы

В этом параграфе мы определяем понятие безразвилочного орграфа и на основе конструкции из параграфа 4.1 описываем генерическую конструкцию, приводящую к построению семейства малых *стабильных* безразвилочных орграфов таких, что все 1-типы непромежуточных элементов имеют бесконечный вес. Тем самым решается вопрос о существовании малой стабильной теории конечной (графовой) сигнатуры и имеющей типы с бесконечным весом.

1. Определения и свойства. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, Q, W \rangle$ — c-граф. Вершина $a \in A$ называется *верхней* (*нижней*) *развилкой* в c-графе $\mathcal{A}$, если найдутся вершины $b, c, d \in A$, $c \neq d$, такие, что выполняются следующие условия:

а) $(b, a) \in Q$ или $(b, a, n) \in W$ (соответственно $(a, b) \in Q$ или $(a, b, n) \in W$) для некоторого n;

б) $(a, c) \in Q$ или $(a, c, n) \in W$ (соответственно $(c, a) \in Q$ или $(c, a, n) \in W$) для некоторого n;

в) $(a, d) \in Q$ или $(a, d, n) \in W$ (соответственно $(d, a) \in Q$ или $(d, a, n) \in W$) для некоторого n.

Верхние (нижние) развилки часто будут называться просто *развилками.*

c-Граф или бесконтурный граф, не имеющий развилок, называется *безразвилочным.* Класс всех безразвилочных графов обозначим через $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nf}}$.

Обозначим через $\mathbf{\Gamma}_c^{\mathrm{bp}}$ класс всех графов сигнатуры $\{Q\}$, которые получаются из графов класса $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{bp}}$ заменой всех I_p-дуг (a, b) на некоторое количество (a, b)-Q-маршрутов, имеющих длины, не меньшие p, включая кратчайший маршрут длины p, в которых каждая промежуточная вершина имеет степень 2. Очевидно, что каждый граф из класса $\mathbf{\Gamma}_c^{\mathrm{bp}}$ является безразвилочным. Кроме того, безразвилочными являются бесконтурные графы, в которых каждая вершина имеет степень, не превосходящую 2. Обозначим класс всех таких графов через $\mathbf{\Gamma}^{\leq 2}$.

Очевидно, что любой граф из класса $\mathbf{\Gamma}^{\leq 2}$ состоит из некоторого числа компонент связности $\mathcal{K}$, каждая из которых является конечным или бесконечным маршрутом с начальным элементом или без него, а также с заключительным элементом или без него. Начальные элементы как и раньше будем отмечать цветом J_0, а заключительные элементы — цветом J_1. Класс $\mathbf{\Gamma}^{\leq 2}$ замкнут относительно операции присоединения к графам изолированных вершин, т. е. вершин степени 0. При этом, будем считать, что изолированные вершины образуют множество, не пересекающееся с $J_0 \cup J_1$.

Пусть $\Gamma_i = \langle X_i, Q_i \rangle$, $i \in I$, — графы с единственным общим элементом a цвета J_j, $j \in \{0, 1\}$. Граф $\langle \bigcup\limits_{i \in I}(X_i), \bigcup\limits_{i \in I}(Q_i) \rangle$ называется *свободной амальгамой* графов Γ_i, $i \in I$, над вершиной a и обозначается через $*_{i \in I}\Gamma_i$.

Обозначим через $\mathbf{\Gamma}_0^{\mathrm{nf}}$ замыкание класса $\mathbf{\Gamma}_c^{\mathrm{bp}} \cup \mathbf{\Gamma}^{\leq 2}$ относительно взятия дизъюнктных объединений, а также относительно взятия свободных амальгам над вершинами.

Нетрудно заметить, что любой граф из класса $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nf}}$ является безразвилочным. Кроме того, любой безразвилочный граф можно представить в виде дизъюнктного объединения амальгам над вершинами графов из класса $\mathbf{\Gamma}_c^{\mathrm{bp}} \cup \mathbf{\Gamma}^{\leq 2}$. Таким образом, $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nf}} = \mathbf{\Gamma}_0^{\mathrm{nf}}$.

Обозначив операцию взятия амальгам над вершинами через $\mathbf{A}$, а операцию взятия дизъюнктных объединений — через $\mathbf{D}$, получаем следующую формулу:

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nf}} = \mathbf{D}(\mathbf{A}(\mathbf{\Gamma}_c^{\mathrm{bp}} \cup \mathbf{\Gamma}^{\leq 2})).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать безразвилочные графы и их c-подграфы $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$, в которых функции Col одноцветны: $\rho_{\mathrm{Col}} = \{0\}$, и каждая вершина является *начальной* (имеет цвет J_0), *заключительной* (имеет цвет J_1) или *промежуточной* (имеет степень 2 в некотором расширении $\mathcal{A}$ и цвет, отличный от J_0 и J_1). При этом, с каждой вершиной $a \in A$, не принадлежащей $J_0 \cup J_1$, в записи W будет указана согласованная информация о длине кратчайшего (b, a)-Q-маршрута, где $b \in J_0$ (если такая вершина b в c-графе или в некотором его расширении существует), а также информация о длине кратчайшего (a, c)-Q-маршрута, где $c \in J_1$ (если такая вершина c в c-графе или в некотором его расширении существует). При самостоятельном рассмотрении c-подграфы будут, как обычно, называться c-графами.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ — c-граф. Обозначим через $e_1(\mathcal{A})$ число $|Q|$, через $e_k(\mathcal{A})$, $k \in \omega \setminus \{0, 1\}$, — число пар (a, b) вершин из $\mathcal{A}$, для которых $(a, b, k) \in W$.

Определим *предранговую функцию* y, которая каждому c-графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие некоторое вещественное число по правилу

$$y(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}),$$

где α_k — числа, определенные в параграфе 4.1. Заметим, что сумма в определении предранговой функции всегда конечна в силу конечности c-графов $\mathcal{A}$.

p-Аппроксимацией предранговой функции y называется функция y_p, которая каждому c-графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие вещественное число по правилу

$$y_p(\mathcal{A}) = |A| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}).$$

Для c-графа $\mathcal{A}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_1^{\mathrm{nf}}$ тогда и только тогда, когда $y_1(\mathcal{A}') \geq b_n^1$ для любого непустого c-графа $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{A}$, где $n = |A'|$.

Лемма 4.2.1. *Для любого положительного числа $p \in \omega$ и любых c-графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ — собственный c-подграф c-графа $\mathcal{B}$, $|B| = n < k_{p+1}$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется $y_p(\mathcal{B}) - y(\mathcal{B}) < \varepsilon_{p+1}$.*

2. *Выполняется $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $y(\mathcal{A}) < y(\mathcal{B})$, и выполняется $y_p(\mathcal{A}) < y_p(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $y_q(\mathcal{A}) < y_q(\mathcal{B})$ для любого $q \geq p$.*

Доказательство слово в слово повторяет доказательство леммы 4.1.1. $\square$

2. Генерический класс и генерическая теория. Для c-графа $\mathcal{A}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_{p+1}^{\mathrm{nf}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ не содержит вершин, к которым запрещено присоединять дуги, $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_p^{\mathrm{nf}}$ и $y_p(\mathcal{A}') \geq b_n^p$ для любого c-графа $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{A}$, где $n = |A'|$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Положим $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}} \rightleftharpoons \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathbf{K}_p^{\mathrm{nf}}$. Обозначим через $\mathbf{K}^{\mathrm{nf}}$ класс всех (безразвилочных) графов, у которых каждый c-подграф принадлежит классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — c-подграф графа (c-подграфа) $\mathcal{M}$ (графа), принадлежащего классу $\mathbf{K}^{\mathrm{nf}}$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *самодостаточный c-подграф* графа (соответственно c-графа) $\mathcal{M}$ и писать $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{M}$, если $y(\mathcal{A}) \leq y(\mathcal{B})$ для любого c-графа $\mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{M}$. Если $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — c-граф, то $\mathcal{A}$ называется *сильным c-подграфом* c-графа $\mathcal{M}$.

Заметим, что для любого c-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q, W \rangle \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ и любой промежуточной вершины $a \in A$ множество всех элементов, образующих Q-маршрут S_a, включающий вершину a, содержится в определимом замыкании множества $\{a\}$: $S_a \subseteq \mathrm{dcl}\{a\}$. Это означает, что любое расширение множества $\{a\}$ до максимального Q-маршрута S_a определяется однозначно. Множество

$$A \cup \cup \{S_a \mid a \text{ — промежуточная вершина из } A\}$$

будем называть *маршрутным замыканием* множества A (внутри данного графа, содержащего $\mathcal{A}$ в качестве c-подграфа) и обозначать через $\mathrm{ccl}(A)$.

Очевидно, что множество $\mathrm{ccl}(A) \cap (J_0 \cup J_1)$ конечно для любого c-графа $\mathcal{A}$.

В дальнейшем будем считать, что к записи W присоединена информация о взаимосвязи элементов из $\mathrm{ccl}(A)$ с помощью лишь внешних кратчайших Q-маршрутов. Таким образом, запись W *обогащенного* c-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ будет содержать структурное описание множества $\mathrm{ccl}(A)$ (возможно включающее бесконечную информацию о маршрутах бесконечной длины, у которых все промежуточные вершины имеют степень 2), а также конечную информацию о длинах внешних (относительно $\mathrm{ccl}(A)$) кратчайших Q-маршрутов, связывающих элементы из $\mathrm{ccl}(A)\cap J_0$ с элементами из $\mathrm{ccl}(A)\cap J_1$ лишь с помощью внешних кратчайших Q-маршрутов.

Нам предстоит показать, что класс $\mathbf{T}$ всех типов, соответствующих обогащенным c-графам из класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$, с отношением $\leqslant_c'$ (где $\Phi(A) \leqslant_c' \Psi(B) \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$) содержит самодостаточный генерический подкласс $\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}$, доминирующий $\mathbf{T}$ и обладающий (после добавления к типам необходимых формул, описывающих самодостаточные замыкания) свойством однородного t-амальгамирования. Это повлечет ω-насыщенность $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}};\leqslant_c')$-генерической модели, реализующей все типы $\Phi(X)$, соответствующие типам $\Phi(A)$ из $\mathbf{T}$.

Замечание 4.2.2. 1. *Из условий* $\mathcal{A}\in\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ *и* $k_p \leq |A| = n < k_{p+1}$ *не следует* $y(\mathcal{A}) \geq b_n^p$. *Вместе с тем, значение* $y(\mathcal{A})$ *не может быть намного меньше* b_n^p*: поскольку* $y_p(\mathcal{A})-y(\mathcal{A}) < \varepsilon_{p+1}$, *имеем* $y(\mathcal{A}) > b_n^p - \varepsilon_{p+1}$.

Кроме того, с учетом неравенства (4.1) *для графов* $\mathcal{A}\in\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ *мощности* $|A|\geq\max\{2,k_p\}$ *справедливо неравенство* $y(\mathcal{A}) > p$.

2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *—* c*-граф из класса* $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$, $|A| = p$, $\mathcal{M}$ *— граф из класса* $\mathbf{K}^{\mathrm{nf}}$, $\mathcal{A}\subseteq_c\mathcal{M}$. *Тогда* $\mathcal{A}\leqslant_c\mathcal{M}$ *в том и только в том случае, когда* $y_p(\mathcal{A})\leq y_p(\mathcal{B})$ *для всех* c*-графов* $\mathcal{B}$, *где* $\mathcal{A}\subseteq_c\mathcal{B}\subseteq_c\mathcal{M}$.

Действительно, если $|B| < k_{p+1}$, то $y_p(\mathcal{A})\leq y_p(\mathcal{B})$ равносильно $y(\mathcal{A})\leq y(\mathcal{B})$ в силу леммы 4.2.1, п. 2, а если $|B|\geq k_p$, то

$$y_p(\mathcal{B}) \geq y(\mathcal{B}) > p \geq y_p(\mathcal{A}).$$

Более того, для проверки самодостаточности c-графа $\mathcal{A}$ в графе $\mathcal{M}$ достаточно выбрать число $n_{\mathcal{A}} = k_p$ и проверить соотношения $y_p(\mathcal{A})\leq y_p(\mathcal{B})$ лишь для c-графов $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\subseteq_c\mathcal{B}\subseteq_c\mathcal{M}$, с условием $|B| < n_{\mathcal{A}}$.

Таким образом, условие $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{M}$ формульно определимо с помощью формулы, описывающей отсутствие $n < n_{\mathcal{A}}$ новых элементов из $M \setminus A$ таких, что

$$n < \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot (e_2 - e_2') + \ldots + \alpha_p \cdot (e_p - e_p'),$$

где $p = |A|$, e_1 — число новых дуг, e_s — число новых пар вершин (a, b), связанных лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s, e_s' — число пар вершин (a, b), которые перестают быть связанными в расширенном c-графе лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s.

При этом, каждая тройка (a, b, s), участвующая в подсчете e_s', превращается в некоторую последовательность троек (a_0, a_1, s_1), $\ldots, (a_{k-1}, a_k, s_k)$ таких, что $a_0 = a$, $a_k = b$, элементы $a_1, \ldots, a_{k-1}$ имеют степень 2, элементы a_{i-1} и a_i связаны в расширенном c-графе дугой (при $s_i = 1$) или единственным внешним кратчайшим маршрутом длины s_i (при $s_i > 1$), $s_1 + \ldots + s_k = s$. Значит, при расширении c-графа удаление каждой тройки (a, b, s), участвующей в подсчете значения $y(\cdot)$, приводит при новом подсчете $y(\cdot)$ к замене значения $-\alpha_s$ на положительное (в силу неравенств $\alpha_i < \frac{1}{2}$, $i \geq 1$) значение $(k-1) - \alpha_{s_1} - \ldots - \alpha_{s_k}$. Таким образом, уменьшение значения $y(\cdot)$ может произойти лишь за счет добавления к c-графу вершин цвета J_0 или J_1, и условие $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{M}$ формульно определимо с помощью формулы, описывающей отсутствие $n < n_{\mathcal{A}}$ новых элементов из $M \setminus A$ таких, что $n < \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_p \cdot e_p$, где $p = |A|$, e_s — число новых пар вершин (a, b), связанных лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s.

Непосредственно из определения вытекает

Лемма 4.2.3. 1. *Если $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$.*

2. *Если $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ и $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{C}$, то $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$.*

3. *Пустой граф $\varnothing$ является наименьшим элементом системы $(\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}; \leqslant_c)$.*

Лемма 4.2.4. *Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$, $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$ и $\mathcal{C} \subseteq_c \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} \leqslant_c \mathcal{C}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют некоторые n новых элементов из $C \setminus A$, для которых выполняется неравенство $n < \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_p \cdot e_p$, где $p = |A|$, e_s — число новых пар вершин (a, b), связанных лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s. Поскольку все новые элементы лежат в $B \setminus A$, они будут нарушать условие $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$. $\square$

Лемма 4.2.5. *Отношение $\leqslant_c$ является частичным порядком на классе $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$.*

Доказательство получается из доказательства леммы 4.1.5 заменой графов класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{bp}}$ на c-графы класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$, а отношений $\subseteq$ и $\leqslant$ на отношения $\subseteq_c$ и $\leqslant_c$ соответственно. $\square$

c-Граф $\mathcal{A}$ называется *J-замкнутым*, если $\mathcal{A}$ с каждой промежуточной вершиной a содержат начальную вершину (если эта вершина существует) и заключительную вершину (если эта вершина существует) маршрута S_a.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}} \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle C, Q_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}} \rangle$ — *обогащенные* J-замкнутые c-графы, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, $\mathrm{ccl}(A) = \mathrm{ccl}(B) \cap \mathrm{ccl}(C)$ (последнее равенство означает, что с каждым общим Q-маршрутом S длины ≥ 2, описанным одновременно в $\mathcal{B}$ и в $\mathcal{C}$, множество A содержит некоторую общую для $\mathcal{B}$ и для $\mathcal{C}$ промежуточную вершину из S). *Свободной c-амальгамой* c-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемой через $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$) называется c-граф $\langle B \cup C, Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}} \cup Q, W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}} \cup W \rangle$, где Q (соответственно W) — множество дуг (записей о внешних над $B \cup C$ кратчайших маршрутах) с концами из $B \cup C$, описанных в графе с носителем $\mathrm{ccl}(A)$.

По определению любая свободная c-амальгама является J-замкнутой. Кроме того, записи о маршрутных замыканиях гарантируют безразвилочность c-графа $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$.

c-Вложение f c-графа $\mathcal{A}$ в c-граф $\mathcal{B}$ ($f : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$) называется *сильным*, если $f(\mathcal{A}) \leqslant_c \mathcal{B}$.

Лемма 4.2.6. *(амальгамационная лемма). Класс $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ удовлетворяет c-амальгамационному свойству c-*(AP)*, т. е. для любых сильных c-вложений $f_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ и $g_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{C}$ таких, что $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ — J-замкнутые c-графы, существует J-замкнутый c-граф $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ и сильные c-вложения $f_1 : \mathcal{B} \to_c \mathcal{D}$ и $g_1 : \mathcal{C} \to_c \mathcal{D}$, для которых $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ и $\mathrm{ccl}(A) = \mathrm{ccl}(B) \cap \mathrm{ccl}(C)$. Покажем, что c-граф $\mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ является искомым. Для этого, в силу симметричности определения свободной c-амальгамы, достаточно установить $\mathcal{B} \leqslant_c \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$.

Предположим, что $\mathcal{B} \not\leqslant_c \mathcal{D}$. Тогда существуют некоторые n новых элементов из $D \setminus B$, для которых выполняется неравенство $n < \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_p \cdot e_p$, где $p = |B|$, e_s — число новых пар вершин (a, b), связанных лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s. Поскольку все новые элементы лежат в $C \setminus A$, они будут нарушать условие $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{C}$.

Так как каждая промежуточная вершина имеет степень 2, а все числа α_p меньше $\frac{1}{2}$, принадлежность c-графа классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ сохраняется после добавления к нему любого конечного количества промежуточных вершин. Поэтому достаточно установить принадлежность c-графа $\mathcal{D}$ классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ для случая, когда $\mathcal{D}$ не содержит промежуточных вершин. В этом случае каждый J-замкнутый c-подграф c-графа $\mathcal{D}$ имеет вид $\mathcal{B}_0 *_{\mathcal{A}_0} \mathcal{C}_0$, где $\mathcal{A}_0 \leqslant_c \mathcal{B}_0$ и $\mathcal{A}_0 \leqslant_c \mathcal{C}_0$. Поэтому для проверки $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ достаточно убедиться, что $y_p(\mathcal{D}) \geq b_n^p$, где $n = |D|$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Предположим, что $|B| \leq |C| = m$, $k_q \leq m < k_{q+1}$ и $A \subsetneq B$. Из леммы 4.1.1, п. 3 и условия $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B}$ вытекает

$$\mathrm{sl}((|A|, y_q(\mathcal{A})), (|B|, y_q(\mathcal{B}))) \geq \mathrm{sl}((l, b_l^q), (l+1, b_{l+1}^q))$$

для любого $l \geq m$. Тогда из равенства

$$\mathrm{sl}((|C|, y_q(\mathcal{C})), (|D|, y_q(\mathcal{D}))) = \mathrm{sl}((|A|, y_q(\mathcal{A})), (|B|, y_q(\mathcal{B})))$$

получаем

$$\mathrm{sl}((|C|, y_q(\mathcal{C})), (|D|, y_q(\mathcal{D}))) \geq \mathrm{sl}((m, b_m^q), (|D|, b_{|D|}^q)). \tag{4.3}$$

Из принадлежности c-графа $\mathcal{C}$ классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ следует, что точка $(|C|, y_q(\mathcal{C}))$ находится выше точки (m, b_m^q). Тогда на основании неравенства (4.3) заключаем, что точка $(|D|, y_q(\mathcal{D}))$ находится выше точки $(|D|, b_{|D|}^q)$, т. е. $y_q(\mathcal{D}) \geq b_{|D|}^q$.

Если $p = q$, то требуемое неравенство $y_p(\mathcal{D}) \geq b_n^p$ установлено. В противном случае, т. е. если $q < p$, $y_p(\mathcal{D})$ будет отличаться от $y_q(\mathcal{D})$ меньше, чем на $\alpha_{q+1} \cdot k_{q+1} \cdot (k_{q+1} - 1) < 2\varepsilon_{q+1}$, поскольку $\mathcal{D}$ содержит в сумме менее $k_{q+1} \cdot (k_{q+1} - 1)$ дуг и записей о Q-маршрутах. В силу леммы 4.1.1, п. 4 заключаем, что $y_p(\mathcal{D}) \geq b_n^p$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}$ класс всех типов из класса $\mathbf{T}$, соответствующих J-замкнутым c-графам, через $\leqslant_c''$ отношение самодостаточности на классе $\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}$, индуцированное отношением $\leqslant_c'$. На основании лемм 4.2.3–4.2.6 справедливо

Следствие 4.2.7. *Класс* $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}; \leqslant_c'')$ *самодостаточен.*

Обозначим $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}; \leqslant_c'')$-генерическую теорию через T^{nf}.

Покажем, что после добавления к каждому самодостаточному типу $\overline{\Phi}(\overline{A}) \in \mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}$ некоторой формулы $\chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, для которой $(T^{\mathrm{nf}}, \overline{A}) \vdash \chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, получается самодостаточный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant_c''')$, обладающий свойством однородного t-амальгамирования.

Действительно, каждая промежуточная вершина порождает не более двух вершин из $J_0 \cup J_1$ так, что J-замыкание p-элементного c-графа содержит не более $3p$ элементов. Тогда на основании замечания 4.2.2 для любого c-графа $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ мощности p и любого графа $\mathcal{M} \models T^{\mathrm{nf}}$, $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{M}$, имеет место следующее соотношение:

$$\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{M} \Leftrightarrow y_{3p}(\mathcal{A}) \leq y_{3p}(\mathcal{B}) \text{ для любого } c\text{-графа } \mathcal{B}$$

$$\text{с условиями } \mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{M} \text{ и } |B| \leq k_{3p}.$$

Поскольку мощности c-графов $\mathcal{B}$ ограничены в зависимости лишь от мощности c-графа $\mathcal{A}$, а проверка условия $y_{3p}(\mathcal{A}) \leq y_{3p}(\mathcal{B})$ предполагает лишь подсчет связей по отношениям $Q^1, \ldots, Q^{3p}$, условие самодостаточности $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{M}$ выразимо некоторой формулой $\chi_{\mathcal{A}}(X)$ графовой сигнатуры $\{Q\}$, где множество переменных X биективно с множеством A.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c-графы из класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$, $\mathcal{M}$ — генерическая модель теории T^{nf}, $\mathcal{A} \leqslant_c \mathcal{B} \leqslant_c \mathcal{M}$. Обозначим через $\psi_{\mathcal{A},s}(X)$ (соответственно $\psi_{\mathcal{B},s}(X,Y)$) формулу, описывающую $\{Q^1, \ldots, Q^s, J_0, J_1\}$-тип графа $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$), где X и Y — непересекающиеся множества переменных, биективные с множествами A и $B \setminus A$. Тогда для любого $s \geq |B|$ в модели $\mathcal{M}$ истинна следующая формула:

$$\forall X \ \left((\chi_{\mathcal{A}}(X) \wedge \psi_{\mathcal{A},s}(X)) \to \exists Y \ (\chi_{\mathcal{B}}(X,Y) \wedge \psi_{\mathcal{B},s}(X,Y))\right).$$

Из последнего соотношения вытекает свойство однородного t-амальгамирования для класса $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$, который получается из класса $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}; \leqslant_c''')$ добавлением к типам формул, устанавливающих мощностные границы и $\{Q^1, \ldots, Q^{3p}, J_0, J_1\}$-структуры самодостаточных замыканий, а также формул $\chi_{\mathcal{A}}(A)$ к типам самодостаточных множеств A.

Добавление указанных выше формул обеспечивает наличие конечных замыканий у любых конечных множеств моделей теории T^{nf}.

В дальнейшем для любого конечного множества A в модели $\mathcal{N}$ теории T^{nf} через $\overline{A}$ будем обозначать самодостаточное замыкание J-замыкания множества A и называть *J-самодостаточным замыканием* множества A, а при самостоятельном рассмотрении множества $\overline{A}$ будут называться *J-самодостаточными множествами*.

На основании теоремы 2.5.1 справедлива следующая

Теорема 4.2.8. $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}; \leqslant_c''')$*-Генерическая модель $\mathcal{M}$ насыщена. При этом любое конечное множество $A \subseteq M$ расширяется до своего J-самодостаточного замыкания $\overline{A} \subseteq M$, и тип* $\mathrm{tp}_X(\overline{A})$ *выводится из множества* $\{\chi_{\overline{A}}(X)\} \cup \{\psi_{\overline{A},s}(X) \mid s \in \omega \setminus \{0\}\}$.

Пусть $\mathcal{N}$ — ω-насыщенная модель теории T^{nf}.

Предложение 4.2.9. *Для любого конечного множества A из модели $\mathcal{N}$ справедливо соотношение* $\mathrm{acl}(A) = \bigcup\{\overline{B} \mid B \subseteq_{\mathrm{fin}} \mathrm{ccl}(A)\}$. *При этом множества $\overline{A} \setminus A$ и $\mathrm{acl}(A) \setminus \mathrm{ccl}(A)$ не содержат промежуточных элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отсутствие промежуточных элементов в $\overline{A} \setminus A$ вытекает из того, что после удаления из конечного множества B любого промежуточного элемента a значение $y(\cdot)$ уменьшается не менее чем на некоторую положительную величину $1 - \alpha_{s_1} - \alpha_{s_2} + \alpha_s$, где s_1 и s_2 — длины внешних над B кратчайших маршрутов, связывающих a с оставшимися элементами b и c, $s = s_1 + s_2$ — длина внешнего над $B \setminus \{a\}$ кратчайшего маршрута, соединяющего b и c.

Обозначим множество $\bigcup\{\overline{B} \mid B \subseteq_{\mathrm{fin}} \mathrm{ccl}(A)\}$ через X. Включение $X \subseteq \mathrm{acl}(A)$ следует из однозначности определения маршрута S_a для любой промежуточной вершины $a \in A$, а также из единственности в модели $\mathcal{N}$ множеств $\overline{B}$, где $B \subseteq_{\mathrm{fin}} \mathrm{ccl}(A)$. Возьмем теперь произвольный элемент $b \in N \setminus X$ и положим $C \rightleftharpoons \overline{A \cup \{b\}}$. Поскольку множество $C \setminus (A \cup \{b\})$ не содержит промежуточных элементов, в силу конструкции генерической модели существует бесконечное число c-изоморфных попарно непересекающихся копий множества $C \setminus X$ над множеством X, т. е. $b \notin \mathrm{acl}(A)$. Таким образом, $\mathrm{acl}(A) \subseteq X$.

Теперь отсутствие промежуточных элементов в $\mathrm{acl}(A) \setminus \mathrm{ccl}(A)$ вытекает из равенства $\mathrm{acl}(A) = X$ и из отсутствия промежуточных элементов в множествах $\overline{B} \setminus B$. $\square$

3. Стабильность генерической теории. Покажем, что генерическая теория T^{nf} стабильна. Пусть $\mathcal{N}$ — некоторая достаточно насыщенная модель теории T^{nf}. *Ранговой функцией* в модели $\mathcal{N}$ называется функция

$$r_{\mathcal{N}} : \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } c\text{-подграф } \mathcal{N}\} \to \mathbb{R}^+,$$

определяемая равенством $r_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}) = \inf\{y(\mathcal{B}) \mid \mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{N}\}$.

Заметим, что в силу самодостаточности класса $(\mathbf{T}_0^{\mathrm{nf}}; \leqslant_c'')$ инфимум в указанном выше равенстве всегда достижим и совпадает со значением $y(\overline{\mathcal{A}})$: $r_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}) = y(\overline{\mathcal{A}})$.

В дальнейшем модель $\mathcal{N}$ будет зафиксирована, функция $r_{\mathcal{N}}$ будет для краткости обозначаться через r, а c-графы $\mathcal{A}$ будут заменяться их носителями в модели $\mathcal{N}$. При этом все рассматриваемые множества будут считаться подмножеством множества N.

Относительная предранговая функция $y(A/B)$ c-графа A над c-графом B задается соотношением

$$y(A/B) = y(A \cup B) - y(B),$$

а *относительная ранговая функция* $r(A/B)$ c-графа A над c-графом B — соотношением

$$r(A/B) = r(A \cup B) - r(B).$$

Установим необходимые в дальнейшем свойства относительной ранговой функции.

Очевидно, $r(A/B) \geq 0$.

Лемма 4.2.10. *Для любых конечных множеств B и C справедливо неравенство*

$$y(B) + y(C) \geq y(B \cup C) + y(B \cap C).$$

Неравенство превращается в равенство в том и только в том случае, когда не существует элементов $b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$, связанных внешними кратчайшими маршрутами над $B \cup C$, и ни один из внешних кратчайших маршрутов над $B \cap C$ не содержит промежуточных вершин из $B \cup C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию значение

$$V \rightleftharpoons y(B) + y(C) - y(B \cup C) - y(B \cap C)$$

равно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot (e_k(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) + e_k(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) - e_k(\mathcal{B}) - e_k(\mathcal{C})).$$

Все слагаемые последнего выражения и, значит, само выражение равны нулю, если не существует элементов $b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$, связанных внешними кратчайшими маршрутами над $B \cup C$, и ни один из внешних кратчайших маршрутов над $B \cap C$ не содержит промежуточных вершин из $B \cup C$.

Если существуют элементы $b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$, связанные внешними кратчайшими маршрутами над $B \cup C$ и ни один из внешних кратчайших маршрутов над $B \cap C$, над B или над C не содержит промежуточных вершин из $B \cup C$, то положительное значение V равно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k$, где e_1 — число Q-дуг, e_k, $k > 1$, — число пар $(b, c) \in (B \setminus C) \times (C \setminus B)$ элементов, связанных лишь внешними над $B \cup C$ кратчайшими Q-маршрутами длины k.

Предположим, что некоторый из внешних кратчайших маршрутов над $B \cap C$, над B или над C содержит промежуточные вершины из $B \cup C$. Рассмотрим все внешние кратчайшие маршруты над $B \cap C$, над B и над C, длины которых не меняются при переходе к $B \cup C$. Заметим, что при подсчете значения V количественное значение для каждого из этих маршрутов равно нулю, а для пар $(b, c) \in (B \setminus C) \times (C \setminus B)$ элементов, связанных дугами или лишь внешними над $B \cup C$ кратчайшими маршрутами длины k, не являющимися собственными подмаршрутами внешних кратчайших маршрутов над $B \cap C$, над B или над C, в выражении V возникает неотрицательное значение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k$, где e_1 — число Q-дуг, e_k, $k > 1$, — число пар $(b, c) \in (B \setminus C) \times (C \setminus B)$ элементов, связанных лишь внешними над $B \cup C$ кратчайшими Q-маршрутами длины k. Поэтому достаточно установить, что положительные величины образуют элементы выражения V, относящиеся к каждому внешнему кратчайшему маршруту над $B \cap C$, над B или над C, содержащему промежуточные вершины из $B \cup C$.

Пусть $(a_1, a_2) \in B^2 \cup C^2$ — пара вершин, связанных над $B \cap C$, над B или над C лишь внешними кратчайшими (a_1, a_2)-маршрутами длины s; $a'_0, \ldots, a'_n$, $n \geq 2$, — все элементы из $B \cup C$, которые являются промежуточными вершинами или концами (a_1, a_2)-маршрутов. Рассмотрим произвольную пару (a'_i, a'_j) элементов, связанных (единственным) внешним кратчайшим (a'_i, a'_j)-маршрутом S_i над $B \cup C$ и предположим, что его длина равна s_i. В силу выбора вершин имеем $s_i < s$.

Рассмотрим случай, когда существуют пары $(b_1, b_2) \in B^2$ и $(c_1, c_2) \in C^2$ вершин, связанных лишь внешними кратчайшими (b_1, b_2)- и (c_1, c_2)-маршрутами S_B и S_C над B и C соответственно, которые содержат маршрут S_i. Длины этих маршрутов обозначим через s_B и s_C. По выбору вершин справедливо $s_i < s_B$ или $s_i < s_C$. При этом возможны следующие подслучаи:

а) $s_i = s_B$ и $s_i < s_C$, т. е. $(a'_i, a'_j) = (b_1, b_2)$ и $(a'_i, a'_j) \neq (c_1, c_2)$;

б) $s_i < s_B$ и $s_i = s_C$, т. е. $(a'_i, a'_j) \neq (b_1, b_2)$ и $(a'_i, a'_j) = (c_1, c_2)$;

в) $s_i < s_B$ и $s_i < s_C$, т. е. $(a'_i, a'_j) \neq (b_1, b_2)$ и $(a'_i, a'_j) \neq (c_1, c_2)$.

В первом подслучае информация о маршрутах S_i и S_B в выражении V представлена в виде выражения $\alpha_{s_i} - \alpha_{s_B}$, равного 0. Во втором подслучае информация о маршрутах S_i и S_C в выражении V представлена в виде выражения $\alpha_{s_i} - \alpha_{s_C}$, равного 0. При этом, в первом случае маршрут S_C, а во втором случае маршрут S_B содержит некоторый внешний кратчайший $(a'_{i'}, a'_{j'})$-маршрут над $B \cup C$ такой, что $(a'_{i'}, a'_{j'}) \notin B^2 \cup C^2$. Таким образом, подсчет выражения V сводится к рассмотрению третьего подслучая, для которого в выражении V информация о маршрутах S_i, S_B и S_C представлена в виде выражения

$$\alpha_{s_i} - \alpha_{s_B} - \alpha_{s_C}. \tag{4.4}$$

Это выражение положительно в силу $\alpha_{s_B} < \frac{\alpha_{s_i}}{2}$ и $\alpha_{s_C} < \frac{\alpha_{s_i}}{2}$. Сумма значений положительных выражений (4.4) дает нижнюю оценку для значения V.

Рассмотрим случай, когда указанная выше пара $(b_1, b_2) \in B^2$ существует, а пары $(c_1, c_2) \in C^2$ нет. Тогда аналогичным рассмотрением подслучаев $s_i = s_B$ и $s_i < s_B$ приходим к выражению $\alpha_{s_i} - \alpha_{s_B}$, которое в первом подслучае равно нулю, а во втором подслучае положительно. При этом, положительные выражения снова дают нижнюю оценку для значения V.

Аналогичное рассмотрение случая, когда указанная выше пара $(c_1, c_2) \in C^2$ существует, а пары $(b_1, b_2) \in B^2$ нет, также приводит к нахождению положительной нижней оценки для значения V. $\square$

Лемма 4.2.11. *Если $B_1 \subseteq B_2$, то $r(A/B_1) \geq r(A/B_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о дословно повторяет доказательство леммы 4.1.11. $\square$

Если A — конечное множество, X — некоторое (не обязательно конечное) множество, то

$$r(A/X) \rightleftharpoons \inf\{r(A/B) \mid B \subseteq_{\mathrm{fin}} X\}.$$

Лемма 4.2.12. *Пусть A_1 и A_2 — конечные множества, X — некоторое множество, для которого $A_1 \setminus X = A_2 \setminus X$. Тогда $r(A_1/X) = r(A_2/X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство леммы 4.1.12. $\square$

Множество $X \subseteq N$ называется *замкнутым* (в модели $\mathcal{N}$) (обозначается $X \leqslant N$), если $\mathrm{ccl}(X) = X$ и для любого конечного множества $A \subseteq X$ выполняется $\overline{A} \subseteq X$. Последнее условие равносильно отсутствию в $N \setminus X$ каких-либо n новых элементов, для которых $n < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k$, где e_1 — число новых Q-дуг, e_k, $k > 1$, — число новых пар элементов, связанных лишь внешними кратчайшими Q-маршрутами длины k.

Лемма 4.2.13. *Пусть X и Y — множества из модели $\mathcal{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $X \leqslant N$ и $Y \leqslant N$, то $X \cap Y \leqslant N$;*

2) *существует наименьшее замкнутое множество $\overline{X}^c \supseteq X$; при этом выполняются соотношения $\overline{X}^c = \bigcup\{\overline{A} \mid A \subseteq_{\mathrm{fin}} \mathrm{ccl}(X)\}$ и $\overline{X}^c = \mathrm{acl}(X)$;*

3) *если $X \subset Y$, то $\overline{X}^c \subseteq \overline{Y}^c$.*

Множество $\overline{X}^c$ называется *внутренним замыканием* множества X (в модели $\mathcal{N}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Предположим, что $X \leqslant N$ и $Y \leqslant N$. Очевидно, что $\mathrm{ccl}(X \cap Y) = \mathrm{ccl}(X) \cap \mathrm{ccl}(Y) = X \cap Y$, т. е. множество $X \cap Y$ маршрутно замкнуто. Пусть A — конечное подмножество множества $X \cap Y$. Так как $A \subseteq X$ и $A \subseteq Y$, а X и Y — замкнутые множества, то $\overline{A} \subseteq X$ и $\overline{A} \subseteq Y$. Следовательно, $\overline{A} \subseteq X \cap Y$. Таким образом, $X \cap Y$ — замкнутое множество.

2. Обозначим множество $\bigcup\{\overline{A} \mid A \subseteq_{\text{fin}} \text{ccl}(X)\}$ через Z. Очевидно, любое замкнутое надмножество множества X содержит множество Z и $X \subseteq Z$. С другой стороны, в силу предложения 4.2.9 справедливо равенство $\text{ccl}(Z) = Z$, и если A — конечное подмножество Z, то существует конечное множество $B \subseteq \text{ccl}(X)$ такое, что $A \subseteq \overline{B}$. Покажем, что $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Действительно, $A \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \leqslant_c N$, следовательно, $\overline{A} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Из включений $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ и $\overline{B} \subseteq Z$ вытекает $\overline{A} \subseteq Z$. Таким образом, Z — наименьшее замкнутое множество, содержащее множество X.

3. Очевидно, что из $X \subset Y$ следует $\text{ccl}(X) \subseteq \text{ccl}(Y)$. Остается заметить, что для любых c-графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если $A \subseteq B$, то $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Действительно, как и выше $A \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \leqslant_c N$. Следовательно, $\overline{A} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

Как и в параграфе 4.1 будем говорить, что конечные множества A и B *независимы* над Z и писать $A \downarrow^r_Z B$, если $r(A/Z) = r(A/(Z \cup B))$ и $\overline{A \cup Z}^c \cap \overline{B \cup Z}^c \subseteq \overline{Z}$.

Будем говорить, что множества X и Y *независимы* над Z и писать $X \downarrow^r_Z Y$, если $A \downarrow^r_Z B$ для любых конечных множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$.

Лемма 4.2.14. *Если X и Y — замкнутые множества, $Z = X \cap Y$ и $X \downarrow^r_Z Y$, то $X \cup Y$ — замкнутое множество.*

Доказательство. Из равенства $\text{ccl}(X \cup Y) = \text{ccl}(X) \cup \text{ccl}(Y)$ и маршрутной замкнутости множеств X и Y вытекает маршрутная замкнутость множества $X \cup Y$. Проверка импликации

$$A \subseteq_{\text{fin}} (X \cup Y) \Rightarrow \overline{A} \subseteq_{\text{fin}} (X \cup Y)$$

проводится повторением доказательства леммы 4.1.14 с использованием леммы 4.2.11. □

Лемма 4.2.15. *Если X — J-самодостаточное множество, Y — замкнутое множество и $Z = \overline{X \cup Z}^c \cap Y$, то $X \downarrow^r_Z Y$ тогда и только тогда, когда $\overline{X \cup Z}^c \cup Y$ — замкнутое множество такое, что не существует элементов $x \in \overline{X \cup Z}^c \setminus Y$ и $y \in Y \setminus \overline{X \cup Z}^c$, связанных внешними кратчайшими маршрутами над $\overline{X \cup Z}^c \cup Y$, и ни один из внешних кратчайших маршрутов над Z не содержит промежуточных вершин из $\overline{X \cup Z}^c \cup Y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 4.1.15 с использованием лемм 4.2.11 и 4.2.13. □

Непосредственно из леммы 4.2.15 вытекает

Следствие 4.2.16. *Если X — J-самодостаточное множество, Y — замкнутое множество, $Z = \overline{X \cup Z}^c \cap Y$ и $X \downarrow^r_Z Y$, то тип $\mathrm{tp}(X/Y)$ однозначно определяется типом $\mathrm{tp}(X/Z)$, описанием замкнутости множества $\overline{X \cup Z}^c \cup Y$ и типом, описывающим отсутствие элементов $x \in \overline{X \cup Z}^c \setminus Y$ и $y \in Y \setminus \overline{X \cup Z}^c$, связанных внешними кратчайшими маршрутами над $\overline{X \cup Z}^c \cup Y$, а также отсутствие промежуточных вершин из $\overline{X \cup Z}^c \cup Y$ для внешних кратчайших маршрутов над Z.*

Лемма 4.2.17. *Если X — замкнутое множество, a — элемент модели $\mathcal{N}$, не принадлежащий X, то существует не более чем счетное замкнутое подмножество $X' \subseteq X$ такое, что $\{a\} \downarrow^r_{X'} X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство леммы 4.1.17 с применением лемм 4.2.11 и 4.2.13. □

Теорема 4.2.18. 1. *Теория T^{nf} стабильна, мала и имеет счетное число 1-типов: элементов цвета J_0, элементов цвета J_1, промежуточных элементов, находящихся на некотором конечном удалении от элементов цвета J_0 и (или) элементов цвета J_1, и промежуточных элементов, не связанных маршрутами с элементами цвета $J_0 \cup J_1$.*

2. *Любой 1-тип непромежуточных элементов теории T^{nf} имеет бесконечный вес: для любого элемента a цвета J_i, $i = 0, 1$, существует бесконечное множество независимых элементов b_n, $n \in \omega$, цвета J_{1-i}, зависящих от элемента a.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Малость теории T^{nf} вытекает из теоремы 4.2.8. Доказательство стабильности теории T^{nf} проводится аналогично доказательству стабильности теории T^{bp} с использованием следствия 4.2.16 и леммы 4.2.17.

По построению каждое одноэлементное множество $\{a\}$ самодостаточно. По теореме 4.2.8 это означает, что существуют счетное число 1-типов теории T^{nf}, каждый из которых определяется одним из следующих множеств:

а) $\{J_0(x)\}$;

б) $\{J_1(x)\}$;

в) множеством формул, описывающих фиксированное конечное удаление промежуточного элемента x от элемента множества J_0 и конечное удаление от элемента множества J_1;

г) множеством формул, описывающих фиксированное конечное удаление промежуточного элемента x от элемента множества J_i и отсутствие связи элемента x с элементами множества J_{1-i} посредством Q-маршрута, $i = 0, 1$;

д) множеством формул, описывающих отсутствие связи элемента x с элементами множества $J_0 \cup J_1$ посредством Q-маршрутов.

2. Пусть $\mathcal{A}$ — c-граф с носителем $\{a\}$, $A_p = \{a, b_p\}$ — носитель двухэлементного c-графа $\mathcal{A}_p$, содержащего Q^p-дугу между a и b_p, где $a \in J_i$, $b_p \in J_{1-i}$. Положим $\mathcal{B}_1 \rightleftharpoons \mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_{p+1} \rightleftharpoons \mathcal{B}_p *_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{p+1}$, $\mathcal{B} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{p\in\omega\setminus\{0\}} \mathcal{B}_p$. По построению c-граф $\mathcal{B}$ является самодостаточным подграфом некоторой генерической модели $\mathcal{M}$ теории T^{nf}. Поскольку $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p+1} < 1$ и $\{b_1, \ldots, b_{p+1}\} \leqslant_c \{a, b_1, \ldots, b_{p+1}\} \leqslant_c B \leqslant_c M$, справедливо $\{b_{p+1}\} \downarrow^r_{\varnothing} \{b_1, \ldots, b_p\}$. Таким образом, $(b_p)_{p\in\omega\setminus\{0\}}$ — бесконечная независимая последовательность элементов типа $\{J_{1-i}(x)\}$, где каждый элемент b_p зависим с элементом a. $\square$

Поскольку $\alpha_p < \frac{1}{2}$ для любого натурального числа $p \geq 1$, любые два элемента a и b цвета J_0 связаны через некоторый элемент c цвета J_1 так, что aQc и bQc. Точно так же, любые два элемента a и b цвета J_1 связаны через некоторый элемент c цвета J_0 так, что cQa и cQb. При этом, в каждом из случаев указанных элементов c существует бесконечно много. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 4.2.19. *Множество элементов цвета J_i обладает свойством попарного $Q^{(-1)^{1-i}}$-пересечения, $i = 0, 1$.*

В следующих двух утверждениях проясняется структура простых моделей $\mathcal{M}_A$ над конечными множествами A.

Лемма 4.2.20. *Если A и B — J-самодостаточные множества в модели $\mathcal{N}$ и $A \leqslant_c B$, то тип $\mathrm{tp}(B/A)$ изолирован тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *любой промежуточный элемент из $B \setminus A$, принадлежащий бесконечной цепи, связан Q-маршрутом с некоторым промежуточным элементом из A;*

2) *любые два J-разноцветных элемента $a \in B \cap (J_0 \cup J_1)$ и $b \in (B \setminus A) \cap (J_0 \cup J_1)$ связаны Q-маршрутами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y — множество переменных, биективное с множеством $B \setminus A$. Если выполняются условия 1 и 2, то по теореме 4.2.8 тип $\mathrm{tp}((B \setminus A)/A)$ изолируется формулой $\chi_{\overline{\mathcal{B}}}(A \cup Y) \wedge \psi_{\overline{\mathcal{B}},s}(A \cup Y)$, где s — положительное число, большее длин внешних кратчайших маршрутов, связывающих элементы из $\mathcal{B}$. Если же хотя бы одно из условий 1 и 2 нарушается, то по теореме 4.2.8 тип $\mathrm{tp}((B \setminus A)/A)$ изолируется множеством формул $\{\chi_{\overline{\mathcal{B}}}(A \cup Y)\} \cup \{\psi_{\overline{\mathcal{B}},s}(A \cup Y) \mid s \in \omega\}$, но не изолируется никакой конечной частью этого множества. $\square$

Из леммы 4.2.20 вытекает

Следствие 4.2.21. *Пусть A — J-самодостаточное множество в модели $\mathcal{N}$. В модели $\mathcal{M}_A$ любой промежуточный элемент из $M_A \setminus A$, принадлежащий бесконечной цепи, связан Q-маршрутом с некоторым промежуточным элементом из A. Кроме того, любые два J-разноцветных элемента $a \in M \cap (J_0 \cup J_1)$ и $b \in (M \setminus A) \cap (J_0 \cup J_1)$ связаны Q-маршрутами. Множество типов изоморфизма простых моделей над конечными множествами совпадает с множеством типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_A$, где A — J-самодостаточные множества.*

§ 4.3. Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Властные орграфы

В этом параграфе на основе генерических конструкций из параграфов 4.1 и 4.2 мы описываем генерическую конструкцию, приводящую к построению семейства *стабильных* властных орграфов с почти несущественной упорядоченной раскраской.

1. Тандемные безразвилочные c-графы. *Развилочным тандемом* в c-графе $\mathcal{A}$ (соответственно графе $\mathcal{M}$) называется пара вершин (a_b, a_t) таких, что в графе $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$ (в $\mathcal{M}$) выполняются следующие условия:

а) вершина a_b имеет нулевую полустепень исхода $\deg^+ a_b$ и ненулевую полустепень захода $\deg^- a_b$;

б) вершина a_t имеет нулевую полустепень захода $\deg^- a_t$ и ненулевую полустепень исхода $\deg^+ a_t$;

в) $\deg^- a_b + \deg^+ a_t \geq 3$.

Очевидно, что в любом c-графе (бесконтурном графе) в результате отождествления пары вершин развилочного тандема (a_b, a_t) образуется развилка. Обратно, развилочный тандем образуется после замены любой развилки a на пару различных вершин (a_b, a_t), где концы маршрутов, заходящих в a, заменяются на a_b, а начала маршрутов, исходящих из a, заменяются на a_t. При этом после замены в c-графе $\mathcal{A}$ (бесконтурном графе $\mathcal{M}$) всех его развилок на развилочные тандемы образуется безразвилочный c-граф (граф). Снабдив получившийся c-граф (граф) отношением эквивалентности E, каждый класс которой одноэлементен для сохранившихся неизменными вершин и двухэлементен для пар вершин, образующих развилочные тандемы относительно начальных вершин, получаем *тандемный безразвилочный c-граф* $T(\mathcal{A}) = \langle T(A), Q, W, E\rangle$ (*тандемный безразвилочный граф* $T(\mathcal{M}) = \langle T(M), Q, E\rangle$), соответствующий c-графу $\mathcal{A}$ (графу $\mathcal{M}$). При этом условимся считать для определенности, что каждая вершина a степени 0 из c-графа $T(\mathcal{A})$ лежит в J_1.

Очевидно, что для любого c-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ число дуг c-графа $T(\mathcal{A})$ совпадает с числом дуг из Q, а число записей о его внешних кратчайших маршрутах — с числом троек $(a, b, n) \in W$.

Для любого c-графа $\mathcal{A}$ (бесконтурного графа $\mathcal{M}$) через $\mathcal{A}_f$ (соответственно $\mathcal{M}_f$) обозначим множество всех развилок в $\mathcal{A}$ (в $\mathcal{M}$), а через $\mathcal{A}_{\mathrm{nf}}$ ($\mathcal{M}_{\mathrm{nf}}$) — множество всех вершин в $\mathcal{A}$ ($\mathcal{M}$), не являющихся развилками в $\mathcal{A}$ (в $\mathcal{M}$): $\mathcal{A}_{\mathrm{nf}} = A \setminus \mathcal{A}_f$ ($\mathcal{M}_{\mathrm{nf}} = M \setminus \mathcal{M}_f$). При этом вместо записей $\mathcal{A}_f$, $\mathcal{A}_{\mathrm{nf}}$, $\mathcal{M}_f$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{nf}}$ будем использовать записи A_f, A_{nf}, M_f и M_{nf}, если из контекста ясно о каком c-графе (графе) идет речь.

Очевидно, что если $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$, то $A_f \subseteq B_f$.

При построении тандемного безразвилочного c-графа $T(\mathcal{B})$ относительно c-графа $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$, будем считать, что каждая вершина $a \in A \cap (B_f \setminus A_f)$ совпадает с a_b, если $\deg^+_{\mathcal{A}} a = 0$, и совпадает с a_t в противном случае. Каждая вершина a из $T(\mathcal{B})$ относительно $\mathcal{A}$ будет обозначаться через $a_{T(\mathcal{A})}$.

Пусть $f_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ — c-вложение. c-Вложение $g : T(\mathcal{A}) \to_c T(\mathcal{B})$ называется *каноническим c-вложением* c-графа $T(\mathcal{A})$ в c-граф $T(\mathcal{B})$ относительно вложения f_0 (обозначается $g : T(\mathcal{A}) \to_{c,f_0} T(\mathcal{B})$), если $g(a) = f_0(a)_{T(f_0(\mathcal{A}))}$ для любой вершины $a \in A_{\mathrm{nf}}$ и $g(a_b) = f_0(a)_b$, $g(a_t) = f_0(a)_t$ для любой вершины $a \in A_f$.

Очевидно, что для любого c-вложения $f_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ каноническое c-вложение $g : T(\mathcal{A}) \to_{c,f_0} T(\mathcal{B})$ существует.

c-Графы $T(\mathcal{A})$ и $T(\mathcal{B})$ называются *канонически c-изоморфными*, если существуют c-изоморфизмы $f_0 : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ и $g : T(\mathcal{A}) \to_{c,f_0} T(\mathcal{B})$. При этом отображение g называется *канони-*

ческим c-изоморфизмом между $T(\mathcal{A})$ и $T(\mathcal{B})$ относительно c-изоморфизма f_0, а c-графы $T(\mathcal{A})$ и $T(\mathcal{B})$ — *канонически c-изоморфными копиями* (относительно c-изоморфизма f_0).

Для любых c-графов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ справедливы следующие утверждения, связывающие отношением канонического c-изоморфизма теоретико-множественные операции над c-графами с соответствующими операциями над их тандемными образами.

Предложение 4.3.1. *c-Графы $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ и $T(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{B})$ канонически c-изоморфны тогда и только тогда, когда $(A \cap B)_f = A_f \cap B_f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что c-графы $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ и $T(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{B})$ канонически c-изоморфны. Тогда каждый развилочный тандем (a_b, a_t) из $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ является развилочным тандемом одновременно в $T(\mathcal{A})$ и в $T(\mathcal{B})$, и, наоборот, каждый общий развилочный тандем c-графов $T(\mathcal{A})$ и $T(\mathcal{B})$ является развилочным тандемом в $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Первое заключение означает, что $(A \cap B)_f \subseteq A_f \cap B_f$, а второе — $A_f \cap B_f \subseteq (A \cap B)_f$. Таким образом, $(A \cap B)_f = A_f \cap B_f$.

Предположим теперь, что $(A \cap B)_f = A_f \cap B_f$. Тогда при построении c-графа $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ в развилочные тандемы превращаются в точности те вершины из $A \cap B$, которые становятся развилочными тандемами в $T(\mathcal{A})$ и в $T(\mathcal{B})$. Остается заметить, что после одновременного превращения развилок в развилочные тандемы c-графы $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ и $T(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{B})$ одинаково наследуют маршрутные связи между элементами из $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, т. е. c-графы $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ и $T(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{B})$ канонически c-изоморфны. □

Предложение 4.3.2. *Пусть $\mathcal{M}$ — бесконтурный граф, содержащий c-подграфы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ так, что $M_f \cap A = A_f$, $M_f \cap B = B_f$. Тогда c-графы $T(\mathcal{A} \cup_{\mathcal{M}} \mathcal{B})$ и $T(\mathcal{A}) \cup_{T(\mathcal{M})} T(\mathcal{B})$ канонически c-изоморфны, если и только если $(A \cup B)_f = A_f \cup B_f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о получается почти дословным повторением доказательства предложения 4.3.1 с заменой символов $\cap$ на символы $\cup$. □

Предложение 4.3.3. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, то c-графы $T(\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C})$ и $T(\mathcal{B}) *_{T(\mathcal{A})} T(\mathcal{C})$ канонически c-изоморфны тогда и только тогда, когда $A_f = B_f \cap C_f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству предыдущих предложений. Следует лишь заметить, что по определению свободной амальгамы из равенства $A_f = B_f \cap C_f$ вытекает равенство $(B \cup C)_f = B_f \cup C_f$. □

Если $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$, то c-граф $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathcal{B} \restriction A$.

Для с-графа $\mathcal{A}$ через $\Upsilon(A)$ обозначим множество $A \cup \cup \{\{a_b, a_t\} \mid a \in A\}$. Тогда для всевозможных c-графов $\mathcal{B}$ таких, что $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$ и множество B с каждой вершиной $a \in A$ не содержит отличных от a вершин a_b и a_t, а с каждой вершиной $a_j \in A$ не содержит отличной от a_b и a_t вершины a,[3] ограничения $T(\mathcal{B}) \restriction \Upsilon(A)$ будут соответствовать всевозможным вариантам замены каких-то вершин из A_{nf} на развилочные тандемы относительно c-расширений c-графа $\mathcal{A}$. c-Граф $T(\mathcal{B}) \restriction \Upsilon(A)$, в котором все вершины из $\mathcal{A}$ заменены на развилочные тандемы, обозначается через $T^*(\mathcal{A})$.

c-Граф $T(\mathcal{A})$ называется *каноническим* c-подграфом c-графа $T(\mathcal{B})$, если $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$ и $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B}) \restriction \Upsilon(A)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — c-подграф c-графа $\mathcal{B}$. c-Граф $\mathcal{B}$ называется *развилочно наследственным расширением* c-графа A и пишется $\mathcal{A} \subseteq_f \mathcal{B}$, если $A_f = B_f \cap A^{\mathrm{in}}$, где A_{in} — множество вершин из $\mathcal{A}$ с ненулевой полустепенью исхода и ненулевой полустепенью захода.

Очевидно, что отношение $\subseteq_f$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Предложение 4.3.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — с-подграф с-графа $\mathcal{B}$, и множество B с каждой вершиной $a \in A$ не содержит отличных от a вершин a_b и a_t, а с каждой вершиной $a_j \in T(A)$ не содержит отличной от a_b и a_t вершины a. Тогда с-граф $T(\mathcal{A})$ является каноническим с-подграфом с-графа $T(\mathcal{B})$, если и только если $\mathcal{A} \subseteq_f \mathcal{B}$.*

Доказательство. Предположим, что $T(\mathcal{A})$ — канонический c-подграф c-графа $T(\mathcal{B})$. Тогда развилочный тандем (a_b, a_t) любой вершины a из B_f совпадает с развилочным тандемом вершины a из $\mathcal{A}$ или содержит вершину a из $\mathcal{A}$. В первом случае имеем $a \in A_f$, а во втором случае вершина a в $\mathcal{A}$ не может быть промежуточной, т. е. иметь ненулевую полустепень исхода и ненулевую полустепень захода, поскольку для вершины a, рассмотренной в $\mathcal{B}$, выполняется $\deg^+ a_b = 0$ и $\deg^- a_t = 0$. Таким образом, $A_f = B_f \cap A^{\mathrm{in}}$, т. е. $\mathcal{A} \subseteq_f \mathcal{B}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{A} \subseteq_f \mathcal{B}$. Тогда при построении тандемных безразвилочных c-графов $T(\mathcal{A})$ и $T(\mathcal{B})$ каждая проме-

[3]Ограничения на несовместимость в одном c-графе различных элементов a и a_j требуются во избежание коллизий, и при работе с конечным числом с-графов всегда могут и будут предполагаться.

жуточная вершина c-графа $\mathcal{A}$ (не) заменяется на развилочный тандем как для $\mathcal{A}$, так и для $\mathcal{B}$, а каждая вершина $a \in A$, которая превращается в развилочный тандем для $\mathcal{B}$, совпадает с a_b, если $\deg^+_{\mathcal{A}} a = 0$, и совпадает с a_t в противном случае. Из сохранения дуг и информации о внешних кратчайших маршрутов при построении $T(\mathcal{A})$ и $T(\mathcal{B})$ вытекает, что $T(\mathcal{A})$ — канонический c-подграф $T(\mathcal{B})$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — c-подграф c-графа $\mathcal{B}$, и $\mathcal{A}'$ — c-подграф c-графа $T^*(\mathcal{A})$, в котором все развилочные вершины a из $\mathcal{B}_f \cap A$ представлены развилочными тандемами (a_b, a_t), а остальные вершины из A — либо сами, либо их развилочные тандемы. Тогда тандемный безразвилочный c-граф, соответствующий c-графу, получаемому из $\mathcal{A}'$ добавлением всех вершин из $B \setminus A$, а также дуг и информации о внешних кратчайших маршрутах, связывающих в $\mathcal{B}$ элементы из $B \setminus A$ с элементами из B, называется *тандемным безразвилочным c-графом*, соответствующим c-графу $\mathcal{B}$ относительно c-графа $\mathcal{A}'$, и обозначается через $T(\mathcal{B}_{\mathcal{A}'})$.

Очевидно, что $T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B}_\varnothing)$ для любого c-графа $\mathcal{B}$, а если $\mathcal{A}' \neq \varnothing$, то $T(\mathcal{B})$ естественным образом вкладывается в $T(\mathcal{B}_{\mathcal{A}'})$.

2. Предранговые функции. Определим *предпредранговую функцию* y^0, которая каждому c-графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие некоторое вещественное число по правилу

$$y^0(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}).$$

Заметим, что сумма в определении предпредранговой функции всегда конечна в силу конечности любого c-графа. Кроме того, для любого c-графа $\mathcal{A}$ значение $y^0(\mathcal{A})$ совпадает со значением $y(T(\mathcal{A}))$ и при этом $2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| = |T(A)|$. Таким образом,

$$y^0(\mathcal{A}) = |T(A)| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}).$$

p-Аппроксимацией предпредранговой функции y^0 называется функция y^0_p, которая каждому c-графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие

вещественное число по правилу

$$y^0_p(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{A}).$$

Очевидно, $y^0_p(\mathcal{A}) = y_p(T(\mathcal{A}))$.

Дальнейшие построения будем проводить одновременно для c-графов $\mathcal{A}$ и соответствующих им безразвилочных c-графов $T(\mathcal{A})$.

Определенная по аналогии с предранговыми функциями функция $y^0(\cdot)$ имеет следующий существенный недостаток. При переходе от c-графов с неотрицательными значениями $y^0(\cdot)$ к c-подграфам, получаемых удалением развилок, предпредранговая функция может принимать значения, меньшие любого наперед заданного отрицательного числа.

Действительно, если c-граф $\mathcal{A}_n$ состоит из развилки a, вершин $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n$, множества дуг $Q = \{(b_1, a), \ldots, (b_n, a), (a, c_1), \ldots, (a, c_n)\}$ и пустого множества W, то c-подграф $\mathcal{B}_n$ c-графа $\mathcal{A}_n$, который получается из $\mathcal{A}_n$ удалением развилки a, имеет следующее значение предпредранговой функции: $y^0(\mathcal{B}_n) = 2n - \alpha_2 \cdot n^2$. Отсюда получаем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} y(\mathcal{B}_n) = -\infty$.

Для контроля реального баланса в c-графах $\mathcal{A}$ между числом элементов и числом связей посредством предранговой функции нам придется учитывать виртуальное наличие (в виде дополнения к записям W) конечного числа так называемых "принудительных" развилок, т. е. развилок a, в обход которых нет достаточно большого числа кратчайших маршрутов, связывающих различные пары элементов $(a', a'') \in \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} Q^n(a, \mathcal{A}) \times \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} Q^n(\mathcal{A}, a)$. При этом до добавления всех принудительных развилок, принадлежащих кратчайшим (a', a'')-маршрутам, пары (a', a'') не будут участвовать в подсчете значения предранговой функции, а после добавления всех принудительных развилок будут учитываться все пары, связанные лишь внешними кратчайшими маршрутами. Тем самым, предранговая функция будет принимать лишь неотрицательные значения и позволит включать в самодостаточные замыкания c-графов все их принудительные развилки.

Итак, развилка a c-графа $\mathcal{A}$ называется *$\mathcal{A}$-принудительной*, если для некоторого c-подграфа $\mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{A}$ выполняется

$$y(T^*(\mathcal{B})) > y(T((\mathcal{A} \upharpoonright (B \cup \{a\}))_{T^*(\mathcal{B})})).^4$$

При этом развилка a будет также называться *$\mathcal{B}$-принудительной*.[5]

$\mathcal{A}$-Принудительная развилка называется *$\mathcal{B}$-внешней* (где $\mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{A}$), если она не принадлежит $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$-Принудительная развилка называется *принудительной*, если из контекста ясно, о каком c-графе $\mathcal{A}$ идет речь. $\mathcal{B}$-Внешняя принудительная развилка называется *внешней*, если из контекста ясно, о каком c-графе $\mathcal{B}$ идет речь.

Из определения класса $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ вытекает, что для любого фиксированного числа $k \in \omega$ к каждому c-графу $T^*(\mathcal{A}) \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ можно присоединить лишь ограниченное в зависимости от мощности $|T^*(A)|$ число внешних кратчайших маршрутов длины, не превосходящей k, соединяющих вершины из $T^*(\mathcal{A})$ с некоторой новой вершиной a так, чтобы полученный c-граф $\mathcal{B}$ с носителем $T^*(A) \cup \{a\}$ или $T^*(A) \cup \{a_b, a_t\}$ принадлежал классу $\mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$. Поэтому последовательным выбором чисел α_s, удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям, можно добиться, чтобы некоторая из вершин a_b или a_t каждой принудительной развилки a попадала в самодостаточное замыкание множества ее предшественников в c-графе $T^*(\mathcal{A})$ или множества ее последователей в том же c-графе.

Действительно, удаление каждой развилки a, связанной с вершинами $b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m$ лишь внешними кратчайшими (b_1, a)-, $\ldots$, (b_l, a)-, (a, c_1)- и (a, c_m)-маршрутами длин $s_1, \ldots, s_l, s_1', \ldots, s_m'$ соответственно такими, что для любой такой пары (b_i, c_j) длина s_{ij} кратчайшего (b_i, c_j)-маршрута совпадает с $s_i + s_j'$, приводит к установлению лишь внешних кратчайших маршрутов между элементами b_i и c_j. При этом, в предранговой функции $y(\cdot)$

[4] По определению функции $y(\cdot)$ для проверки принудительности развилки a достаточно рассматривать c-подграфы $\mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{A} \upharpoonright \left(\bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} Q^n(a, \mathcal{A}) \cup \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} Q^n(\mathcal{A}, a)\right)$.

[5] В данной ситуации отличие $\mathcal{A}$-принудительности от $\mathcal{B}$-принудительности состоит в том, что развилка a принадлежит $\mathcal{A}$ и не принадлежит $\mathcal{B}$. При этом, попадая в самодостаточное замыкание $\overline{B}$, вершина a является элементом, неотъемлемо связанным с $\mathcal{B}$.

суммы $\sum\limits_{i,j}(\alpha_{s_i} + \alpha_{s'_j})$ заменяются на суммы $\sum\limits_{i,j}\alpha_{s_{ij}}$, где $\alpha_{s_{ij}} < \min\{\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}\}$. Перебором всех возможных конфигураций c-графов с носителями $\{a, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m\}$ и имеющими лишь внешние кратчайшие маршруты длины, не превосходящей $k-1$, можно на каждом последовательном шаге определения чисел α_k выбирать их настолько малыми, чтобы выполнялись следующие условия $(*)$:

1) если для c-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ с носителями $\{a, b_1, \ldots, b_l\}$ и $\{a, c_1, \ldots, c_m\}$ соответственно, где $\deg^+_{\mathcal{B}}(a) = \deg^-_{\mathcal{C}}(a) = 0$, выполняется

$$y(T(\mathcal{B}_{T^*(\mathcal{B}\upharpoonright\{b_1,\ldots,b_l\})})) \geq y(T^*(\mathcal{B} \upharpoonright \{b_1, \ldots, b_l\})) \tag{4.5}$$

и

$$y(T(\mathcal{C}_{T^*(\mathcal{C}\upharpoonright\{c_1,\ldots,c_m\})})) \geq y(T^*(\mathcal{C} \upharpoonright \{c_1, \ldots, c_m\})), \tag{4.6}$$

то для c-графа $\mathcal{D}$ с носителем $\{a, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m\}$, отношением $Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}}$ и записью $W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}}$ и для c-графа $\mathcal{E} \rightleftharpoons \mathcal{D} \upharpoonright \{b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m\}$ выполняется

$$y(T(\mathcal{D}_{T^*(\mathcal{E})})) \geq y(T^*(\mathcal{E})); \tag{4.7}$$

2) если вершина a не является $\mathcal{E}$-принудительной развилкой, то для c-графов $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{E}'$, которые получаются из $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ соответственно удалением всех (b_i, b_j)- и (c_i, c_j)-маршрутов, выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{E}') < \frac{1}{2} \cdot \min\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{B}'), \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{C}')\right\}. \tag{4.8}$$

Рассмотрение двухэлементных c-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ позволяет на основании условия 2 заключить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{E}') < \frac{1}{2} \cdot \alpha_l,$$

где l — наибольший из индексов, до которого включительно все значения $e_k(\mathcal{E}')$ равны нулю. Кроме того, перебор всех возможных c-графов, удовлетворяющих условию $(*)$, позволяет неравенство (4.8) переписать в виде следующей последовательности неравенств по всем натуральным $p \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{E}') < \frac{1}{2} \cdot \min \left\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{B}'), \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k(\mathcal{C}') \right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнение условий $(*)$ уже заложено в определение чисел α_k. Это означает, в частности, что нарушение условия (4.7) влечет нарушение хотя бы одного из условий (4.5) или (4.6), т. е. из попадания $\mathcal{D}$-принудительной развилки a в самодостаточное замыкание c-графа $\mathcal{E}$ следует ее попадание в самодостаточное замыкание какого-нибудь из c-графов $\mathcal{B} \upharpoonright (B \setminus \{a\})$ или $\mathcal{C} \upharpoonright (C \setminus \{a\})$.

Из условий $(*)$ также вытекает, что для любой непринудительной развилки a c-графа $\mathcal{A}$ все связи между элементами из $A \setminus \{a\}$ с помощью внешних над $A \setminus \{a\}$ кратчайших маршрутов, проходящих через вершину a, могут быть заменены на связи с помощью внешних над $A \setminus \{a\}$ кратчайших маршрутов, у которых множества промежуточных элементов попарно не пересекаются.

Приводимая ниже модификация предпредранговой функции позволит все $\mathcal{A}$-принудительные развилки присоединять к самодостаточному замыканию c-графа $\mathcal{A}$ посредством дополнения к записи $W_{\mathcal{A}}$.

Позволим каждому c-подграфу $\mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{A}$ иметь менее $k_{|T(\mathcal{B})|}$ принудительных развилок (эти развилки могут быть не только $\mathcal{B}$-принудительными, но и принудительными относительно c-графа, который получается расширением $\mathcal{B}$ какими-то другими из менее $k_{|T(\mathcal{B})|}$ принудительных развилок).[6] Теперь добавим к каждой записи $W_{\mathcal{B}}$ тип, описывающий структуру c-графа $\mathcal{B}$ вместе со всеми его принудительными развилками, а также описывающий отсутствие каких-либо дополнительных принудительных развилок. Полученные обогащенные c-графы будем называть cc-*графами*.

Множество всех $\mathcal{A}$-принудительных развилок cc-графа $\mathcal{A}$, принадлежащих $\mathcal{A}$, обозначим через A_{cf}. cc-Граф $\mathcal{A}$ называется cf-*замкнутым*, если A_{cf} содержит все $\mathcal{A}$-принудительные развилки.

[6]В силу построений параграфа 4.2 указанному ограничению удовлетворяет любой c-граф $\mathcal{A}$, у которого выполняется $T(\mathcal{A}) \upharpoonright B \in \mathbf{K}_0^{\mathrm{nf}}$ для каждого c-подграфа $\mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{A}$.

Операция добавления к cc-графу $\mathcal{A}$ всех его принудительных развилок вместе со структурой, описываемой в $W(\mathcal{A})$, называется операцией cf*-замыкания* cc-графа $\mathcal{A}$. cc-Граф, являющийся результатом применения cf-замыкания к cc-графу $\mathcal{A}$, обозначается через $\mathrm{cfc}(\mathcal{A})$.

cc-Граф $\mathcal{A}$ называется cc-*подграфом* cc-графа $\mathcal{B}$ и пишется $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$, если выполняются следующие условия:

1) c-граф $\langle A, Q_{\mathcal{A}}, W_1 \rangle$ с записью W_1 структуры c-графа в $\mathcal{A}$ является c-подграфом c-графа $\langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_2 \rangle$ с записью W_2 структуры c-графа в $\mathcal{B}$;

2) запись $W_{\mathcal{A}}$ совпадает с ограничением записи $W_{\mathcal{B}}$ на множество A.

cc-Граф $\mathcal{A}$ называется cc-*подграфом* графа $\mathcal{M}$, если $\langle A, Q_{\mathcal{A}}, W \rangle$ с записью W структуры c-графа в $\mathcal{A}$ является c-подграфом графа $\mathcal{M}$ и запись $W_{\mathcal{A}}$ cc-графа $\mathcal{A}$ согласуется с типом $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A)$. При этом запись $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$ будет означать, что cc-граф $\mathcal{A}$ является cc-подграфом графа $\mathcal{M}$.

Очевидно, что если $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$, то любая $\mathcal{A}$-принудительная развилка является $\mathcal{B}$-принудительной и, в частности, $A_{\mathrm{cf}} \subseteq B_{\mathrm{cf}}$.

Определим *предранговую функцию* y^1, которая каждому cc-графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие некоторое вещественное число по правилу

$$y^1(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e^1_k(\mathcal{A}),$$

где $e^1_1(\mathcal{A})$ — число дуг в $\mathcal{A}$, $e^1_k(\mathcal{A})$, $k \geq 2$, — число пар $(a, a') \in A^2$, связанных лишь внешними кратчайшими (a, a')-маршрутами длины k и такими, что никакой (a, a')-маршрут длины k не содержит $\mathcal{A}$-внешних $\mathcal{A}$-принудительных развилок.

Построение тандемного безразвилочного cc-графа $T_c(\mathcal{A})$ ($T^*_c(\mathcal{A})$), соответствующего cc-графу $\mathcal{A}$, состоит в удалении из c-графа $T(\mathcal{A})$ ($T^*(\mathcal{A})$) всех наборов (a_1, a_2, n), для которых существуют внешние кратчайшие (a_1, a_2)-маршруты длины n, содержащие внешние принудительные развилки.

По определению имеем $|T^*_c(\mathcal{A})| = 2 \cdot |A|$, $|T_c(\mathcal{A})| = |T(\mathcal{A})|$ и $y^1(\mathcal{A}) = y(T_c(\mathcal{A})) = y(T^*_c(\mathcal{A})) - |A_{\mathrm{nf}}|$.

p-Аппроксимацией предранговой функции y^1 называется функция y^1_p, которая каждому cc-графу $\mathcal{A}$ ставит в соответствие вещественное число по правилу

$$y^1_p(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\rm nf}| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e^1_k(\mathcal{A}).$$

Очевидно, $y^1_p(\mathcal{A}) = y_p(T_c(\mathcal{A}))$.

3. Генерический класс и генерическая теория. Нам предстоит определить класс cc-графов, в котором аналогично классам c-графов из параграфов 4.1 и 4.2, с одной стороны, обеспечивается баланс между числом элементов и числом связей посредством нижних оценок b^p_n значений предранговой функции, а с другой стороны, уменьшение значений предранговой функции при расширении носителей cc-графов определяет попадание элементов расширений в самодостаточные замыкания исходных cc-графов. Вместе с тем удвоение весов вершин в предранговой функции при переходе от элементов $a \in A_{\rm nf}$ к тем же самым элементам, принадлежащим B_f, где $\mathcal{A} \subseteq_{\rm cc} \mathcal{B}$, не позволяет отслеживать самодостаточность cc-графов $\mathcal{A}$ (означающую превышение числа новых элементов, а не виртуальных пар элементов, над числом новых связей) неравенствами $y^1(\mathcal{A}) \leq y^1(\mathcal{B})$. Эта же причина даже при рассматриваемом ниже определении самодостаточности не позволяет добиться наличия конечных замыканий у всех конечных множеств моделей генерической теории и, как следствие, насыщенности генерической модели рассмотрением класса cc-графов $\mathcal{A}$, все cc-подграфы $\mathcal{A}'$ которых удовлетворяют условию $y^1_p(\mathcal{A}') \geq b^p_n$ $n = |T(A')|$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Для реализации требуемых свойств мы ограничим класс рассматриваемых cc-графов на подкласс, обеспечивающий ограниченность числа итераций самодостаточных замыканий cc-подграфов в зависимости от мощностей данных cc-графов, а само условие самодостаточности определим как неуменьшение значений предрангового баланса между числом новых вершин и числом новых связей в тандемных безразвилочных c-графах относительно тандемного безразвилочного c-графа рассматриваемого самодостаточного cc-графа, у которого каждая вершина представлена развилочным тандемом.

Пусть $\mathcal{A}$ — cc-подграф cc-графа $\mathcal{B}$, и $\mathcal{A}'$ — cc-подграф cc-графа $T^*_c(\mathcal{A})$, в котором все развилочные вершины a из $\mathcal{B}_f \cap A$ представлены развилочными тандемами (a_b, a_t), а остальные вершины из A — либо сами, либо их развилочные тандемы. Тогда тандемный безразвилочный сс-граф, соответствующий сс-графу, получаемому из $\mathcal{A}'$ добавлением всех вершин из $B\setminus A$, а также соответствующих дуг и информации о принудительных развилках и о внешних кратчайших маршрутах, связывающих в $\mathcal{B}$ элементы из $B \setminus A$ с элементами из B, называется *тандемным безразвилочным* сс-*графом*, соответствующим сс-графу $\mathcal{B}$ относительно сс-графа $\mathcal{A}'$, и обозначается через $T_c(\mathcal{B}_{\mathcal{A}'})$.

Напомним [13], что граф $\mathcal{A}$ называется *частью* графа $\mathcal{B}$, если $A \subseteq B$ и граф $\mathcal{B}$ содержит все дуги графа $\mathcal{A}$. Аналогично сс-граф $\mathcal{A}$ будем называть *частью* сс-графа $\mathcal{B}$ и писать $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, если $A \subseteq B$, $\mathcal{B}$ содержит все дуги сс-графа $\mathcal{A}$ и запись $W_{\mathcal{B}}$ содержит все записи из $W_{\mathcal{A}}$. Будем также писать $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{M}$, если $\mathcal{A}$ — часть некоторого сс-графа $\mathcal{B}$, являющегося сс-подграфом графа $\mathcal{M}$.

Заметим, что переход от сс-графа $\mathcal{A}$ к его частям с сохранением носителя A позволяет рассматривать любые подмножества A, состоящие из развилочных вершин, в виде неразвилочных и перебором частей тестировать сс-подграфы $\mathcal{A}'$ сс-графа $\mathcal{A}$ на предмет их самодостаточности в $\mathcal{A}$. При этом в силу условия $(*)$ несамодостаточность в $\mathcal{A}$ будет обладать следующим *свойством наследственности*: если в $\mathcal{A}$ имеется множество $B \subseteq A \setminus A'$, добавление которого к A' дает относительно $\mathcal{A}'$ отрицательную разность между числом новых вершин и взвешенным числом новых связей в некоторой части сс-графа $\mathcal{A}$ с носителем $A' \cup B$, то для любого сс-графа $\mathcal{A}''$, где $\mathcal{A}' \subseteq_{\rm cc} \mathcal{A}'' \subseteq_{\rm cc} \mathcal{A}$, $B \subseteq A \setminus A''$, отрицательной останется и разность между числом новых вершин и взвешенным числом новых связей относительно $\mathcal{A}''$ в некоторой части сс-графа $\mathcal{A}$ с носителем $A'' \cup B$.

Лемма 4.3.5. *Для любого положительного числа* $p \in \omega$ *и любых* сс-*графов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$, *где* $\mathcal{A}$ — *собственная часть* сс-*графа* $\mathcal{B}$, $|T(B)| = n < k_{p+1}$, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется* $y^1_p(\mathcal{B}) - y^1(\mathcal{B}) < \varepsilon_{p+1}$.

2. *Выполняется* $y^1_p(\mathcal{A}) < y^1_p(\mathcal{B})$ *тогда и только тогда, когда* $y^1(\mathcal{A}) < y^1(\mathcal{B})$, *и выполняется* $y^1_p(\mathcal{A}) < y^1_p(\mathcal{B})$ *тогда и только тогда, когда* $y^1_q(\mathcal{A}) < y^1_q(\mathcal{B})$ *для любого* $q \geq p$.

Доказательство получается из доказательства леммы 4.1.1 заменой y на y^1 и графов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ на сс-графы $T_c(\mathcal{A})$ и $T_c(\mathcal{B})$ соответственно. $\square$

Для сс-графа $\mathcal{A}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}^f_1$ тогда и только тогда, когда $y^1_1(\mathcal{A}') \geq b^1_n$ для любого непустого сс-графа $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathrm{cfc}(\mathcal{A})$, где $n = |T(A')|$.

Для cc-графа $\mathcal{A}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}^f_{p+1}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \in \mathbf{K}^f_p$ и $y^\Delta_p(\mathcal{A}') \geq b^p_n$ для любого cc-графа $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathrm{cfc}(\mathcal{A})$, где $y^\Delta_p(\mathcal{A}')$ — минимальное из значений $y_p(T_c(\mathcal{A}_0)) + \Delta_1 + \ldots + \Delta_m$, $\Delta_i = y_p(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T^*_c(\mathcal{A}_i)})) - y_p(T^*_c(\mathcal{A}_i))$, $\mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_m = \mathcal{A}'$, n — натуральное число, для которого $y^\Delta_p(\mathcal{A}') = n - s\cdot\alpha_1$ при некотором $s \in \omega$, $k_p \leq n < k_{p+1}$. Заметим, что определение корректно, поскольку в выражении $n - s\cdot\alpha_1$ значение n не зависит от p.

Положим $\mathbf{K}^f_0 \rightleftharpoons \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathbf{K}^f_p$. Обозначим через $\mathbf{K}^f$ класс всех бесконтурных орграфов, у которых каждый cc-подграф принадлежит классу $\mathbf{K}^f_0$.

Пусть $\mathcal{A}$ — cc-подграф графа (cf-замкнутого cc-подграфа) $\mathcal{M}$ (графа), принадлежащего классу $\mathbf{K}^f$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *самодостаточный* cc-*подграф* графа (соответственно cc-графа) $\mathcal{M}$ и писать $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$, если для любых cc-графов $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_m = \mathcal{B}'$, из $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m < 0$, где $\Delta_i = y(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T^*_c(\mathcal{A}_i)})) - y(T^*_c(\mathcal{A}_i))$, следует $B' \subseteq A$. Если $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — cc-граф, то $\mathcal{A}$ называется *сильным* cc-*подграфом* cc-графа $\mathcal{M}$.

В частности, условие самодостаточности cc-графа $\mathcal{A}$ влечет его cf-замкнутость.

Нам предстоит показать, что класс $\mathbf{T}^f_0$, состоящий из типов, соответствующих всем cc-графам из класса $\mathbf{K}^f_0$, и снабженный отношением $\leqslant'_{\mathrm{cc}}$ (где $\Phi(A) \leqslant'_{\mathrm{cc}} \Psi(B) \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$), является самодостаточным генерическим классом, обладающим (после добавления к типам необходимых формул, описывающих самодостаточные замыкания) свойством однородного t-амальгамирования. Это повлечет ω-насыщенность $(\mathbf{T}^f_0; \leqslant'_{\mathrm{cc}})$-генерической модели, реализующей все типы $\Phi(X)$, соответствующие типам $\Phi(A)$ из $\mathbf{T}^f_0$.

Замечание 4.3.6. 1. *Из условий $\mathcal{A} \in \mathbf{K}^f_0$ и $k_p \leq |T(A)| = n < k_{p+1}$ не следует $y^\Delta(\mathcal{A}) \rightleftharpoons \inf\limits_p y^\Delta_p(\mathcal{A}) \geq b^p_n$. Вместе с тем, значение $y^\Delta(\mathcal{A})$ не может быть намного меньше b^p_n: поскольку $y^1_p(\mathcal{A}) - y^1(\mathcal{A}) < \varepsilon_{p+1}$, имеем $y^\Delta(\mathcal{A}) > b^p_n - \varepsilon_{p+1}$.*

Кроме того, с учетом неравенства (4.1), *для* cc-*графов*

$\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^f$, *удовлетворяющих условию* $|T(A)| \geq \max\{2, k_p\}$, *справедливо неравенство* $y^{\Delta}(\mathcal{A}) > p$.

2. *Пусть* $\mathcal{A}$ — сс-*граф из класса* $\mathbf{K}_0^f$, $|T^*(A)| = p$, $\mathcal{M}$ — *граф из класса* $\mathbf{K}^f$, $\mathcal{A} \subseteq_{\rm cc} \mathcal{M}$. *Тогда* $\mathcal{A} \leqslant_{\rm cc} \mathcal{M}$ *в том и только в том случае, когда для любых* сс-*графов* $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \subseteq_{\rm cc} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\rm cc} \ldots \subseteq_{\rm cc} \mathcal{A}_m = \mathcal{B}'$, *из* $\Delta_1^p + \ldots + \Delta_m^p < 0$, *где* $\Delta_i^p = y_p(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T_c^*(\mathcal{A}_i)})) - y_p(T_c^*(\mathcal{A}_i))$, *следует* $B' \subseteq A$.

Действительно, если $|T_c((\mathcal{B}')_{T_c^*(\mathcal{A}')})| < k_{p+1}$, то неравенство $\Delta_1^p + \ldots + \Delta_m^p < 0$ равносильно неравенству $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m < 0$ в силу леммы 4.3.5, п. 2, а если $|T_c((\mathcal{B}')_{T_c^*(\mathcal{A}')})| \geq k_p$, то $\Delta_1^p + \ldots + \Delta_m^p \geq \Delta_1 + \ldots + \Delta_m > p - y_p(T_c^*(\mathcal{A}')) \geq 0$.

Более того, для проверки самодостаточности сс-графа $\mathcal{A}$ в графе $\mathcal{M}$ достаточно выбрать число $n_{\mathcal{A}} = k_p$ и проверить соотношения $B' \subseteq A$ лишь для сс-графов $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}'$ с условиями $\mathcal{A}' \subseteq_{\rm cc} \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{B} \subseteq_{\rm cc} \mathcal{M}$, $\Delta_1^p + \ldots + \Delta_m^p < 0$, $|T^*(\mathcal{B}')| < n_{\mathcal{A}}$.

Таким образом, условие $\mathcal{A} \leqslant_{\rm cc} \mathcal{M}$ формульно определимо с помощью формулы, описывающей отсутствие n_i новых относительно $T^*(A_{i-1})$ (где $\mathcal{A}_0 \subseteq_{\rm cc} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\rm cc} \ldots \subseteq_{\rm cc} \mathcal{A}_m \sqsubseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{A}_0 \sqsubseteq \mathcal{A}$) вершин из $A_m \cup \Upsilon(A_m)$, где $n_1 + \ldots + n_m < n_{\mathcal{A}}$, таких, что совокупность этих элементов не содержится в $A \cup \Upsilon(A)$ и

$$n < \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot (e_2 - e_2') + \ldots + \alpha_p \cdot (e_p - e_p'), \qquad (4.9)$$

где $p = |T^*(A)|$; e_1 — число новых дуг; e_s, $s > 1$, — число новых пар вершин (a, b), связанных лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s и такими, что никакой кратчайший (a, b)-маршрут не содержит $\mathcal{A}_m$-внешних $\mathcal{A}_m$-принудительных развилок; e_s' — число пар вершин (a, b), учтенных при подсчете Δ_i, которые перестают быть связанными лишь внешними кратчайшими маршрутами длины s в расширенном относительно $\mathcal{A}_i$ сс-подграфе сс-графа $\mathcal{A}_m$.

В дальнейшем будем считать, что к записи $W_{\mathcal{A}}$ каждого сс-графа $\mathcal{A}$ присоединена информация о (не)возможности расширения $\mathcal{A}$ с помощью менее чем $n_{\mathcal{A}}$ новых вершин до получения значения $y(\cdot)$, неуменьшаемого при расширениях. Тем самым, к типу, описывающему положение $\mathcal{A}$ относительно внешних элементов, добавлена полная информация о минимальных самодостаточных расширениях $\mathcal{A}$, включающая информацию о принудительных развилках.

Непосредственно из определения вытекает

Лемма 4.3.7. 1. *Если $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$.*

2. *Если $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^f$ и $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{B} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$, то $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$.*

3. *Пустой граф $\varnothing$ является наименьшим элементом системы $(\mathbf{K}_0^f; \leqslant_{\mathrm{cc}})$.*

Лемма 4.3.8. *Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^f$, $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$ и $\mathcal{C} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют некоторые $n_1, \ldots, n_m$ новых элементов из $(\Upsilon(C)$, для которых выполняется неравенство

$$n_1 + \ldots + n_m < \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot (e_2 - e_2') + \ldots + \alpha_p \cdot (e_p - e_p'),$$

где $p = |T^*(A)|$, и e_s, e_s' — значения, о которых идет речь в неравенстве (4.9). Поскольку все новые элементы лежат в $\Upsilon(B)$, они будут нарушать условие $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$. □

Лемма 4.3.9. *Отношение $\leqslant_{\mathrm{cc}}$ является частичным порядком на классе $\mathbf{K}_0^f$.*

Доказательство. Рефлексивность и антисимметричность отношения $\leqslant_{\mathrm{cc}}$ очевидны.

Покажем, что отношение $\leqslant_{\mathrm{cc}}$ транзитивно. Предположим противное и рассмотрим cc-графы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}_0^f$, для которых $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$, но $\mathcal{A} \not\leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$. По предположению найдется часть $\mathcal{A}'$ cc-графа $\mathcal{A}$ и ее расширение $\mathcal{C}'$, являющееся частью cc-графа $\mathcal{C}$ и не являющееся частью cc-графа $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_m = \mathcal{C}'$ и $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m < 0$. Поскольку $\mathcal{A}'$ является частью cc-графа $\mathcal{B}$, последнее неравенство противоречит самодостаточности $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$. □

Лемма 4.3.10. *Для любого* cc*-подграфа $\mathcal{A}$ графа $\mathcal{M}$ из класса $\mathbf{K}^f$ существует наименьший* cc*-граф $\overline{\mathcal{A}}$, содержащий $\mathcal{A}$ и являющийся самодостаточным* cc*-подграфом графа $\mathcal{M}$. При этом $|\overline{A}| < k_{|T^*(A)|}$, каждая вершина из $T(\overline{A}) \setminus \Upsilon(A)$ имеет степень, не меньшую двух, и принадлежит $J_0 \cup J_1$.*

Доказательство. Существование самодостаточных расширений cc-графа $\mathcal{A}$ в графе $\mathcal{M}$ вытекает из определения класса $\mathbf{K}^f$, а именно, из неравенств $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}') \geq b_n^p$, где $\mathcal{A}'$ — части cc-графа $\mathcal{A}$ с носителями A. Из этих же неравенств следует наличие верхней мощностной оценки $k_{|T^*(A)|}$ для минимальных самодостаточных расширений $\mathcal{A}$. По лемме 4.3.8 пересечение любых двух таких самодостаточных расширений также будет самодостаточным cc-подграфом графа $\mathcal{M}$, содержащим $\mathcal{A}$. Это означает, что существует наименьшее самодостаточное расширение cc-графа $\mathcal{A}$, совпадающее с самодостаточным замыканием $\overline{\mathcal{A}}$.

Степень каждой вершины из $T(\overline{\mathcal{A}}) \setminus \Upsilon(A)$ не меньше двух в силу минимальности самодостаточного расширения $\overline{\mathcal{A}}$. Условие $T(\overline{A}) \setminus \Upsilon(A) \subseteq J_0 \cup J_1$ вытекает из того, что удаление любой промежуточной вершины a степени 2 уменьшает значение предранговой функции на положительную величину $1-\alpha_s+\alpha_{s_1}+\alpha_{s_2}$, где $s = s_1 + s_2$ — длина внешнего (после удаления вершины a) кратчайшего маршрута, содержащего вершину a. Таким образом, никакая новая промежуточная вершина a не попадает в надмножество множества A с наименьшим значением $y(\cdot)$. $\square$

На основании леммы 4.3.10 мы вправе к каждому cc-графу $\mathcal{A}$ из класса $\mathbf{K}_0^f$ добавить информацию о его *самодостаточном замыкании* $\overline{\mathcal{A}}$ в некотором графе $\mathcal{M} \in \mathbf{K}^f$. Такое добавление, очевидно, неоднозначно (зависит от выбора графа $\mathcal{M}$) и порождает для каждого cc-графа конечное число вариантов типов c-изоморфизма его самодостаточных замыканий. Это число определяется вариантами распределения длин кратчайших маршрутов среди менее чем $k_{|T^*(A)|}$ элементов, составляющих носители типов c-изоморфизма самодостаточных замыканий. cc-Графы, совпадающие со своими самодостаточными замыканиями будем называть *самодостаточными* cc-*графами*.

В дальнейшем будем считать, что к записи W каждого cc-графа добавлена информация о его самодостаточном замыкании и при рассмотрении расширений и ограничений cc-графов эта информация соответствующим образом наследуется.

Разнозначное отображение $f : A \to B$ называется cc-*вложением* cc-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q_{\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}} \rangle$ в cc-граф $\mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}} \rangle$ (обозначается $f : \mathcal{A} \to_{\rm cc} \mathcal{B}$), если f — вложение c-графа, который получается из $\mathcal{A}$ ограничением записи $W_{\mathcal{A}}$ до c-графовой, в c-граф, который получается из $\mathcal{B}$ ограничением записи $W_{\mathcal{B}}$ до c-графовой, и такой, что ограничение записи $W_{\mathcal{B}}$ на множество $f(A)$ совпадает с подстановкой в запись $W_{\mathcal{A}}$ элементов из $f(A)$ вместо соответствующих элементов A.

cc-Графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются cc-*изоморфными*, если существует cc-вложение $f : \mathcal{A} \to_{\rm cc} \mathcal{B}$ с условием $f(A) = B$. При этом отображение f называется cc-*изоморфизмом* между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а cc-графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — cc-*изоморфными копиями*.

Разнозначное отображение $f : A \to N$ называется cc-*вложением* cc-графа $\mathcal{A}$ в орграф $\mathcal{N}$ (обозначается $f : \mathcal{A} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{N}$), если f — cc-вложение cc-графа $\mathcal{A}$ в cc-подграф $f(\mathcal{A})$ орграфа $\mathcal{N}$, имеющий носитель $f(A)$.

cc-Вложение f cc-графа $\mathcal{A}$ в cc-граф $\mathcal{B}$ называется *сильным*, если $f(\mathcal{A}) \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}} \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle C, Q_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}} \rangle$ — самодостаточные cc-графы, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. *Свободной* cc-*амальгамой* cc-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемой через $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$) называется самодостаточный cc-граф $\langle B \cup C, Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}} \cup W \rangle$, где W — запись о самодостаточности получаемого cc-графа.

Заметим, что по определению любая свободная cc-амальгама является cf-замкнутой.

Лемма 4.3.11. (*амальгамационная лемма*). *Класс* $\mathbf{K}_0^f$ *удовлетворяет* cc-*амальгамационному свойству* cc-(AP)*, т. е. для любых сильных* cc-*вложений* $f_0 : \mathcal{A} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$ *и* $g_0 : \mathcal{A} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$*, где* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ *— самодостаточные* cc-*графы из класса* $\mathbf{K}_0^f$*, существует самодостаточный* cc-*граф* $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^f$ *и сильные* cc-*вложения* $f_1 : \mathcal{B} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{D}$ *и* $g_1 : \mathcal{C} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{D}$*, для которых* $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Покажем, что cc-граф $\mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ является искомым. Для этого, в силу симметричности определения свободной cc-амальгамы, достаточно установить $\mathcal{B} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \in \mathbf{K}_0^f$.

Предположим, что $\mathcal{B} \not\leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{D}$. Тогда существуют некоторые $n_1, \ldots, n_m$ новых элементов из $\Upsilon(D)$, не все из которых лежат в $\Upsilon(B)$ и выполняется неравенство

$$n_1 + \ldots + n_m < \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot (e_2 - e_2') + \ldots + \alpha_p \cdot (e_p - e_p'),$$

где $p = |T^*(B)|$, и e_s, e_s' — значения, о которых идет речь в неравенстве (4.9). Поскольку элементы, опровергающие условие самодостаточности $\mathcal{B}$ в $\mathcal{D}$, лежат в $\Upsilon(C)$, эти элементы при расширении множества элементов из $\mathcal{A}$, через которые элементы из $B \setminus A$ связываются с новыми элементами из C, в силу условия $(*)$ будут нарушать условие $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$.

Действительно, если какие-то маршруты, связывающие элементы из B с элементами из $C \setminus A$, содержат принудительные развилки, то соответствующие связи при подсчете Δ_i не учитываются. Поэтому без ограничения общности можно считать, что кратчайшие маршруты S, связывающие элементы $a \in B \setminus A$ и $b \in C \setminus A$, не содержат принудительных развилок. Предположим теперь, что некоторое значение $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m$ отрицательно после добавления к некоторому множеству $B' \subseteq B$ элементов из $C \setminus A$.

По определению свободной амальгамы для каждой пары вершин $(a, a') \in B \times (C \setminus A)$, связанных лишь внешними над $B' \cup (C \setminus A)$ кратчайшими маршрутами, выполняется одно из следующих условий:

1) a принадлежит A;

2) a не принадлежит A и некоторый внешний над $B' \cup (C \setminus A)$ кратчайший (a, a')- или (a', a)-маршрут содержит промежуточную вершину из A.

Обозначим через A' множество всех промежуточных вершин из A, о которых идет речь в условии 2. После добавления к B' множества A' и соответствующих связей отрицательная часть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e_k$ значения $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m$ в силу условия $(*)$ увеличится, а положительная часть останется прежней, поскольку указанное минимальное добавление связей с элементами из $C \setminus A$ к частям cc-графа $\mathcal{D}$ сохраняет неразвилочность вершин. Тогда для множества $(B' \cap A) \cup A'$ некоторое значение $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m$ после добавления элементов из $C \setminus A$ также окажется отрицательным. Последнее противоречит самодостаточности $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}$.

Покажем теперь, что каждый cc-граф $\mathcal{D}$ принадлежит классу $\mathbf{K}_0^f$. Для этого нужно установить, что $y_p^{\Delta}(\mathcal{E}) \geq b_n^p$, где $\mathcal{E} \sqsubseteq \mathcal{D}$, n — натуральное число, для которого $y_p^{\Delta}(\mathcal{E}) = n - s \cdot \alpha_1$ при некотором $s \in \omega$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Обозначим через $\mathcal{E}_1$ cc-граф $\mathcal{E} \upharpoonright B$, через $\mathcal{E}_2$ — cc-граф $\mathcal{E} \upharpoonright C$, через $\mathcal{E}_3$ — cc-граф $\mathcal{E} \upharpoonright A$. Предположим для определенности, что для значений $y_r^{\Delta}(\mathcal{E}_1) = l_1 - s_1 \cdot \alpha_1$ и $y_q^{\Delta}(\mathcal{E}_2) = l_2 - s_2 \cdot \alpha_1$, $k_r \leq l_1 < k_{r+1}$, $k_q \leq l_2 < k_{q+1}$, соответствующих значению $y_p^{\Delta}(\mathcal{E})$, выполняется $l_1 \leq l_2$, и без ограничения общности будем считать, что $E_1 \nsubseteq A$ и $E_2 \nsubseteq A$. Заметим, что значения $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m$ не могут быть отрицательными (т. е. оказываются положительными) при добавлении к $\mathcal{E}_2$ элементов из $E_1 \setminus E_3$. В силу леммы 4.3.5, п. 2 положительны и соответствующие значения $\Delta_1^q + \ldots + \Delta_m^q$. На основании леммы 4.1.1, п. 3 заключаем

$$\mathrm{sl}((l_2, y_q^{\Delta}(\mathcal{E}_2)), (n, y_q^{\Delta}(\mathcal{E}))) \geq \mathrm{sl}((l_2, b_{l_2}^q), (n, b_n^q)). \qquad (4.10)$$

Из принадлежности cc-графа $\mathcal{E}_2$ классу $\mathbf{K}_0^f$ следует, что точка $(l_2, y_q^{\Delta}(\mathcal{E}_2))$ находится выше точки $(l_2, b_{l_2}^q)$. Тогда на основании неравенства (4.10) заключаем, что точка $(n, y_q^{\Delta}(\mathcal{E}))$ находится выше точки $(n,\, b_n^q)$, т. е. $y_q^{\Delta}(\mathcal{E}) \geq b_n^q$.

Если $p = q$, то требуемое неравенство $y_p^{\Delta}(\mathcal{E}) \geq b_n^p$ установлено. В противном случае, т. е. если $q < p$, $y_p^{\Delta}(\mathcal{E})$ будет отличаться от $y_q^{\Delta}(\mathcal{E})$ меньше, чем на $\alpha_{q+1} \cdot k_{q+1} \cdot (k_{q+1} - 1) < 2\varepsilon_{q+1}$, поскольку $\mathcal{E}$ содержит в сумме менее $k_{q+1} \cdot (k_{q+1} - 1)$ дуг и записей о кратчайших Q-маршрутах. В силу леммы 4.1.1, п. 4 заключаем, что $y_p^{\Delta}(\mathcal{E}) \geq b_n^p$. $\square$

На основании лемм 4.3.7–4.3.11 справедливо

Следствие 4.3.12. *Класс* $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant'_{\mathrm{cc}})$ *самодостаточен.*

Обозначим $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant'_{\mathrm{cc}})$-генерическую теорию через T^f.

Покажем, что после добавления к каждому самодостаточному типу $\overline{\Phi}(\overline{A}) \in \mathbf{T}_0^f$ некоторой формулы $\chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, для которой $(T^f, \overline{A}) \vdash \chi_{\overline{\Phi}}(\overline{A})$, получается самодостаточный класс $(\mathbf{T}_0; \leqslant''_{\mathrm{cc}})$, обладающий свойством однородного t-амальгамирования.

Действительно, на основании замечания 4.3.6 для любого cc-графа $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^f$ мощности p и любого графа $\mathcal{M} \models T^f$, $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$, условие $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$ равносильно выполнению условий $\Delta_1^p + \ldots + \Delta_m^p > 0$ при расширении подмножеств множества A элементами, совокупность которых не содержится в A. Поскольку проверка этих условий рассматривается лишь для расширений мощности, не превосходящей $n_{\mathcal{A}}$[7], и предполагает лишь подсчет связей по отношениям $Q^1, \ldots, Q^p$, условие самодостаточности $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$ выразимо некоторой формулой $\chi_{\mathcal{A}}(X)$ графовой сигнатуры $\{Q\}$, где множество переменных X биективно с множеством A.

[7]При этом верхняя оценка для мощностей расширений зависит лишь от удвоенной мощности множества A.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — cc-графы из класса $\mathbf{K}_0^f$, $\mathcal{M}$ — генерическая модель теории T^f, $\mathcal{A} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{B} \leqslant_{\mathrm{cc}} \mathcal{M}$. Обозначим через $\psi_{\mathcal{A},s}(X)$ (соответственно $\psi_{\mathcal{B},s}(X,Y)$) формулу, описывающую $\{Q^1,\ldots,Q^s\}$-тип графа $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$), где X и Y — непересекающиеся множества переменных, биективные с множествами A и $B \setminus A$. Тогда для любого $s \geq |T(B)|$ в модели $\mathcal{M}$ истинна следующая формула:

$$\forall X\ ((\chi_{\mathcal{A}}(X) \wedge \psi_{\mathcal{A},s}(X)) \to \exists Y\ (\chi_{\mathcal{B}}(X,Y) \wedge \psi_{\mathcal{B},s}(X,Y)))\,.$$

Из последнего соотношения вытекает свойство однородного t-амальгамирования для класса $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant''_{\mathrm{cc}})$, который получается из класса $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant'_{\mathrm{cc}})$ добавлением к типам формул, устанавливающих мощностные границы и $\{Q^1,\ldots,Q^p\}$-структуры самодостаточных замыканий, а также формул $\chi_{\mathcal{A}}(A)$ к типам самодостаточных множеств A.

Поскольку в силу леммы 4.3.10 имеются конечные замыкания у любых конечных множеств моделей теории T^f, на основании теоремы 2.5.1 справедлива следующая

Теорема 4.3.13. $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant''_{\mathrm{cc}})$-*Генерическая модель* $\mathcal{M}$ *насыщена. При этом любое конечное множество* $A \subseteq M$ *расширяется до своего самодостаточного замыкания* $\overline{A} \subseteq M$, *и тип* $\mathrm{tp}_X(\overline{A})$ *выводится из множества* $[\Phi(\overline{A})]_X^{\overline{A}}$, *где* $\Phi(\overline{A})$ *— тип из* $\mathbf{T}_0^f$, *для которого* $\mathcal{M} \models \Phi(\overline{A})$.

Пусть $\mathcal{N}$ — ω-насыщенная модель теории T^f.

Предложение 4.3.14. *Для любого конечного множества* A *из модели* $\mathcal{N}$ *справедливо соотношение* $\mathrm{acl}(A) = \overline{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\mathrm{acl}(A) \supseteq \overline{A}$ вытекает из единственности $\overline{A}$ в любом элементарном расширении модели $\mathcal{N}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $b \in N \setminus \overline{A}$ и покажем, что $b \notin \mathrm{acl}(A)$. Обозначим через B некоторый самодостаточный cc-подграф $\mathcal{N}$ такой, что $\overline{A} \cup \{b\} \subseteq B$ и для каждой вершины из $B_f \cap A$ к $\mathcal{A}$ добавлены вершины степени 1 с тем, чтобы в полученном самодостаточном cc-графе $\mathcal{A}'$ было справедливо $A'_f = B_f \cap A$ и $b \notin A'$. В силу конструкции генерической модели существует бесконечное число cc-изоморфных попарно непересекающихся копий множества $B \setminus A'$ над множеством A', т. е. $b \notin \mathrm{acl}(A)$. Таким образом, $\mathrm{acl}(A) \subseteq \overline{A}$. $\square$

4. Стабильность генерической теории. Схема доказательства стабильности генерической теории T^f будет несколько отличаться от схемы доказательства стабильности генерических теорий из параграфов 4.1 и 4.2, поскольку специфика представленной в предыдущем пункте генерической конструкции порождает структуру, набор свойств которой не позволяет использовать стандартные рассуждения из работы Дж. Болдуина и Н. Ши [72]. В частности, мы не будем определять и использовать в качестве инструмента доказательства аналоги ранговых функций (эти аналоги не обладают, например, свойством монотонности), а проведем непосредственный анализ насыщенной модели, позволяющий установить счетную отделимость (счетную базируемость) конечных множеств от заданных замкнутых множеств и, как следствие, найти верхнюю оценку числа типов над множеством, обеспечивающую стабильность теории T^f.

Зафиксируем некоторую достаточно насыщенную модель $\mathcal{N}$ теории T^f. В дальнейшем все рассматриваемые сс-графы $\mathcal{A}$ будут считаться частями сс-подграфов $\mathcal{N}$, а все рассматриваемые множества — подмножествами N. При этом самодостаточные (в $\mathcal{N}$) сс-графы $\mathcal{A}$ также будут обозначаться своими носителями A, а сами носители A будут называться *самодостаточными множествами.*

Множество $X \subseteq N$ называется *замкнутым* (в модели $\mathcal{N}$) (обозначается $X \leqslant N$), если для любого конечного множества $A \subseteq X$ выполняется $\overline{A} \subseteq X$, т. е. в $T(N) \setminus \Upsilon(X)$ нет каких-либо n новых элементов, для которых выполняется неравенство (4.9).

Лемма 4.3.15. *Пусть X и Y — множества из модели $\mathcal{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $X \leqslant N$ и $Y \leqslant N$, то $X \cap Y \leqslant N$;*

2) *существует наименьшее замкнутое множество $\overline{X} \supseteq X$; при этом выполняются соотношения $\overline{X} = \bigcup\{\overline{A} \mid A \subseteq_{\rm fin} X\}$ и $\overline{X} = \mathrm{acl}(X)$;*

3) *если $X \subset Y$, то $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.*

Множество $\overline{X}$ называется *внутренним замыканием* множества X (в модели $\mathcal{N}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство леммы 4.1.13. □

Множество V (в модели $\mathcal{N}$) называется *свободной* сс-*амальгамой* замкнутых множеств X и Y над множеством Z и обозначается $X *_Z Y$, если $X \cup Y = V$, $X \cap Y = Z$ и нет пар вершин

$(a, b) \in V^2 \setminus (X^2 \cup Y^2)$, связанных дугами или лишь внешними над V кратчайшими маршрутами.

Будем говорить, что множества X и Y *независимы* над Z и писать $X \downarrow_Z Y$, если $X' \cap Y' = \overline{Z}$, $X' \cup Y' = X' *_{\overline{Z}} Y'$ и $X' \cup Y' \leqslant N$, где $X' = \overline{X \cup Z}$ и $Y' = \overline{Y \cup Z}$.

Лемма 4.3.16. *Если X — самодостаточное множество, Y — замкнутое множество, $Z = (\overline{X \cup Z}) \cap Y$ и $X \downarrow_Z Y$, то тип* $\mathrm{tp}(X/Y)$ *однозначно определяется типом* $\mathrm{tp}(X/Z)$*, описанием замкнутости множества $(\overline{X \cup Z}) \cup Y$ и типом, описывающим совпадение $(\overline{X \cup Z}) \cup Y$ со свободной* сс*-амальгамой $X *_Z Y$.*

Доказательство. В силу конструкции генерической модели очевидно, что при рассмотрении двух полных типов $q_1(X)$ и $q_2(X)$ над множеством Y, содержащих тип $\mathrm{tp}(X/Z)$, описание замкнутости множества $(\overline{X \cup Z}) \cup Y$ и тип, описывающий совпадение $(\overline{X \cup Z}) \cup Y$ со свободной амальгамой $X *_Z Y$, существует автоморфизм $|Y|^+$-насыщенной модели, переводящий реализацию типа $q_1(X)$ в реализацию типа $q_2(X)$. □

Лемма 4.3.17. *Если X — замкнутое множество, a — элемент модели $\mathcal{N}$, не принадлежащий X, то существует не более чем счетное замкнутое подмножество $X' \subseteq X$ такое, что $\{a\} \downarrow_{X'} X$.*

Доказательство. Заметим сначала, что элемент a связан дугами или лишь внешними над X кратчайшими маршрутами не более чем со счетным числом элементов из X. Действительно, предполагая что таких элементов несчетно, найдется несчетное число элементов из X, связанных с a дугами или лишь внешними кратчайшими маршрутами одной и той же длины, и при этом элемент a является либо общим началом, либо общим концом всех этих маршрутов. Однако превышение числа маршрутов определенной длины над их соответствующим весом α_k означает, что элемент a попадает в замыкание выбранных элементов из X, а это невозможно, поскольку множество X замкнуто и $a \notin X$. Приведенное рассуждение показывает также, что любое не более чем счетное множество, не пересекающееся с X, также имеет не более чем счетное число связей с X посредством дуг и лишь внешних кратчайших маршрутов.

Предположим, что искомого множества X' не существует. Тогда найдется несчетное множество попарно различных конечных замкнутых подмножеств $X_i \subseteq X$, для которых самодостаточные замыкания $\overline{X_i \cup \{a\}}$ не содержатся в $X \cup \{a\}$ и некоторые элементы из $\overline{X_i \cup \{a\}} \setminus X$ связаны с X_i попарно различными (относительно i) дугами или лишь внешними кратчайшими маршрутами. При этом без ограничения общности можно считать, что множества $\overline{X_i \cup \{a\}}$ образуют сс-изоморфные сс-графы, у которых все соответствующие (относительно i) элементы либо совпадают (*неподвижны*), либо попарно различны (*подвижны*). По определению самодостаточного замыкания, множества X_i имеют минимальные по включению подмножества X'_i, для которых некоторые расширения $X'_i \cup \{a\}$ в $\overline{X_i \cup \{a\}}$ имеют превышение числа новых связей над числом новых элементов в соответствии с неравенством (4.9), т. е. отрицательны некоторые суммы $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m$, получаемые при расширениях множеств $X'_i \cup \{a\}$ элементами, не лежащими в X. Снова в силу невозможности выбора счетного числа множеств X'_i можно считать, что множества $\overline{X'_i \cup \{a\}}$ попарно различны и образуют сс-изоморфные сс-графы. Тем самым суммы $\Delta \rightleftharpoons \Delta_1 + \ldots + \Delta_m$ можно считать одинаковыми для всех множеств X'_i.

Если суммы Δ можно получить с помощью лишь неподвижных элементов $a_1, \ldots, a_k$ из $\overline{X_i \cup \{a\}} \setminus X$, то в силу сс-изоморфности множеств $\overline{X_i \cup \{a\}}$ можно выбрать n множеств X'_i с условием превышения взвешенного числа связей между элементами из X'_i и неподвижными элементами более чем на $2 \cdot k + 1$. Указанный выбор обеспечивает попадание в самодостаточное замыкание объединения этих множеств X_i не только элементов $a_1, \ldots, a_k$, но и элемента a, что противоречит условию $a \notin X$.

Если же отрицательные суммы Δ достигаются лишь добавлением соответствующих подвижных элементов из $\overline{X_i \cup \{a\}} \setminus X$, то выберем n множеств X_i, где $n \cdot \alpha > 2$, α — наименьший вес кратчайших маршрутов, участвующих в подсчете Δ для подвижных вершин. Добавляя к объединению этих множеств X_i неподвижные элементы b_{ij} из $\overline{X_i \cup \{a\}} \setminus X$, а также подвижные элементы c_{ik} из $\overline{X_i \cup \{a\}} \setminus X$, связывая дугами или лишь внешними кратчайшими маршрутами элементы из $\overline{X_i \cup \{a\}}$, соответствующие сумме Δ, и не связывая дугами и внешними кратчайшими маршрутами подвижные элементы из разных множеств $\overline{X_i \cup \{a\}} \setminus X$, получаем сс-граф (являющийся свободной амальгамой над множеством некоторых элементов из X и неподвижных элементов, включая элемент a), который будет давать отрицательную сумму $\Delta'_1 + \ldots + \Delta'_{m'}$ при добавлении к объединению выбранных n множеств X_i не только элементов b_{ij}, c_{ik}, но и элемента a. Последнее снова противоречит тому, что элемент a не принадлежит замкнутому множеству X.

Таким образом, указанного несчетного семейства конечных множеств X_i не существует, а искомое множество X' можно выбрать как пересечение с множеством X замыкания Y объединения не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств X_i, к которым присоединен элемент a, а также всевозможные элементы из X, с которыми элементы из $Y \setminus X$ связаны дугами или лишь внешними кратчайшими маршрутами. $\square$

Теорема 4.3.18. *Теория T^f стабильна, мала и имеет единственный 1-тип. Вес этого типа бесконечен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Малость теории T^f вытекает из теоремы 4.3.13. Для доказательства стабильности теории T^f найдем оценку числа 1-типов из $S(N)$, где $\mathcal{N}$ — некоторая модель теории T^f. Рассмотрим произвольный элемент a. По лемме 4.3.17 существует не более чем счетное замкнутое множество $X \subseteq N$ такое, что $\overline{\{a\} \cup X} \cap N = X$ и $\{a\} \downarrow_X N$. По лемме 4.3.16 тип $\mathrm{tp}(a/N)$ определяется типом $\mathrm{tp}(a/X)$, описанием замкнутости множества $\overline{\{a\} \cup X} \cup N$ и типом, описывающим совпадение $\overline{\{a\} \cup X \cup N}$ со свободной амальгамой $\overline{\{a\} \cup X} *_X N$. Таким образом, для подсчета числа типов из $S(N)$ достаточно посчитать число типов из $S(X)$ и число выборов счетных множеств X из N. Тогда

$$|S(N)| \leq 2^{\omega} \cdot |N|^{\omega} = |N|^{\omega}.$$

Следовательно, теория T^f стабильна.

По построению каждое одноэлементное множество $\{a\}$ самодостаточно. По теореме 4.3.13 это означает, что существует единственный 1-тип теории T^f. Пусть $\mathcal{A}$ — cc-граф с носителем $\{a\}$, $A_p = \{a, b_p\}$ — носитель двухэлементного самодостаточного cc-графа $\mathcal{A}_p$, содержащего Q^p-дугу между a и b_p. Положим $\mathcal{B}_1 \rightleftharpoons \mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_{p+1} \rightleftharpoons \mathcal{B}_p *_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{p+1}$, $\mathcal{B} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{p \in \omega \setminus \{0\}} \mathcal{B}_p$. По построению $\mathcal{B}$ образует замкнутое множество в некоторой генерической модели $\mathcal{M}$ теории T^f. Поскольку $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p+1} < 1$ и $\{b_1, \ldots, b_{p+1}\} \leqslant_{\mathrm{cc}} \{a, b_1, \ldots, b_{p+1}\} \leqslant_{\mathrm{cc}} B \leqslant M$, справедливо $\{b_{p+1}\} \downarrow_{\varnothing} \{b_1, \ldots, b_p\}$. Таким образом, $(b_p)_{p \in \omega \setminus \{0\}}$ — бесконечная независимая последовательность элементов, где каждый элемент b_p зависим с элементом a. $\square$

Поскольку $\alpha_1 < \frac{1}{2}$, любые два элемента a и b связаны через некоторый элемент c так, что aQc и bQc, а также через некоторый элемент d так, что dQa и dQb. Таким образом, любая модель теории T^f обладает свойством попарного пересечения.

Из единственности 1-типа вытекает транзитивность группы автоморфизмов любой однородной модели теории T^f.

Из самодостаточности любого двухэлементного множества $\{a, b\}$, где aQb, на основании теоремы 4.3.13 получаем, что $Q(x, y)$ — главная формула теории T^f.

Поскольку для любого элемента a модели $\mathcal{M}$ теории T^f в силу предложения 4.3.14 справедливо $\mathrm{acl}(\{a\}) = \{a\}$, имеет место равенство

$$\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup_{n\in\omega} Q^n(\mathcal{M}, a) = \{a\}.$$

Сопоставляя указанные свойства с определением властного орграфа и учитывая теорему 4.3.18, получаем следующую теорему.

Теорема 4.3.19. *Генерическая модель теории T_f является малым стабильным властным орграфом.*

В следующих двух утверждениях проясняется структура простых моделей $\mathcal{M}_A$ над конечными множествами A.

Лемма 4.3.20. *Если A и B — самодостаточные множества в модели $\mathcal{N}$ и $A \leqslant_{\mathrm{cc}} B$, то тип $\mathrm{tp}(B/A)$ изолирован тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — полный $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^k$-граф над $\mathcal{A}$, т. е. любые два различных элемента $a \in B$ и $b \in B \setminus A$ связаны некоторой Q^k-дугой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y — множество переменных, биективное с множеством $B \setminus A$. Если $\mathcal{B}$ — полный $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^k$-граф над $\mathcal{A}$, то по теореме 4.3.13 тип $\mathrm{tp}((B \setminus A)/A)$ изолируется главной формулой типа $\Phi(A, Y)$, где $\Phi(B)$ — тип из $\mathbf{T}_0^f$, для которого $\mathcal{N} \models \Phi(B)$. Эта формула существует в силу формульности условия самодостаточности и конечности записи о существовании кратчайших маршрутов между элементами. Если же $\mathcal{B}$ не является полным $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^k$-графом над $\mathcal{A}$, то по теореме 4.3.13 тип

$\mathrm{tp}((B \setminus A)/A)$ изолируется типом $\Phi(A, Y)$, но не изолируется никакой конечной частью этого множества. $\square$

Из леммы 4.3.20 вытекает

Следствие 4.3.21. *Пусть A — самодостаточное множество в модели $\mathcal{N}$. Модель $\mathcal{M}_A$ является полным $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^k$-графом над A. Множество типов изоморфизма простых моделей над конечными множествами совпадает с множеством типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_A$, где A — самодостаточные множества.*

5. Властные орграфы с почти несущественными упорядоченными раскрасками. Приведенное выше построение стабильных генерических властных орграфов допускает следующую модификацию. Рассмотрим класс $\mathbf{K}_0^f$ и обогатим каждый cc-граф $\mathcal{A}$ из этого класса всевозможными раскрасками $\mathrm{Col} : A \to \omega \cup \{\infty\}$ такими, что если вершины $a, a' \in A$ связаны (a, a')-маршрутом, то $\mathrm{Col}(a) \leq \mathrm{Col}(a')$. Полученный расширенный класс обозначим через $\hat{\mathbf{K}}_0^f$. Заметим, что при этом каждому непустому cc-графу соответствует счетное число вариантов раскраски его вершин.

Учитывая бесконтурность cc-графов, замечаем, что свободные амальгамы самодостаточных cc-графов из класса $\hat{\mathbf{K}}_0^f$ также являются самодостаточными cc-графами из класса $\hat{\mathbf{K}}_0^f$, и в силу леммы 4.3.11 справедлива следующая

Лемма 4.3.22. (*амальгамационная лемма*). *Класс $\hat{\mathbf{K}}_0^f$ удовлетворяет* cc-*амальгамационному свойству* cc-(AP)*, т. е. для любых сильных* cc-*вложений $f_0 : \mathcal{A} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{B}$ и $g_0 : \mathcal{A} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{C}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ — самодостаточные* cc-*графы из класса $\hat{\mathbf{K}}_0^f$, существует самодостаточный* cc-*граф $\mathcal{D} \in \hat{\mathbf{K}}_0^f$ и сильные* cc-*вложения $f_1 : \mathcal{B} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{D}$ и $g_1 : \mathcal{C} \to_{\mathrm{cc}} \mathcal{D}$, для которых $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.*

Тем самым, генерическая конструкция приводит к построению генерического стабильного насыщенного властного орграфа Γ^{cpg}, в котором раскраска его элементов Q-упорядочена. При этом тип любого самодостаточного множества A определяется формулой, описывающей его самодостаточность, множеством формул, описывающих наличие или отсутствие маршрутов между элементами, а также формулами, описывающими цвета элементов. Поскольку при графовом обеднении сохранение информации о взаимосвязи элементов самодостаточных множеств означает совпадение их полных типов, раскраска графа $\Gamma^{\rm cpg}$ почти несущественна.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4.3.23. *Существует малый стабильный генерический властный орграф* $\Gamma = \langle X, Q\rangle$ *с почти несущественной* Q*-упорядоченной раскраской.*

Обозначим теорию генерического властного орграфа $\Gamma^{\rm cpg}$ с почти несущественной упорядоченной раскраской через $T^{\rm cpg}$.

Комбинируя доказательство теоремы 3.1.7 и леммы 4.3.20, получаем следующую теорему, в которой описываются типы, реализуемые в простой модели теории $T^{\rm cpg}$, а также в простой модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ над реализацией типа $p_\infty(x)$ элементов, имеющих бесконечный цвет.

Теорема 4.3.24. 1. *Тип* q *теории* $T^{\rm cpg}$ *является главным тогда и только тогда, когда любые два различных элемента* a_i *и* a_j *из любой реализации* $\overline{a}$ *типа* q *соединены некоторым* (a_i, a_j)*-маршрутом или* (a_j, a_i)*-маршрутом, и все элементы реализаций типа* q *имеют конечные цвета.*

2. *Тип* q *теории* $T^{\rm cpg}$ *реализуется в модели* $\mathcal{M}_{p_\infty}$ *тогда и только тогда, когда для любой реализации* $\overline{a}$ *типа* q *любые два ее различных элемента* a_i *и* a_j *соединены некоторым* (a_i, a_j)*-маршрутом или* (a_j, a_i)*-маршрутом и выполняются следующее условие: если среди элементов кортежа* $\overline{a}$ *есть элементы конечного цвета,* a_f *— элемент конечного цвета, являющийся общим концом маршрутов, связывающих все элементы конечных цветов с элементом* a_f*, и если среди элементов кортежа* $\overline{a}$ *есть элементы бесконечного цвета,* a_∞ *— элемент бесконечного цвета, являющийся общим началом маршрутов, связывающих все элементы бесконечного цвета с элементом* a_∞*, то существует* (a_f, a_∞)*-маршрут.*

§ 4.4. Об обогащениях властных орграфов

В этом параграфе исследуется возможность обогащения структуры стабильного властного орграфа до структуры стабильной эренфойхтовой теории.

Мы покажем, что простейший вид обогащения, предложенный в третьей главе, — обогащение 1-несущественной упорядоченной раскраской и локально графово $\exists$-определимыми многоместными отношениями, позволяющими взаимно реализовывать неглавные типы, — не способен сохранить структуру в классе стабильных структур: 1-несущественная упорядоченная раскраска с локально графово $\exists$-определимыми отношениями, взаимореализующими неглавные типы, влечет существование формулы с двумя свободными переменными, обладающей свойством строгого порядка.

1. Ти́пово нестабильные теории. Следующие понятия обобщают соответствующие понятия теории классификаций [10], [26].

Пусть $q(\overline{x}, \overline{y})$ — некоторый (не обязательно полный) тип теории T, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — непересекающиеся наборы переменных, $\mathcal{M}$ — некоторая счетно насыщенная модель теории T.

Тип $q(\overline{x}, \overline{y})$ называется *нестабильным*, или типом, имеющим *свойства порядка*, если существуют кортежи $\overline{a}_n$, $\overline{b}_n$, $n \in \omega$, для которых выполняется $\models q(\overline{a}_i, \overline{b}_j) \Leftrightarrow i \leq j$.

Будем говорить, что тип $q(\overline{x}, \overline{y})$ имеет *свойство независимости*, если существуют кортежи $\overline{a}_n$, $n \in \omega$, такие, что для любого множества $w \subseteq \omega$ существует кортеж $\overline{b}_w$, для которого выполняется $\models q(\overline{a}_n, \overline{b}_w) \Leftrightarrow n \in w$.

Тип $q(\overline{x}, \overline{y})$ имеет *свойство строгого порядка*, если существуют кортежи $\overline{a}_n$, $n \in \omega$, такие, что $q(\overline{a}_n, \mathcal{M}) \supsetneqq q(\overline{a}_{n+1}, \mathcal{M})$ для всех $n \in \omega$.

Теория T называется *ти́пово стабильной*, если T не имеет нестабильных типов $q(\overline{x}, \overline{y})$. Теория T называется *ти́пово нестабильной* или имеющей *ти́повое свойство порядка*, *ти́повое свойство независимости* или *ти́повое свойство строгого порядка*, если соответствующее свойство имеет некоторый тип $q(\overline{x}, \overline{y})$ теории T.

Ясно, что свойства порядка, независимости и строгого порядка для типов обобщают соответствующие понятия для формул (см. [10], с. 342), а ти́повое свойство порядка является следствием как ти́пового свойства независимости, так и ти́пового свойства строгого порядка.

Пусть $\Gamma = \langle X, Q \rangle$ — некоторый граф без петель, a — вершина графа Γ. Множество $\bigtriangledown_Q(a) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n \in \omega} Q^n(a, \Gamma)$ (соответственно $\bigtriangleup_Q(a) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n \in \omega} Q^n(\Gamma, a)$) называется *верхним* (*нижним*) Q-

конусом вершины a. Будем называть Q-конусы $\triangledown_Q(a)$ и $\vartriangle_Q(a)$ *конусами* и обозначать через $\triangledown(a)$ и $\vartriangle(a)$ соответственно, если из контекста ясно, о каком отношении Q идет речь.

Отметим следующий очевидный критерий включения одних конусов вершин в другие.

Предложение 4.4.1. *Для любых вершин a и b графа Γ следующие условия эквивалентны:*
1) $\triangledown(a) \supseteq \triangledown(b)$*;*
2) $\vartriangle(a) \subseteq \vartriangle(b)$*;*
3) $a = b$ *или вершина a достижима из вершины b.*

Непосредственно из предложения вытекают следующие два утверждения.

Следствие 4.4.2. *Для любой последовательности вершин a_n, $n \in \omega$, графа Γ следующие условия эквивалентны:*

1) *верхние конусы $\triangledown(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго возрастающую (убывающую) по отношению включения;*

2) *нижние конусы $\vartriangle(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго убывающую (возрастающую) по отношению включения;*

3) *для любого $n \in \omega$ вершина a_n (контр)достижима из вершины a_{n+1}, но a_{n+1} не (контр)достижима из a_n.*

Следствие 4.4.3. *Для любой последовательности вершин a_n, $n \in \omega$, бесконтурного орграфа Γ следующие условия эквивалентны:*

1) *верхние конусы $\triangledown(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго возрастающую (убывающую) по отношению включения;*

2) *нижние конусы $\vartriangle(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго убывающую (возрастающую) по отношению включения;*

3) *для любого $n \in \omega$ вершина a_n (контр)достижима из вершины a_{n+1}.*

Ясно, что отношения $x \notin \triangledown(y)$ и $x \notin \vartriangle(y)$ ти́пово определимы. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.4.4. *Если Γ — бесконтурный орграф с бесконечной цепью, то теория* $\mathrm{Th}(\Gamma)$ *имеет ти́повое свойство строгого порядка.*

Из бесконтурности любого властного орграфа и наличия образов и прообразов у любой вершины вытекает

Следствие 4.4.5. *Теория любого властного орграфа имеет ти́повое свойство строгого порядка.*

2. От ти́пового к формульному свойству строгого порядка. Пусть $\mathrm{Col} : X \to \omega \cup \{\infty\}$ — 1-несущественная раскраска графа $\Gamma = \langle X, Q\rangle$, имеющего транзитивную группу автоморфизмов, Δ — некоторое множество формул сигнатуры $\{Q\} \cup \{\mathrm{Col}_n \mid n \in \omega\}$. Предикатное обогащение $\mathcal{M}$ структуры цветного графа $\langle \Gamma, \mathrm{Col}\rangle$ называется *локально* $(\Delta, 1, \mathrm{Col})$*-определимым*, если после обогащения раскраска Col остается 1-несущественной, и для любого нового предикатного символа $R^{(m)}$ формула $R(x, \overline{y}) \wedge \mathrm{Col}_n(x)$ эквивалентна некоторой булевой комбинации формул из Δ. Если множество Δ состоит из $\exists$-формул, то локально $(\Delta, 1, \mathrm{Col})$-определимое обогащение называется *локально* $(\exists, 1, \mathrm{Col})$*-определимым.*

Пусть Col — 1-несущественная Q-упорядоченная раскраска властного орграфа $\Gamma_{\mathrm{pg}} = \langle X, Q\rangle$, $p_\infty(x)$ — тип элементов бесконечного цвета. Локально $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимое обогащение $\mathcal{M}$ структуры $\langle \Gamma_{\mathrm{pg}}, \mathrm{Col}\rangle$ называется p_∞*-властным*, если выполняются следующие условия:

1) отношение полуизолированности SI_{p_∞} на реализациях типа p_∞ несимметрично посредством формулы $Q(x, y)$;

2) p_∞ — властный тип теории $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$;

3) каждый неглавный тип $q(\overline{y}) \in S(T)$ реализуется в $\mathcal{M}_{p_\infty}$ посредством некоторой главной формулы $R_q(a, \overline{y})$ (т. е. $R_q(a, \overline{y}) \vdash q(\overline{y})$), где R_q — новый сигнатурный символ, $\models p_\infty(a)$;

4) если $\models R_q(a, \overline{b})$, $\models p_\infty(a)$, $\models p_\infty(b_i)$, где $b_i \in \overline{b}$, то существует (a, b_i)-Q-маршрут.

Отметим, что свойства 1–4 выполняются в морлизациях структур формульных окрестностей неглавных властных типов, из которых извлекаются структуры властных орграфов (см. доказательство предложения 1.4.2).

Напомним (см. доказательство предложения 1.3.4), что ограниченность длин кратчайших маршрутов во властном орграфе Γ_{pg} влечет свойство строгого порядка и, в частности, нестабильность теории $\mathrm{Th}(\Gamma_{\mathrm{pg}})$.

Пусть $\mathcal{M}$ — локально $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимое p_∞-властное обогащение структуры властного орграфа $\Gamma_{\mathrm{pg}} = \langle X, Q \rangle$ с неограниченными длинами кратчайших маршрутов. Тогда существует тип $q(y_1, y_2, y_3) \in S^3(\mathrm{Th}(\mathcal{M}))$, для которого первая координата любой реализации имеет конечный цвет, а вторая и третья — бесконечный, и эти реализации попарно не связаны маршрутами в орграфе. Рассмотрим формулу

$$\varphi(x, y_1) \rightleftharpoons \exists y_2 \, \exists y_3 \, R_q(x, y_1, y_2, y_3).$$

Из локальной $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимости отношения R_q, взаимной недостижимости реализаций a и b_1 (где $\models \varphi(a, b_1)$, $\models p_\infty(a)$) в графе Γ_{pg} и неограниченности длин кратчайших маршрутов вытекает, что формулой $\varphi(x, y_1)$ задается двухместное отношение, не определимое формулой сигнатуры цветного властного орграфа. Более того, поскольку $\exists$-формулами на графовой структуре с транзитивной группой автоморфизмов можно определить лишь ограниченные длины кратчайших маршрутов, из условий $\models p_\infty(a_1)$ и $\models Q(a_1, a_2)$ вытекает

$$\models \forall y \, (\varphi(a_1, y) \to \varphi(a_2, y)) \land \exists y \, (\neg\varphi(a_1, y) \land \varphi(a_2, y)). \qquad (4.11)$$

Так как элементы a_1 и a_2 реализуют один и тот же тип p_∞, соотношение (4.11) влечет свойство строгого порядка.

Таким образом, справедлива следующая теорема, согласно которой сохранение 1-несущественности раскраски властного орграфа несовместимо со стабильностью локально $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимой структуры обогащенной теории, имеющей неглавный властный тип p_∞.

Теорема 4.4.6. *Теория любого локально* $(\exists, 1, \mathrm{Col})$*-определимого* p_∞*-властного обогащения структуры властного орграфа имеет свойство строгого порядка.*

Представленный в доказательстве теоремы 4.4.6 механизм появления свойства строгого порядка при обогащении структуры властного орграфа демонстрирует переход от ти́пового свойства строгого порядка теории властного орграфа к формульному свойству строгого порядка, порожденному указанной спецификой обогащения.

§ 4.5. Описание особенностей генерической конструкции стабильных эренфойхтовых теорий

В следующих четырех параграфах будет доказано усиление основного результата третьей главы — теоремы 3.4.1, устанавливающее реализуемость в классе стабильных теорий всех возможных параметров, приведенных в характеризационной теореме 1.1.13. Это усиление, в частности, представляет положительное решение проблемы Лахлана о существовании стабильной эренфойхтовой теории.

Напомним, что в третьей главе конструкция эренфойхтовых теорий с тремя счетными моделями складывалась из следующих составляющих:

— неглавного властного типа $p_\infty(x)$, структура которого состоит из элементов бесконечного цвета Col_∞ и получается несущественной упорядоченной раскраской Col всех элементов в цвета из множества $\omega \cup \{\infty\}$;

— двухместного отношения Q, определяющего властный орграф с неограниченными длинами кратчайших Q-маршрутов на структуре типа $p_\infty(x)$ и на любой его окрестности и, как следствие, определяющего на этих структурах частичные порядки посредством транзитивного замыкания $\mathrm{TC}(Q)$;

— счетного множества двухместных отношений R_q и R'_q, $R'_q = R_q^{-1}$, обеспечивающих взаимореализующее амальгамирование (совпадение простых моделей над реализациями типа $p_\infty(x)$, связанных отношением R_q) и определяющих отношение эквивалентности, классы которого являются компонентами связности по отношению $R^* \rightleftharpoons \bigcup\limits_q R_q \cup R'_q$; при этом компоненты связности по отношению R^* частично упорядочены отношением $\mathrm{TC}(Q)$ (две компоненты C_1 и C_2 связаны отношением частичного порядка $\mathrm{TC}(Q)$, если этим отношением связаны некоторые их представители), а элементы каждой компоненты связности попарно несравнимы по отношению $\mathrm{TC}(Q) \setminus \mathrm{id}_X$;

— многоместных предикатов $R_{\mathbf{A}}$, обеспечивающих взаимореализуемость типа $p_\infty(x)$ со всеми неглавными типами.

Нетрудно заметить, что указанные атрибуты, возможно с локальным свойством попарного пересечения по отношению Q или с вырожденными отношениями R^* и $R_{\mathbf{A}}$, присутствуют в любой полной теории с тремя счетными моделями.

Стратегия построения искомых стабильных теорий будет несколько отличаться от стратегии построения эренфойхтовых теорий из третьей главы в силу следующих обстоятельств.

Как показано в предыдущем параграфе, использование 1-несущественной раскраски с последующим обогащением структуры властного орграфа согласованными предикатами $R_{\mathbf{A}}$, реализующими все неглавные типы, выводит структуру из класса стабильных структур. Поэтому перед построением $R_{\mathbf{A}}$-обогащений мы обогатим структуру властного орграфа с почти несущественной упорядоченной раскраской попарно непересекающимися симметричными двухместными отношениями $P_{i,n}$, $i, n \in \omega$, каждое из которых не пересекается с отношением $\mathrm{TC}(Q)$ и связывает лишь элементы цвета своего второго индекса с элементами бо́льших цветов так, чтобы выполнялось следующее *свойство (P, Q)-пересечения*: для любых элементов $a_1, \ldots, a_k$ бесконечного цвета, для любых элементов $b_1, \ldots, b_l$ конечных цветов $m_1, \ldots, m_l$ соответственно и любого цвета $\sigma > \max\{m_1, \ldots, m_l\}$ существует элемент c цвета σ, для которого справедливо

$$\models \bigwedge_{j=1}^{k} Q^{i_j}(c, a_j) \wedge \bigwedge_{j=1}^{l} P_{r_j, m_j}(c, b_j)$$

с некоторыми $i_1, \ldots, i_k, r_1, \ldots, r_l \in \omega \setminus \{0\}$.

Предикаты $P_{i,n}$, строящиеся в стабильной генерической структуре на основе линейной предранговой функции, позволят, не меняя графовой структуры и сохраняя стабильность теории, реализовывать в простой модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ над реализацией типа p_∞ все неглавные типы посредством $R_{\mathbf{A}}$-обогащений, для которых

$$\exists \overline{y} \setminus y_j \, R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \equiv Q^n(x, y_j) \wedge \bigwedge_{m<n} \neg Q^m(x, y_j)$$

или

$$\exists \overline{y} \setminus y_j \, R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \equiv P_{i,n}(x, y_j).$$

Контроль баланса между числом элементов и числом связей, осуществляемый посредством предранговой функции и обеспечивающий стабильность теории, будет достигаться *слиянием* генерической модели властного орграфа и генерической модели сигнатуры $\{P^{(2)}_{i,n} \mid n \in \omega\}$.

Различная природа замыканий конечных множеств в R^*-структурах и Q-структурах (маршрутные замыкания для лесов и самодостаточные замыкания относительно предранговых функций для структур генерических властных орграфов) затрудняет проверку выполнения свойства конечных замыканий в слияниях этих структур.

Для достижения единой природы замыканий конечных множеств в слияниях R^*-структур и Q-структур (самодостаточных замыканий относительно предранговых функций, сводящихся к общей предранговой функции) мы определим компоненты связности по отношению R^*, являющиеся вариантами конструкции Хрушовского стабильной несуперстабильной счетно категоричной структуры (см. [113]). В эти компоненты связности вводятся симметричные двухместные отношения R_j, играющие роль отношений R_q. Возможность одновременного контроля числа R_j-связей, числа $P_{i,n}$-связей и числа связей относительно Q-маршрутов посредством единой предранговой функции позволит ограничить мощность самодостаточного замыкания любого конечного множества единой функцией, зависящей лишь от мощности этого множества. Тем самым, будет гарантирована ти́повая определимость самодостаточных замыканий для слияния R^*-структур, $P_{i,n}$-структур и Q-структур и выполнится свойство конечных замыканий, обусловленное ступенчатой специальной системой замыканий. Наличие свойства конечных замыканий в свою очередь позволит установить насыщенность генерических моделей и стабильность искомых теорий.

§ 4.6. Стабильные графовые расширения цветных властных орграфов

Обозначим через Γ стабильный генерический властный орграф $\Gamma^{\rm cpg} = \langle X, Q\rangle$ с почти несущественной Q-упорядоченной раскраской Col, описанный в параграфе 4.3.

Рассмотрим класс $\hat{\mathbf{K}}_0^f$, определенный в параграфе 4.3 для построения цветного графа Γ, и обогатим структуры из класса $\hat{\mathbf{K}}_0^f$ симметричными двухместными предикатами $P_{i,n}$, $i, n \in \omega$, связывающими лишь вершины a цвета n с вершинами b, имеющими цвета, бо́льшие n, и такими, что не существует (a, b)-Q-маршрутов.

Аналогично операторам T_c и T_c^* на классе cc-графов определяются операторы T_c и T_c^* на классе обогащенных структур.

При этом, каждая пара вершин из отношений $P_{i,n}$ в безразвилочных структурах интерпретируется одним ребром, связывающим элементы из $J_0 \cup J_1$.

Рассмотрим теперь монотонно убывающую последовательность положительных вещественных чисел α_k, определенных для предранговой функции $y^1(\cdot)$ из параграфа 4.3 в качестве весов пар вершин, связанных кратчайшими Q-маршрутами длины k. Отнесем элементы $\alpha_m^Q \rightleftharpoons \alpha_{2m}$ к весам пар вершин, связанных кратчайшими Q-маршрутами длины m, а элементы $\alpha_m^P \rightleftharpoons \alpha_{2m+1}$ к весам $P_{i,n}$-ребер, где m — значение $c(i,n)$ канторовской нумерующей функции (см., например, [14], с. 137). После указанных переобозначений определим *предранговую функцию* $y(\cdot)$ для структур $\mathcal{A}$ из класса $\hat{\mathbf{K}}_0^f$, обогащенных предикатами $P_{i,n}$:

$$y(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^Q \cdot e_k^Q(\mathcal{A}) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^P \cdot e_k^P(\mathcal{A}),$$

где $e_1^Q(\mathcal{A})$ — число Q-дуг в $\mathcal{A}$; $e_k^Q(\mathcal{A})$, $k \geq 2$, — число пар $(a, a') \in A^2$, связанных лишь внешними кратчайшими (a, a')-Q-маршрутами длины k и такими, что никакой (a, a')-Q-маршрут длины k не содержит $\mathcal{A}$-внешних $\mathcal{A}$-принудительных развилок; $e_k^P(\mathcal{A})$ — число $P_{i,n}$-ребер в структуре $\mathcal{A}$, где $k = c(i,n)$.

p-Аппроксимацией предранговой функции $y(\cdot)$ называется функция $y_p(\cdot)$, которая каждой структуре $\mathcal{A}$ из $\hat{\mathbf{K}}_0^f$, обогащенной предикатами $P_{i,n}$, ставит в соответствие вещественное число по правилу

$$y_p(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^Q \cdot e_k^Q(\mathcal{A}) - \sum_{k=0}^{p} \alpha_k^P \cdot e_k^P(\mathcal{A}).$$

Обозначим через $\mathbf{K}_1^{f,P}$ класс всех структур $\mathcal{A}$ из $\hat{\mathbf{K}}_0^f$, обогащенных предикатами $P_{i,n}$ и удовлетворяющих условиям $y_1(\mathcal{A}') \geq b_n^1$ для любой структуры $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathrm{cfc}(\mathcal{A})$, где $n = |T(A')|$, $\sqsubseteq$ — отношение "быть частью структуры". Для структуры $\mathcal{A}$ из класса $\mathbf{K}_1^{f,P}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_{p+1}^{f,P}$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_p^{f,P}$ и $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}') \geq b_n^p$ для любой структуры $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathrm{cfc}(\mathcal{A})$, где $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}')$ — минимальное из значений $y_p(T_c(\mathcal{A}_0)) + \Delta_1 + \ldots + \Delta_m$, $\Delta_i = y_p(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T_c^*(\mathcal{A}_i)})) - y_p(T_c^*(\mathcal{A}_i))$, $\mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}}$

$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}'$, n — натуральное число, для которого $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}') = n - s\cdot\alpha_1$ при некотором $s \in \omega$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Положим $\mathbf{K}_0^{f,P} \rightleftharpoons \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathbf{K}_p^{f,P}$. Обозначим через $\mathbf{K}^{f,P}$ класс всех графов сигнатуры $\Sigma_P \rightleftharpoons \{\mathrm{Col}_n \mid n \in \omega\} \cup \{Q\} \cup \{P_{i,n} \mid i, n \in \omega\}$, у которых каждая конечная *подструктура* (т. е. подграф вместе с информацией о длинах кратчайших Q-маршрутов и о принудительности развилок) принадлежит классу $\mathbf{K}_0^{f,P}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — конечная подструктура графа (конечной подструктуры) $\mathcal{M}$ (графа), принадлежащего классу $\mathbf{K}^{f,P}$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *самодостаточная подструктура* графа (соответственно конечной структуры) $\mathcal{M}$ и писать $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$, если для любых конечных структур $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_m = \mathcal{B}'$, из $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m < 0$, где $\Delta_i = y(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T_c^*(\mathcal{A}_i)})) - y(T_c^*(\mathcal{A}_i))$, следует $B' \subseteq A$. Если $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — конечная структура, то $\mathcal{A}$ называется *сильной подструктурой* структуры $\mathcal{M}$.

Обозначим через $\mathbf{T}_0^{f,P}$ класс типов, соответствующих всем структурам из класса $\mathbf{K}_0^{f,P}$, и снабдим его отношением $\leqslant'$, где $\Phi(A) \leqslant' \Psi(B) \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$.

Повторяя рассуждения для класса $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant'_{\mathrm{cc}})$, устанавливаем, что класс $(\mathbf{T}_0^{f,P}; \leqslant')$ является самодостаточным генерическим классом, у которого после добавления к типам необходимых формул, описывающих самодостаточные замыкания, выполняется свойство однородного t-амальгамирования. Это влечет ω-насыщенность $(\mathbf{T}_0^{f,P}; \leqslant')$-генерической модели, реализующей все типы $\Phi(X)$, соответствующие типам $\Phi(A)$ из $\mathbf{T}_0^{f,P}$, а также стабильность $(\mathbf{T}_0^{f,P}; \leqslant')$-генерической теории $T^{f,P}$. Из условий $\alpha_k < \frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ вытекает выполнимость в теории $T^{f,P}$ свойства (P, Q)-пересечения.

Из самодостаточности двухэлементных множеств $\{a, b\}$ с условием $(a, b) \in \bigcup\limits_{i,n\in\omega} P_{i,n}$ следует, что тип $\mathrm{tp}(a\hat{\ }b)$ определяется цветами концов ребра $[a, b]$, т. е. все формулы $P_{i,n}(a, x)$, где $\mathrm{Col}(a) > n$, являются главными. То же самое свойство сохраняется и для формул $Q(a, x)$, где $\mathrm{Col}(a) = \infty$. Таким образом, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 4.6.1. $(\mathbf{T}_0^{f,P};\leqslant')$*-Генерическая модель* $\mathcal{M}$ *насыщена. При этом любое конечное множество* $A\subseteq M$ *расширяется до своего самодостаточного замыкания* $\overline{A}\subseteq M$, *и тип* $\mathrm{tp}_X(\overline{A})$ *выводится из множества* $[\Phi(\overline{A})]_X^{\overline{A}}$, *где* $\Phi(\overline{A})$ *— тип из* $\mathbf{T}_0^{f,P}$, *для которого* $\mathcal{M}\models\Phi(\overline{A})$.

Теорема 4.6.2. *Теория* $T^{f,P}$ *стабильна, мала, обладает свойством* (P,Q)*-пересечения и имеет счетное число* 1*-типов, и каждый* 1*-тип определяется цветом любой своей реализации. Каждая формула* $P_{i,n}(a,x)$, *где* $\mathrm{Col}(a)>n$, *а также каждая формула* $Q(b,x)$, *где* $\mathrm{Col}(b)=\infty$, *является главной.*

Лемма 4.6.3. *Если* A *и* B *— самодостаточные множества в модели* $\mathcal{N}\models T^{f,P}$ *и* $A\leqslant B$, *то тип* $\mathrm{tp}(B/A)$ *изолирован тогда и только тогда, когда* $\mathcal{B}$ *— полный* $\bigcup\limits_{k,n\in\omega}(Q^k\cup P_{k,n})$*-граф над* $\mathcal{A}$, *т. е. любые два различных элемента* $a\in B$ *и* $b\in B\setminus A$ *связаны некоторой* Q^k*-дугой или некоторым* $P_{i,n}$*-ребром.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y — множество переменных, биективное с множеством $B\setminus A$. Если $\mathcal{B}$ — полный $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(Q^k\cup P_{k,n})$-граф над $\mathcal{A}$, то по теореме 4.6.1 тип $\mathrm{tp}((B\setminus A)/A)$ изолируется главной формулой типа $\Phi(A,Y)$, где $\Phi(B)$ — тип из $\mathbf{T}_0^{f,P}$, для которого $\mathcal{N}\models\Phi(B)$. Эта формула существует в силу ти́повой определимости условия самодостаточности, условия связи элементов $P_{i,n}$-ребрами, а также в силу конечности записи о существовании кратчайших Q-маршрутов между элементами. Если же $\mathcal{B}$ не является полным $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(Q^k\cup P_{k,n})$-графом над $\mathcal{A}$, то по теореме 4.6.1 тип $\mathrm{tp}((B\setminus A)/A)$ изолируется типом $\Phi(A,Y)$, но не изолируется никакой конечной частью этого множества. $\square$

Из леммы 4.6.3 вытекает

Следствие 4.6.4. *Пусть* A *— самодостаточное множество в модели* $\mathcal{N}\models T^{f,P}$. *Простая модель* $\mathcal{M}_A$ *над множеством* A *является полным* $\bigcup\limits_{k,n\in\omega}(Q^k\cup P_{k,n})$*-графом над* A. *Множество типов изоморфизма простых моделей над конечными множествами совпадает с множеством типов изоморфизма моделей* $\mathcal{M}_A$, *где* A *— самодостаточные множества и* $\mathcal{M}_A$ *— полные* $\bigcup\limits_{k,n\in\omega}(Q^k\cup P_{k,n})$*-графы над* A.

§ 4.7. Стабильные теории с неглавными властными типами

В этом параграфе будет описана модификация генерической конструкции из параграфа 3.2, позволяющая строить стабильные теории с неглавными властными типами в виде обогащений теории $T^{f,P}$ властного орграфа $\langle X, Q\rangle$ с упорядоченной раскраской Col и двухместными предикатами $P_{i,n}$, обеспечивающими выполнимость свойства (P,Q)-пересечения.

Зафиксируем теорию $T^{f,P}$ [8] и определим обогащение этой теории с той же самой упорядоченной раскраской так, чтобы тип $p_\infty(x)$ элементов бесконечного цвета стал властным типом.

Для превращения типа p_∞ во властный тип с сохранением единственности неглавного полного 1-типа над $\varnothing$ мы будем вводить для каждого типа $q(y_2,\ldots,y_k)$, реализующегося элементами, образующими самодостаточное множество, и не содержащегося ни в одном (p_∞,y_1)-главном типе $r(y_1,y_2,\ldots,y_k)$, новый k-местный предикат R_q так, чтобы множество $\{R_q(y_1,\ldots,y_k)\}\cup p_\infty(y_1)$ было совместно и выполнялось

$$\{R_q(y_1,\ldots,y_k)\}\cup p_\infty(y_1)\vdash q(y_2,\ldots,y_k).$$

С этой целью перенумеруем множество $\mathbf{q}$ всех типов $q(y_1,\ldots,y_k)$ кортежей $\overline{a}_q$ с попарно различными координатами, для которых множества элементов из $\overline{a}_q$ самодостаточны, а модели $\mathcal{M}_{\overline{a}_q}$ не изоморфны простой модели или модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$: $\mathbf{q}=\{q_m(y_1,\ldots,y_{k_m})\mid m\in\omega\}$. При этом на основании теоремы 4.6.1 типы $q_m(y_1,\ldots,y_{k_m})$ определяются *типами изоморфизма* $\mathbf{A}_m\rightleftharpoons\Psi_m(Y_m)$ (где $\Psi_m(A_m)\in\mathbf{T}_0^{f,P}$) своих реализаций $\overline{a}_m$. Поэтому в дальнейшем типы $q_m(y_1,\ldots,y_{k_m})$ будут отождествляться с типами изоморфизма $\mathbf{A}_m$.

Для каждого типа $q_m(\overline{y})\in\mathbf{q}$ и соответствующего типа $\mathbf{A}_m$ зафиксируем изолирующее тип $q_m(\overline{y})$ множество $\Phi_{\mathbf{A}_m}(\overline{y})$ формул $\varphi_n(\overline{y})$, $n\in\omega$, описывающих

а) конечные цвета элементов из $\overline{a}_m$, а также отрицания цветов, меньших n, для элементов из $\overline{a}_m$, имеющих бесконечный цвет;

б) существование и длины кратчайших Q-маршрутов, связывающих элементы из $\overline{a}_m$;

[8] Напомним, что теория $T^{f,P}$ однозначно определяется специальной последовательностью иррациональных чисел α_k, $0<\alpha_{k+1}\ll\alpha_k<\frac{1}{2}$, $k\in\omega\setminus\{0\}$.

в) отсутствие связывающих элементы из $\overline{a}_m$ Q-маршрутов длины, меньшей n, если элементы Q-маршрутами не связаны;

г) $P_{i,m}$-ребра, связывающие элементы из $\overline{a}_m$, а также отсутствие связывающих элементы из $\overline{a}_m$ $P_{j,n'}$-ребер с условием $c(j,n') < n$, если элементы $P_{i,m}$-ребрами не связаны;

д) самодостаточность множества элементов из $\overline{a}_m$.

Теперь рассмотрим тип изоморфизма $\mathbf{A}$ произвольного кортежа $\overline{a} = (a_1, \dots, a_k)$ самодостаточного множества $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ мощности k, не лежащего в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$, и обозначим через $\max_{\mathbf{A}}$ максимальный из конечных цветов элементов множества A, если такие элементы есть, и положим $\max_{\mathbf{A}} \rightleftharpoons 0$, если все элементы множества A имеют бесконечный цвет. Выберем для каждого элемента a_j конечного цвета n_j предикат P_{i_j,n_j} такой, что

$$\sum_{j \in \{j' \mid \mathrm{Col}(a_{j'}) < \omega\}} \alpha^P_{c(i_j,n_j)} < 1 - 2 \cdot \alpha^Q_1.$$ [9]

Определим $(k+1)$-местные отношения $R_{\mathbf{A}}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \vdash \left(\exists \overline{y} \left(R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \wedge \varphi_m(\overline{y}) \right) \leftrightarrow \bigwedge_{i \le \max_{\mathbf{A}}} \neg \mathrm{Col}_i(x) \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\exists \overline{y} \left(R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y}) \wedge \varphi_n(\overline{y}) \right) \leftrightarrow \bigwedge_{i \le n} \neg \mathrm{Col}_i(x) \right), \ m \le \max_{\mathbf{A}} \le n;$$

2) для любого $n > \max_{\mathbf{A}}$ формула $R_{\mathbf{A}}(x, y_1, \dots, y_k) \wedge \mathrm{Col}_n(x)$ эквивалентна конъюнкции формулы $\varphi_n(\overline{y}) \wedge \neg\varphi_{n+1}(\overline{y})$ и формулы, описывающей следующие свойства:

а) если $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \rangle$ (где $k_1 < \ldots < k_r$) — кортеж всех элементов a_i из $\overline{a}$, имеющих бесконечный цвет, $\langle a_{j_1}, \dots, a_{j_s} \rangle$ (где $j_1 < \ldots < j_s$) — кортеж всех элементов a_j из $\overline{a}$, имеющих конечные цвета, то существуют элементы $z_0, \dots, z_{r-1}$ такие, что $z_{r-1} = y_{k_r}$, выполняется $Q(z_{m-1}, z_m) \wedge Q(z_{m-1}, y_{i_m})$, $m = 1, \dots, r-1$, $x = z_0$ и выполняется $P_{i_{j_l}, n_{j_l}}(x, y_{j_l})$, $l = 1, \dots, s$;

---

[9] Указанный выбор предикатов возможен в силу выполнимости свойства (P,Q)-пересечения и условия $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha^P_{c(i,n_j)} = 0$. Это делается с целью сохранения самодостаточности при добавлении к множеству A некоторого элемента, связанного с элементами a_j конечных цветов отношениями P_{i_j,n_j}, а с элементами a_j бесконечного цвета — Q-маршрутами.

б) в структуре, состоящей из элементов x, $\overline{y}$, $z_1, \ldots, z_{r-1}$, нет ребер с номерами $c(\cdot,\cdot) \leq n$ и Q-дуг кроме ребер и Q-дуг, указанных в пункте a и в описании $\mathbf{A}$ для элементов $\overline{y}$, а также нет внешних кратчайших Q-маршрутов длины, не превосходящей n, кроме внешних кратчайших Q-маршрутов, связывающих элементы $\overline{y}$ и описанных в $\mathbf{A}$; при этом указанная структура образует самодостаточное множество.[10]

Из определения вытекает, что предикаты $R_{\mathbf{A}}$ утончают графовую структуру, не увеличивая множества двухместных отношений посредством проекций $\exists y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_k\, R_{\mathbf{A}}(x, \overline{y})$.

Покажем, что при наличии указанного выше утончения графовой структуры посредством отношений $R_{\mathbf{A}}$, требуемое стабильное обогащение можно осуществить новым построением генерической модели из конечных структур, обогащенных конечными записями о позитивных связях между элементами через промежуточные элементы посредством проекций отношений $R_{\mathbf{A}}$.

Это построение начнем с описания класса $\mathbf{K}_1^*$ конечных структур, снабженных конечными записями о взаимоотношении элементов, удовлетворяющими условиям 1 и 2. Поскольку искомая генерическая модель обогащает $(\mathbf{T}_0^{f,P}; \leqslant')$-генерическую модель, будем считать, что каждая структура $\mathcal{A}$, входящая в $\mathbf{K}_1^*$ и ограниченная на графовую сигнатуру $\{Q\} \cup \{P_{i,n} \mid i, n \in \omega\}$ с раскраской Col, образует структуру с записью $W_{\mathcal{A}}$, и это ограничение принадлежит классу $\mathbf{K}_0^{f,P}$. Кроме того, введение отношений $R_{\mathbf{A}_m}$ требует добавления к записи $W_{\mathcal{A}}$ позитивной информации о взаимоотношении элементов по проекциям $\exists y_{l_1}, \ldots, y_{l_t}\, R_{\mathbf{A}_m}(x, \overline{y})$ в соответствии с пунктом 2.

Перед завершением определения структур класса $\mathbf{K}_1^*$ отметим следующее. Как показано в теореме 4.6.1, тип из $\mathbf{T}_0^{f,P}$ каждой самодостаточной структуры $\mathcal{A}$ определяет тип множества A в генерической модели. В определении каждого отношения $R_{\mathbf{A}}$ принадлежность каждого набора $a\,\hat{}\,\overline{a}$ этому отношению задается либо главной формулой, описывающей соотношение между элементами, лежащими в простой модели, либо последовательностью формул (описанных в пункте 2), в которых локально описывается отсутствие связей между какими-то элементами из $\overline{a}$ посредством ребер или Q-маршрутов при сохранении фиксированных по длине связей между элементом a и элементами из $\overline{a}$.

[10]Это означает, в частности, что типы множеств A имеют однозначные расширения до типов, включающих элементы $x, z_1, \ldots, z_{r-1}$, где x удовлетворяет типу p_∞.

Последнее описание, как замечено выше для бинарных отношений, напрямую зависит от соотношения между цветами аппроксимаций a^n (в простой модели) элемента a (эти аппроксимации называются *источниками*) и длинами кратчайших Q-маршрутов и номерами P-ребер между соответствующими элементами аппроксимаций $\overline{a}^n$ (в простой модели) кортежа $\overline{a}$ (эти аппроксимации называются *последователями*): если номер цвета источника a^n не превосходит (неограниченных при $n \to \infty$) длин кратчайших Q-маршрутов (номеров P-ребер) между элементами последователей $\overline{a}^n$, то при наличии элементов $z_1, \dots, z_k$, описанных в пункте 2, отношение $R_{\mathbf{A}}$ выполняется, а если номер цвета источника a^n больше какой-то из неограниченных при $n \to \infty$ длин кратчайших Q-маршрутов (номеров P-ребер) между элементами последователя $\overline{a}^n$, то при тех же условиях отношение $R_{\mathbf{A}}$ выполняться не будет. В дальнейшем соотношения "номер цвета источника a^n — попарные, неограниченные при $n \to \infty$ длины кратчайших Q-маршрутов и номера P-ребер между элементами последователя $\overline{a}^n$" будем для краткости называть *соотношениями* CLN.

Поскольку в генерической теории любой тип из $S(\varnothing)$ расширяется до типа из $S(\varnothing)$ некоторого самодостаточного множества, описываемого цветами элементов, длинами кратчайших Q-маршрутов, номерами P-ребер и условием самодостаточности множества, соотношения CLN можно охарактеризовать формулами $\rho(x, y_i, y_j)$, определяющими длины кратчайших (x, y_i)- и (x, y_j)-Q-маршрутов и номера P-ребер между x и y_i, y_j, а также соотношения между цветами элементов a^n и длинами кратчайших Q-маршрутов (номеров P-ребер), связывающих элементы a_i^n и a_j^n.

Таким образом, формулы $\rho(x, y_i, y_j)$ являются трехместными индикаторами позитивных или негативных вхождений формул $\exists y_{l_1}, \dots, y_{l_t}\, R_{\mathbf{A}_m}(x, \overline{y})$ в типы теории рассматриваемой генерической модели. Эти индикаторы мы присоединим как к описаниям типов $\mathbf{A}_m$ при определении самих отношений $R_{\mathbf{A}_m}$ (формулы $\rho(y_i, y_j, y_k)$ или их отрицания конъюнктивно добавляются к формулам $\varphi_n(\overline{y})$), так и к общим описаниям типов кортежей. При этом за счет добавления формул ρ расширяется и сама сигнатура, обусловленная типами $\mathbf{A}_m$ с добавлениями формул $\rho^\delta(y_i, y_j, y_k)$, $\delta \in \{0, 1\}$. Эта расширенная сигнатура остается счетной в силу конечного числа вариантов добавления формул ρ к каждому типу.

Окончательно определяем, что класс $\mathbf{K}_1^*$ состоит из всех конечных систем сигнатуры

$$\Sigma_1 \rightleftharpoons \{\mathrm{Col}_n \mid n \in \omega\} \cup \{Q^{(2)}\} \cup \{P_{i,n}^{(2)} \mid i, n \in \omega\} \cup \{R_{\mathbf{A}_m} \mid m \in \omega\} \cup$$

$$\cup \{\rho^{(3)} \mid \rho(x, y_i, y_j) \text{ характеризует некоторое CLN-соотношение}\},$$

которые получаются из структур, принадлежащих классу $\mathbf{K}_0^{f,P}$, добавлением отношений ρ, а также согласованных с пунктом 2 отношений $R_{\mathbf{A}_m}$ (с расширенными с помощью формул $R_{\mathbf{A}_m}$ и ρ типами $\mathbf{A}_m$) и всевозможных допустимых формул $\rho(a_i, a_j, a_k)$.

Конечные структуры $\mathcal{A}$ со своими записями $W_{\mathcal{A}}$, образующие класс $\mathbf{K}_1^*$, называются *c_1-структурами.* Обозначим через $\mathbf{K}_1$ класс всех моделей сигнатуры Σ_1, у которых каждое конечное подмножество образует c_1-структуру из класса $\mathbf{K}_1^*$.

Понятие *c_1-вложения* $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{B}$ для c_1-структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, при котором сохраняется соответствующая запись $W_{\mathcal{A}}$ ($W_{f(\mathcal{A})} = W_{\mathcal{B}} \upharpoonright f(A)$), естественным образом обобщает понятие cc-вложения. Тем самым определяется и понятие c_1-вложения $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{N}$ c_1-структуры $\mathcal{A}$ в модель $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}_1$.

c_1-Структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *c_1-изоморфными*, если существует c_1-вложение $f : \mathcal{A} \to_{c_1} \mathcal{B}$ с условием $f(A) = B$.

Отношение самодостаточности $\leqslant_1$ на классе $\mathbf{K}_1^*$ наследует отношение $\leqslant$ на классе $\mathbf{K}_0^{f,P}$: для любых c_1-структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из класса $\mathbf{K}_1^*$ выполняется

$$(\mathcal{A} \leqslant_1 \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \upharpoonright \Sigma_P \leqslant \mathcal{B} \upharpoonright \Sigma_P)\,.$$

Теорема 4.7.1. *Существует насыщенная $(\mathbf{K}_1^*; \leqslant_1)$-генерическая модель $\mathcal{M}$ стабильной теории, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_1-изоморфные самодостаточные c_1-структуры в модели $\mathcal{M}$, то* $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$*;*

б) *обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры Σ_P является $\mathbf{K}_0^{f,P}$-генерической моделью;*

в) *теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *имеет счетное число 1-типов, и каждый 1-тип определяется цветом любой своей реализации; тип $p_\infty(x)$ элементов бесконечного цвета является единственным неглавным 1-типом, и его собственный вес бесконечен;*

г) *каждая формула* $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$, *где* $\models p_\infty(a)$, *является главной, и тип* c_1*-изоморфизма каждой реализации формулы* $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ *совпадает с типом* c_1*-изоморфизма* $\mathbf{A}$*;*

д) *каждая формула* $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$, *где* $\mathbf{A}$ *— тип* c_1*-изоморфизма кортежа* $\overline{a}$, *является главной, и каждая реализация формулы* $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$ *является реализацией типа* p_∞.

Д о к а з а т е л ь с т в о существования насыщенной $(\mathbf{K}_1^*;\leqslant_1)$-генерической модели $\mathcal{M}$ из класса $\mathbf{K}_1$, удовлетворяющей условиям "а" и "б", почти слово в слово повторяет доказательство теоремы 4.6.1. При этом наличие новых предикатов $R_{\mathbf{A}_m}$ и ρ не отражается при подсчете значений предранговой функции, поскольку эти предикаты утончают соответствующие графовые структуры из класса $\mathbf{K}_0^{f,P}$.

Аналогично теореме 4.6.2 доказывается стабильность генерической теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, а также устанавливается пункт "в".

Доказательство пунктов "г" и "д" проводится повторением доказательства соответствующих пунктов теоремы 3.2.3. □

Обозначим через T_1 теорию $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ $(\mathbf{K}_1^*;\leqslant_1)$-генерической модели $\mathcal{M}$.

Поскольку в теории T_1 каждый тип над пустым множеством является подтипом типа, определяемого записью некоторой самодостаточной c_1-структуры, а для каждого типа q c_1-структуры, не лежащей в простой модели, найдется главная формула $\exists y_{l_1},\ldots,y_{l_t}\, R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ (где $\models p_\infty(a)$), для которой $\exists y_{l_1},\ldots,y_{l_t}\, R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})(a,\overline{y}) \vdash q$, то в модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ реализуются все типы теории T_1. Таким образом, тип $p_\infty(x)$ является властным типом.

Из пункта "д" теоремы 4.7.1 вытекает, что для каждого неглавного типа $q(\overline{y})$ теории T_1 в модели $\mathcal{M}_q$ реализуется тип p_∞ и, следовательно, каждый неглавный тип является властным. Более того, введение предикатов $R_{\mathbf{A}}$ позволяет для любого кортежа $\overline{a}$, имеющего некоторый тип c_1-изоморфизма $\mathbf{A}_m$, найти реализацию a типа $p_\infty(x)$ такую, что $\models R_{\mathbf{A}_m}(a,\overline{a})$, и, следовательно, в силу предложения 1.1.3 модель $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ совпадает с моделью $\mathcal{M}_a$. Таким образом, все простые модели над кортежами, реализующими неглавные типы, изоморфны модели $\mathcal{M}_{p_\infty}$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 4.7.2. *Существует малая стабильная теория* T_1, *обогащающая теорию* $T^{f,P}$ *и удовлетворяющая условию* $|\mathrm{RK}(T_1)| = 2$.

§ 4.8. Стабильные теории с тремя счетными моделями

Общие принципы обогащения теории T_1, приводящие к построению малой стабильной теории T с $|\mathrm{RK}(T)| = 2$ и свойством (CEP) совпадают с теми же принципами, которые описаны в параграфе 3.3, но имеют оговорки, отраженные в параграфе 4.5. При построении искомой стабильной теории T мы будем использовать амальгамы взаимореализуемости, которые в отличие от конструкции третьей главы будут получаться автоматически в силу самодостаточности двухэлементных графов, содержащих новые ребра, а также в силу неограниченно малых весов новых ребер. При этом теория T будет варьироваться в зависимости от перемежающихся весов α_k^Q длин кратчайших Q-маршрутов, весов α_k^P $P_{i,n}$-ребер и весов α_k^R R_j-ребер.

Обозначим через $\mathbf{K}_{-1}^{f,P,R}$ класс всех конечных структур $\mathcal{A}$ (включая пустую структуру) сигнатуры

$$\Sigma_{P,R} \rightleftharpoons \{\mathrm{Col}_n^{(1)} \mid n \in \omega\} \cup \{Q^{(2)}\} \cup \{P_{i,n}^{(2)} \mid i, n \in \omega\} \cup \{R_j^{(2)} \mid j \in \omega\},$$

удовлетворяющих следующим условиям:

а) структура $\mathcal{A} \restriction \Sigma_P$ принадлежит классу $\mathbf{K}_0^{f,P}$;

б) отношения R_j симметричны, иррефлексивны, попарно не пересекаются и связывают лишь одноцветные вершины; при этом $\bigcup\limits_{j\in\omega} R_j$-компоненты связности строго Q-упорядочены, т. е. элементы одной и той же $\bigcup\limits_{j\in\omega} R_j$-компоненты связности не связаны Q-маршрутами, а если вершины a_1 и a_2 связаны $\bigcup\limits_{j\in\omega} R_j$-маршрутом, вершины b_1 и b_2 связаны $\bigcup\limits_{j\in\omega} R_j$-маршрутом и существует (a_1, b_1)-Q-маршрут, то не существует (b_2, a_2)-Q-маршрута.

Рассмотрим теперь монотонно убывающую последовательность положительных вещественных чисел α_k, определенных для предранговой функции $y^1(\cdot)$ из параграфа 4.3 в качестве весов пар вершин, связанных кратчайшими Q-маршрутами длины k. Отнесем элементы $\alpha_m^Q \rightleftharpoons \alpha_{3m}$ к весам пар вершин, связанных кратчайшими Q-маршрутами длины m, элементы $\alpha_m^P \rightleftharpoons \alpha_{3m+1}$ — к весам $P_{i,n}$-ребер, где $m = c(i, n)$, а элементы $\alpha_m^R \rightleftharpoons \alpha_{3m+2}$ — к весам R_m-ребер. После указанных переобозначений определим *предранговую функцию* $y(\cdot)$ для структур $\mathcal{A}$ из класса $\mathbf{K}_{-1}^{f,P,R}$ следующим равенством:

$$y(\mathcal{A}) = 2\cdot|A_f|+|A_{\mathrm{nf}}|-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^Q\cdot e_k^Q(\mathcal{A})-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^P\cdot e_k^P(\mathcal{A})-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^R\cdot e_k^R(\mathcal{A}),$$

где $e_1^Q(\mathcal{A})$ — число Q-дуг в $\mathcal{A}$; $e_k^Q(\mathcal{A})$, $k \geq 2$, — число пар $(a,a') \in A^2$, связанных лишь внешними кратчайшими (a,a')-Q-маршрутами длины k и такими, что никакой (a,a')-Q-маршрут длины k не содержит $\mathcal{A}$-внешних $\mathcal{A}$-принудительных развилок; $e_k^P(\mathcal{A})$ — число $P_{i,n}$-ребер в структуре $\mathcal{A}$, где $k = c(i,n)$; $e_k^R(\mathcal{A})$ — число R_k-ребер в структуре $\mathcal{A}$.

p-Аппроксимацией предранговой функции $y(\cdot)$ называется функция $y_p(\cdot)$, которая каждой структуре $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_{-1}^{f,P,R}$ ставит в соответствие вещественное число по правилу

$$y_p(\mathcal{A}) = 2\cdot|A_f|+|A_{\mathrm{nf}}|-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^Q\cdot e_k^Q(\mathcal{A})-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^P\cdot e_k^P(\mathcal{A})-\sum_{k=0}^{p}\alpha_k^R\cdot e_k^R(\mathcal{A}).$$

Аналогично операторам T_c и T_c^* на классе cc-графов определяются операторы T_c и T_c^* на классе $\mathbf{K}_{-1}^{f,P,R}$. При этом, каждая пара вершин из отношений $P_{i,n}$ и R_m в безразвилочных структурах интерпретируется одним ребром, связывающим элементы из $J_0 \cup J_1$.

Обозначим через $\mathbf{K}_1^{f,P,R}$ класс всех структур $\mathcal{A}$ из $\mathbf{K}_{-1}^{f,P,R}$, удовлетворяющих условиям $y_1(\mathcal{A}') \geq b_n^1$ для любой структуры $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathrm{cfc}(\mathcal{A})$, где $n = |T(A')|$. Для структуры $\mathcal{A}$ из класса $\mathbf{K}_1^{f,P,R}$ будем писать $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_{p+1}^{f,P,R}$, $p \geq 1$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_p^{f,P,R}$ и $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}') \geq b_n^p$ для любой части $\mathcal{A}'$ структуры $\mathrm{cfc}(\mathcal{A}) \in \mathbf{K}_1^{f,P,R}$, где $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}')$ — минимальное из значений $y_p(T_c(\mathcal{A}_0)) + \Delta_1 + \ldots + \Delta_m$, $\Delta_i = y_p(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T_c^*(\mathcal{A}_i)})) - y_p(T_c^*(\mathcal{A}_i))$, $\mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_m = \mathcal{A}'$, n — натуральное число, для которого $y_p^{\Delta}(\mathcal{A}') = n - s\cdot\alpha_1$ при некотором $s \in \omega$, $k_p \leq n < k_{p+1}$.

Положим $\mathbf{K}_0^{f,P,R} \rightleftharpoons \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathbf{K}_p^{f,P,R}$. Обозначим через $\mathbf{K}^{f,P,R}$ класс всех графов сигнатуры $\Sigma_{P,R}$, у которых каждая конечная *подструктура* (т. е. подграф вместе с информацией о длинах кратчайших Q-маршрутов и о принудительности развилок) принадлежит классу $\mathbf{K}_0^{f,P,R}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — конечная подструктура графа (конечной подструктуры) $\mathcal{M}$ (графа), принадлежащего классу $\mathbf{K}^{f,P,R}$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *самодостаточная подструктура* графа (соответственно конечной структуры) $\mathcal{M}$ и писать $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$, если для любых конечных структур $\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_1 \subseteq_{\mathrm{cc}} \ldots \subseteq_{\mathrm{cc}} \mathcal{A}_m = \mathcal{B}'$, из $\Delta_1 + \ldots + \Delta_m < 0$, где $\Delta_i = y(T_c((\mathcal{A}_{i+1})_{T_c^*(\mathcal{A}_i)})) - y(T_c^*(\mathcal{A}_i))$, следует $B' \subseteq A$. Если $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — конечная структура, то $\mathcal{A}$ называется *сильной подструктурой* структуры $\mathcal{M}$.

Обозначим через $\mathbf{T}_0^{f,P,R}$ класс типов, соответствующих всем структурам из класса $\mathbf{K}_0^{f,P,R}$, и снабдим его отношением $\leqslant'$, где $\Phi(A) \leqslant' \Psi(B) \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$).

Повторяя рассуждения для класса $(\mathbf{T}_0^f; \leqslant'_{\mathrm{cc}})$, устанавливаем, что класс $(\mathbf{T}_0^{f,P,R}; \leqslant')$ является самодостаточным генерическим классом, у которого после добавления к типам необходимых формул, описывающих самодостаточные замыкания, выполняется свойство однородного t-амальгамирования. Это влечет ω-насыщенность $(\mathbf{T}_0^{f,P,R}; \leqslant')$-генерической модели, реализующей все типы $\Phi(X)$, соответствующие типам $\Phi(A)$ из $\mathbf{T}_0^{f,P,R}$, а также стабильность $(\mathbf{T}_0^{f,P,R}; \leqslant')$-генерической теории $T^{f,P,R}$. Из самодостаточности двухэлементных множеств $\{a, b\}$ с условием $(a, b) \in \bigcup\limits_{j\in\omega} R_j$ следует, что тип $\mathrm{tp}(a\hat{\ }b)$ определяется цветом ребра $[a, b]$ и цветом любого из его концов, т. е. все формулы $R_j(a, x)$ являются главными. Повторяя доказательство теоремы 4.3.18, получаем, что каждый тип из $S^1(\varnothing)$ имеет бесконечный собственный вес. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4.8.1. *Теория $T^{f,P,R}$ стабильна, мала и имеет счетное число 1-типов, каждый из которых определяется цветом любой своей реализации и имеет бесконечный собственный вес. Тип $p_\infty(x)$, определяемый бесконечным цветом, является единственным неглавным 1-типом. Каждая формула $P_{i,n}(a, x)$, где $\mathrm{Col}(a) > n$, $Q(b, x)$, где $\mathrm{Col}(b) = \infty$, $R_j(c, x)$ является главной.*

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k^R = 0$, любое самодостаточное множество A в генерической модели, содержащее две реализации a_1 и a_2 типа $p_\infty(x)$, не связанные ни Q-маршрутами, ни ребрами, можно превратить в самодостаточное множество B в этой же модели, имеющее ту же структуру, что и множество A, с единственным отличием — некоторым R_j-ребром, связывающим элементы b_1 и b_2, соответствующие элементам a_1 и a_2. Поскольку формулы $R_j(b_1, x)$ и $R_j(x, b_2)$ являются главными, переход от структуры A к структуре B можно проинтерпретировать как амальгаму взаимореализуемости моделей $\mathcal{M}_{a_1}$ и $\mathcal{M}_{a_2}$ над типом $\mathrm{tp}(A)$. Таким образом, структура графовой сигнатуры $\{R_j \mid j \in \omega\}$ играет в генерической модели ту же роль, что и ациклические структуры в генерических моделях эренфойхтовых теорий, описанных в третьей главе.

Аналогично следствию 4.6.4 доказывается

Предложение 4.8.2. *Пусть A — самодостаточное множество в модели теории $T^{f,P,R}$. Модель $\mathcal{M}_A$ является полным $\bigcup\limits_{k,n\in\omega} (Q^k \cup P_{k,n} \cup R_k)$-графом над A, т. е. любые два различных элемента $a \in M_A$ и $b \in M_A \setminus A$, связаны некоторой Q^k-дугой или ребром. Множество типов изоморфизма простых моделей над конечными множествами совпадает с множеством типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_A$, где A — самодостаточные множества и $\mathcal{M}_A$ — полные $\bigcup\limits_{k,n\in\omega} (Q^k \cup P_{k,n} \cup R_k)$-графы над A.*

Определим класс $\mathbf{K}_2^*$ конечных структур сигнатуры

$$\Sigma_2 \rightleftharpoons \Sigma_{P,R} \cup \{R_{\mathbf{A}_m} \mid m \in \omega\} \cup$$

$$\cup \{\rho^{(3)} \mid \rho(x, y_i, y_j) \text{ характеризует некоторое CLN-соотношение}\},$$

снабженных записями о взаимоотношении элементов, удовлетворяющими условиям 1 и 2 из предыдущего параграфа, где вместо структур из класса $\mathbf{K}_0^{f,P}$ рассматриваются структуры из класса $\mathbf{K}_0^{f,P,R}$. Отношение самодостаточности $\leqslant_2$ для класса $\mathbf{K}_2^*$ естественным образом наследует отношение самодостаточности $\leqslant$ для класса $\mathbf{K}_0^{f,P,R}$.

Обозначим через $\mathbf{K}_2$ класс всех моделей сигнатуры Σ_2, у которых каждое конечное подмножество образует структуру из класса $\mathbf{K}_2^*$.

Понятие c_2-*вложения* $f : \mathcal{A} \to_{c_2} \mathcal{B}$ для структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из класса $\mathbf{K}_2^*$, при котором сохраняется соответствующая запись $W_\mathcal{A}$ ($W_{f(\mathcal{A})} = W_\mathcal{B} \restriction f(A)$), естественным образом обобщает ранее введенные понятия c-вложений. Тем самым определяется и понятие c_2-вложения $f: \mathcal{A} \to_{c_2} \mathcal{N}$ c_2-структуры $\mathcal{A}$ в модель $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}_2$.

Структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *c_2-изоморфными*, если существует c_2-вложение $f: \mathcal{A} \to_{c_2} \mathcal{B}$ с условием $f(A) = B$.

Теорема 4.8.3. *Существует насыщенная $(\mathbf{K}_2^*; \leqslant_2)$-генерическая модель $\mathcal{M}$ стабильной теории, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_2-изоморфные самодостаточные структуры в модели $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

б) *обеднение модели $\mathcal{M}$ до сигнатуры $\Sigma_{P,R}$ является $\mathbf{K}_0^{f,P,R}$-генерической моделью;*

в) *теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ имеет счетное число 1-типов, каждый из которых определяется цветом любой своей реализации и имеет бесконечный собственный вес; тип $p_\infty(x)$, определяемый бесконечным цветом, является единственным неглавным 1-типом;*

г) *каждая формула $P_{i,n}(a,x)$, где $\mathrm{Col}(a) > n$, $Q(b,x)$, где $\mathrm{Col}(b) = \infty$, $R_j(c,x)$ является главной;*

д) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$, где $\models p_\infty(a)$, является главной, и тип c_2-изоморфизма каждой реализации формулы $R_{\mathbf{A}}(a,\overline{y})$ совпадает с типом c_2-изоморфизма $\mathbf{A}$;*

е) *каждая формула $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$, где $\mathbf{A}$ — тип c_2-изоморфизма кортежа $\overline{a}$, является главной, и каждая реализация формулы $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{a})$ является реализацией типа p_∞.*

Доказательство состоит в очевидной комбинации доказательств теорем 4.7.1 и 4.8.1. □

Обозначим $(\mathbf{K}_2^*; \leqslant_2)$-генерическую теорию через T_2. Очевидно, что теория T_2 обогащает теорию $T^{f,P,R}$.

Повторяя доказательство теоремы 4.7.2 с использованием теоремы 4.8.3, устанавливаем следующую теорему.

Теорема 4.8.4. *Теория T_2 удовлетворяет условию $|\mathrm{RK}(T_2)| = 2$.*

Теорема 4.8.5. *Существует единственная с точностью до изоморфизма предельная модель теории T_2 над типом p_∞.*

Доказательство. Существование предельной модели вытекает из предложения 1.1.8 и следствия 1.1.9 в силу несимметричности отношения полуизолированности SI_{p_∞} по формуле $Q(x,y)$. Для доказательства единственности предельной модели достаточно показать, что любая предельная модель $\mathcal{M}$ над типом p_∞ насыщена.

Пусть предельная модель $\mathcal{M}$ представляется в виде объединения элементарной цепи моделей $\mathcal{M}_{a_n}$, $\models p_\infty(a_n)$, $n\in\omega$. Заметим, что в силу генерической конструкции эту цепь можно выбрать так, что каждая главная формула $\varphi_n(a_{n+1},x)$, для которой $\models\varphi_n(a_{n+1},a_n)$, $n\in\omega$, эквивалентна некоторой формуле $R_j(a_{n+1},x)$ или некоторой формуле $Q^k(a_{n+1},x)\wedge\neg Q^{k-1}(a_{n+1},x)$, $k\geq 1$. Если $\models R_j(a_{n+1},a_n)$, то в моделях $\mathcal{M}_{a_n}$ и $\mathcal{M}_{a_{n+1}}$ компоненты связности по отношению $\bigcup\limits_{i\in\omega}R_j$, содержащие элементы a_n и a_{n+1} соответственно, образуют полный граф и при отсутствии переходов от a_n к последующим элементам по отношениям Q^k модель $\mathcal{M}$ будет простой над некоторым элементом из $\bigcup\limits_{i\in\omega}R_j$-компоненты связности, содержащей элемент a_n, т. е. $\mathcal{M}$ не может быть предельной. Таким образом, в последовательности $(a_n)_{n\in\omega}$ имеется бесконечное число переходов от a_n к a_{n+1}, удовлетворяющих условиям $\models Q^{k_n}(a_{n+1},a_n)\wedge\neg Q^{k_n-1}(a_{n+1},a_n)$. Теперь заметим, что для элементов a_n и a_{n+1}, удовлетворяющих условию $\models Q^{k_n}(a_{n+1},a_n)\wedge\neg Q^{k_n-1}(a_{n+1},a_n)$, $\bigcup\limits_{j\in\omega}R_j$-компоненты связности в моделях $\mathcal{M}_{a_n}$ и $\mathcal{M}_{a_{n+1}}$, содержащие соответственно элементы a_n и a_{n+1}, образуют полный граф по отношению $\bigcup\limits_{k\in\omega}(Q^k\cup R_k)$. Следовательно, из последовательности $(a_n)_{n\in\omega}$ можно извлечь бесконечную подпоследовательность, в которой все элементы попарно связаны Q-маршрутами. Уплотняя эту подпоследовательность элементами кратчайших Q-маршрутов, соединяющих соседние элементы подпоследовательности, получаем элементарную цепь простых моделей $(\mathcal{M}_{b_n})_{n\in\omega}$, для которых $\mathcal{M}=\bigcup\limits_{n\omega}\mathcal{M}_{b_n}$ и $\models Q(b_{n+1},b_n)$, $n\in\omega$.

Рассмотрим теперь произвольный 1-тип $q(x,\overline{c})\in S(\overline{c})$, где $\overline{c}$ — кортеж из M. Покажем, что $q(x,\overline{c})$ реализуется в модели $\mathcal{M}$. Действительно, кортеж $\overline{c}$ принадлежит некоторой модели $\mathcal{M}_{b_n}$, и в силу определения отношений $R_{\mathbf{A}}$ для некоторого типа c_2-изоморфизма $\mathbf{A}$, содержащего реализации типа $q(x,\overline{y})$, и для некоторого $n'\geq n$ найдется элемент $d\in M_{b_{n'}}$ такой, что некоторая проекция $\exists z_{i_1},\ldots,z_{i_m}\, R_{\mathbf{A}}(d,\overline{z})$ реализуется кортежем $\overline{c}$. Поскольку $R_{\mathbf{A}}(d,\overline{z})$ — главная формула, то существует реализующий ее кортеж $\overline{d}\in M$, расширяющий кортеж $\overline{c}$, и по выбору типа c_2-изоморфизма $\mathbf{A}$ некоторая координата кортежа $\overline{d}$ реализует тип $q(x,\overline{c})$. Поскольку тип q выбран произвольно, модель $\mathcal{M}$ является насыщенной. $\square$

На основании следствия 1.1.15 и теорем 4.8.4, 4.8.5 справедлива следующая

Теорема 4.8.6. *Существует стабильная эренфойхтова теория T, у которой $I(T,\omega)=3$.*

§ 4.9. Реализации основных характеристик стабильных эренфойхтовых теорий

Покажем, что аналогично теореме 3.4.1 все возможные наборы основных характеристик эренфойхтовых теорий можно реализовать в классе стабильных теорий.

Теорема 4.9.1. *Для любого конечного предупорядоченного множества $\langle X,\leq\rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X,\leq\rangle/\sim$ по отношению $\sim$ (где $x\sim y\Leftrightarrow x\leq y$ и $y\leq x$), а также для любой функции $f: X/\sim\,\to\omega$, удовлетворяющей условиям $f(\widetilde{x_0})=0$, $f(\widetilde{x_1})>0$ при $|X|>1$, $f(\widetilde{y})>0$ при $|\widetilde{y}|>1$, существует стабильная теория T и изоморфизм $g:\langle X,\leq\rangle\widetilde{\to}\mathrm{RK}(T)$ такой, что $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y}))=f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y}\in X/\sim$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\langle X,\leq\rangle$ — конечное предупорядоченное множество с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X,\leq\rangle/\sim$, $f: X/\sim\,\to\omega$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: $f(\widetilde{x_0})=0$, $f(\widetilde{x_1})>0$ при $|X|>1$, $f(\widetilde{y})>0$ при $|\widetilde{y}|>1$. Без ограничения общности будем считать, что $|X|>1$. Зафиксируем нумерацию $\nu:|X|\to X$ такую, что из $\nu(m)<\nu(n)$ и $\nu(m)\not\sim\nu(n)$ следует $m<n$, а любому $\sim$-классу соответствует интервал в $|X|$. Рассмотрим теорию T_{-1} одноместных предикатов $S_1,\ldots,S_{|X|-1}$, образующих разбиение на $|X|-1$ бесконечных классов, с несущественной раскраской $\mathrm{Col}\colon M\to\omega\cup\{\infty\}$ такой, что $\vdash\exists^{\geq\omega}(S_i(x)\wedge\mathrm{Col}_n(x))$, $i=1,\ldots,|X|-1$, $n\in\omega$.

Очевидно, что проведенным ранее построением теорию T_{-1} можно обогатить симметричными двухместными предикатами $P_{i,n,i'}$, $i,n \in \omega$ (где третий индекс i' означает, что элементы цвета, большего n, связываются с элементами цвета n, принадлежащими отношению $S_{i'}$), до малой стабильной генерической теории T_0 с весами ребер $\alpha^P_{c(c(i,n),i')}$, у которой любое конечное множество элементов, имеющих конечные цвета, связано двухместными предикатами с некоторыми элементами бесконечного цвета, принадлежащими отношениям $S_1,\ldots,S_{|X|-1}$. Тем самым, добавление предикатов $R_{\mathbf{A}}$ со структурами властных орграфов позволит свести построение искомого предпорядка подчинения $\leq_{\rm RK}$ к установлению этого предпорядка для 1-типов элементов бесконечного цвета, определяемых формулами $S_1(x),\ldots,S_{|X|-1}(x)$.

Покажем, что существует стабильное обогащение T теории T_0 с изоморфизмом $g:\langle X,\leq\rangle \widetilde{\rightarrow} {\rm RK}(T)$, удовлетворяющим следующим условиям:

i) $g(\nu(i))=\mathbf{M}_{p_i}$, где $\mathbf{M}_{p_i}$ — тип изоморфизма простой модели $\mathcal{M}_{p_i}$ над реализацией типа $p_i(x)$ из $S^1(\varnothing)$, изолируемого множеством формул $\{S_i(x)\wedge\neg{\rm Col}_n(x)\mid n\in\omega\}$, $i=1,\ldots,|X|-1$, а $p_1(x),\ldots,p_{|X|-1}(x)$ — все неглавные 1-типы над $\varnothing$ от переменной x;

ii) ${\rm IL}(g(\widetilde{y}))=f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y}\in X/{\sim}$.

Построение теории $T=\bigcup\limits_{i<|X|}T_i$ проведем по индукции в соответствии с нумерацией ν. Пусть уже построены теории $T_0,\ldots,T_{k-1}$, а элементы $\nu(k),\nu(k+1),\ldots,\nu(k+l)$ образуют $\sim$-класс.

Если $f(\widetilde{\nu(k)})=0$, то $l=0$ и теорию T_k зададим обогащением сигнатуры теории T_{k-1} новыми двухместными предикатными символами R_{ki} (где класс $\widetilde{\nu(k)}$ покрывает класс $\widetilde{\nu(i)}$, $i\neq 0$) с выполнением следующих условий:

1) каждый предикат R_{ki} разнозначно связан с некоторым весом $\alpha_{k'}$, ограничивающим линейной предранговой функцией $y(\cdot)$ (указанного в параграфе 4.8 вида) число R_{ki}-связей в зависимости от мощности данного конечного множества;

2) $R_{ki}(a,y)$ — главная формула и $R_{ki}(a,y)\vdash p_i(y)$ для любого $a\models p_k$;

3) для любых $a, b \models p_i$ существует бесконечно много элементов $c \models p_k$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}$, таких, что

$$\models R_{ki}(c, a) \wedge R_{ki}(c, b) \wedge R_{ki}(d, a) \wedge R_{ki}(d, b);$$

при этом из $c \models p_k$ и $\models R_{ki}(c, a)$ следует, что a не полуизолирует c.

Очевидно, условия 1–3 можно реализовать так, что модель $\mathcal{M}_{p_k}$ теории T_k будет иметь единственную реализацию типа p_k и, значит, $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = 0 = f(\widetilde{\nu(k)})$. Кроме того в $\mathcal{M}_{p_k}$ по индукции будут реализовываться все типы p_i, подчиняющиеся типу p_k, т. е. удовлетворяющие соотношению $\nu(i) \leq \nu(k)$. Наличие предранговой функции на основе рассуждений, проведенных в предыдущих параграфах, позволяет установить малость и стабильность теории T_k.

Предположим, что $f(\widetilde{\nu(k)}) = r > 0$. Зададим теорию T_k^0 обогащением сигнатуры теории T_{k-1} новыми двухместными предикатными символами R_{ki} (где класс $\widetilde{\nu(k)}$ покрывает класс $\widetilde{\nu(i)}$, $i \neq 0$) с условиями 1–3, а также двухместными предикатными символами R'_{ij} (где $\nu(i), \nu(j) \in \widetilde{\nu(k)}$), удовлетворяющими следующим условиям:

4) каждый предикат R_{ki}, R'_{ij} разнозначно связан с некоторым весом $\alpha_{k'}$, ограничивающим линейной предранговой функцией $y(\cdot)$ (указанного в параграфе 4.8 вида) число R_{ki}-связей и число R'_{ij}-связей в зависимости от мощности данного конечного множества;

5) $R'_{ij}(a, y)$ — главная формула и $R'_{ij}(a, y) \vdash p_j(y)$ для любого $a \models p_i$;

6) для любых $a, b \models p_j$ существует бесконечно много элементов $c \models p_i$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}$, таких, что

$$\models R'_{ij}(c, a) \wedge R'_{ij}(c, b) \wedge R'_{ij}(d, a) \wedge R'_{ij}(d, b);$$

при этом из $c \models p_i$ и $\models R'_{ij}(c, a)$ следует, что a не полуизолирует c;

7) для любых элементов a и b, не реализующих формулы $S_{k+l+1}(x), \ldots, S_{|X|-1}(x)$, существует бесконечно много элементов $c \models p_j$ таких, что $\models R'_{ij}(a, c) \wedge R'_{ij}(b, c)$;

8) отношение $R'_k = \bigcup\limits_{\nu(i),\nu(j)\in\widetilde{\nu(k)}} R'_{ij}$ образует орграф, изоморфный некоторому орграфу $\Gamma^{\rm cpg}$, и при этом длины кратчайших Q-маршрутов разнозначно и монотонно связаны с весами $\alpha_{k'}$.

Как и выше предикаты R_{ki} обеспечивают подчинение типов p_i типу p_k при $\nu(i) < \nu(k)$ и $\nu(i) \not\sim \nu(k)$, а отношения R'_{ij} — взаимоподчиняемость типов p_i и p_j, а также неизоморфность моделей $\mathcal{M}_{p_i}$ и $\mathcal{M}_{p_j}$ при $i \neq j$. Наличие предранговой функции с весами $\alpha_{k'}$ также позволяет установить малость и стабильность теории, строящейся на рассматриваемом шаге.

Теперь аналогично условиям 1 и 2 из параграфа 4.7 с заменой предиката Q на предикат R'_k расширим сигнатуру предикатами $R_{\mathbf{A}}$ так, чтобы типам p_i, $i = k, \ldots, k+l$, подчинялись все типы $q(\overline{x}) \in S(T_k)$ с условиями $S_j(x_i) \notin q(\overline{x})$ для $j > k+l$, и указанным типам q, не подчиняющимся типам p_i, $i < k$, подчинялись все типы $p_k, \ldots, p_{k+l}$, а модели $\mathcal{M}_q$ были изоморфны модели $\mathcal{M}_{p_k}$.

Для выполнения условия $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = r$ зададим на структуре реализаций типа p_k графовую структуру с двухместными отношениями $R''_1, \ldots, R''_r$ такими, что

9) каждый предикат R''_i разнозначно связан с некоторым весом $\alpha_{k'}$, ограничивающим линейной предранговой функцией $y(\cdot)$ (указанного в параграфе 4.8 вида) число R''_i-связей в зависимости от мощности данного конечного множества;

10) $R''_i(a, y)$ — главная формула и $R''_i(a, y) \vdash p_k(y)$ для любого $a \models p_k$, $i \le r$;

11) для любых $a, b \models p_k$ существует бесконечно много элементов $c \models p_k$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}$, таких, что

$$\models R''_i(c, a) \wedge R''_i(c, b) \wedge R''_i(d, a) \wedge R''_i(d, b);$$

при этом из $\models R''_i(c, a)$ и $c \models p_j$ следует, что a не полуизолирует c;

12) отношения R''_i образуют орграфы, изоморфные некоторым орграфам $\Gamma^{\rm cpg}$, и при этом длины кратчайших маршрутов разнозначно и монотонно связаны с весами α_k.

Если $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$ — простые модели над реализациями a и b типа p_k такими, что $\models R''_i(a, b)$ и $\mathcal{M}_b \prec \mathcal{M}_a$, то модель $\mathcal{M}_a$ называется *R''_i-расширением* модели $\mathcal{M}_b$. Элементарная цепь $(\mathcal{M}_s)_{s\in\omega}$ над типом p_k называется *R''_i-цепью*, если $\mathcal{M}_{s+1}$ — R''_i-расширение модели $\mathcal{M}_s$ для любого s.

Если $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$ — простые модели над реализациями a и b типа p_i, $\nu(i) \sim \nu(k)$, такими, что $\models R'_{ii}(a,b)$ и $\mathcal{M}_b \prec \mathcal{M}_a$, то модель $\mathcal{M}_a$ называется *R'_{ii}-расширением* модели $\mathcal{M}_b$.

Аналогично условиям "а", "б" из параграфа 4.8 расширим сигнатуру символами R_j двухместных симметричных предикатов так, чтобы выполнялись следующие условия:

13) каждый предикат R_j разнозначно связан с некоторым весом $\alpha_{k'}$, ограничивающим линейной предранговой функцией $y(\cdot)$ (указанного в параграфе 4.8 вида) число R_j-связей в зависимости от мощности данного конечного множества;

14) для любой предельной над типом p_{k+i}, $0 \leq i \leq l$, модели $\mathcal{M}$ найдется отношение R''_j такое, что $\mathcal{M}$ является объединением R''_j-цепи $(\mathcal{M}_s)_{s\in\omega}$ над типом p_k;

15) предельные над типом p_k модели $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдется предикат R''_i такой, что $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ являются объединениями R''_i-цепей и не являются объединениями R''_j-цепей для $j > i$.

Заметим, что свойства 14 и 15 реализуются с помощью предикатов R_j "говорящих" о том, что

а) любое R'_{kk}-расширение $\mathcal{M}_a$ модели $\mathcal{M}_b$ содержит R''_1-расширение и наоборот;

б) для любого i, $\nu(i) \sim \nu(k)$, $i \neq k$, и любой конечной элементарной цепи $\mathcal{M}_{a_1}, \ldots, \mathcal{M}_{a_s}$, $a_1, \ldots, a_s \models p_i$, существуют реализации $b_1, \ldots, b_{s-1}$ типа p_k такие, что последовательность $\mathcal{M}_{a_1}, \mathcal{M}_{b_1}, \ldots, \mathcal{M}_{b_{s-1}}, \mathcal{M}_{a_s}$ также образует элементарную цепь;

в) если $\mathcal{M}_{b_0}$ и $\mathcal{M}_{b_1}$ — R''_s-расширения модели $\mathcal{M}_{a_n}$, q — тип кортежа $\langle a_0, a'_0 \ldots, a_n, a'_n, a''_n, b_0, b_1\rangle$ элементов, реализующих тип p_k и таких, что $\mathcal{M}_{a_{i+1}}$ — R''_{t_i}-расширение модели $\mathcal{M}_{a'_i}$, равной $\mathcal{M}_{a_i}$, $\models R''_{t_i}(a_{i+1}, a'_i)$, $\mathcal{M}_{b_0}$, $\mathcal{M}_{b_1}$ — R''_{t_n}-расширения модели $\mathcal{M}_{a_n}$, равной $\mathcal{M}_{a'_n}$ и $\mathcal{M}_{a''_n}$, $\models R''_{t_n}(b_0, a'_n) \wedge R''_{t_i}(b_1, a''_n)$, и элементы b_0 и b_1 не связаны ни (b_0, b_1)-Q-маршрутами, ни (b_1, b_0)-Q-маршрутами, то модель $\mathcal{M}_{b_0}$ содержит амальгаму взаимореализуемости $\mathcal{M}_{b_0} *_q \mathcal{M}_{b_1}$;

г) если $\mathcal{M}_{a_1}, \ldots, \mathcal{M}_{a_s}$ — конечная элементарная цепь такая, что модель $\mathcal{M}_{a_{j+1}}$ является R''_{i_j}-расширением модели $\mathcal{M}_{a_j}$, $j = 1, \ldots, s-1$, и $\max\{i_1, \ldots, i_{s-2}\} < i_{s-1}$, то $\mathcal{M}_{a_s}$ содержит некоторую цепь $R''_{i_{s-1}}$-расширений модели $\mathcal{M}_{a_1}$ и наоборот.

В результате указанных обогащений образуется малая стабильная теория $T_k = T_{k+1} = \ldots = T_{k+l}$ такая, что типы $p_k, \ldots, p_{k+l}$ взаимоподчиняются друг другу, модели $\mathcal{M}_{p_k}, \ldots,$ $\mathcal{M}_{p_{k+l}}$ попарно неизоморфны, а число предельных моделей над типами $p_k, \ldots, p_{k+l}$ равно $f(\widetilde{\nu(k)})$.

Продолжая процесс, на шаге $|X| - 1$ получаем малую стабильную теорию $T = T_{|X|-1}$ и изоморфизм $g : \langle X, \leq \rangle \widetilde{\to} \mathrm{RK}(T)$ такой, что $g(\nu(0))$ — тип изоморфизма простой модели теории T, $g(\nu(m))$ — тип изоморфизма модели $\mathcal{M}_{p_m}$, $1 \leq m \leq |X| - 1$, и $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/{\sim}$. $\square$

Глава 5

ГИПЕРГРАФЫ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МАЛЫХ ТЕОРИЙ

В заключительной главе мы рассмотрим семейство гиперграфов простых моделей произвольной малой теории и представим механизм структурного описания моделей теории по этим семействам. Тем самым обосновывается, в частности, ключевая роль теоретико-графовых конструкций в построении приведенных выше примеров эренфойхтовых теорий.

Построения будут проводиться преимущественно на основе моделей $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, которые, как показано, например, в работе П. Тановича [195], во многих случаях позволяют свести достаточно общую структурную ситуацию к классам известных объектов.

Напомним определение модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ [26]. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель. Добавим к сигнатуре $\Sigma(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$ всевозможные одноместные предикатные символы P_E, соответствующие $\varnothing$-определимым отношениям эквивалентности $E(\overline{x},\overline{y})$, а также всевозможные $(l(\overline{x})+1)$-местные предикатные символы π_E. Полученная сигнатура $\Sigma(\mathcal{M})^{\mathrm{eq}}$ является сигнатурой модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Носитель M^{eq} модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ состоит из всевозможных E-классов. При этом элементы модели $\mathcal{M}$ рассматриваются как $=$-классы и образуют *домашний сорт* элементов, а интерпретации символов из $\Sigma(\mathcal{M})$ совпадают с их интерпретациями в модели $\mathcal{M}$. Все остальные элементы из M^{eq} образуют *воображаемые*, или *мнимые сорта*. Каждый предикат P_E состоит из всевозможных E-классов, а каждый предикат π_E является графиком функции, отображающей кортежи элементов домашнего сорта в E-классы, содержащие эти кортежи. Теория модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ не зависит от выбора модели данной теории и обозначается через T^{eq}.

§ 5.1. Гиперграфы простых моделей

Напомним, что *гиперграфом* называется любая пара множеств (X,Y), где Y — некоторое подмножество булеана $\mathcal{P}(X)$ множества X.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель *малой* теории T. Обозначим через $\overline{H}(\mathcal{M})$ совокупность всех подмножеств носителя M системы $\mathcal{M}$, которые являются носителями простых над некоторыми кортежами $\overline{a} \in M$ элементарных подмоделей $\mathcal{M}_{\overline{a}}$ модели $\mathcal{M}$: $\overline{H}(\mathcal{M}) = \{M_{\overline{a}} \mid \mathcal{M}_{\overline{a}}$ — простая над некоторым кортежем $\overline{a} \in M$ элементарная подмодель модели $\mathcal{M}\}$. Пара $(M, \overline{H}(\mathcal{M}))$ называется *гиперграфом всех простых подмоделей* модели $\mathcal{M}$.

Очевидно, что принадлежность кортежа $\overline{b}$ простой модели $\mathcal{M}_{\overline{a}} \in \overline{H}(\mathcal{M})$ равносильна существованию элементарной подмодели $\mathcal{M}_{\overline{b}} \in \overline{H}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}_{\overline{a}}$. Тем самым отношение включения на множестве $\overline{H}(\mathcal{M})$ задает отношение, состоящее из всех пар кортежей $(\overline{a}, \overline{b})$ на множестве M, для которых типы $\mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$ являются главными.

П р и м е р 5.1.1. 1. Для бесконечной модели $\mathcal{M}$ пустой сигнатуры гиперграф $(M, \overline{H}(\mathcal{M}))$ включает все счетные подмножества множества M.

2. Для модели $\mathcal{M}$ плотного линейного порядка без концевых элементов гиперграф $(M, \overline{H}(\mathcal{M}))$ состоит из всевозможных носителей счетных плотных линейно упорядоченных подмножеств без концевых элементов.

3. Модель $\mathcal{M}$ теории Эренфойхта с тремя счетными моделями, построенная на плотном линейно упорядоченном множестве без концевых элементов с добавлением констант c_k, $k \in \omega$, таких, что $c_k < c_{k+1}$, порождает гиперграф $(M, \overline{H}(\mathcal{M}))$, состоящий из всевозможных носителей счетных плотных линейно упорядоченных подмножеств без концевых элементов, каждый из которых включает плотные линейные порядки на каждом из интервалов $(-\infty; c_0)$, $(c_k; c_{k+1})$, $k \in \omega$.

4. Для модели $\mathcal{M}$ линейного пространства над некоторым полем гиперграф $(M, \overline{H}(\mathcal{M}))$ строится из всевозможных конечномерных или счетномерных подпространств. $\square$

Поскольку операция $(\cdot)^{\mathrm{eq}}$ сохраняет малость теории и естественным образом расширяет простые модели над кортежами до простых моделей над элементами, в дальнейшем для удобства изложения вместо моделей $\mathcal{M}$ часто будут рассматриваться модели $\mathcal{M}^{\rm eq}$, а в гиперграфы простых моделей будут включаться лишь носители простых моделей над элементами (а не кортежами) модели $\mathcal{M}^{\rm eq}$. Рассматриваемое множество носителей простых моделей будет обозначаться через $H(\mathcal{M}^{\rm eq})$.

Отметим, что приводимые ниже понятия и рассуждения также имеют смысл для моделей, в которых каждая простая над некоторым кортежом элементарная подмодель является простой над некоторым своим элементом. К таким моделям, например, относятся простые модели над $\varnothing$, а также модели теорий, у которых имеется неглавный 1-тип и все неглавные типы являются властными.

Покажем, что гиперграфы $(M^{\rm eq}, H(\mathcal{M}^{\rm eq}))$ счетных моделей $\mathcal{M}$ позволяют определять счетную категоричность данной теории T.

Действительно, простота модели $\mathcal{M}^{\rm eq}$ над некоторым элементом равносильна тому, что множество $M^{\rm eq}$ принадлежит $H(\mathcal{M}^{\rm eq})$. Поскольку любая счетная модель счетно категоричной теории проста, а любая не счетно категоричная малая теория имеет счетную насыщенную модель, которая не является простой ни над каким кортежом, справедливо следующее

Предложение 5.1.1. *Теория T счетно категорична тогда и только тогда, когда для любой счетной модели $\mathcal{M} \models T$ выполняется $M^{\rm eq} \in H(\mathcal{M}^{\rm eq})$.*

Если исходная теория не является счетно категоричной, как показывают приведенные выше примеры, структуры $(M^{\rm eq}, H(\mathcal{M}^{\rm eq}))$ с классификационной точки зрения в общей ситуации мало информативны, поскольку классы эквивалентности по типам изоморфизма гиперграфов слишком широки относительно типов формульной взаимоопределимости данных структур и слабо учитывают специфику самих структур.

Вместе с тем в определенных ситуациях свойства гиперграфов $(M^{\rm eq}, H(\mathcal{M}^{\rm eq}))$ могут оказаться полезными. Например, наличие минимальных простых моделей отражается в гиперграфе в виде наличия минимальных множеств, а структуры с несимметричным отношением полуизолированности влекут существование в гиперграфах бесконечных $\subseteq$-цепей без концевых элементов. В подобных ситуациях представляется перспективной *проблема* изучения взаимосвязи классов структур и классов соответствующих гиперграфов.

Отметим следующее полезное свойство гиперграфов $(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}))$ для счетных моделей $\mathcal{M}$, которое вытекает из представимости (см. доказательство предложения 1.1.7) любой счетной модели малой теории в виде объединения элементарной цепи простых моделей и, тем самым, выделяет все гиперграфы счетных моделей малых теорий среди всех возможных гиперграфов на счетных носителях.

Предложение 5.1.2. *Любое счетное множество M^{eq} представляется в виде счетного объединения $\subseteq$-цепи множеств из $H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$.*

§ 5.2. НРКВ-Гиперграфы и теорема о структуре типа

Для получения дополнительной классификационной информации о моделях данной теории T свяжем с гиперграфом $(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}))$ *ядерную* функцию

$$\ker_{\mathcal{M}} : H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}) \to \mathcal{P}(M^{\mathrm{eq}}),$$

действующую по следующему правилу:

$$\ker_{\mathcal{M}}(M_a) \rightleftharpoons \{b \in M_a \mid \mathcal{M}_b = \mathcal{M}_a\}.$$

Множество $\ker_{\mathcal{M}}(M_a)$ называется *ядром* модели $\mathcal{M}_a$ (относительно модели $\mathcal{M}$).

Предложение 5.2.1. *Ядро каждой элементарной подмодели $\mathcal{M}_a$ модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ состоит из всех элементов $b \in M_a$, связанных с элементом a некоторыми формулами $\varphi_b(x, y)$, для которых выполняется $\models \varphi_b(a, b)$ и формулы $\varphi_b(a, y)$, $\varphi_b(x, b)$ являются главными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если указанной формулы $\varphi_b(x, y)$ не существует, то $\mathrm{tp}(a/b)$ — неглавный тип и равенство $\mathcal{M}_b = \mathcal{M}_a$ невозможно. Если же формула $\varphi_b(x, y)$ имеется, то рассмотрим произвольный кортеж $\overline{c}$ элементов из $\mathcal{M}_a$. По определению простой модели существует главная формула $\psi(a, y, \overline{z})$, для которой выполняется $\models \psi(a, b, \overline{c})$. Тогда формула $\varphi_b(x, b) \wedge \psi(x, b, \overline{z})$ является главной и изолирует тип $\mathrm{tp}(a\,\hat{}\,\overline{c}/b)$. Тем самым в модели $\mathcal{M}_a$ реализуются лишь главные типы над b, и справедливо равенство $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_b$. $\square$

Из предложения 5.2.1 вытекает, что для любой счетной простой модели $\mathcal{M}$ над $\varnothing$ выполняется $\ker_{\mathcal{M}}(M^{\mathrm{eq}}) = M^{\mathrm{eq}}$. Тогда это же равенство справедливо для любой счетной модели счетно категоричной теории T и, более того, на основании предложения 5.1.1 справедливо

Следствие 5.2.2. *Теория T счетно категорична тогда и только тогда, когда для любой счетной модели $\mathcal{M} \models T$ ядро каждой элементарной подмодели $\mathcal{M}_a$ модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ совпадает с M_a.*

Рассмотрим теперь для модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ всевозможные формулы $\varphi(x,y)$, для которых $\vdash \varphi(x,y) \to \neg(x \approx y)$ и найдутся элементы $a \in M^{\mathrm{eq}}$ такие, что формулы $\varphi(a,y)$ являются главными. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_\varphi \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M}^{\mathrm{eq}} \models \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_\varphi$ пару (a,b) будем называть *φ-дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула, то φ-дуга (a,b) называется *главной*. Если кроме того $\varphi(x,b)$ является главной формулой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется *главным φ-ребром*. φ-Дуги и φ-ребра называются соответственно *дугами* и *ребрами*, если из контекста ясно о какой формуле идет речь или речь идет о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Главные дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются главными дугами, будем называть *необращаемыми*.

Модель $\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}$ с носителем M^{eq} и всевозможными двухместными отношениями R_φ называется *главным графом* модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.

Предложение 5.2.3. *Проекции всевозможных двухместных отношений R_φ определяют множества реализаций всех 1-типов теории T^{eq}, реализуемых в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p(x)$ — произвольный 1-тип теории T^{eq}, реализуемый в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Из малости теории T вытекает наличие некоторой главной формулы $\varphi_0(y)$ этой теории. Следовательно, найдется формула $\psi(x,y)$ и реализация a типа $p(x)$ в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, для которых формула $\psi(a,y)$ является главной и выполняется $\psi(a,y) \vdash \varphi_0(y)$. При этом в качестве $\psi(x,y)$ годится любая формула $\chi(x,y)$ вида $\psi(x,y) \wedge \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — произвольная формула типа $p(x)$. Тогда любая реализация совокупности X всех указанных формул $\exists y\, R_\psi(x,y)$ является реализацией типа $p(x)$. $\square$

Таким образом, помимо *главной* бинарной структуры модель $\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}$ содержит структуру всех 1-типов, реализуемых в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.

Напомним [13], что неорграф без петель называется *полным*, если любые две его различные вершины смежны.

Из предложения 5.2.1 вытекает, что ядро любой простой модели $\mathcal{M}_a$ со всевозможными главными ребрами образует полный неорграф, а любая вершина $b \in M_a$, не принадлежащая $\ker_{\mathcal{M}}(M_a)$, является общим концом всевозможных главных дуг (c, b), где $c \in \ker_{\mathcal{M}}(M_a)$, и никакая из пар (b, c) не является главной дугой. В частности, для любой счетной модели $\mathcal{M}$ счетно категоричной теории ядро $\ker_{\mathcal{M}}(M^{\mathrm{eq}})$ образует полный граф на множестве M^{eq}, и это свойство представляет еще одну характеризацию счетной категоричности.

При рассмотрении гиперграфа $(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}))$ с ядерной функцией $\ker_{\mathcal{M}}$ ядра $\ker_{\mathcal{M}}(M_a)$ простых моделей $\mathcal{M}_a$ над реализациями a фиксированного 1-типа $p(x)$ образуют максимальные связные графы на множестве M^{eq}. Эти графы соответствуют компонентам связности C неорграфов с раскрашенными ребрами, образованных всевозможными главными ребрами. Ограничения компонент C на множество реализаций типа $p(x)$ образуют графы с раскрашенными ребрами, которые при условии насыщенности исходной модели $\mathcal{M}$ будем называть *ядерными неорграфами над типом p*. При этом, по определению, группы автоморфизмов ядерных неорграфов транзитивны, а теории этих неорграфов малы.

В силу теоремы компактности ядерный неорграф на множестве реализаций типа $p(x)$ в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, соответствующей насыщенной модели $\mathcal{M}$, является единственным тогда и только тогда, когда структура ядерного неорграфа, ограниченного на $p(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$, имеет конечное число 2-типов и $p(x)$ — главный тип. В противном случае имеется бесконечное число таких ядерных неорграфов. Поскольку группа автоморфизмов структуры типа, получаемой из насыщенной модели, транзитивна, все ядерные неорграфы над типом $p(x)$ попарно изоморфны.

Среди известных ядерных неорграфов отметим следующие, играющие существенную роль при построении эренфойхтовых теорий:

а) полные α-элементные неорграфы, где ядерные неорграфы получаются заменой каждого элемента в плотном линейном порядке без концевых элементов со счетной цепью констант на класс эквивалентности, содержащий α попарно несравнимых элементов (см. параграф 1.4);

б) ациклические неорграфы со счетным числом цветов ребер и с бесконечным числом ребер каждого из цветов, инцидентных любой вершине (см. параграф 3.3);

в) неорграфы Хрушовского — Хервига [113] (малые стабильные неорграфы с бесконечным весом и раскраской ребер счетным числом цветов), использовавшиеся при решении проблемы Лахлана (см. параграф 4.8);

г) модели кубических теорий [59].

Ядерные неорграфы, получаемые из примеров а, б и г, являются полными, а насыщенные неорграфы Хрушовского — Хервига образуют ядерные неорграфы с бесконечным диаметром относительно объединения всех входящих в них бинарных отношений.

Рассмотрим теперь связи между ядерными неорграфами, осуществляемые с помощью необращаемых главных дуг. Эти связи уместно прослеживать с помощью следующего объекта, включающего определенные выше составляющие.

Для данной модели $\mathcal{M}$ *гиперграфом простых моделей с ядерной функцией и главной бинарной структурой*, или НРКВ-*гиперграфом* будем называть четверку

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(M^{\rm eq}, H(\mathcal{M}^{\rm eq}), \ker_{\mathcal{M}}, \Sigma\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\rm eq}\right)\right),$$

где $\Sigma\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\rm eq}\right)$ — совокупность всех двухместных отношений главного графа $\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\rm eq}$.

Покажем, каким образом структуры НРКВ-гиперграфов $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ в целом и входящие в них необращаемые главные дуги, в частности, отражают структурные свойства данной теории T.

Прежде всего заметим, что из изоморфной вложимости модели $\mathcal{M}$ в модель $\mathcal{N}$ следует изоморфная вложимость НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ в НРКВ-гиперграф $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Отсюда, в частности, вытекает, что насыщенной (однородной, универсальной) модели $\mathcal{M}$ соответствует НРКВ-гиперграф $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ специального вида, который также можно рассматривать как *насыщенный* (*однородный*, *универсальный*) НРКВ-гиперграф среди всех НРКВ-гиперграфов моделей данной теории. Отношения полуизолированности на множествах реализаций типов (и их свойства) также преобразуются в отношения полуизолированности (и соответствующие свойства) на множествах реализаций 1-типов.

Покажем, что при наличии необращаемых дуг, связывающих реализации полного 1-типа $p(x)$, отношение полуизолированности SI_p несимметрично (как в исходной структуре, так и в соответствующем НРКВ-гиперграфе).

Действительно, пусть (a, b) — $\varphi(x, y)$-главная дуга, а пара (b, a) не является главной дугой, где a и b — реализации типа p. Предполагая напротив, что SI_p симметрично, рассматриваемую формулу φ можно выбрать таким образом, что $\varphi(x, b) \vdash p(x)$. В силу малости теории некоторая пара (b, a') является главной дугой, где $\models \varphi(a', b)$. Рассмотрим формулу $\psi(x, y)$, для которой $\models \psi(a', b)$ и $\psi(x, b)$ — главная формула. Переведем некоторым автоморфизмом f элемент a' в элемент a. Тогда элемент b перейдет в некоторый элемент b' и выполнится $\models \varphi(a, b') \wedge \psi(a, b')$. Поскольку $\varphi(a, y)$ — главная формула, найдется автоморфизм, фиксирующий a и переводящий b' в b. Следовательно, выполняется $\models \varphi(a, b) \wedge \psi(a, b)$ и пара (b, a) является главной дугой. Полученное противоречие означает, что SI_p несимметрично и это свойство гарантируется каждой необращаемой главной дугой (a, b) с концами на множестве реализаций типа $p(x)$. Кроме того, поскольку для любого главного типа отношение полуизолированности на множестве его реализаций симметрично, наличие необращаемой главной дуги (a, b) влечет неизолированность типа $p(x)$.

Проведенное рассуждение показывает, что переходы с помощью необращаемых главных дуг от элементов к элементам на множестве реализаций типа p связывают различные ядерные неорграфы над типом p. В силу транзитивности отношения полуизолированности эти переходы определяют отношение частичного порядка $\leq$ на множестве ядерных неорграфов над типом p, и каждый ядерный неорграф принадлежит бесконечной $\leq$-цепи.

Таким образом справедлива следующая *p-декомпозиционная теорема.*

Теорема 5.2.4. 1. *Структура множества реализаций любого полного* 1*-типа* $p(x)$ *над* $\varnothing$ *в* НРКВ*-гиперграфе* $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ *составляется из попарно непересекающихся ядерных неорграфов над типом* $p(x)$*, а также из частичного порядка* $\leq$ *на множестве этих ядерных неорграфов, который определяется необратимыми главными дугами.*

2. *Ядерный неорграф на множестве реализаций типа $p(x)$ в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, соответствующей счетной насыщенной модели $\mathcal{M}$, является единственным, если структура ядерного неорграфа, ограниченного на $p(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$, имеет конечное число 2-типов и $p(x)$ — главный тип. Имеется бесконечное число таких ядерных неорграфов в противном случае. Все ядерные неорграфы над типом $p(x)$ попарно изоморфны.*

3. *Совпадение частичного порядка $\leq$ с тождественным отношением равносильно отсутствию необращаемых главных дуг, связывающих реализации типа $p(x)$, или, что то же самое, симметричности отношения полуизолированности SI_p. Если $\leq$ — нетождественный частичный порядок, то каждый ядерный неорграф принадлежит бесконечной $\leq$-цепи.*

Примеры указанных выше частичных порядков $\leq$ относительно необращаемых главных дуг извлекаются из следующих известных примеров структур с несимметричным отношением полуизолированности:

1) примеры Эренфойхта структур на плотных линейных порядках со счетным множеством констант, упорядоченных по возрастанию;

2) примеры М. Г. Перетятькина структур на бесконечно ветвящихся деревьях со счетным множеством констант, упорядоченных по возрастанию [42], [43];

3) структура свободной ориентированной псевдоплоскости с 1-несущественной упорядоченной раскраской (см. пример 1.2.3);

4) нестабильные и стабильные генерические эренфойхтовы структуры, представленные в третьей и четвертой главах.

§ 5.3. Графовые связи между типами

Рассмотрим теперь графовые связи между структурами разных типов.

В силу того, что всем n-типам, реализуемым в модели $\mathcal{M}$, соответствуют 1-типы, реализуемые в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ именами реализаций n-типов, предпорядок Рудина — Кейслера $\leq_{\mathrm{RK}}$ на множестве типов, реализуемых в модели $\mathcal{M}$, интерпретируется в виде предпорядка Рудина — Кейслера $\leq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}}$ на множестве 1-типов, реализуемых в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, который в свою очередь переносится на структуру НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Это, в частности, означает, что реализуемость в модели $\mathcal{M}$ властного типа (или, что эквивалентно, наличие в $\mathcal{M}$ наибольшего $\leq_{\mathrm{RK}}$-класса для теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$) равносильна существованию властного 1-типа и его реализуемости в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, т. е. наличию наибольшего $(\leq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}} \cap \geq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}})$-класса для совокупности 1-типов, реализуемых в структуре $\left(M^{\mathrm{eq}}, \Sigma\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}\right)\right)$, а также универсальности НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Таким образом, справедлива следующая теорема, а также ее непосредственное следствие.

Теорема 5.3.1. *Для любого предпорядка Рудина — Кейслера $\leq_{\mathrm{RK}}$ на множестве типов некоторой малой теории существует универсальный* НРКВ-*гиперграф* $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, *в котором на множестве всех реализаций* 1-*типов интерпретируется множество с предпорядком $\leq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}}$, изоморфное множеству с предпорядком $\leq_{\mathrm{RK}}$.*

Следствие 5.3.2. *Предпорядок $\leq_{\mathrm{RK}}$ теории T определяет наибольший $(\leq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}} \cap \geq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}})$-класс (непустое множество властных типов) тогда и только тогда, когда имеется наибольший $(\leq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}} \cap \geq_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}})$-класс для совокупности* 1-*типов, реализуемых в структуре $\left(M^{\mathrm{eq}}, \Sigma\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}\right)\right)$, где $\mathcal{M}$ — универсальная модель теории T.*

Переходы между ядерными неорграфами 1-типов p и q по предпорядку Рудина — Кейслера осуществляются с помощью главных ребер (при этом типы p и q взаимоподчиняются друг другу, и модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ изоморфны) или необратимых главных дуг. Если элементы a и b ядерных неорграфов Γ_p и Γ_q над типами p и q соответственно связаны лишь необратимыми главными дугами (a, b), то модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ неизоморфны, а взаимоподчиняемость типов p и q равносильна существованию ядерного неорграфа Γ'_p над типом p, некоторый элемент c которого принадлежит главной дуге (b, c).

Следовательно, на множестве *главных компонент связности C*, т. е. компонент связности, образованных главными ребрами, можно ввести частичный порядок $\leq$, который определяется необратимыми главными дугами. При этом как и для цепей ядерных неорграфов $\leq$-цепи главных компонент связности в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, соответствующей насыщенной модели $\mathcal{M}$, могут быть лишь одноэлементными (для счетно категоричной теории) или бесконечными.

Действительно, в силу теоремы компактности из наличия двух главных компонент связности вытекает из бесконечное число. С другой стороны, любое n-элементное множество A, составленное из элементов, принадлежащих n разным главным компонентам связности, принадлежит простой модели $\mathcal{M}_A$ над A. Следовательно, в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ есть элемент c (имя для кортежа всех элементов из A), который является началом n необращаемых главных дуг с концами из A. Таким образом, каждый элемент из $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ является концом некоторой необращаемой главной дуги, и с помощью этих дуг можно составить бесконечную $\leq$-цепь главных компонент связности. Более того, в силу существования указанных выше элементов c множество главных компонент связности с частичным порядком $\leq$ является направленным вниз.

Таким образом аналогично теореме 5.2.4 справедлива следующая *декомпозиционная теорема* о структуре, связывающей ядерные неорграфы над разными типами.

Теорема 5.3.3. 1. *Структура множества реализаций любого полного* 1*-типа* $p(x)$ *над* $\varnothing$ *в* НРКВ*-гиперграфе* $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ *составляется из попарно непересекающихся главных компонент связности, а также из частичного порядка* $\leq$ *на множестве главных компонент связности, который определяется необратимыми главными дугами.*

2. *Главная компонента связности в модели* $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$*, соответствующей счетной насыщенной модели* $\mathcal{M}$*, единственна, если структура* $\mathcal{M}$ *счетно категорична. Имеется бесконечное число главных компонент в противном случае. Все главные компоненты, содержащие реализации одного и того же типа, попарно изоморфны.*

3. *Совпадение частичного порядка* $\leq$ *с тождественным отношением равносильно отсутствию необращаемых главных дуг или, что то же самое, счетной категоричности данной теории. Если* $\leq$ *— нетождественный частичный порядок, то каждая главная компонента связности принадлежит бесконечной* $\leq$*-цепи. Множество всех главных компонент связности направлено вниз частичным порядком* $\leq$*.*

§ 5.4. Предельные модели

Модель $\mathcal{M}$ называется *предельной*, если $\mathcal{M}$ не является простой моделью ни над каким кортежем и $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ для некоторой элементарной цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ простых моделей над некоторыми кортежами.

На основе доказательства предложения 1.1.7 справедливо

Предложение 5.4.1. *Любая счетная модель $\mathcal{M}$ малой теории T представляется в виде объединения некоторой элементарной цепи $(\mathcal{M}_{\overline{a}_i})_{i\in\omega}$ простых моделей над кортежами $\overline{a}_i$.*

В силу предложения 5.4.1 справедлива следующая

Теорема 5.4.2. *Каждая счетная модель малой теории, не являющаяся простой ни над каким кортежем, предельна. Носители всех счетных моделей малой теории представляются в* НРКВ-*гиперграфах $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ в виде выделенных множеств или в виде объединения счетных цепей последовательно строго вложенных выделенных множеств M_n, $n \in \omega$. При этом во втором случае элементы ядер $\ker_{\mathcal{M}}(M_n)$, $n \in \omega$, связаны с элементами ядер $\ker_{\mathcal{M}}(M_k)$, $k < n$, необращаемыми главными дугами.*

Как замечено в предложениях 1.1.7 и 3.5.2, из конечности предпорядка Рудина — Кейслера в системе $\mathrm{RK}(T)$ следует, что любая счетная модель $\mathcal{M}$ теории T, не являющаяся простой ни над каким кортежем, предельна над некоторым типом p.

В общей ситуации предельные модели могут не составляться из простых моделей $\mathcal{M}_n$ над реализациями одного и того же типа, т. е. ядра моделей $\mathcal{M}_n$ после переноса в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ могут лежать лишь в таких структурах реализаций типов $p_{nk}(x)$, $k \in \omega$, что $p_{n_1k_1} \neq p_{n_2k_2}$ при $n_1 \neq n_2$.

Предельные модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются *эквивалентными* (пишем $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$), если существуют элементарные цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ и $(\mathcal{N}_n)_{n\in\omega}$ простых над некоторыми кортежами моделей, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$;

2) существуют константные обогащения $\mathcal{M}'_{n+1} = \langle \mathcal{M}_{n+1}, c\rangle_{c\in M'_n}$ и $\mathcal{N}'_{n+1} = \langle \mathcal{N}_{n+1}, c\rangle_{c\in N'_n}$, $n \in \omega$, $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}'_0 = \mathcal{N}_0$, такие, что $\mathcal{M}'_{n+1} \simeq \mathcal{N}'_{n+1}$, $n \in \omega$.

Очевидным является следующее предложение.

Предложение 5.4.3. *Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — предельные модели, то $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$.*

Рассмотрим теперь иерархии предельных моделей по степени их насыщенности, подобные иерархиям простых моделей по предпорядкам Рудина — Кейслера и позволяющие оценивать число попарно неизоморфных предельных моделей.

Обозначим через $\mathrm{EEL}(T)$ множество **LM** типов изоморфизма предельных моделей теории T с отношением элементарной вложимости $\preceq$.

Очевидно, что любое непустое множество $\mathrm{EEL}(T)$ предупорядочено, а из малости теории T следует существование в $\mathrm{EEL}(T)$ элемента (типа изоморфизма счетной насыщенной модели), в который элементарно вкладываются все типы изоморфизма предельных моделей. Вместе с тем система $\mathrm{EEL}(T)$ может не иметь минимальных классов $(\preceq\,\cap\,\succeq)$-эквивалентности. Кроме того, вообще говоря, нельзя утверждать единственность такого "наибольшего" элемента. Более того, например, в известных эренфойхтовых теориях насыщенные модели элементарно вложимы даже в простые модели над реализациями властных типов.

Таким образом, число $I_l(T)$ попарно неизоморфных предельных моделей малой теории T ограничивается снизу числом $|\mathrm{EEL}(T)/(\preceq\cap\succeq)|$ классов $(\preceq\cap\succeq)$-эквивалентности. В отдельных случаях оценка

$$I_l(T) \geq |\mathrm{EEL}(T)/(\preceq \cap \succeq)| \tag{5.1}$$

неулучшаема, например, при $I(T,\omega) = 3$, а в некоторых примерах из третьей и четвертой глав неравенство (5.1) является строгим. Остается открытой *проблема* характеризации малых теорий с условием $I_l(T) = |\mathrm{EEL}(T)/(\preceq\cap\succeq)|$.

Приведенные рассуждения показывают, что иерархия насыщенности предельных моделей, строящаяся на основе множества $\mathrm{EEL}(T)$ с предпорядком элементарной вложимости достаточно слабо связана с числом $I_l(T)$.

Введем в рассмотрение утончение $\mathrm{EEL}(T)$-иерархии, при котором связь между типами изоморфизмов моделей осуществляется на основе согласования между последовательностями главных компонент связности, а простые модели над некоторыми элементами этих компонент составляют заданные предельные модели.

Будем говорить, что предельная модель $\mathcal{M}$ *согласованно элементарно вложима* в предельную модель $\mathcal{N}$, если существует элементарное вложение f модели $\mathcal{M}$ в модель $\mathcal{N}$, переводящее некоторые кортежи $\overline{a}_n \in M$ в соответствующие кортежи $f(\overline{a}_n) \in N$, $n \in \omega$, такие, что $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{\overline{a}_n}$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{N}_{f(\overline{a}_n)}$. Обозначим через $\mathrm{CEEL}(T)$ множество $\mathbf{LM}$ типов изоморфизма предельных моделей теории T с отношением согласованной элементарной вложимости $\preceq_c$.

Как и для $\mathrm{EEL}(T)$-иерархии $\mathrm{CEEL}(T)$-иерархия позволяет оценивать снизу число $I_l(T)$:

$$I_l(T) \geq |\mathrm{CEEL}(T)/(\preceq_c \cap {}_c\succeq)|. \tag{5.2}$$

Следующий пример показывает, что в общем случае как и для взаимной элементарной вложимости наличие взаимной согласованной элементарной вложимости предельных моделей не гарантирует их изоморфизма, т. е. неравенство (5.2) также может являться строгим.

П р и м е р 5.4.1. Рассмотрим счетную модель $\mathcal{M}$ связного бесконтурного ациклического графа $\langle M; Q\rangle$, в котором каждый элемент имеет бесконечное число образов и бесконечное число прообразов (см. пример 1.2.3). Снабдим эту структуру 1-несущественной упорядоченной раскраской так, чтобы на множестве реализаций типа $p_\infty(x)$ отношение полуизолированности было несимметричным: если $\models p_\infty(a)$ и $\models Q(a,b)$, то a полуизолирует b посредством формулы $Q(a,y)$, а b не полуизолирует a. Теперь обогатим структуру предикатами $R_n^{(n+2)}$, $n \in \omega$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) $R_0 = Q$;

2) если $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\models p_\infty(a_n)$ и $\models Q(a_{i+1}, a_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$, то

$$R_n(a_n, \ldots, a_0, y) \vdash R_{n-1}(a_{n-1}, \ldots, a_0, y)$$

и $R_n(x, a_{n-1}, \ldots, a_0, y)$ при изменении реализаций типа $p_\infty(x)$ в пределах $Q(\mathcal{M}, a_{n-1})$ определяет на множестве $R_{n-1}(a_{n-1}, \ldots, a_0, \mathcal{M})$ бесконечное число классов эквивалентности, каждый из которых бесконечен.

Рассмотрим неглавный тип $q(x)$, содержащий все формулы $R_n(a_n, \ldots, a_0, x)$, где $(a_n)_{n\in\omega}$ — последовательность реализаций типа p_∞, $\models Q(a_{n+1}, a_n)$, $n \in \omega$. Существуют взаимно согласованно элементарно вложимые неизоморфные предельные модели, задаваемые последовательностью $(a_n)_{n\in\omega}$, в которых тип $q(x)$ имеет различное конечное число реализаций. $\square$

Приведенная в примере причина неизоморфности взаимно согласованно элементарно вложимых предельных моделей, основанная на возможности различного числа реализаций типов q (и, как следствие, на неоднородности предельных моделей с выделенными константами a_n), по-существу единственна, поскольку отсутствие таких типов позволяет шаг за шагом расширять конечные частичные изоморфизмы между взаимно согласованно элементарно вложимыми предельными моделями, доводя частичные изоморфизмы до изоморфизмов моделей. Возможность таких расширений можно проследить на примерах предельных моделей эренфойхтовых теорий из работ [42], [43], [199], а также генерических эренфойхтовых теорий из третьей и четвертой глав. При этом в генерических примерах изоморфизмы предельных моделей строятся на основе существования в этих моделях реализаций одних и тех же типов над конечными множествами, обеспечиваемых специальными предикатами $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})$.

§ 5.5. λ-Модельные гиперграфы

В этом параграфе мы определим связь структуры НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ счетной насыщенной модели $\mathcal{M}$ теории T с числом $I(T,\omega)$ попарно неизоморфных счетных моделей теории T, а также укажем средства обогащения НРКВ-гиперграфа, приводящие к точному подсчету значения $I(T,\omega)$, равного числу попарно неизоморфных структурных объектов, определяемых обогащенным НРКВ-гиперграфом.

Полные 1-типы $q_1(x)$ и $q_2(x)$ над $\varnothing$, реализуемые в НРКВ-гиперграфе $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, назовем *p-эквивалентными* и будем писать $q_1 \sim_p q_2$, если некоторая главная компонента связности содержит реализации типов $q_1(x)$ и $q_2(x)$.

Обозначим через $I_p(T,\omega)$ число попарно неизоморфных счетных моделей теории T, каждая из которых является простой над некоторым кортежом.

Предложение 5.5.1. *Число $I_p(T,\omega)$ совпадает с числом классов $\sim_p$-эквивалентности теории T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу насыщенности модели $\mathcal{M}$ каждая простая над некоторым кортежем $\overline{a}$ модель представляется некоторым 1-типом, реализуемым именем $c_{\overline{a}}$ кортежа $\overline{a}$ в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. С другой стороны, представляемые $\sim_p$-эквивалентными типами простые модели изоморфны, поскольку при наличии маршрута, состоящего из главных ребер и соединяющего реализации 1-типов q_1 и q_2, простота модели над реализацией типа q_1 равносильна ее простоте над реализацией типа q_2. Таким образом, число $I_p(T,\omega)$ равно числу попарно $\sim_p$-неэквивалентных полных 1-типов над $\varnothing$, реализуемых в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. $\square$

Поскольку в силу теоремы 5.4.2 каждая предельная модель теории T представляется в виде объединения счетной цепи структур последовательно строго вложенных выделенных множеств НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, изоморфизм предельных моделей влечет изоморфизм соответствующих предельных структур в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. Следовательно, на основании предложения 5.4.1 число $I(T,\omega)$ оценивается снизу суммой числа классов $\sim_p$-эквивалентности и числа $I_l(\mathcal{H}(\mathcal{M}))$ попарно неизоморфных предельных структур в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$:

$$I(T,\omega) \geq I_p(T,\omega) + I_l(\mathcal{H}(\mathcal{M})). \tag{5.3}$$

Эта оценка на графовом уровне неулучшаема, так как графовые структуры модели $\mathcal{M}$ переносятся в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Рассмотрим теперь возможности обогащений НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, приводящие к достижению равенства в неравенстве (5.3) после замены $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ на обогащенный НРКВ-гиперграф.

На основании предложения 5.4.3 наличие изоморфизма предельных моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ свидетельствуется возможностью *согласованного* расширения простых моделей, представленных в НРКВ-гиперграфах $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Эта согласованность достигается введением в НРКВ-гиперграфы соответствий между кортежами элементов и их именами в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, а также некоторой системы формульно определимых двухместных отношений, через которые формульно определяются все формульные отношения исходной структуры. Тем самым для обогащенных НРКВ-гиперграфов будет иметь место равенство в неравенстве (5.3).

Покажем теперь, что сигнатурные средства, использованные в третьей и четвертой главах для построения реализаций основных характеристик эренфойхтовых теорий, являются минимальными при интерпретациях насыщенных моделей $\mathcal{M}$ в виде НРКВ-гиперграфов, задающих эти характеристики.

Действительно, одноместные предикаты $\mathrm{Col}_n(x)$, $n \in \omega$, обеспечивают наличие неглавных 1-типов, которые обязаны реализовываться в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Двухместный предикат $Q(x,y)$ (такой предикат в структуре может быть не один, а допускается наличие счетного формульно независимого семейства $Q_n(x,y)$, $n \in \omega$) создает несимметричность отношения полуизолированности на множестве реализаций властного типа $p_\infty(x)$, определяемого множеством формул $\neg\mathrm{Col}_n(x)$, $n \in \omega$. Семейство двухместных предикатов $\{R_j \mid j \in \omega\}$ образует ядерные неорграфы на множестве реализаций типа $p_\infty(x)$, упорядоченные посредством предиката Q в соответствии с теоремами 5.2.4 и 5.3.3, а предикаты $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})$ обеспечивают взаимореализуемость властного типа $p_\infty(x)$ с остальными властными типами.

Рассмотрим теперь произвольную теорию T, имеющую ровно три попарно неизоморфные счетные модели. Напомним, что все неглавные типы теории T являются властными и после перехода от насыщенной модели $\mathcal{M}$ к модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ зафиксируем в качестве типа $p_\infty(x)$ некоторый неглавный 1-тип, реализуемый в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Для определяющего тип $p_\infty(x)$ множества формул $\varphi_n(x)$, $n \in \omega$, где $\{\varphi_n(x) \mid n \in \omega\} \vdash p_\infty(x)$, в качестве формул $\mathrm{Col}_n(x)$ рассмотрим формулы $\varphi_n(x) \wedge \neg\varphi_{n+1}(x)$, а в качестве $Q_n(x,y)$, $n \in \omega$ — счетное семейство формул, каждая из которых свидетельствует о несимметричности отношения полуизолированности SI_{p_∞} и является главной после подстановки вместо первой координаты любой реализации типа p_∞. Более того, потребуем, чтобы для любых двух реализаций a и b типа $p_\infty(x)$ нашлась реализация c этого же типа и формулы $Q_i(x,y)$, $Q_j(x,y)$, для которых выполнялось $\models Q_i(c,a) \wedge Q_j(c,b)$, и тем самым имело место локальное свойство попарного пересечения. В качестве предикатов R_j, $j \in \omega$, рассмотрим всевозможные совместные с $p_\infty(x) \cup p_\infty(y)$ двухместные формулы $\psi(x,y)$, все реализации которых на структуре типа $p_\infty(x)$ являются главными ребрами и образуют ядерные неорграфы. Наконец, в качестве предикатов $R_{\mathbf{A}}(x,\overline{y})$ рассмотрим для каждого реализуемого в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ неглавного 1-типа $q(y)$ всевозможные совместные с $p_\infty(x) \cup q(y)$ формулы $\chi_q(x,y)$, связывающие лишь главными ребрами реализации типа $p_\infty(x)$ с реализациями типа $q(y)$. Добавив к гиперграфу $(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$ указанные предикаты, а также структуру, обеспечивающую единственность предельной модели, получаем *трехмодельный гиперграф.*

На основании следствия 1.1.15 справедлива следующая теорема.

Теорема 5.5.2. *Для любой малой теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) $I(T,\omega)=3$*;*

(2) *теория T имеет трехмодельный гиперграф.*

Как известно (см. теорему 1.1.13 и рис. 1.1, *б*), для теорий с четырьмя счетными моделями возможны следующие три взаимоисключающие ситуации:

1) двухэлементный предпорядок Рудина — Кейслера и две предельные модели над властными типами;

2) трехэлементный предпорядок Рудина — Кейслера с двумя максимальными элементами и единственная предельная модель;

3) трехэлементная цепь, составляющая предпорядок Рудина — Кейслера, и единственная предельная модель.

Указанные ситуации также можно охарактеризовать на языке гиперграфов и представить в виде *четырехмодельных гиперграфов.*

Продолжая в соответствии с теоремой 1.1.13 разбор возможных ситуаций относительно предпорядков Рудина — Кейслера и функции распределения числа предельных моделей для теорий, имеющих n счетных моделей, аналогично вышеизложенному строятся *n-модельные гиперграфы*, дающие возможность охарактеризовать теории T с условием $I(T,\omega)=n$.

Процесс построения гиперграфов, сохраняющих данное число попарно неизоморфных счетных моделей, можно продолжить и для бесконечных мощностей. Это также достигается аналогично предложенным выше вводом в гиперграф $(M^{\mathrm{eq}},H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$ формульно определимой информации о предпорядке Рудина — Кейслера и о числе предельных моделей. Тем самым, определяется понятие *λ-модельного гиперграфа*, позволяющее охарактеризовать теории T с условием $I(T,\omega)=\lambda$ в виде следующего обобщения теоремы 5.5.2.

Теорема 5.5.3. *Для любой малой теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) $I(T,\omega)=\lambda$*;*

(2) *теория T имеет λ-модельный гиперграф.*

§ 5.6. Распределения простых и предельных моделей

Напомним, что в главе 3 представлена классификация элементарных полных теорий с конечными предпорядками Рудина — Кейслера, а также описаны всевозможные предпорядки Рудина — Кейслера в малых теориях. В настоящем разделе мы дадим описание возможностей для распределения числа предельных (не обязательно над фиксированными типами) моделей малых теорий и, тем самым, представим структурные возможности для числа счетных моделей малых теорий. Все рассматриваемые ниже теории будут считаться малыми.

Определим аналоги счетной категоричности и эренфойхтовости для предельных и простых над кортежами моделей.

Теория T называется *p-категоричной* (соответственно *l-категоричной*, *p-эренфойхтовой*, *l-эренфойхтовой*), если $I_p(T,\omega)=1$ (соответственно $I_l(T)=1$, $1<I_p(T,\omega)<\omega$, $1<I_l(T)<\omega$).

Очевидно, что p-категоричность теории T равносильна ее счетной категоричности, ее p-эренфойхтовость — конечности неодноэлементной системы $\mathrm{RK}(T)$, а p-эренфойхтовость и условие $1\le I_l(T)<\omega$ — эренфойхтовости теории.

Отметим, что именно отсутствие p-эренфойхтовости позволило в ряде статей доказать отсутствие эренфойхтовых теорий в классах суперстабильных [141], 1-базируемых [169], псевдосуперстабильных [198], суперпростых [137] теорий, а также теорий, не имеющих свойство строгого порядка и интерпретирующих бесконечные множества попарно различных констант [194].

Теорема 3.5.3 показывает, что для p-эренфойхтовых теорий число счетных моделей определяется числом простых над кортежами моделей, а также функцией распределения IL числа предельных над типами моделей.

Рассмотрим класс l-категоричных теорий. Очевидно, что все такие теории не p-категоричны, а единственность предельной модели влечет ее насыщенность. Тем самым, объединение любой элементарной цепи простых над кортежами моделей снова является простой моделью или образует предельную насыщенную модель. Следовательно, по определению насыщенности модели l-категоричность теории равносильна тому, что для любой элементарной цепи $(\mathcal{M}_{\overline{a}_i})_{i\in\omega}$ простых над кортежами $\overline{a}_i$ моделей, объединение которых образует предельную модель, и любого кортежа $\overline{b}\in M_{\overline{a}_i}$ любой тип $q(x)\in S^1(\overline{b})$ реализуется в некоторой модели $\mathcal{M}_{\overline{a}_j}$, $j\ge i$.

Еще один критерий l-категоричности основан на невозможности построения предельной модели $\mathcal{M}$ как объединения элементарной цепи простых над типами q_n моделей $\mathcal{M}_{q_n}$, $q_n \leq_{\mathrm{RK}} q_{n+1}$, $n \in \omega$, для которых существует тип q с условиями $q_n \leq_{\mathrm{RK}} q$ и $q \not\leq_{\mathrm{RK}} q_n$, $n \in \omega$. Отсутствие модели $\mathcal{M}$ вытекает из предельности насыщенной модели, в которой реализуется тип q, в то время как тип q опускается в модели $\mathcal{M}$. Тем самым, при отсутствии таких предельных моделей l-категоричность равносильна единственности с точностью до изоморфизма непростой счетной модели, в которой реализуются все типы данной теории.

Таким образом, справедлива следующая теорема, представляющая характеризации l-категоричности.

Теорема 5.6.1. *Для любой малой не ω-категоричной теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) *теория T l-категорична;*

(2) *любая предельная модель теории T насыщена;*

(3) *для любой элементарной цепи $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ простых над кортежами моделей теории T, объединение которых образует предельную модель, и любого кортежа $\bar{b} \in M_i$ любой тип $q(x) \in S^1(\bar{b})$ реализуется в некоторой модели $\mathcal{M}_j$, $j \geq i$;*

(4) *объединение любой элементарной цепи простых над типами q_n моделей $\mathcal{M}_{q_n}$, $n \in \omega$, является простой моделью над некоторым типом или единственной с точностью до изоморфизма предельной моделью, реализующей все типы теории T.*

Отметим, что l-категоричными являются все теории T с $I(T, \omega) = 3$. Также l-категорична любая теория, у которой типы изоморфизмов счетных моделей определяются их размерностями из $\omega \cup \{\infty\}$, конечные значения которых соответствуют простым над кортежами моделям. В частности, согласно [68] l-категорична любая не ω-категоричная ω_1-категоричная теория. В силу отсутствия в l-категоричных теориях неодноэлементных $\sim_{\mathrm{RK}}$-классов, отличных от $\leq_{\mathrm{RK}}$-наибольшего $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса (см. следствие 1.1.10), классы теорий с тремя счетными моделями, а также теории с размерностями представляют две взаимоисключающие возможности для предпорядков Рудина — Кейслера в l-категоричных теориях:

1) конечный или счетный предпорядок Рудина — Кейслера с ограниченными длинами $\leq_{\mathrm{RK}}$-цепей на $\sim_{\mathrm{RK}}$-классах, в котором все $\sim_{\mathrm{RK}}$-классы, отличные от наибольшего, одноэлементны;

2) счетный предпорядок Рудина — Кейслера с неограниченными длинами $\leq_{\mathrm{RK}}$-цепей на $\sim_{\mathrm{RK}}$-классах, каждый из которых одноэлементен, и при этом каждый элемент из $\mathbf{M} \in \mathrm{RK}(T)$ находится в отношении $\mathbf{M} \leq_{\mathrm{RK}} \mathbf{M}'$ с некоторым элементом $\mathbf{M}'$ каждой бесконечной $\leq_{\mathrm{RK}}$-цепи.

Заметим также, что поскольку все простые и счетные насыщенные модели однородны, l-категоричные теории являются *почти однородными*, т. е. однородны все их счетные модели, после обогащения каждой из них некоторым конечным множеством констант.

Для дальнейшего изучения произвольной малой теории T и определения числа ее счетных моделей (в частности, для исследования l-эренфойхтовости) будем считать, что предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ счетно и при этом, согласно теореме 3.6.1, направлено вверх и имеет наименьший элемент. Поскольку в теореме 3.5.3 описано возможное число λ предельных над типами моделей ($\lambda \in \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$), рассмотрим возможное число предельных моделей, которые не являются предельными ни над одним из типов.

По определению каждая предельная модель $\mathcal{M}$ представляется в виде объединения элементарной цепи $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ простых над типами q_i моделей $\mathcal{M}_i$. При этом один и тот же тип может повторяться бесконечное число раз (что соответствует предельной модели над типом), или из цепи $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ можно извлечь бесконечную подцепь попарно неизоморфных моделей $\mathcal{M}_{i_j}$, которые просты над попарно различными типами q_{i_j}, и эта подцепь не уплотняется до элементарной цепи $(\mathcal{N}_k)_{k\in\omega}$ (где $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathcal{N}_k$) простых над кортежами моделей, среди которых имеется бесконечное число простых моделей над одним и тем же типом.

Каждая $\leq_{\mathrm{RK}}$-*последовательность*, т. е. последовательность неглавных типов $(q_n)_{n\in\omega}$ с условиями $q_n \leq_{\mathrm{RK}} q_{n+1}$, $n \in \omega$, может определять некоторое число $\lambda((q_n)_{n\in\omega}) \in \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ предельных моделей $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{q_n}$, где $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ — элементарная цепь простых моделей над реализациями типов q_n. При этом зависимость между числами $\lambda((q_n)_{n\in\omega})$ для различных $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$ обусловливается следующим отношением эквивалентности. $\leq_{\mathrm{RK}}$-Последовательности $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$ называются *эквивалентными* ($(q_n)_{n\in\omega} \sim (q'_n)_{n\in\omega}$), если найдется их общая $\leq_{\mathrm{RK}}$-подпоследовательность $(q''_n)_{n\in\omega}$.

Заметим, что прямой зависимости между числами $\lambda((q_n)_{n\in\omega})$ и $\lambda((q'_n)_{n\in\omega})$ для эквивалентных $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$, вообще говоря, нет, поскольку предельные модели, задаваемые $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$, могут не задаваться $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q'_n)_{n\in\omega}$ и наоборот. Справедливы лишь следующие соотношения:

1) $\lambda((q_n)_{n\in\omega}) \leq \lambda((q'_n)_{n\in\omega})$, где $(q'_n)_{n\in\omega}$ — $\leq_{\mathrm{RK}}$-подпоследовательность последовательности $(q_n)_{n\in\omega}$;

2) $\lambda((q_n)_{n\in\omega}) = \lambda((q'_n)_{n\in\omega})$, где для $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$ найдутся такие числа k и m, что $\mathcal{M}_{q_{k+n}} \simeq \mathcal{M}_{q'_{m+n}}$, начиная с некоторого n.

Действительно, по определению любая предельная модель над $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$ предельна над любой подпоследовательностью $(q'_n)_{n\in\omega}$, но не наоборот. Кроме того, если для последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$ найдутся такие числа k и m, что $\mathcal{M}_{q_{k+n}} \simeq \mathcal{M}_{q'_{m+n}}$, начиная с некоторого n, то любая предельная модель над $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$ предельна над $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q'_n)_{n\in\omega}$ и наоборот, поскольку элементарная цепь простых над кортежами моделей $(\mathcal{M}_{\bar{a}_n})_{n\in\omega}$ расширяется до элементарной цепи $(\mathcal{M}_{\bar{b}_n})_{n\in\omega}$, где $\mathcal{M}_{\bar{a}_n} = \mathcal{M}_{\bar{b}_{n+l}}$, $n\in\omega$, $\mathrm{tp}(\bar{b}_i) \leq_{\mathrm{RK}} \mathrm{tp}(\bar{b}_{i+1})$, $i=0,\ldots,l-1$.

Из первого соотношения следует, что континуальное число $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$, каждая из которых не является собственной подпоследовательностью остальных и задает некоторую предельную модель, не являющуюся предельной над остальными последовательностями, влечет континуум числа попарно неизоморфных предельных моделей.

Следующее понятие позволяет сформулировать достаточное условие для континуального числа предельных моделей.

Теория T называется *l-богатой*, если существуют неглавные типы q_n, $n\in\omega$, над которыми простые модели $\mathcal{M}_{q_n}$ попарно неизоморфны, и такие, что для каждой последовательности $(n_k)_{k\in\omega}$ существует элементарная цепь моделей $\mathcal{M}_{n_k}$, изоморфных $\mathcal{M}_{q_{n_k}}$, объединение которой образует предельную модель.

Заметим, что все типы q_n, участвующие в определении l-богатой теории, RK-эквивалентны, а соответствующий $\sim_{\mathrm{RK}}$-класс в $\mathrm{RK}(T)$ является счетным.

Предложение 5.6.2. *Если T — l-богатая теория, то $I_l(T) = 2^\omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению l-богатой теории достаточно доказать, что имеется континуум попарно неэквивалентных $\leq_{\rm RK}$-последовательностей, составленных из типов q_n. Разобьем множество натуральных чисел, индексирующих типы q_n, на две бесконечные части X_0 и X_1, а затем каждую из этих частей на счетное множество счетных частей $X_i^{j,k}$, $i = 0, 1$, $j, k \in \omega$. Теперь, рассмотрев последовательности типов q_n, индексы которых принадлежат множествам $X_{i_0}^{0,k_0}, X_{i_1}^{1,k_1}, \ldots, X_{i_m}^{m,k_m}, \ldots$ таким, что разным последовательностям q_n соответствуют разные множества $X_{i_m}^{m,k_m}$, замечаем, что эти последовательности попарно не пересекаются, а нижние индексы кодируют всевозможные двоичные последовательности. Тем самым, число неэквивалентных $\leq_{\rm RK}$-последовательностей типов q_n континуально. $\square$

Отметим, что на основании теоремы 3.5.3 и предложения 5.6.2 имеются три вида порождения континуального числа предельных моделей над $\sim_{\rm RK}$-классами:

1) континуум предельных моделей над некоторым типом из данного $\sim_{\rm RK}$-класса;

2) континуум предельных моделей над некоторой $\leq_{\rm RK}$-последовательностью попарно различных типов из данного $\sim_{\rm RK}$-класса;

3) континуум предельных моделей над попарно различными $\leq_{\rm RK}$-последовательностями попарно различных типов из данного $\sim_{\rm RK}$-класса.

В силу теоремы Морли [158] числа предельных моделей над данными $\leq_{\rm RK}$-последовательностями неглавных типов $\mathbf{q}$ (состоящих из одних и тех же, либо попарно различных типов) могут варьироваться в пределах множества $\omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$. Тем самым число $I_l(T)$ представляется в виде суммы $\sum\limits_{\mathbf{q}} {\rm IL}_{\mathbf{q}}$, где ${\rm IL}_{\mathbf{q}}$ — число предельных моделей, относящихся к $\leq_{\rm RK}$-последовательности $\mathbf{q}$ и не относящихся к расширениям и сужениям последовательности $\mathbf{q}$, участвующим в подсчете значения $I_l(T)$.

Аналогично следствию 1.1.10 с использованием доказательства предложения 1.1.8 устанавливается следующая лемма.

Лемма 5.6.3. *Если* $\mathbf{q}$ *—* $\leq_{\rm RK}$*-последовательность типов* q_n*,* $n \in \omega$*, и* $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ *— элементарная цепь, никакая коконечная подцепь которой не состоит из попарно изоморфных моделей, то* ${\rm IL}_{\mathbf{q}} \geq 1$.

Будем говорить, что семейство $\mathbf{Q}$ $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностей типов $\mathbf{q}$ *представляет* $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательность типов $\mathbf{q}'$, если любая предельная модель над $\mathbf{q}'$ является предельной над некоторой последовательностью $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$.

На основании вышеизложенного справедлива следующая теорема для теорий с произвольными предпорядками Рудина — Кейслера, описывающая всевозможные распределения числа счетных моделей теории в зависимости от заданных последовательностей неглавных типов и являющаяся обобщением теоремы 3.5.3.

Теорема 5.6.4. *Любая малая теория T удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *система* $\mathrm{RK}(T)$ *направлена вверх и имеет наименьший элемент* $\mathbf{M}_0$ (*тип изоморфизма простой модели теории*), $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_0}) = 0$*;*

(б) *если* $\mathbf{q}$ — $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательность неглавных типов* q_n, $n \in \omega$, *такая, что каждый тип* q *теории* T *находится в отношении* $q \leq_{\mathrm{RK}} q_n$ *для некоторого* n, *то существует предельная модель над* $\mathbf{q}$*; в частности, при наличии* $\mathbf{q}$ *справедливо* $I_l(T) \geq 1$ *и предельной над последовательностью* $\mathbf{q}$ *является счетная насыщенная модель теории;*

(в) *если* $\mathbf{q}$ — $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательность типов* q_n, $n \in \omega$, *и* $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ — *элементарная цепь, никакая коконечная подцепь которой не состоит из попарно изоморфных моделей, то существует предельная модель над* $\mathbf{q}$*;*

(г) *если* $\mathbf{q}' = (q'_n)_{n\in\omega}$ — *подпоследовательность* $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательности* $\mathbf{q}$, *то любая предельная модель над последовательностью* $\mathbf{q}$ *предельна над* $\mathbf{q}'$*;*

(д) *если* $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$ *и* $\mathbf{q}' = (q'_n)_{n\in\omega}$ — $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательности типов такие, что для некоторых чисел* $k, m \in \omega$, *начиная с некоторого* n, *каждый тип* q_{k+n} *находится с типом* q'_{m+n} *в отношении* $\mathcal{M}_{q_{k+n}} \simeq \mathcal{M}_{q'_{m+n}}$, *то каждая модель* $\mathcal{M}$ *предельна над последовательностью* $\mathbf{q}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}$ *предельна над последовательностью* $\mathbf{q}'$.

Более того, справедлива следующая декомпозиционная формула:

$$I(T, \omega) = |\mathrm{RK}(T)| + \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathrm{IL}_{\mathbf{q}},$$

где $\mathrm{IL}_{\mathbf{q}} \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ — *число предельных моделей, относящихся к* $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательности* $\mathbf{q}$ *и не относящихся к рас-*

ширениям и сужениям последовательности $\mathbf{q}$, *участвующим в подсчете значения* $I_l(T)$, *и семейство* $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательностей типов* $\mathbf{Q}$ *представляет все* $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательности, над которыми существуют предельные модели.*

Согласно теореме 5.6.4 конечные значения $\sum\limits_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathrm{IL}_{\mathbf{q}}$ характеризуют класс l-эренфойхтовых теорий.

В силу теоремы 5.6.4, как и для теорий с конечными предпорядками Рудина — Кейслера, малые теории классифицируются по предпорядкам Рудина — Кейслера и функциям распределения числа предельных (не обязательно над фиксированными типами) моделей.

Напомним, что теорема 3.5.1 представляет всевозможные реализации теорий с конечными предпорядками Рудина — Кейслера относительно этих предпорядков, а также функций распределения числа предельных моделей со значениями из множества $\omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$.

Обобщением теоремы 3.5.1 для произвольных предпорядков Рудина — Кейслера и соответствующих функций распределения числа предельных моделей, принимающих значения из множества $\omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, является следующая теорема.

Теорема 5.6.5. *Пусть* $\langle X, \leq\rangle$ *— не более чем счетное направленное вверх предупорядоченное множество с наименьшим элементом* x_0, $f : Y \to \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ *— функция, у которой* Y *— множество всех* $\leq_0$*-последовательностей, т. е. последовательностей в* $X \setminus \{x_0\}$, *образующих всевозможные* $\leq$*-цепи, и выполняются следующие условия:*

(а) $f(y) \geq 1$, *если для каждого элемента* $x \in X$ *найдется элемент* x' *из последовательности* y *с условием* $x \leq x'$;

(б) $f(y) \geq 1$, *если никакая коконечная подпоследовательность последовательности* y *не состоит из одинаковых элементов;*

(в) $f(y) \leq f(y')$, *если* y' *— подпоследовательность последовательности* y;

(г) $f(y) = f(y')$, *если* $y = (y_n)_{n\in\omega}$ *и* $y' = (y'_n)_{n\in\omega}$ *— последовательности, для которых найдутся такие числа* $k, m \in \omega$, *что* $y_{k+n} = y'_{m+n}$, *начиная с некоторого* n.

Тогда существует малая теория T *и изоморфизм*

$$g : \langle X, \leq\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{RK}(T)$$

такой, что каждое значение $f(y)$ равно числу предельных моделей над $\leq_{\rm RK}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$, соответствующей $\leq_0$-последовательности $y=(y_n)_{n\in\omega}$, где $g(y_n)$ — тип изоморфизма модели $\mathcal{M}_{q_n}$, $n\in\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы состоит в модификации генерической конструкции из доказательства теорем 3.4.1 и 3.6.1, при которой выполняются следующие условия:

1) каждый элемент $x\in X\setminus\{x_0\}$ представляется 1-типом q_x, определяемым бесконечным цветом, а также одноместным предикатом P_x;

2) каждая простая над некоторым кортежом модель проста, либо изоморфна некоторой модели $\mathcal{M}_{q_x}$;

3) заданная $\leq_{\rm RK}$-взаимосвязь между типами определяется счетным набором двухместных предикатов;

4) заданное распределение числа предельных моделей определяется последовательностями двухместных предикатов, отождествляемых посредством исчисления тождеств из параграфа 3.5 с помощью амальгам взаимореализуемости.

Поскольку число предельных моделей может варьироваться в зависимости от последовательностей попарно различных типов $\mathbf{q}=(q_n)_{n\in\omega}$, при рассмотрении тождеств из параграфа 3.5, приводящих к заданному числу предельных моделей над $\mathbf{q}$, требуется использовать лишь тождества, связывающие слова одинаковой длины.

Для достижения n счетных моделей достаточно использовать систему тождеств

$$n-1\approx m,$$

$m\geq n$, и

$$n_0n_1\ldots n_s\approx\underbrace{n_s\ldots n_s}_{s+1\ \text{раз}},$$

$\max\{n_0,n_1,\ldots,n_{s-1}\}<n_s$, сводящую все последовательности из ω^ω к n константным последовательностям.

Рассмотрение системы тождеств

$$n_0n_1\ldots n_s\approx\underbrace{n_s\ldots n_s}_{s+1\ \text{раз}},$$

$\max\{n_0,n_1,\ldots,n_{s-1}\}<n_s$,

$$n_0n_1\ldots n_s\approx n_0(n_0+1)\ldots(n_0+s),$$

$n_0 + s \leq n_s$,

$$n_0 n_1 \ldots n_s \approx n_0(n_0+1)\ldots(n_0+t)\underbrace{(n_0+t)\ldots(n_0+t)}_{s-t \text{ раз}},$$

$n_0 + t = n_s$, $t > 0$, $s > t$, приводит к построению теории с ω счетными моделями над $\mathbf{q}$, для которой все последовательности из ω^ω сводятся к константным или диагональной последовательностям. $\square$

Конструкции из главы 4 позволяют провести построения для доказательства теоремы 5.6.5 в классе стабильных теорий.

Список литературы

Диссертации и книги

[1] *Белеградек О. В.* Теория моделей унитреугольных и экзистенциально замкнутых групп: Дисс... докт. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Новосибирск, 1995. — 213 с.

[2] *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[3] *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[4] *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.

[5] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — СПб.: Лань, 2005.

[6] *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[7] *Лекции* по теории графов/ В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990.

[8] *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1968.

[9] *Сакс Дж.* Теория насыщенных моделей. — М.: Мир, 1976.

[10] *Справочная* книга по математической логике. Ч. 1, Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса. — М.: Наука, 1982.

[11] *Судоплатов С. В.* Базируемость стабильных теорий и свойства счетных моделей с мощными типами: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Новосибирск, 1990. — 142 с.

[12] *Судоплатов С. В.* Теории с конечным числом счетных моделей и полигонометрии групп: Дисс... докт. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Новосибирск, 2006. — 320 с.

[13] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Дискретная математика: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2005, 2007, 2009.

[14] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2004, 2008.

[15] *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

[16] *Baldwin J.T.* Fundamentals of Stability Theory. — Springer-Verlag, 1988.

[17] *Baldwin J.T.* Abstract elementary classes. — Book in preparation, 2007.

[18] *Bonato A.C.J.* Colourings, Generics, and Free Amalgams. — Ph. D. Thesis. University of Waterloo, 2004.

[19] *Fraïssé R.* Theory of Relations. — Amsterdam: North-Holland, 1986.

[20] *Harizanov V.* Handbook of Recursive Mathematics, vol. 1 Chapter 1: Pure Computable Model Theory — George Washington University, 2006.

[21] *Hasson A.* In Search of New Strongly Minimal Sets. — Ph. D. Thesis. Hebrew University, 2004.

[22] *Hodges W.* Model Theory. — Cambridge University Press, 1993.

[23] *Kolesnikov A.* Generalized amalgamation in simple theories and characterization of dependence in non-elementary classes. — Ph. D. Thesis. Carnegie Mellon University, 2004.

[24] *Pillay A.* An introduction to stability theory. — Oxford University Press, 1983.

[25] *Poizat B.P.* Cours de théorie des modèles. — Villeurbane: Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985.

[26] *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. — Amsterdam: North-Holland, 1990.

[27] *Wagner F.O.* Simple Theories. — Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

С т а т ь и

[28] *Байсалов Е. Р.* Счетные модели суперстабильных теорий // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, №3. С. 265–283.

[29] *Байсалов Е. Р.* Счетные модели малых стабильных теорий // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31, №4. С. 9–15.

[30] *Байсалов Е. Р.* Число счетных o-минимальных моделей // Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. — С. 25–30.

[31] *Белеградек О. В.* Теория моделей локально свободных алгебр // Теория моделей и ее применения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — С. 3–25.

[32] *Викентьев А. А.* Теории с бесконечным числом моделей // Междунар. конф. по алгебре, посвящ. памяти А. И. Мальцева. — Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1989. — С. 28.

[33] *Гаврюшкин А. Н.* Сложность эренфойхтовых моделей // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, №5. С. 507–519.

[34] *Гончаров С. С., Пурмахдиан М.* Итерированные обогащения моделей счетных теорий и их приложения // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, №6. С. 623–645.

[35] *Заффе Ю., Палютин Е. А., Старченко С. С.* Модели суперстабильных хорновых теорий // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, №3. С. 278–326.

[36] *Мальцев А. И.* Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, №5. С. 729–743.

[37] *Мустафин Т. Г.* О числе счетных моделей счетной полной теории // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, №1. С. 69–91.

[38] *Омаров Б.* Несущественные расширения полных теорий // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, №5. С. 542–550.

[39] *Омарова Г. А.* Конструктивные модели эренфойхтовых теорий // Теоретико-модельная алгебра. — Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1989. — С. 105–117.

[40] *Палютин Е. А.* Модели со счетно категоричными универсальными теориями // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, №1. С. 23–32.

[41] *Палютин Е. А., Старченко С. С.* Хорновы теории с немаксимальным спектром // Теория моделей и ее применения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — С. 108–162.

[42] *Перетятькин М. Г.* О полных теориях с конечным числом счетных моделей // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, №5. С. 550–576.

[43] *Перетятькин М. Г.* Теории с тремя счетными моделями // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №2. С. 224–235.

[44] *Пунинская В. А.* Гипотеза Воота для модулей над наследственными нетеровыми первичными кольцами // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, №6. С. 171–172.

[45] *Ряскин А. Н.* Число моделей полных теорий унаров // Теория моделей и ее применения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — С. 162–182.

[46] *Судоплатов С. В.* О мощных типах в малых теориях // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31, №4. С. 118–128.

[47] *Судоплатов С. В.* Типовая редуцированность и мощные типы // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, №1. С. 150–159.

[48] *Судоплатов С. В.* Об одной оценке сложности теорий графов // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, №3. С. 700–703.

[49] *Судоплатов С. В.* Несущественные совмещения и раскраски моделей // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, №5. С. 1132–1141.

[50] *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, №1. С. 110–124.

[51] *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, №3. С. 314–353.

[52] *Судоплатов С. В.* Властные орграфы // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, №1. С. 205–213.

[53] *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Двудольные орграфы // Матем. труды. 2006. Т. 9, № 2. С. 154–171.

[54] *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Безразвилочные орграфы // Матем. труды. 2007. Т. 10, № 1. С. 191–207.

[55] *Судоплатов С. В.* О числе счетных моделей полных теорий с конечными предпорядками Рудина — Кейслера // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, №2. С. 417–422.

[56] *Судоплатов С. В.* Синтаксический подход к построению генерических моделей // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №2. С. 244–268.

[57] *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Властные орграфы. — Препринт, 2006.

[58] *Судоплатов С. В.* Об обогащениях и расширениях властных орграфов // Сиб. матем. журн. (в печати)

[59] *Судоплатов С. В.* Модели кубических теорий // Сиб. матем. журн. (в печати)

[60] *Судоплатов С. В.* О свойстве конечных замыканий в слияниях генерических классов. — Препринт, 2007.

[61] *Судоплатов С. В.* Стабильные теории с конечным числом счетных моделей // Алгебра и логика. (в печати)

[62] *Судоплатов С. В.* Гиперграфы простых моделей малых теорий. — Препринт, 2007.

[63] *Судоплатов С. В.* Эренфойхтовы теории с неплотными властными орграфами // Сиб. матем. журн. (в печати)

[64] *Судоплатов С. В.* Эренфойхтовы теории, не имеющие властных орграфов // Сиб. матем. журн. (в печати)

[65] *Судоплатов С. В.* О числе счетных моделей теории. — Препринт, 2008.

[66] *Aref'ev R., Baldwin J. T., Mazucco M.* Classification of δ-invariant amalgamation classes // J. Symbolic logic. 1999. V. 64, No. 4. P. 1743–1750.

[67] *Ash C. J., Millar T. S.* Persistently finite, persistently arithmetic theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89. P. 487Ч-492.

[68] *Baldwin J. T., Lachlan A. H.* On strongly minimal sets // J. Symbolic Logic. 1971. V. 36, No. 1. P. 79–96.

[69] *Baldwin J. T.* An almost strongly minimal non-Desarguesian projective plane // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 342, No. 2. P. 695–711.

[70] *Baldwin J. T., Itai M.* K-generic projective planes have Morley rank two or infinity // Math. Log. Quart. 1994. V. 40, No. 2. P. 143–152.

[71] *Baldwin J. T.* Some projective planes of Lenz-Barlotti class I // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123, No. 1. P. 251–256.

[72] *Baldwin J. T., Shi N.* Stable generic structures // Ann. Pure and Appl. Logic. 1996. V. 79, No. 1. P. 1–35.

[73] *Baldwin J. T.* Problems on 'Pathological' Structures / Preprint. University of Illinois at Chicago, 1997.

[74] *Baldwin J. T., Shelah S.* DOP and FCP in generic theories // J. Symbolic Logic. 1998. V. 63, No. 2. P. 427–438.

[75] *Baldwin J. T.* Stable amalgamation. Dedicated to the memory of A.I.Maltsev / Preprint. University of Illinois at Chicago, 2000.

[76] *Baldwin J. T., Holland K.* Constructing ω-stable structures: fields of rank 2 // J. Symbolic Logic. 2000, V. 65, No. 1. P. 371–391.

[77] *Baldwin J. T., Holland K.* Constructing ω-stable structures: Computing rank // Fund. Math. 2001, V. 170, No. 1–2. P. 1–20.

[78] *Baldwin J. T.* Rank and homogeneous structures // Report No. 10, 2000/2001. Institute Mittag-Lefler. The Royal Swedish Academy of Sciences. 2001.

[79] *Baldwin J. T., Holland K.* Constructing ω-stable structures: Rank k fields // Notre Dame J. of Formal Logic. 2003, V. 44, No. 3. P. 139–147.

[80] *Baldwin J. T.* Expansions of geometries // J. Symbolic Logic. 2003. V. 68, No. 3. P. 803–827.

[81] *Baldwin J. T.* Notes on Quasiminimality and Excellence / Preprint. University of Illinois at Chicago, 2004.

[82] *Baldwin J. T.* The metamathematics of random graphs / Preprint. University of Illinois at Chicago, 2005.

[83] *Baudisch A.* A new uncountably categorical group // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 48, No. 10. P. 3889–3940.

[84] *Baudisch A.* Closure in $\aleph_0$-categorical bilinear maps // J. Symbolic Logic. 2000. V. 65, No. 2. P. 914–922.

[85] *Baudisch A.* Generic variations of models of T // J. Symbolic Logic. 2002. V. 67. P. 1025–1038.

[86] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* On fields and colors // Algebra and Logic. 2006. V. 45, No. 2. P. 92–105.

[87] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Fusion over a vector space // J. Math. Logic. 2006. V. 6. P. 141–162.

[88] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Hrushovskis Fusion // Frieder Haug, Benedikt Lowe, Torsten Schatz (eds.). Algebra, Logic, Set Theory, Festschrift fur Ulrich Felgner zum 65. Geburtstag; College Publications, Studies in Logic, Vol. 4, London 2007. P. 15–31.

[89] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Red fields // J. Symbolic Logic. 2007. V. 72. P. 207–225.

[90] *Benda M.* Remarks on countable models // Fund. math. 1974. V. 81, No. 2. P. 107–119.

[91] *de Bonis M. J., Nesin A.* There are $2^{\aleph_0}$ almost strongly minimal generalized n-gons that do not interpret an infinite group // J. Symbolic Logic. 1998. V. 63, No. 2. P. 485–508.

[92] *Bouscaren E., Poizat B.* Des Belles Paires Aux Beaux Uples // J. Symbolic Logic. 1988. V. 53, No. 2. P. 434–442.

[93] *Buechler S.* Vaught's conjecture for superstable theories of finite rank / Preprint. University of Notre Dame, 1993.

[94] *Buechler S.* Classification of small weakly minimal sets, I / J. T. Baldwin (ed.), Classification Theory, Proceedings, Chicago, 1985. — Springer, 1987. — P. 32–71.

[95] *Calvert W., Harizanov V.S., Knight J.F., Miller S.* Index Sets of Computable Structures / Preprint. University of Notre Dame, 2005.

[96] *Chapuis O., Hrushovski E., Koiran P., Poizat B.* La limite des théories de courbes génériques // J. Symbolic Logic. 2002. V. 67, No. 1. P. 24–34.

[97] *Chatzidakis Z., Pillay A.* Generic structures and simple theories // Ann. Pure and Appl. Logic. 1998. V. 95, No. 1–3. P. 71–92.

[98] *Evans D.M.* $\aleph_0$-categorical structures with a predimension // Ann. Pure and Appl. Logic. 2002. V. 116. P. 157–186.

[99] *Evans D.M., Pantano M.E.* $\aleph_0$-categorical structures with arbitrarily fast growth of algebraic closure // J. Symbolic Logic. 2002. V. 67. P. 897–909.

[100] *Evans D.M.* Ample dividing // J. Symbolic Logic. 2003. V. 68. P. 1385–1402.

[101] *Evans D.M.* Some remarks on generic structures / Preprint. School of Mathematics. Norwich. 2003.

[102] *Fraïssé R.* Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels // C.R. Acad. Sci. Paris. 1953. V. 237. P. 540–542.

[103] *Goode J.B.* Hrushovski's geometries / Seminarberichte, Humbolt Universitat zu Berlin, 104. 1989. P. 106–117.

[104] *Harnik V., Harrington L.* Fundamentals of forking // Ann. Pure and Appl. Logic. 1984. V. 26. No. 3. P. 245–286.

[105] *Hart B., Starchenko S., Valeriote M.* Vaught's conjecture for varieties // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 342. P. 173–196.

[106] *Hart B., Hrushovski E., Laskowski M.S.* The uncountable spectra of countable theories // Ann Math. 2000. V. 152, No. 1. P. 207–257.

[107] *Hasson A.* Interpreting Structures of Finite Morely Rank in Strongly Minimal Structures / Preprint. Einstein Institute of Mathematics. Jerusalem, 2004.

[108] *Hasson A.* Collapsing structure and a theory of envelopes / Preprint. Einstein Institute of Mathematics. Jerusalem, 2004.

[109] *Hasson A., Hils M.* Fusion over sublanguages // J. Symbolic Logic. 2006. V. 71, No. 2. P. 361–398.

[110] *Hasson A., Hrushovski E.* DMP in strongly minimal structures / Preprint. Einstein Institute of Mathematics. Jerusalem, 2005.

[111] *Hasson A.* Interpreting structures of finite morley rank in strongly minimal sets / Preprint. Einstein Institute of Mathematics. Jerusalem, 2005.

[112] *Herwig B., Loveys J., Pillay A., Tanović P., Wagner F.* Stable theories with no dense forking chains // Arch. Math. Logic. 1992. V. 31. P. 297–304.

[113] *Herwig B.* Weight ω in stable theories with few types // J. Symbolic Logic. 1995. V. 60, No. 2. P. 353–373.

[114] *Herwig B.* Extending Partial Automorphisms on Finite Structures // Combinatorica. 1995. V. 15. P. 365–371.

[115] *Herwig B.* Extending partial isomorphisms for the small index property of many *omega*-categorical structures // Israel J. Math. 1998. V. 107. P. 93–123.

[116] *Herwig B., Lascar D.* Extending partial automorphisms and the profinite topology on free groups // Transactions of the AMS. 1999. V. 352, No. 5. P. 1985–2021.

[117] *Holland K.* An introduction to fusions of strongly minimal sets: The geometry of fusions // Archive for Math. Logic. 1995. V. 34. P. 395–413.

[118] *Holland K.* Strongly minimal fusions of vector spaces // Ann. Pure and Appl. Logic. 1997. V. 83, No. 1. P. 1–22.

[119] *Holland K.* Model completeness of the new strongly minimal sets // J. Symbolic Logic. 1999, V. 64, No. 3. P. 946–962.

[120] *Hrushovski E., Pillay A.* Weakly normal groups // Logic Colloquium '85. — North Holland, 1987. P. 233–244.

[121] *Hrushovski E.* A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane / Preprint. Hebrew University, Jerusalem, 1988.

[122] *Hrushovski E.* Finitely based theories // J. Symbolic Logic. 1989, V. 54, No. 1. P. 221–225.

[123] *Hrushovski E.* Strongly minimal expansions of algebraically closed fields // Israel J. Math. 1992. V. 79, no. 2–3. P. 129–151.

[124] *Hrushovski E.* Extending partial isomorphisms of graphs // Combinatorica. 1992. V. 12. P. 204–218.

[125] *Hrushovski E.* A new strongly minimal set // Ann. Pure and Appl. Logic. 1993. V. 62, No. 2. P. 147–166.

[126] *Hrushovski E., Zil'ber B. I.* Zariski geometries // Journal of the American Mathematical Society. 1996. V. 9, No. 1. P. 1–55.

[127] *Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A.* On theories having three countable models // Math. Logic Quaterly. 1998. V. 44. P. 161–166.

[128] *Ikeda K.* Minimal But Not Strongly Minimal Structures with Arbitrary Finite Dimensions. J. Symbolic Logic. 2001. V. 66, No. 1. P. 117–126.

[129] *Ikeda K.* A Note on Generic Projective Planes // Notre Dame Journal of Formal Logic. 2002. V. 43, No. 4. P. 249–254.

[130] *Ikeda K., Kikyo H., Tsuboi A.* On generic structures with a strong amalgamation property / Preprint, 2006.

[131] *Ivanov A.* Generic expansions of ω-categorical structures and semantics of generalized quantifiers // J.Symbolic Logic. 1999. V. 64, No. 2. P. 775–789.

[132] *Jonsson B.* Universal relational systems // Math. Scand. 1956. V. 4. P. 193–208.

[133] *Jonsson B.* Homogeneous universal relational systems // Math. Scand. 1960. V. 8. P. 137–142.

[134] *Kechris A. S., Rosendal C.* Turbulence, amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures // arXiv:math.LO/0409567. 2006. V. 4. — 50 p.

[135] *Khoussainov B., Nies A., Shore R.A.* Recursive models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic, 1997. V. 38. P. 165–178.

[136] *Kim B., Pillay A.* Simple theories // Ann. Pure and Appl. Logic. 1997. V. 88. P. 149–164.

[137] *Kim B.* On the number of countable models of a countable supersimple theory // J. London math. Soc. 1999. V. 60, No. 2. P. 641–645.

[138] *Kim B., Kolesnikov A.S., Tsuboi A.* Generalized amalgamation and n-simplicity. — Preprint, 2005.

[139] *Knight R. W.* The Vaught Conjecture: A Counterexample. — Preprint, 2002.

[140] *Kueker D. W., Laskowski C.* On generic structures // Notre Dame J. of Formal Logic. 1992. V. 33, No. 2. P. 175–183.

[141] *Lachlan A. H.* On the number of countable models of a countable superstable theory // Proc. Int. Cong. Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 45–56.

[142] *Lachlan A. H.* Two conjectures regarding the stability of ω-categorical theories // Fund. Math. 1974. V. 81. P. 133–145.

[143] *Lascar D.* Ranks and definability in superstable theories // Israel J. Math. 1976. V. 23, No. 1. P. 53–87.

[144] *Lascar D.* Generalization de l'ordre de Rudin-Keisler aux types d'une theorie // Colloq. Int. Log. 1975. — Clermont-Ferrand, 1977. P. 73–81.

[145] *Lascar D.* Ordre de Rudin-Keisler et poids dans les theories stables // Z. Math. Logic Grundlagen Math. 1982. V. 28. P. 413–430.

[146] *Laskowski M.C.*, A simpler axiomatization of the Shelah-Spencer almost sure theories // Israel J. Math. 2007. V. 161. P. 157–186.

[147] *Lempp S., Slaman T.* The complexity of the index sets of $\aleph_0$-categorical theories and of Ehrenfeucht theories // Advances in Logic (Proceedings of the North Texas Logic Conference, October 8.10, 2004), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society.

[148] *Loveys J., Tanović P.* Countable models of trivial theories which admit finite coding // J. Symbolic Logic. 1996. V.61, No. 4. P. 1279–1286.

[149] *Low L.F., Pillay A.* Superstable theories with few countable models // Archive for Math. Logic. 1992. V. 31. P. 457–465.

[150] *Marcus L.* The number of countable models of a theory of unary function // Fundam. Math. 1980. V. 108. P. 171–181.

[151] *Mayer L.* Vaught's conjecture for *o*-minimal theories // J. Symbolic Logic. 1988. V.53, No. 1. P. 146–159.

[152] *Millar T.* Stability, complete extensions, and the number of countable models // Aspects of Effective Algebra (J.N.Grossley, ed.).Yarra Glen: Upside Down A Book Company, 1981. P. 196–205.

[153] *Millar T.* Persistently finite theories with hyperarithmetic models // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 91–99.

[154] *Millar T.* Decidable Ehrenfeucht theories // Proc. Sympos. Pure Math. 1985. V. 42. P. 311–321.

[155] *Millar T.* Finite extensions and the number of countable models // J. Symbolic Logic. 1989. V. 54, No. 2. P. 264–270.

[156] *Miller A.* Vaught's conjecture for theories of one unary operation // Fundam. Math. 1981. V. 111. P. 135–141.

[157] *Morley M.* Countable models of $\aleph_1$-categorical theories // Israel J. Math. 1967. V. 5, No. 1. P. 65–72.

[158] *Morley M.* The number of countable models // J. Symbolic Logic. 1970. V.35. P. 14–18.

[159] *Newelski L.* A proof of Saffe's conjecture // Fundam. Math. 1990. V. 134 P. 143–155.

[160] *Newelski L.* Vaught's conjecture for some meager groups // Israel J. Math. 1999. V.112. P. 271–300.

[161] *Newelski L.* Meager Forking and m-Independence // Doc. Math. 1998. Extra Volume ICM. II. P. 33–42.

[162] *Peatfield N., Zilber B.* Analitic Zariski structures and the Hrushovski construction // Ann. Pure and Appl. Logic. 2005. V. 132, No. 2–3. P. 127–180.

[163] *Pillay A.* Number of countable models // Journal of Symbolic Logic. 1978. V. 43. P. 492–496.

[164] *Pillay A.* Theories with exactly three countable models and theories with algebraic prime models // J. Symbolic Logic. 1980. V. 45. P. 302–310.

[165] *Pillay A.* Instability and theories with few models // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. P. 461–468.

[166] *Pillay A.* Dimension theory and homogeneity for elementary extensions of a model // J. Symbolic Logic. 1982. V. 47. P. 147–160.

[167] *Pillay A.* Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89, No. 4. P. 666–672.

[168] *Pillay A.* Superstable groups of finite rank without pseudoplanes // Ann. Pure and Appl. Logic. 1986. V. 36. P. 95–101.

[169] *Pillay A.* Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models // Ann. Pure and Appl. Log. 1989. V. 43, No. 2. P. 147–160.

[170] *Pillay A.* Countable models of 1-based theories // Arch. Math. Logic. 1992. V. 31. P. 163–170.

[171] *Pillay A., Tsuboi A.* Amalgamations preserving ω-categoricity // J. Symbolic Logic. 1997. V. 62. P. 1070–1074.

[172] *Poizat B.* Le carré de l'égalité // J. Symbolic Logic. 1999, V. 64, No. 3. P. 1339–1355.

[173] *Poizat B.* L'égalité au cube // J. Symbolic Logic. 2001. V. 66, No. 4. P. 1647–1676.

[174] *Poizat B.* Amalgames de Hrushovski. Une tentative de classification // Tits buildings and the model theory of groups (Würzburg, 2000). London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 291. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. — P. 195–214.

[175] *Pourmahdian M.* Simple generic structures // Ann. Pure and Appl. Logic. 2003. V. 121, No. 2–3. P. 227–260.

[176] *Puninskaya V.* Vaught's conjecture for modules over a Dedekind prime ring // Bull. London Math. Soc. 1999. V. 31. P. 129–135.

[177] *Puninskaya V., Toffalori C.* Vaught's Conjecture and Group Rings // Comm. Algebra. 2005. V. 33. P. 4267–4281.

[178] *Rajani R.* Generic structures / Preprint. University of Amsterdam, 2002.

[179] *Reed R.* A decidable Ehrenfeucht theory with exactly two hyperarithmetic models // Ann. Pure and Appl. Log. 1991. V. 53, No. 2. P. 135–168.

[180] *Rudin M.E.* Partial orders on the types of βN // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 155. P. 353–362.

[181] *Ryll-Nardzewski C.* On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$ // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astron., Phys. 1959. V. 7. P. 545–548.

[182] *Saffe U.* An introduction to regular types. — Preprint, 1981.

[183] *Saffe U.* The number of uncountable models of ω-stable theories // Ann. Pure and Appl. Log. 1983. V. 24, P. 231–261.

[184] *Shelah S.* End extensions and numbers of countable models // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43. P. 550–562.

[185] *Shelah S.* Simple unstable theories // Ann. Math. logic. 1980. V. 19. P. 177–203.

[186] *Shelah S., Harrington L., Makkai M.* A proof of Vaught's conjecture for ω-stable theories // Israel J. Math. 1984. V. 49. P. 259–280.

[187] *Shelah S.* Categoricity for abstract classes with amalgamation // Ann. Pure and Appl. Logic. 1999. V. 98. P. 261–294.

[188] *Solecki S.* Extending Partial Isometries, Israel J. Math. 2005. V. 150. P. 315–332.

[189] *Steel J.* On Vaught's conjecture // A. Kechris, Y. Moschovakis (ed.), Cabal Seminar '76-77, Lecture Notes in Mathematics, 689. — Springer, 1978. — P. 193–208.

[190] *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems // Contributions to General Algebra 11 / Proc. of the Olomouc Workshop '98 on General Algebra. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 1999. P. 191–210.

[191] *Sudoplatov S. V.* Closed sets of side-angle matrices and correspondent geometrical structures // Алгебра и теория моделей, 3. Сборник трудов / Под. ред. А.Г.Пинуса и К.Н.Пономарева. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — С. 131–135.

[192] *Tanović P.* On the number of countable models of stable theories // Fund. Math. 2001. V. 169. P. 139–144.

[193] *Tanović P.* A note on countable models of 1-based theories // Archive for Math. Logic. 2002. V. 41, No. 7. P. 669–671.

[194] *Tanović P.* On constants and the strict order property // Archive for Math. Logic, 2006. V. 45, No. 4. P. 423–430.

[195] *Tanović P.* Theories with constants and three countable models // Archive for Math. Logic. 2007. V. 46, No. 5–6. P. 517–527.

[196] *Thomas S.* Theories with finitely many models // J. Symbol. Log. 1986, V. 51. P. 374–376.

[197] *Tsuboi A.* On theories having a finite number of nonisomorphic countable models // J. Symbol. Log. 1985, V. 50, No. 3. P. 806–808.

[198] *Tsuboi A.* Countable models and unions of theories // J. Math. Soc. Japan. 1986. V. 38, No. 3. P. 501–508.

[199] *Vaught R.* Denumerable models of complete theories // Infinistic Methods. — London: Pergamon, 1961. P. 303–321.

[200] *Verbovskiy V. V.* On elimination of imaginaries for the strongly minimal sets of E. Hrushovski / Preprint, 1999.

[201] *Verbovskiy V. V., Yoneda I.* CM-triviality and relational structures // Ann. Pure and Appl. Log. 2003. V. 122. P. 175–194.

[202] *Vershik A. M.* Extensions of the partial isometries of the metric spaces and finite approximation of the group of isometries of Urysohn space / Preprint. POMI, Saint-Pererburg, 2005.

[203] *Villaveces A., Zambrano P.* Hrushovski constructions and tame abstract elementary classes / Preprint. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2005.

[204] *Wagner F.* Relational strucrures and dimensions / Automorphisms of first order structures. Clarendon Press, Oxford, 1994. — P. 153–181.

[205] *Woodrow R. E.* A note on countable complete theories having three isomorphism types of countable models // J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 672–680.

[206] *Woodrow R. E.* Theories with a finite number of countable models // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43, No. 3. P.442–455.

[207] *Yoneda I.* CM-triviality and generic structures // Archive for Math. Logic 2003. V. 42, No. 5. P. 423–433.

[208] *Ziegler M.* Fusion of structures of finite Morley rank / Preprint. Mathematisches Institut, Freiburg, 2006.

[209] *Zil'ber B. I.* Fields with pseudo-exponentiation / Preprint. Oxford University, 2000.

[210] *Zil'ber B.* A theory of a generic function with derivations // Logic and Algebra (ed. Yi Zhang). Contemporary Mathematics. 2002. V. 302. P. 85–100.

[211] *Zil'ber B.* Bi-coloured fields on the complex numbers // J. Symbolic Logic. 2004. V. 69, No. 4. P. 1171–1186.

Алфавитный указатель