И. А. ТАЙМАНОВ

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

I. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

И. А. Тайманов

Лекции по дифференциальной геометрии.
I. Кривые и поверхности.

Учебное пособие

Новосибирск
2005

Тайманов И. А. Лекции по дифференциальной геометрии. I. Кривые и поверхности: Учеб. пособие.

Данное пособие содержит введение в дифференциальную геометрию кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Оно основано на лекциях автора по дифференциальной геометрии, прочитанных на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета в весенних семестрах 1997 и 1998 годов и охватывает большую часть курса.

Эти лекции были изданы в НГУ в 1998 г. В данном тексте исправлены опечатки и некоторые неточности.

Глава 1. Теория кривых

§1. Основные определения

Пусть $\mathbf{R}^n$ евклидово пространство размерности n с координатами $x^1, \dots, x^n$. Расстояние $\rho(x,y)$ между точками $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}.$$

Для краткости n-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ мы также будем обозначать через $\mathbf{R}^n$, считая, что каждый раз понятно из контекста о чем именно идет речь. Через (v, w) будем обозначать стандартное скалярное произведение в векторном пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$(v, w) = v^1 w^1 + \ldots + v^n w^n. \tag{1}$$

Под словом “гладкий” мы будем понимать “дифференцируемый столько раз, сколько нужно”. Любой желающий может восстановить оценки минимально допустимой гладкости во всех утверждениях или понимать “гладкий” как “дифференцируемый бесконечное число раз”.

Кривой в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ называется отображение

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n.$$

При этом определении под *точкой* P кривой γ понимается образ точки вместе со значением параметра $t \in [a, b]$:

$$P = (\gamma(t) \in \mathbf{R}^n, t \in [a, b]).$$

Мы ограничимся изучением регулярных кривых:

— кривая γ называется *гладкой*, если отображение γ является гладким.

— гладкая кривая γ называется *регулярной*, если во всех внутренних точках интервала $[a, b]$ производная γ по параметру t не равна нулю:

$$\frac{d\gamma}{dt}(s) \neq 0 \text{ при } a < s < b$$

и существуют ненулевые пределы производных справа и слева в конечных точках a и b соответственно.

Наше определение регулярной кривой несколько отличается от других (см. например [5]): ради краткости мы исключаем возможность появления особых точек, в которых $d\gamma/dt = 0$.

Естественно отождествлять кривые, получающиеся прохождением одной и той же кривой с разными скоростями:

регулярные кривые

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^n \text{ и } \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{R}^n$$

называются *эквивалентными*, если существует отображение

$$\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$$

такое, что φ обратимо, отображения φ и φ^{-1} являются гладкими и выполняется соотношение

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \text{ при } t \in [a_1, b_1].$$

Мы будем отождествлять эквивалентные кривые, а t и $s = \varphi(t)$ рассматривать как разные параметры на одной и той же кривой.

В качестве длины кривой естественно выбрать такую величину, чтобы она не зависела от выбора параметра, была аддитивна и для отрезков, задаваемых линейными отображениями, совпадала бы с расстоянием между концевыми точками. Данные условия приводят к следующему определению:

длиной (параметризованной) кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, где $-\infty < a < b < +\infty$, называется значение интеграла

$$\mathrm{length}(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| dt = \tag{2}$$

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1(t)}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx^n(t)}{dt}\right)^2} dt,$$

где $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$.

Верна следующая лемма.

Лемма 1 *Длина кривой не зависит от выбора параметра на кривой.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^n$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{R}^n$ задают одну и ту же кривую и параметры $t \in [a_1, b_1]$ и $s \in [a_2, b_2]$ связаны монотонным отображением $s = s(t)$ таким, что производная ds/dt существует и положительна. Тогда из теорем о производной сложной функции и замены переменной интегрирования следует, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_1}{dt} \right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \frac{ds}{dt} \right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \right| ds.$$

Лемма 1 доказана.

Очевидно, что данное определение длины удовлетворяет и другим указанным выше естественным требованиям.

С понятием длины связано понятие *натурального параметра* — такого параметра l, что длина участка кривой, отвечающего изменению параметра l от a_1 до $b_1 > a_1$ равна $(b_1 - a_1)$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2 *1) Если параметр $l \in [a, b]$ на кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ натурален, то*

$$\left|\frac{d\gamma}{dl}\right| = 1$$

в гладких точках.

2) На каждой регулярной кривой существует натуральный параметр.

Доказательство. Утверждение 1 немедленно следует из определения длины кривой.

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ кривая с параметром t. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|.$$

Так как его правая часть является гладкой функцией, то существует и единственно решение этого уравнения с начальными данными $l(a) = 0$ (см. [6]). Очевидно, что $l(b) = \mathrm{length}(\gamma)$. Возьмем функцию, обратную к l: $t = t(l) : [0, \mathrm{length}(\gamma)] \to [a, b]$, и определим l как параметр на γ по формуле

$$\gamma_0(l) = \gamma(t(l)).$$

Очевидно, что

$$\left|\frac{d\gamma_0}{dl}\right| = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| \frac{dt}{dl} = 1.$$

Следовательно, l натуральный параметр на γ. Лемма 2 доказана.

§2. Кривые на плоскости

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ регулярная кривая на двумерной плоскости. Предположим, что на ней выбран натуральный параметр l. Считая плоскость ориентированной, выберем в каждой точке кривой базис векторов v, n такой, что

1) $v = d\gamma/dl$ и, в частности, так как параметр l натурален, то $|v| = 1$;

2) вектор n ортогонален v, имеет единичную длину и базис (v, n) положительно ориентирован.

Этими условиями реперы (v, n) определяются однозначно и они называются *реперами Френе.*

Теорема 1 *При изменении натурального параметра l вдоль плоской кривой γ репер Френе деформируется согласно уравнениям*

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $(v, v) \equiv (n, n) \equiv 1$, то

$$\frac{d(v,v)}{dl} = 2\left(\frac{dv}{dl}, v\right) = 0,$$

$$\frac{d(n,n)}{dl} = 2\left(\frac{dn}{dl}, n\right) = 0.$$

Следовательно $v \perp dv/dl$ и $n \perp dn/dl$. Так как (v, n) ортонормированный базис в $\mathbf{R}^2$, то существуют такие функции $\alpha(l)$ и $\beta(l)$, что

$$\frac{dv}{dl} = \alpha n, \quad \frac{dn}{dl} = \beta v.$$

Но $(v, n) \equiv 0$ и поэтому

$$\frac{d(v,n)}{dl} = \left(\frac{dv}{dl}, n\right) + \left(v, \frac{dn}{dl}\right) = \alpha + \beta = 0.$$

Положим $k = \alpha = -\beta$. Теорема 1 доказана.

Мы пришли к двум важным понятиям:

— уравнения (3) называются *уравнениями Френе* для плоской кривой;

— коэффициент k, входящий в (3), называется *кривизной (плоской) кривой.*

Более того, *радиусом кривизны* кривой называется величина $R = |k|^{-1}$. Этот термин подтверждается следующим фактом:

Задача 1. Если кривизна k плоской кривой γ постоянна и не равна нулю, то γ является дугой окружности радиуса $|k|^{-1}$. Если кривизна k плоской кривой γ всюду равна нулю, то γ является участком прямой (отрезком, лучом или всей прямой).

Для решения этой задачи достаточно найти решения уравнения (3) с постоянными коэффициентами.

Кривизна кривой определяет кривую с точностью до движений $\mathbf{R}^2$.

Теорема 2 *1) Пусть $k : [0, L] \to \mathbf{R}$ гладкая функция. Тогда существует гладкая кривая $\gamma : [0, L] \to \mathbf{R}^2$, кривизна которой равна $k(l)$.*

2) Пусть $\gamma_1 : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ и $\gamma_2 : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ натурально параметризованные регулярные кривые и их кривизны совпадают: $k_1(l) = k_2(l)$ для всех $l \in [0, L]$. Тогда существует такое движение $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, сохраняющее ориентацию, что $\gamma_2(l) = \varphi(\gamma_1(l))$ для всех $l \in [0, L]$.

Доказательство.

1) Выберем какой-то положительно ориентированный ортонормированный базис (v_0, n_0) в $\mathbf{R}^2$ и рассмотрим решение уравнения (3) с начальными условиями $v(0) = v_0, n(0) = n_0$. Это — обыкновенное дифференциальное уравнение в $\mathbf{R}^4$, правая часть которого гладкая. Поэтому такое решение существует и единственно ([6]). Скалярные произведения векторов v и n удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d(v,v)}{dl} = -2k(v,n), \quad \frac{d(n,n)}{dl} = 2k(v,n), \quad \frac{d(v,n)}{dl} = k(n,n) - k(v,v),$$

решение которой с начальными данными $(v_0, v_0) = (n_0, n_0) = 1, (v_0, n_0) = 0$ тоже единственно, и заметим, что оно постоянно. Поэтому при любом l векторы $v(l)$ и $n(l)$ составляют ортонормированный базис в $\mathbf{R}^2$. Теперь определим кривую γ по формуле

$$\gamma(l) = \int_0^l v(s)ds.$$

Легко заметить, что l — натуральный параметр на кривой, v — вектор скорости по отношению к данному параметру и так как (v, n) ортонормированный базис и $dv/dl = kn$, то k — кривизна кривой γ.

2) Прежде всего напомним, что группа движений евклидова пространства $\mathbf{R}^2$, сохраняющих ориентацию, порождена сдвигами $T_a : x \to r + a$, и вращениями $\Omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ вокруг неподвижной точки ([1]).

Реперы Френе кривых γ_1 и γ_2 обозначим через (v_1, n_1) и (v_2, n_2) соответственно. Определим движение φ как последовательную композицию сдвига T_a и вращения $\Omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ вокруг точки $\gamma_2(0)$

$$\varphi = \Omega \circ T_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,$$

где

$$a = \gamma_2(0) - \gamma_1(0), \quad \Omega v_1(0) = v_2(0).$$

Репер Френе кривой $\varphi(\gamma_1(l))$ имеет вид $(\Omega v_1, \Omega n_1)$. Так как (v_1, n_1) и (v_2, n_2) удовлетворяют одному и тому же уравнению (3) и

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} \Omega v_1 \\ \Omega n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ n_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega v_1 \\ \Omega n_1 \end{pmatrix},$$

то $(\Omega v_1, \Omega n_1)$ удовлетворяет тому же самому уравнению. Более того $(\Omega v_1(0), \Omega n_1(0)) = (v_2(0), n_2(0))$ согласно выбору Ω и из единственности решения уравнения (3) с заданными начальными данными следует:

$$(\Omega v_1(l), \Omega n_1(l)) \equiv (v_2(l), n_2(l)).$$

Из выбора T_a вытекает

$$\gamma_2(l) = \gamma_2(0) + \int_0^l v_2(t)dt = \varphi(\gamma_1(l)).$$

Теорема 2 доказана.

§3. Кривые в трехмерном пространстве

В случае пространственных кривых нормаль к кривой может быть определена бесконечным числом способов. Поэтому мы будем рассматривать лишь бирегулярные кривые:

1) натурально параметризованная регулярная кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ называется *бирегулярной*, если $d^2\gamma/dl^2 \neq 0$ всюду;

2) *нормалью* бирегулярной кривой называется вектор

$$n = \frac{d^2\gamma}{dl^2} \Big/ \left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right|,$$

а *кривизной* (пространственной) кривой называется величина

$$k = \left|\frac{d^2\gamma}{dl^2}\right|. \qquad (4)$$

Чтобы получить *репер Френе* кривой в $\mathbf{R}^3$ дополним $v = d\gamma/dl$ и n третьим вектором — *бинормалью*

$$b = [v \times n]$$

до ортонормированного базиса в $\mathbf{R}^3$.

Заметим, что при этом определении кривизна всегда положительна в отличие от случая плоских кривых.

Теорема 3 *Если γ бирегулярная кривая в $\mathbf{R}^3$, то при изменении натурального параметра l репер Френе деформируется согласно уравнениям Френе для пространственной кривой*

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы 1. Так как $(v(l), n(l), b(l))$ ортонормированный базис при каждом l, то, в частности, длины этих векторов сохраняются, а, следовательно, производная каждого из этих векторов ортогональна ему и поэтому

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{d(v,n)}{dl} = a_{12} + a_{21} = 0, \quad \frac{d(n,b)}{dl} = a_{23} + a_{32} = 0,$$

$$\frac{d(v,b)}{dl} = a_{13} + a_{31} = 0.$$

По определению n мы имеем $a_{12} = k$ и $a_{13} = 0$. Полагая $\varkappa = a_{23}$, мы приходим к уравнениям (5). Теорема 3 доказана.

Величина $\varkappa$, входящая в (5), называется *кручением* кривой γ. Этот выбор термина так же имеет под собой веские основания:

Задача 2. Пусть $k > 0$ и $\varkappa$ постоянны. Тогда винтовая кривая $\gamma(l) = (R\cos(\lambda l), R\sin(\lambda l), \mu l)$ при $\lambda = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}, a = -\varkappa/\lambda$ и $R = k/\lambda^2$ натурально параметризована, ее кривизна тождественно равна k, а ее кручение тождественно равно $\varkappa$.

Имеет место и аналог теоремы 2:

Теорема 4 *1) Пусть $k : [0, L] \to \mathbf{R}$ и $\kappa : [0, L] \to \mathbf{R}$ гладкие функции, причем функция k положительна. Тогда существует гладкая кривая $\gamma : [0, L] \to \mathbf{R}^3$, кривизна которой равна $k(l)$ и кручение которой равно $\kappa(l)$.*

2) Пусть $\gamma_1 : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ и $\gamma_2 : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ натурально параметризованные бирегулярные кривые и их кривизны и кручения совпадают: $k_1(l) = k_2(l), \varkappa_1(l) = \varkappa_2(l)$ для всех $l \in [0, L]$. Тогда существует такое движение $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, сохраняющее ориентацию, что $\gamma_2(l) = \varphi(\gamma_1(l))$ для всех $l \in [0, L]$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

§4. Группа ортогональных преобразований как гладкое подмногообразие евклидова пространства

Уравнения Френе (3) и (5) выводились из того, что скалярные произведения между векторами, входящими в реперы Френе, сохраняются. Мы сделаем сейчас краткое отступление, посвященное ортогональной группе и вывод этих уравнений с общей точки зрения.

Линейные преобразования $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ векторного пространства $\mathbf{R}^n$, сохраняющие скалярное произведение (1), называются *ортогональными*. Следующая лемма очевидна

Лемма 3 *Множество ортогональных преобразований образует группу (ортогональную группу $O(n)$) относительно операции обычной композиции: $A \cdot B(v) = A(B(v))$.*

Множество линейных преобразований $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ отождествим с множеством $(n \times n)$-мерных матриц следующим образом: пусть $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$, тогда матрица $A = (a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ взаимно однозначно отвечает преобразованию, действующему на базисных векторах по формуле

$$A\, e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\, e_j.$$

Лемма 4 *Линейное преобразование ортогонально, если и только если задающая его матрица A удовлетворяет уравнениям*

$$A^* \cdot A = E_n, \tag{6}$$

где A^* — транспонированная матрица A ($a^*_{jk} = a_{kj}$) и E_n — единичная $(n \times n)$-матрица.

Доказательство. Запишем скалярное произведения (1) в виде произведения матриц (здесь мы записываем векторы как $(n \times 1)$-матрицы):

$$(v, w) = v^* \cdot E_n \cdot w.$$

Тогда

$$(Av, Aw) = (A \cdot v)^* \cdot E_n \cdot (A \cdot w) = v^* \cdot A^* \cdot E_n \cdot A \cdot w = v^* \cdot (A^* \cdot A) \cdot w$$

и A ортогонально, если и только если

$$v^* \cdot (A^* \cdot A) \cdot w = v^* \cdot E_n \cdot w \quad \text{для всех} \quad v, w \in \mathbf{R}^n,$$

что эквивалентно (6). Лемма 4 доказана.

Рассматривая матричные элементы a_{jk} как координаты в n^2-мерном пространстве, отождествим пространство $(n \times n)$-мерных матриц с n^2-мерным евклидовым пространством $\mathbf{R}^{n^2}$. Ортогональная группа выделяется в нем $n(n+1)/2$ полиномиальными уравнениями (6):

$$F_{jk}(a_{11}, \dots, a_{nn}) - \delta_{jk} = \sum_{m=1}^{n} a_{mj} a_{mk} - \delta_{jk} = 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq n. \tag{7}$$

Напомним теперь теорему о неявной функции (см., например, [3]):

Теорема о неявной функции *Пусть $F : U \times V \to \mathbf{R}^n$ гладкое отображение прямого произведения областей $U \subset \mathbf{R}^n$ и $V \subset \mathbf{R}^k$ с координатами x и y, соответственно, в $\mathbf{R}^n$. Пусть $F(x_0, y_0) = 0$ и в $(x_0, y_0) \in U \times V$ матрица*

$$J = \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^m} \right)_{1 \leq j, m \leq n} \tag{8}$$

обратима. Тогда существует такая окрестность $W \subset U \times V$ точки (x_0, y_0) и такая окрестность $V_0 \subset V$ точки $y_0 \in \mathbf{R}^k$, что

1) в V_0 определены гладкие функции $\psi_1, \dots, \psi_n$;

2) $F(x, y) = 0$ для $(x, y) \in W$, если и только если $x^1 = \psi_1(y), \dots, x^n = \psi_n(y)$.

Из теоремы о неявной функции следует, что в окрестности точки (x_0, y_0) множество нулей отображения F устроено как график отображения $V_0 \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ и поэтому точки этого множества гладко параметризуются точками области из $\mathbf{R}^k$.

Теорема 5 *Пусть M подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^{n+k}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как график гладкого отображения

$$\begin{gathered} x^1 = \psi_1(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}), \\ \dots \\ x^n = \psi_n(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}) \end{gathered} \tag{9}$$

(после подходящего перенумерования координат $x^1, \dots, x^{n+k}$);

2) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как множество нулей гладкого отображения $F : W \subset \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n$ такого, что в этой окрестности матрица (8) обратима (после подходящего перенумерования координат $x^1, \dots, x^{n+k}$).

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует, что условие 2 влечет условие 1. Обратное тоже верно: зададим F формулами $F^1(x) = x^1 - \psi_1(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}), \dots, F^n(x) = x^n - \psi_n(x^{n+1}, \dots, x^{n+k})$. Теорема 5 доказана.

Подмножество M, для которого выполнено любое из двух эквивалентных условий из теоремы 5, называется k-мерным *гладким подмногообразием* (без края) $\mathbf{R}^{n+k}$.

Пусть в окрестности точки $x \in M$ подмногообразие M задается как график отображения (9). Тогда $y^1 = x^{n+1}, \dots, y^k = x^{n+k}$ задают *локальные координаты* в окрестности x и функция f на M называется *гладкой в точке* x, если она является гладкой как функция от локальных координат: $f(y^1, \dots, y^k)$. Аналогично вводится понятие гладкости и для других объектов на подмногообразиях и, в частности, для векторных полей.

Пусть M является k-мерным подмногообразием $\mathbf{R}^{n+k}$ и $x \in M$. Рассмотрим множество всех гладких путей на M, проходящих через точку x и лежащих в ее окрестности, задаваемой формулами (9). Каждому такому пути γ сопоставим его вектор скорости в точке x: $v = d\gamma(t_0)/dt$, где $\gamma(t_0) = x$. Множество таких векторов образует *касательное пространство* к подмногообразию M в точке x.

Лемма 5 *Касательное пространство к k-мерному подмногообразию $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ в любой его точке является k-мерным векторным пространством.*

Доказательство. Любой путь γ на M, проходящий через x, является поднятием пути $\gamma_0 : [a, b] \to \mathbf{R}^k$ с помощью (9). Поэтому вектор скорости $d\gamma/dt$ имеет вид

$$\frac{d\gamma}{dt} = B\left(\frac{d\gamma_0}{dt}\right) = \left(\Psi_*\left(\frac{d\gamma_0}{dt}\right), \left(\frac{d\gamma_0}{dt}\right)\right),$$

где Ψ_* — дифференциал отображения $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Линейное отображение B имеет максимальный ранг k и потому является изоморфизмом на образ: оно задает изоморфизм векторного пространства $\mathbf{R}^k$ и $T_x M$. Лемма 5 доказана.

Существует и иное, эквивалентное, определение касательного пространства:

Задача 3. Если подмногообразие $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ определено в окрестности W точки $x \in M$ как множество нулей отображения $F : W \to \mathbf{R}^n$, то касательное пространство к M в точке x совпадает с ядром линейного отображения

$$F_* : \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n \quad : \quad F_*(v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x + \varepsilon v) - F(x)}{\varepsilon}.$$

Красивым примером гладкого подмногообразия является ортогональная группа:

Теорема 6 *Ортогональная группа $O(n)$ является $n(n-1)/2$-мерным гладким подмногообразием n^2-мерного евклидова пространства, образованного $(n \times n)$-матрицами. Касательное пространство $T_E O(n)$ к единице группы при этом совпадает с пространством кососимметричных матриц.*

Доказательство. Тождественное преобразование, задаваемое единичной матрицей E_n, является единицей группы $O(n)$. В окрестности $E_n \in O(n)$ разделим переменные a_{jk} на две группы: x отвечает $j \le k$, y отвечает $j > k$. Рассмотрим отображение

$$F : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}^{n(n+1)/2},$$

задаваемое полиномами (7). Легко подсчитать, что в точке $E_n \in \mathbf{R}^{n^2}$ при $j \le k, r \le s$

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial a_{rs}} = \begin{cases} 2 & \text{при } j = r, k = s \\ 1 & \text{при } j = r, k = s, j \ne k \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно в окрестности $E_n \in \mathbf{R}^{n^2}$ матрица (8) обратима и так как $O(n)$ выделяется уравнениями $F = 0$, то в окрестности E_n по теореме о неявной функции $O(n)$ — гладкое подмногообразие.

Если $A \in O(n)$, то определим отображение F_A по формуле $F_A(X) = F(X \cdot A^{-1})$ и так как $O(n)$ — группа, то $O(n)$ также определяется уравнениями $F_A = 0$. Из определения F_A следует, что ранг якобиана отображения F_A в точке A совпадает с рангом якобиана отображения F в точке E_n и, следовательно, равен $n(n+1)/2$. Отсюда заключаем, что $O(n)$ является гладким подмногообразием в окрестности любой своей точки.

Так как $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$, то $O(n)$ — $n(n-1)/2$-мерное подмногообразие.

Пусть γ гладкий путь в $O(n)$, проходящий через E_n. Можно считать, что

$$\gamma(\varepsilon) = E_n + X\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где $X \in T_E O(n)$ — касательная матрица. Из (6) следует

$$\gamma(\varepsilon)^* \cdot \gamma(\varepsilon) = (E_n + (X^* + X)\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \equiv E_n.$$

Значит матрица X кососимметрична ($X^* + X = 0$) и так как размерность пространства кососимметричных матриц совпадает с размерностью $O(n)$, то отсюда следует, что $T_E O(n)$ совпадает с пространством кососимметричных матриц. Теорема 6 доказана.

Теперь вернемся к уравнениям Френе. Обозначим через $R(l)$ репер Френе, отвечающий значению параметра l на кривой γ. Переход от $R(0)$ к $R(l)$ задается ортогональным преобразованием $A(l)$, так как все эти реперы ортонормированы. Значит мы имеем гладкий путь $A(l)$ в группе $O(n)$ и столбцы матриц $A(l)$ задают разложения векторов из $R(l)$ по базису $R(0)$. Уравнения Френе имеют вид

$$\frac{dA(l)}{dl} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(l+\varepsilon) \cdot A^{-1}(l) - E_n}{\varepsilon} \cdot A(l) = B(l) \cdot A(l),$$

где матрица $B(l)$ кососимметрична, так как она касательна к единице группы $O(n)$.

Задача 4. Пусть A кососимметричная $(n \times n)$-матрица. Тогда абсолютно сходящийся при всех $t \in R$ ряд

$$\exp(At) = E_n + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n t^n + \ldots$$

задает гладкий путь в $O(n)$.

Глава 2. Теория поверхностей

§5. Регулярные поверхности и первая квадратичная форма

Регулярной поверхностью в $\mathbf{R}^3$ называется двумерное гладкое подмногообразие $\mathbf{R}^3$.

С помощью теоремы о неявной функции уточним это определение:

1) $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ называется регулярной поверхностью, если в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно выделяется как множество нулей гладкой функции $F(x^1, x^2, x^3)$ такой, что в этой окрестности

$$\frac{\partial F}{\partial x^3} \neq 0$$

после подходящего перенумерования координат x^1, x^2, x^3;

2) $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ называется регулярной поверхностью, если в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно задается как график гладкого отображения

$$x^3 = \psi(x^1, x^2)$$

после подходящего перенумерования координат x^1, x^2, x^3;

3) $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ называется регулярной поверхностью, если в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно задается как образ гладкого отображения

$$\mathbf{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,$$

где U — область на плоскости с координатами u^1, u^2, причем во всех точках этой области векторы $\mathbf{r}_1 = \partial \mathbf{r}/\partial u^1$ и $\mathbf{r}_2 = \partial \mathbf{r}/\partial u^2$ линейно независимы.

Лемма 6 *Определения 1 - 3 регулярной поверхности эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность определений 1 и 2 уже была нами установлена в §4 в наиболее общем виде — для гладких подмногообразий $\mathbf{R}^N$. Для доказательства леммы достаточно доказать эквивалентность определений 2 и 3.

Очевидно, что из 2) следует 3): достаточно рассмотреть отображение $\mathbf{r}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \psi(u^1, u^2))$. Для доказательства того, что из 3) следует 2) применим следующее следствие теоремы о неявной функции:

Теорема об обратной функции *Пусть $F : U \subset \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ гладкое отображение области из $\mathbf{R}^N$ в $\mathbf{R}^N$ и в точке $x_0 \in U$ якобиан этого отображения обратим:*

$$\det \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^k} \right)_{1 \leq j,k \leq N} \neq 0.$$

Тогда в окрестности V точки $F(x_0)$ определено гладкое отображение $G : V \to \mathbf{R}^N$ обратное к F: $G \circ F(x) \equiv x$ в области $G(V) \subset U$.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить теорему об обратной функции к отображению $\Psi : U \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ вида $\Psi(x, y) = y - F(x)$.

Покажем теперь, что 3) влечет 2). Пусть $x \in \Sigma$. Без ограничения общности можно считать, что в точке x матрица

$$\begin{pmatrix} \partial x^1/\partial u^1 & \partial x^1/\partial u^2 \\ \partial x^2/\partial u^1 & \partial x^2/\partial u^2 \end{pmatrix}$$

обратима и потому по теореме об обратной функции в окрестности x параметры u^1 и u^2 однозначно выражаются как функции от x^1 и x^2: отображение $(u^1, u^2) \to (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2))$ обратимо. Теперь заметим, что в окрестности x поверхность задается как график гладкого отображения

$$x^3 = x^3(u^1(x^1, x^2), u^2(x^1, x^2)).$$

Лемма 6 доказана.

Хотя все три определения эквивалентны, мы в дальнейшем будем пользоваться третьим, так как оно вводит понятие *локальных координат* $(u^1, u^2) \in U \subset \mathbf{R}^2$, т. е. таких величин, которые в окрестности каждой точки задают координаты на поверхности.

Особенно это удобно при рассмотрении кривых на поверхности — не надо задавать кривую в $\mathbf{R}^3$ и накладывать на нее аналитические условия, чтобы она лежала на поверхности, а достаточно задать кривую

$$\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbf{R}^2$$

как гладкое отображение в область U. Если кривая не лежит в окрестности, описываемой одними и теми же локальными координатами, то она задается как семейство отображений в такие области, причем эти отображения склеиваются в тех областях, которые описываются несколькими системами координат, чтобы корректно задать кривую и ее векторы скорости (которые разные в разных системах координат). Это требует введения тензоров и мы пока оставим это в стороне, ограничиваясь по возможности участками поверхностей, покрываемыми одной системой координат.

Теорема 7 *Пусть гладкое отображение* $\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3$ *задает регулярную поверхность* Σ *с локальными координатами* $(u^1, u^2) \in U$. *Тогда*

1) в каждой точке $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ *векторы* $\mathbf{r}_1$ *и* $\mathbf{r}_2$ *задают базис в касательной плоскости к* Σ*;*

2) длина регулярной кривой $\gamma : [a, b] \to U$ *на поверхности равна*

$$length(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\mathbf{I}(\dot\gamma, \dot\gamma)}dt,$$

где

$$\mathbf{I}(v, w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

симметричная билинейная форма на векторном пространстве $\mathbf{R}^2$*, зависящая от точки поверхности и определяемая формулами*

$$E = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1),\ F = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),\ G = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2),$$

и $\dot{\gamma} = d\gamma/dt = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ *— вектор скорости в локальных координатах.*

Доказательство. Утверждение 1 очевидно следует из определения касательного пространства. Утверждение 2 выводится из (2). Действительно, по определению

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d(\mathbf{r}\circ\gamma)}{dt}, \frac{d(\mathbf{r}\circ\gamma)}{dt}\right)} dt$$

и мы получаем прямыми вычислениями

$$\left(\frac{d(\mathbf{r}\circ\gamma)}{dt}, \frac{d(\mathbf{r}\circ\gamma)}{dt}\right) = (\mathbf{r}_1\dot{u}^1 + \mathbf{r}_2\dot{u}^2, \mathbf{r}_1\dot{u}^1 + \mathbf{r}_2\dot{u}^2) =$$

$$E\left(\dot{u}^1\right)^2 + 2F\dot{u}^1\dot{u}^2 + G\left(\dot{u}^2\right)^2.$$

Теорема 7 доказана.

Согласно теореме 7, в касательном пространстве в каждой точке задано скалярное произведение, определяемое *первой квадратичной формой* $\mathbf{I}$ и естественным образом задающее углы $\varphi_{v,w}$ между векторами v и w и длины $|v|$ векторов v:

$$|v| = \sqrt{\mathbf{I}(v,v)}, \quad \cos\varphi_{v,w} = \frac{\mathbf{I}(v,w)}{|v||w|} \text{ при } v \neq 0 \text{ и } w \neq 0.$$

Следующее определение площади части поверхности, как и определение длины, вполне естественно, аддитивно и совпадает с обычным для плоских поверхностей:

если $V \subset U$, то *площадь* части $r(V)$ поверхности Σ равна

$$\int\int_V \sqrt{EG - F^2}\, du^1\, du^2.$$

§6. Вторая квадратичная форма и кривизны нормальных сечений

Обозначим через $\mathbf{m}(u^1, u^2)$ такую нормаль к регулярной поверхности в точке $\mathbf{r}(u^1, u^2)$, что $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m})$ положительно ориентированный репер в $\mathbf{R}^3$. Она находится явно по формуле

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]|}.$$

Через $\mathbf{r}_{jk}$ обозначим $\partial^2\mathbf{r}/\partial u^j \partial u^k$.

Пусть
$$\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathbf{R}^3$$
регулярная кривая с параметром t и пусть l натуральный параметр на γ. Согласно (4),
$$\frac{d^2(\mathbf{r}\circ\gamma)}{dl^2} = k\,n,$$
где k — кривизна кривой, а n — нормаль к кривой. Из доказательства леммы 2 мы также знаем, что $dl/dt = |d(\mathbf{r}\circ\gamma)(t)/dt| = \sqrt{\mathbf{I}(\dot\gamma,\dot\gamma)}$.

Теорема 8 *(Теорема Менье)* *Кривизна кривой на поверхности удовлетворяет уравнению*
$$k\,\cos\theta = k(\mathbf{m}, n) = \frac{\mathbf{II}(\dot\gamma,\dot\gamma)}{\mathbf{I}(\dot\gamma,\dot\gamma)},$$
где θ — угол между n и m, нормалями к кривой и к поверхности, а форма **II** *имеет вид*
$$\mathbf{II}(v,w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix},$$
где
$$L = (\mathbf{r}_{11}, \mathbf{m}),\ M = (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{m}),\ N = (\mathbf{r}_{22}, \mathbf{m}).$$

Доказательство. Прямыми вычислениями получим
$$\frac{d^2(\mathbf{r}\circ\gamma)}{dl^2} = k\,n = \frac{d}{dl}\left(\mathbf{r}_1\dot u^1\frac{dt}{dl} + \mathbf{r}_2\dot u^2\frac{dt}{dl}\right) =$$
$$\left(\mathbf{r}_{11}\left(\dot u^1\right)^2 + 2\mathbf{r}_{12}\dot u^1\dot u^2 + \mathbf{r}_{22}\left(\dot u^2\right)^2 + \mathbf{r}_1\ddot u^1 + \mathbf{r}_2\ddot u^2\right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 +$$
$$(\mathbf{r}_1\dot u^1 + \mathbf{r}_2\dot u^2)\frac{d^2t}{dl^2}$$
и, так как $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ ортогональны m, выводим
$$k(n,\mathbf{m}) =$$
$$\left((\mathbf{r}_{11},\mathbf{m})\left(\dot u^1\right)^2 + 2(\mathbf{r}_{12},\mathbf{m})\dot u^1\dot u^2 + (\mathbf{r}_{22},\mathbf{m})\left(\dot u^2\right)^2\right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2.$$
Осталось только заметить, что $(dt/dl)^2 = (dl/dt)^{-2} = \mathbf{I}(\dot\gamma,\dot\gamma)^{-1}$. Теорема 8 доказана.

Пусть v касательный вектор к поверхности в точке $\mathbf{r}(u^1,u^2)$ и $\mathbf{m}$ вектор нормали в этой же точке. Проведем через точку $\mathbf{r}(u^1,u^2)$ двумерную плоскость, натянутую на векторы $\mathbf{m}$ и v. Пересечение этой плоскости и поверхности — кривая $\gamma_{u^1,u^2,v}$ — называется *нормальным сечением*, отвечающим точке $\mathbf{r}(u^1,u^2)$ и касательному вектору v. Из теоремы 8 вытекает

Следствие 1 *Кривизна нормального сечения $\gamma_{u^1,u^2,v}$ равна*

$$k = \pm\frac{\mathbf{II}(v,v)}{\mathbf{I}(v,v)}.$$

Причем правая часть берется с положительным знаком, если нормали к поверхности и к нормальному сечению совпадают и с отрицательным знаком в противном случае.

Возникшая в этих вычислениях билинейная форма $\mathbf{II}$ называется *второй квадратичной формой* поверхности.

Задача 5. Пусть поверхность задана как график функции:

$$x^1 = u^1, \;\; x^2 = u^2, \;\; x^3 = f(u^1,u^2).$$

Тогда первая квадратичная форма имеет вид

$$E = 1 + f_1^2, \;\; F = f_1 f_2, \;\; G = 1 + f_2^2,$$

вектор нормали к поверхности задается формулой

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}\,(-f_1,-f_2,1)$$

и вторая квадратичная форма имеет вид

$$L = \frac{f_{11}}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}, \;\; M = \frac{f_{12}}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}}, \;\; N = \frac{f_{22}}{\sqrt{1+f_1^2+f_2^2}},$$

где через $f_{j_1\dots j_k}$ мы обозначаем $\partial^k f/\partial u^{j_1}\dots\partial u^{j_k}$.

Задача 6. Пусть задана функция $f(x)$. Рассмотрим поверхность вращения графика этой функции:

$$r(u,v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v).$$

Тогда первая квадратичная форма имеет вид

$$E = 1 + f'^2, \;\; F = 0, \;\; G = f^2,$$

вектор нормали к поверхности задается формулой

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\,(f', \cos v, \sin v)$$

и вторая квадратичная форма имеет вид

$$L = -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},\ M = 0,\ N = \frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

§7. Гауссова кривизна

Отношение $\mathbf{II}(v,v)/\mathbf{I}(v,v)$ называется *нормальной кривизной* поверхности в направлении v.

Лемма 7 *Пусть на векторном пространстве* $\mathbf{R}^N$ *заданы две симметричные билинейные формы* $\mathbf{I}$ *и* $\mathbf{II}$, *причем форма* $\mathbf{I}$ *положительно определена. Тогда в* $\mathbf{R}^N$ *существует такой базис* $e_1, \dots, e_N$, *что в этом базисе формы принимают вид*

$$\mathbf{I}(v,w) = v^1w^1 + \ldots + v^Nw^N, \quad \mathbf{II}(v,w) = \lambda_1 v^1w^1 + \ldots + \lambda_N v^Nw^N$$

(т.е. форма $\mathbf{I}$ *задается единичной матрицей, а форма* $\mathbf{II}$ *— диагональной).*

Доказательство этой леммы из линейной алгебры несложно. Рассмотрим форму $\mathbf{I}$ как скалярное произведение на $\mathbf{R}^N$ и с помощью ортогонализации Грама–Шмидта найдем ортонормированный базис в $\mathbf{R}^N$. Теперь рассмотрим $\mathbf{II}$ как симметричную билинейную форму на $\mathbf{R}^N$ с скалярным произведением $\mathbf{I}$. Известно, что любая такая форма диагонализируется в каком-то ортонормированном базисе ([4]). Лемма 7 доказана.

Обозначим теперь через $T_x\Sigma$ касательную плоскость к поверхности Σ в точке x. На ней заданы квадратичные формы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{II}$. Применим в этой ситуации лемму 7 и получим, что

Лемма 8 *В* $T_x\Sigma$ *можно выбрать базис* e_1, e_2, *в котором формы* $\mathbf{I}$ *и* $\mathbf{II}$ *одновременно диагонализируются:* $\mathbf{I}(v,w) = v^1w^1 + v^2w^2$ *и* $\mathbf{II}(v,w) = k_1v^1w^1 + k_2v^2w^2$.

Направления векторов e_1 и e_2 называются *главными направлениями* и они определены однозначно, если $k_1 \neq k_2$. Значения k_1 и k_2 нормальных кривизн вдоль главных направлений называются *главными кривизнами.* Они являются экстремальными значениями для нормальных кривизн в точке, что следует из теперь очевидного утверждения:

Теорема 9 *(Формула Эйлера)*

$$\frac{\mathbf{II}(v,v)}{\mathbf{I}(v,v)} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол между векторами e_1 и v.

Главные кривизны не зависят от выбора базиса в касательном пространстве, а являются инвариантами пары квадратичных форм $\mathbf{I}$ и $\mathbf{II}$:

Лемма 9 *Пусть симметричные (2×2)-матрицы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{II}$ задают одноименные квадратичные формы поверхности. Тогда главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями уравнения*

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{II} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Доказательство. Легко вывести, что, если в базисе e_1, e_2 квадратичная форма J задается симметричной одноименной матрицей J:

$$J(v,w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix},$$

и координаты v' в новом базисе e'_1, e'_2 связаны с старыми уравнением $v = Av'$, то в новом базисе форма J задается матрицей $A^* J A$.

Мы знаем, что в каком-то базисе k_1 и k_2 являются корнями уравнения

$$\det(\mathbf{II} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Но так как

$$\det(A^* \mathbf{II} A - \lambda A^* \mathbf{I} A) = \det A^* \cdot \det A \cdot \det(\mathbf{II} - \lambda \mathbf{I})$$

и $\det A^* = \det A \neq 0$, то в любом другом базисе аналогичное уравнение будет иметь те же самые корни. Лемма 9 доказана.

Из леммы 9 следует, что произведение и сумма главных кривизн в точке поверхности являются геометрическими инвариантами:

— произведение главных кривизн в точке называется *гауссовой кривизной* поверхности в этой точке:

$$K = k_1\,k_2 = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} = \frac{LN - M}{EG - F^2};$$

— полусумма главных кривизн в точке называется *средней кривизной* поверхности в этой точке:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Задача 7. В условиях задачи 5 гауссова кривизна имеет вид

$$K = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^2}.$$

Задача 8. Для поверхности вращения (см. задачу 6) главные кривизны имеют вид

$$k_1 = -\frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}},$$

гауссова кривизна равна

$$K = -\frac{f''}{f(1 + f'^2)^2}$$

и средняя кривизна равна

$$H = \frac{1 + f'^2 - ff''}{2f(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

Задача 9. Гауссова кривизна гиперболического параболоида $z = xy$ всюду отрицательна и равна

$$K = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

а гауссова кривизна круглой сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ радиуса R всюду положительна и равна $K = R^{-2}$.

Задача 9 проясняет геометрический смысл знака гауссовой кривизны:

а) $K > 0$ в точке $x \in \Sigma$. Тогда малая окрестность точки x лежит по одну сторону от касательной плоскости T_xM: действительно, T_xM разделяет пространство на два полупространства и нормали всех нормальных сечений направлены в одно и то же полупространство — около точки x поверхность выглядит как “шапочка” ;

б) $K < 0$ в точке $x \in \Sigma$. Тогда кривизны двух нормальных сечений равны нулю (их касательные направления называются *асимптотическими*), а нормали сечений, отвечающих главным кривизнам, направлены в разные полупространства относительно T_xM — около точки x поверхность выглядит как “седло”.

§8. Деривационные уравнения и теорема Бонне

Аналогом уравнений Френе для поверхностей являются уравнения, описывающие деформацию базиса $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ вдоль поверхности. Деформации $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ описываются *уравнениями Гаусса*, выражающими векторы $\mathbf{r}_{jk} = \partial^2 \mathbf{r}/\partial u^j \partial u^k$ через базисные векторы:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{11} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_2 + b_{11}\mathbf{m},\\
\mathbf{r}_{12} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_2 + b_{12}\mathbf{m},\\
\mathbf{r}_{22} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_2 + b_{22}\mathbf{m}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Символы Γ^i_{jk} называются *символами Кристоффеля* и легко заметить, что b_{jk} — коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = b_{11},\ M = b_{12} = b_{21},\ N = b_{22}.$$

Прежде, чем выводить уравнения деформации $\mathbf{m}$ мы введем два соглашения:

1) если формуле один и тот же индекс повторяется дважды — один раз сверху и один раз снизу, то подразумевается, что по этому индексу проводится суммирование:

$$a^j b_j := \sum_j a^j b_j;$$

2) матрицу, обратную к матрице a_{ij}, будем обозначать через a^{kl}, считая по определению

$$a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k,\\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Так как $(\mathbf{m}, \mathbf{m}) \equiv 1$, то $(\mathbf{m}_j, \mathbf{m}) = 0$ и следовательно $\mathbf{m}_j = \partial \mathbf{m}/\partial u^j$ выражается в виде линейной комбинации $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Далее выводим

$$\frac{\partial(\mathbf{m}, \mathbf{r}_j)}{\partial u^k} = (\mathbf{m}_k, \mathbf{r}_j) + (\mathbf{m}, \mathbf{r}_{jk}) = 0. \tag{11}$$

Введем коэффициенты a^j_k как

$$\mathbf{m}_k = a^1_k \mathbf{r}_1 + a^2_k \mathbf{r}_2 = a^j_k \mathbf{r}_j,$$

обозначим через $g_{jk} = (\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E = g_{11},\ F = g_{12} = g_{21},\ G = g_{22},$$

и перепишем (11) как

$$a_1^1 g_{11} + a_1^2 g_{12} = -b_{11},\ a_1^1 g_{12} + a_1^2 g_{22} = -b_{12},$$

$$a_2^1 g_{11} + a_2^2 g_{12} = -b_{21},\ a_2^1 g_{12} + a_2^2 g_{22} = -b_{22}.$$

Полученные уравнения распадаются на две системы уравнений относительно a_1^1, a_1^2 и a_2^1, a_2^2, которые могут быть записаны в виде

$$a_i^k g_{jk} = -b_{ij}.$$

Так как матрица g_{jk} обратима, то в итоге получаем следующие уравнения.

Теорема 10 *(Уравнения Вейнгартена)*

$$\mathbf{m}_i = -b_{ij}\, g^{jk}\, \mathbf{r}_k.$$

Вместе с уравнениями Гаусса эти уравнения образуют полный набор *деривационных уравнений*. Как и уравнения Френе мы можем записать их в виде

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12} \\ -b_{1j}g^{j1} & -b_{1j}g^{j2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22} \\ -b_{2j}g^{j1} & -b_{2j}g^{j2} & 0 \end{pmatrix}$$

и символы Кристоффеля симметричны по определению: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$. В отличие от уравнений Френе в данном случае возникают нетривиальные условия совместности:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial u^2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial u^1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix},$$

что эквивалентно следующей системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^1}A_2 - \frac{\partial}{\partial u^2}A_1 = A_1A_2 - A_2A_1,$$

которые называются *уравнениями Гаусса–Петерсона–Кодацци.*

Другая зависимость между величинами, входящими в (10), и первой квадратичной формой выражается следующими формулами и является следствием уравнений Гаусса.

Теорема 11

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\, g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right). \tag{12}$$

Доказательство. Согласно (10) мы имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^l\, g_{lj} + \Gamma_{jk}^l\, g_{li}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\,\Gamma_{ij}^m\, g_{ml},$$

что влечет

$$g^{lk}\, g_{ml}\Gamma_{ij}^m = \delta_m^k\, \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\, g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}. \right)$$

Теорема 11 доказана.

Теперь мы можем сформулировать аналог теорем 2 и 4 для поверхностей.

Теорема 12 *(Теорема Бонне) Пусть*

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21}(= g_{12}) & g_{22} \end{pmatrix} \quad и \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21}(= b_{12}) & b_{22} \end{pmatrix}$$

гладкие квадратичные формы в области U гомеоморфной внутренности круга, причем первая из них положительно определена и коэффициенты этих форм удовлетворяют уравнениям Гаусса–Петерсона–Кодацци.

Тогда существует и притом единственная (с точностью до движений) поверхность в $\mathbf{R}^3$, для которой эти формы являются первой и второй квадратичными формами.

Доказательство. Мы ограничимся наброском доказательства, указав лишь принципиальное отличие от доказательств теорем 2 и 4 — необходимость выполнения условий совместности (уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци).

Пусть $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$. Выберем такие векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$, что

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) = g_{11}(u_0), \quad (\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = g_{12}(u_0), \quad (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0) = g_{22}(u_0),$$

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{c}_0) = (\mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0) = 0, \quad (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0) = 1,$$

как начальные данные для уравнений Гаусса–Вейнгартена:

$$\mathbf{r}_1(u_0) = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{r}_2(u_0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{m}(u_0) = \mathbf{c}_0.$$

Так как коэффициенты форм удовлетворяют уравнениям Гаусса–Петерсона–Кодацци, то построенные по этим формам уравнения Гаусса–Вейнгартена совместны и имеют единственное решение $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ с заданными начальными данными в точке u_0.

Так как $\partial \mathbf{a}/\partial u^2 = \partial \mathbf{b}/\partial u^1$ и область U гомеоморфна внутренности круга, то существует отображение $\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3$ такое, что $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1, \mathbf{b} = \mathbf{r}_2$. Это отображение задает поверхность, для которой определим первую и вторую квадратичную формы.

Как и при доказательстве теоремы 4, анализируя уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты этих форм, докажем, что эти формы совпадают с исходными. Однозначность поверхности с точностью до движений в $\mathbf{R}^3$ доказывается как и однозначность искомой кривой с точностью до движений в плоскости в теореме 2.

Теорема 12 доказана.

Задача 10. Пусть первая квадратичная форма диагональна:

$$g_{11} = \lambda(u^1, u^2), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \mu(u^1, u^2).$$

Тогда символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u^2}.$$

Задача 11. Доказать, что для поверхности вращения (см. задачу 6) символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f''}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{ff'}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

где $(u^1, u^2) := (u, v)$.

§9. Теорема Гаусса

Выдающимся открытием Гаусса явилось установление того, что гауссова кривизна полностью определяется первой квадратичной формой. Это следует из выведенной им формулы, которая входит в систему уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци.

Теорема 13 *(Теорема Гаусса)*

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} =$$

$$\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\left(\left(\Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l - \Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l\right) g_{kl} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}\right).$$

Доказательство. Из (10) очевидно следует, что

$$(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12}) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + \Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l\, g_{kl} - \Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l\, g_{kl}.$$

Но

$$(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12}) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1},$$

что вытекает из соотношения

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial^2 (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial u^k \partial u^l} = (\mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jl}) + (\mathbf{r}_{il}, \mathbf{r}_{jk}) + (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jkl}) + (\mathbf{r}_{ikl}, \mathbf{r}_j).$$

Осталось сравнить выражения для $(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12})$, чтобы завершить доказательство. Теорема 13 доказана.

Из теорем 11 и 13 вытекает

Следствие 2 *Гауссова кривизна выражается через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые и вторые производные.*

Регулярные поверхности $\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3$ и $\tilde{\mathbf{r}} : U \to \mathbf{R}^3$ называются *изометричными*, если для любой регулярной кривой $\gamma : [a, b] \to U$ длины кривых $\mathbf{r} \circ \gamma$ и $\tilde{\mathbf{r}} \circ \gamma$ совпадают. Это эквивалентно тому, что во всех точках совпадают значения первых квадратичных форм:

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = (\tilde{\mathbf{r}}_i, \tilde{\mathbf{r}}_j).$$

Следствие 2 может теперь быть переформулировано следующим образом.

Следствие 3 *Если две поверхности $\mathbf{r}: U \to \mathbf{R}^3$ и $\tilde{\mathbf{r}}: U \to \mathbf{R}^3$ изометричны, то их гауссовы кривизны совпадают для каждой пары точек $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ и $\tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2)$.*

Задача 12. Доказать, что гауссова кривизна конуса $x^2 + y^2 = z^2$ в точке $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ равна нулю.

§10. Ковариантное дифференцирование и геодезические

Пусть $\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3$ задает регулярную поверхность, $\gamma : [a, b] \to U$ регулярная кривая на поверхности и v гладкое векторное поле вдоль кривой γ:

1) для каждого $t \in [a, b]$ вектор $v(t)$ лежит в касательном пространстве к поверхности в точке $\gamma(t)$;

2) векторы $v(t)$ гладко зависят от t.

Разлагая $v(t)$ по базисам в касательных плоскостях, запишем векторное поле как

$$v(t) = v^i(t)\mathbf{r}_i(t).$$

Производная векторного поля вдоль кривой имеет вид

$$\dot{v} = \frac{dv^i}{dt}\mathbf{r}_i + v^i\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{dv^i}{dt}\mathbf{r}_i + v^i\dot{u}^j\mathbf{r}_{ij},$$

где $\dot{\gamma} = \left(\dot{u}^1, \dot{u}^2\right)$. Разложим правую часть последнего равенства на два слагаемых, одно из которых касательно к поверхности, а другое — ортогонально:

$$\dot{v} = \left(\frac{dv^i}{dt}\mathbf{r}_i + \Gamma^i_{jk}v^j\dot{u}^k\mathbf{r}_i\right) + v^j\dot{u}^k b_{jk}\mathbf{m}.$$

Ковариантной производной $\nabla_{\dot{\gamma}}v$ векторного поля v вдоль кривой γ на поверхности в $\mathbf{R}^3$ называется ортогональная проекция производной поля v вдоль кривой на касательную плоскость к поверхности:

$$\frac{Dv}{\partial t} = \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}v^j\dot{u}^k\right)\mathbf{r}_i.$$

Предположим теперь, что векторное поле v задано не только на кривой, но и в целой области поверхности. Тогда мы можем рассматривать ковариантные производные поля вдоль различных кривых и формула для *ковариантной производной поля v в направлении вектора w* примет вид

$$\nabla_w v = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{jk}v^j\right)w^k\mathbf{r}_i,$$

где w касательный вектор к поверхности. Эта операция обладает рядом замечательных свойств.

Лемма 10 *1) Отображение $(w, v) \to \nabla_w v$ линейно по v и w:*

$$\nabla_{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2} v = \alpha_1 \nabla_{w_1} v + \alpha_2 \nabla_{w_2} v,$$

$$\nabla_w (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \nabla_w v_1 + \alpha_2 \nabla_w v_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R};$$

2) если $f : U \to \mathbf{R}$ гладкая функция, то

$$\nabla_{fw} v = f \nabla_w v, \quad \nabla_w f v = D_w f\, v + f \nabla_w v,$$

где $D_w f$ — производная функции f в направлении вектора w: $D_w f = \sum_j (\partial f / \partial u^j) w^j$;

3)

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} \mathbf{r}_j = \Gamma^k_{ij} \mathbf{r}_k \quad ;$$

4)

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \quad ;$$

5) производная скалярного произведения векторных полей вычисляется по формуле

$$D_w(v_1, v_2) = (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2).$$

Доказательство. Утверждения 1–3 вытекают немедленно из определения ковариантного дифференцирования. Утверждение 4 вытекает из данного нами определения символов Кристоффеля и так же выводится из Теоремы 11.

Утверждение 5 доказывается прямыми вычислениями:

$$D_w \left((\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) v_1^i v_2^j \right) = w^k \frac{\partial}{\partial u^k} \left((\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) v_1^i v_2^j \right) =$$

$$w^k \left((\mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_j) + (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jk}) \right) v_1^i v_2^j + w^k (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \left(\frac{\partial v_1^i}{\partial u^k} v_2^j + v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial u^k} \right) =$$

$$w^k \left(\Gamma^m_{ik} (\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_j) + \Gamma^m_{jk} (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_m) \right) v_1^i v_2^j +$$

$$w^k (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \left(\frac{\partial v_1^i}{\partial u^k} v_2^j + v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial u^k} \right) =$$

$$w^k \left(\frac{\partial v_1^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{mk} v_1^m \right) (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) v_2^j + w^k \left(\frac{\partial v_2^j}{\partial u^k} + \Gamma^j_{mk} v_2^m \right) (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) v_1^i =$$

$$(\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2).$$

Лемма 10 доказана.

Взятие проекции на касательную плоскость при определении ковариантного дифференцирования ведет к рассмотрению внутренней геометрии поверхности, при котором мы забываем про внешнее объемлющее пространство и строим всю геометрию только исходя из метрики — первой квадратичной формы. Теорема Гаусса при этом имеет глубокий смысл — гауссова кривизна является (в отличие от второй квадратичной формы) объектом внутренней геометрии.

Если на подмногообразии евклидова пространства задана билинейная операция на векторных полях и для нее выполняются утверждения 1 и 2 леммы 10, то говорят, что на подмногообразии задана *аффинная связность*. Связность определяется величинами Γ^k_{ij}. Построенная нами связность удовлетворяет двум дополнительным условиям: она *симметрична*, т.е. для нее выполняется утверждение 4 леммы 10, и *совместна с метрикой*, т.е. для нее выполняется утверждение 5 леммы 10. Мы укажем без доказательства следующий факт: *симметричная и совместная с метрикой аффинная связность единственна и определяется по метрике g_{ij} формулой (12).*

Понятие ковариантного дифференцирования приводит к понятию параллельного переноса: векторное поле $v(t)$ вдоль кривой γ *параллельно*, если ковариантная производная v вдоль γ всюду равна нулю:

$$\frac{Dv}{\partial t} = \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \dot{u}^k\right) \mathbf{r}_i = 0. \tag{13}$$

Теперь по аналогии с евклидовой плоскостью определим аналог прямой линии: кривая γ называется *геодезической*, если ее вектор скорости параллелен вдоль кривой:

$$\frac{D\dot{\gamma}}{\partial t} = 0.$$

Важнейшие свойства геодезических описываются следующей леммой.

Лемма 11 *1) Геодезические — это кривые, удовлетворяющие уравнению*

$$\ddot{u}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0. \tag{14}$$

2) Если $\gamma(t)$ геодезическая и $C \in \mathbf{R}$, то кривая $\gamma_C(t) = \gamma(Ct)$ тоже геодезическая.

3) Гладкая кривая γ на поверхности $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ является геодезической, если и только если в каждой точке кривой вектор нормали к кривой коллинеарен вектору нормали к поверхности.

Доказательство леммы 11 состоит в элементарных вычислениях. Теперь укажем на одно важное следствие теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения ([6]).

Лемма 12 *Пусть x_0 точка на регулярной поверхности Σ, v_0 касательный вектор к Σ в точке x_0 и γ кривая, проходящая через x_0: $\gamma(0) = x_0$. Тогда*

1) существует и притом единственное параллельное векторное поле $v(t)$ вдоль γ такое, что $v(0) = v_0$;

2) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует и притом единственная геодезическая $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \Sigma$ такая, что

$$\gamma(0) = x_0, \quad \dot\gamma(0) = v_0.$$

Доказательство.

1) Уравнение (13) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и его решение полностью определяется начальными данными, т.е. значением v в нуле: $v(0) = v_0$.

2) Уравнение (14) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, но на множестве пар вида (x, v), где $x \in M, v \in T_x\Sigma$. В окрестности x_0 такие пары параметризуются точками $(u^1, u^2, v^1, v^2) \in \mathbf{R}^4$: $x = \mathbf{r}(u^1, u^2), v = v^1\mathbf{r}_1 + v^2\mathbf{r}_2$. Уравнение (14) принимает вид

$$\dot u^i = v^i, \quad \dot v^i = \Gamma^i_{jk}(u^1, u^2)\, v^j\, v^k, \quad i = 1, 2.$$

Теперь утверждение 2, как и утверждение 1, следует из теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Лемма 12 доказана.

Пространство, образованное парами (x, v), где $x \in \Sigma$ и $v \in T_x\Sigma$, называется *касательным расслоением* и обозначается $T\Sigma$.

Лемма 13 *Пусть Σ двумерное подмногообразие $\mathbf{R}^3$. Тогда $T\Sigma$ четырехмерное подмногообразие $\mathbf{R}^6$.*

Доказательство. Пусть $(x_0, v_0) \in T\Sigma$. Мы можем считать, что в окрестности точки x_0 поверхность Σ задается уравнением $F(x) = 0$ и $(\partial F/\partial x^1,\, \partial F/\partial x^2, \partial F/\partial x^3) \neq 0$ в окрестности x_0. Без ограничения общности можем считать, что в этой окрестности $\partial F/\partial x^1 \neq 0$. Тогда в окрестности (x_0, v_0) касательное пространство выделяется в $\mathbf{R}^6$ уравнениями

$$F(x, v) = 0, \quad G(x, v) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x^j} v^j = 0$$

(см. §4, задача 3). Теперь лемма следует из теоремы о неявной функции, так как определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \partial F/\partial x^1 & \partial F/\partial v^1 \\ \partial G/\partial x^1 & \partial G/\partial v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F/\partial x^1 & 0 \\ * & \partial F/\partial x^1 \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в окрестности (p, v). Лемма 13 доказана.

Согласно лемме 12 на $T\Sigma$ задан *поток*, т.е. задана система обыкновенных дифференциальных уравнений и все пространство расслаивается на траектории этой системы. Укажем почти очевидный *первый интеграл* потока, т. е. величину, сохраняющуюся вдоль траекторий.

Лемма 14 *Если γ геодезическая, то*

$$\frac{d}{dt}(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0.$$

Доказательство. Из утверждения 5 леммы 10 следует, что

$$\frac{d}{dt}(\dot\gamma, \dot\gamma) = \left(\frac{D}{\partial t}\dot\gamma, \dot\gamma\right) + \left(\dot\gamma, \frac{D}{\partial t}\dot\gamma\right) = 2\left(\frac{D}{\partial t}\dot\gamma, \dot\gamma\right).$$

Но по определению геодезических $D\dot\gamma/\partial t = 0$. Лемма 14 доказана.

Задача 13. Геодезический поток на поверхностях вращения (см. задачи 6 и 11) имеет еще один первый интеграл $f^2\dot v$. Рассмотрим меридианы, образованные сечениями поверхности вращения плоскостями ортогональными оси вращения, и обозначим через φ угол между вектором скорости геодезической и меридианом. Через $R(x)$ обозначим расстояние от точки $x \in \Sigma$ до оси вращения. Тогда $I = f^2\dot v/|\dot\gamma| = R\cos\varphi$ (так как $|\dot\gamma|$ первый интеграл (лемма 14), то I тоже первый интеграл: он называется *интегралом Клеро*).

§11. Уравнения Эйлера–Лагранжа и экстремальные свойства геодезических

Пусть на касательном расслоении к поверхности Σ, заданной отображением

$$\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3,$$

задана гладкая функция

$$L : T\Sigma \to \mathbf{R}.$$

Обозначим через u^1, u^2 координаты в области $U \subset \mathbf{R}^2$ и рассмотрим их как координаты на поверхности.

Выберем две точки $x, y \in \Sigma$ и рассмотрим множество Λ всех параметризованных (т.е. с фиксированным параметром) гладких кривых

$$\gamma : [a, b] \to \Sigma$$

таких, что

$$\gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y,$$

т.е. эти кривые являются гладкими путями из x в y. На Λ определен *функционал действия*

$$S : \Lambda \to \mathbf{R}, \quad S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt.$$

Многие задачи механики и физики сводятся к нахождению пути из Λ, на котором функционал S принимает минимальное значение. Более общей задачей является описание критических точек функционала S. Объясним, что это значит.

Гладкой вариацией пути γ называется такое однопараметрическое семейство путей γ_ε $(\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t, \varepsilon))$, что

1) $\gamma : [a, b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \Sigma$ является гладкой функцией и по $t \in [a, b]$ и по $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$;

2) $\gamma(a, \varepsilon) = x$ и $\gamma(b, \varepsilon) = y$ для всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$;

3) $\gamma(t, 0) = \gamma(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Полем вариации $W(t)$ называется векторное поле вдоль γ вида

$$W(t) = \left. \frac{\partial \gamma(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Поле вариаций являются естественным аналогом касательного вектора к Λ в точке γ.

Кривая $\gamma \in \Lambda$ называется *экстремалью* функционала S, если

$$\left. \frac{dS(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

для любой гладкой вариации γ_ε пути γ. Очевидно, что, если на γ функционал S достигает минимума, то γ является экстремалью. Обратное не верно: как и в случае функций на конечномерном пространстве не каждый экстремум является минимумом.

Теорема 14 *Если γ экстремаль функционала S, то она удовлетворяет уравнениям*

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}. \tag{15}$$

Доказательство.

Пусть γ экстремаль, $\gamma_\varepsilon(t) = (u^1(t,\varepsilon), u^2(t,\varepsilon))$ ее вариация и $W(t)$ поле вариации. Тогда

$$\left.\frac{dS(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left.\frac{dL(\gamma(t,\varepsilon),\dot\gamma(t,\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} dt =$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L(\gamma(t),\dot\gamma(t))}{\partial u^i}\frac{\partial u^i(t,0)}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial L(\gamma(t),\dot\gamma(t))}{\partial \dot u^i}\frac{\partial^2 u^i(t,0)}{\partial\varepsilon\,\partial t}\right) dt$$

и, интегрируя последнюю формулу по частям и принимая во внимание, что

$$W(a) = \frac{\partial u^i(a,0)}{\partial\varepsilon} = 0, \quad W(b) = \frac{\partial u^i(b,0)}{\partial\varepsilon} = 0, \tag{16}$$

получаем

$$\left.\frac{dS(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot u^i}\right) W^i(t)\,dt = 0. \tag{17}$$

Так как очевидно любое гладкое векторное поле $W(t)$ вдоль γ, удовлетворяющее (16), является полем гладкой вариации, то из уравнения (17) вытекают уравнения (15). Теорема 14 доказана.

Уравнения (15) называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа* для вариационной задачи, которая отвечает *функции Лагранжа* (или, как тоже говорят, *лагранжиану*) $L(x,\dot x)$.

Примером уравнений Эйлера–Лагранжа являются уравнения геодезических (14).

Теорема 15 *Если $L(u,\dot u) = |\dot u|^2 = g_{ij}\dot u^i \dot u^j$, то уравнениями Эйлера–Лагранжа для этого лагранжиана будут уравнения геодезических (14).*

Доказательство. Просто выпишем аккуратно уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot u^j \dot u^k, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot u^i} = 2 g_{ij}\dot u^j,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot u^i}\right) = 2\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot u^j \dot u^k + 2 g_{ij}\ddot u^j = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\right)\dot u^j \dot u^k + 2 g_{ij}\ddot u^j.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают вид

$$g_{ij}\ddot u^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)\dot u^j \dot u^k = 0,$$

что переписывается как

$$\ddot{u}^m + \frac{1}{2} g^{mi} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k = 0.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение для символов Кристоффеля (12), получаем уравнение геодезических

$$\ddot{u}^m + \Gamma^m_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0.$$

Теорема 15 доказана.

Рассмотрим вариационную задачу для лагранжиана

$$L_0(u, \dot{u}) = |\dot{u}| = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}.$$

Функционалом действия для него будет длина кривой. Лагранжиан не дифференцируем в точках, где $\dot{u} = 0$. Но значение S не зависит от выбора параметризации на кривой: оно одинаково для эквивалентных кривых (см. лемму 1: мы ограничились регулярными кривыми, но легко показать, что в этом случае это ограничение несущественно). Поэтому, если кривая, является экстремалью функционала длины, то эквивалентная ей кривая с параметром пропорциональным натуральному ($|\dot{u}| = \mathrm{const}$) тоже является экстремалью функционала длины.

Теорема 16 *Экстремали функционала длины с точностью до эквивалентности совпадают с геодезическими.*

Доказательство. Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала длины имеет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{g_{lm}\dot{u}^l \dot{u}^m}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{lm}\dot{u}^l \dot{u}^m}} g_{ij} \dot{u}^j \right). \tag{18}$$

Параметр на геодезических пропорционален натуральному (лемма 14). Полагая $g_{lm}\dot{u}^l \dot{u}^m = \mathrm{const} \neq 0$ в (18) мы получаем уравнения геодезических (14) и следовательно геодезические являются экстремалями функционала длины.

На каждой экстремали функционала длины мы можем положить параметр пропорциональным натуральному. По отношению к этому параметру экстремаль описывается уравнениями (14) и следовательно является геодезической.

Теорема 16 доказана.

Введем на поверхности *расстояние* между точками:

$$d(x,y) = \inf_{\gamma \in \Lambda_{x,y}} \mathrm{length}(\gamma).$$

Так как длина не зависит от выбора параметра, то здесь под точками из $\Lambda_{x,y}$ можно понимать кривые с параметром $t \in [0,1]$ пропорциональным натуральному. Из теоремы 16 следует, что, если существует кривая из $\Lambda_{x,y}$ длины $d(x,y)$, то она является геодезической. Мы ограничимся следующим локальным фактом.

Теорема 17 *Пусть γ геодезическая, проходящая через точку x_0. Существует такая окрестность x_0 на γ, что для любых двух точек x_1 и x_2 из этой окрестности кратчайшей кривой, соединяющей x_1 и x_2, является отрезок геодезической γ.*

Доказательство. Прежде всего докажем техническую лемму.

Лемма 15 *Пусть x_0 точка на поверхности и γ геодезическая, проходящая через x. Тогда в окрестности x_0 можно выбрать такие координаты u^1, u^2, что первая квадратичная форма принимает вид*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

и уравнение для γ примет вид $u^2 = 0$. В этих координатах линии $u^2 = const$ будут геодезическими.

Доказательство. Выберем координаты y^1, y^2 в окрестности x_0 так, что $x_0 = (0,0)$ и касательный вектор к γ в точке x_0 равен $(1,0)$.

Через каждую точку с координатами $(0,s)$ проведем геодезическую с начальным вектором скорости $(1,0)$. Тогда существует такая функция φ в окрестности x_0, что эти геодезические задаются уравнениями $y^2 = \varphi(y^1, s)$, и так как начальные данные для геодезических гладко зависят от s, то φ гладкая функция. Рассмотрим отображение $(y^1, s) \to (y^1, y^2 = \varphi(y^1, s))$. Его якобиан в точке x_0 равен

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

и по теореме об обратной функции оно обратимо около x_0. Следовательно y^1 и s задают локальные координаты в окрестности x_0 и кривые $s = \mathrm{const}$ являются геодезическими.

В каждой точке из этой окрестности x_0 возьмем касательный вектор $w(y^1, s)$ ортогональный кривой $s = \mathrm{const}$ и такой, что $(w, w) = 1$ и $(w, \mathbf{r}_s) > 0$. Малая окрестность x_0 расслаивается на траектории гладкого векторного поля — решения уравнения $\dot{x} = w(x)$. Сопоставим каждой точке новые координаты (t, s), где точка (t, s) лежит на траектории, пересекающей кривую $s = 0$ в точке $(t, 0)$. По отношению к координатам (t, s) первая квадратичная форма равна $\tilde{g}_{11} = \lambda, \tilde{g}_{22} = \mu, \tilde{g}_{12} = 0$.

Каждая кривая $s = \mathrm{const}$ является геодезической и следовательно $\Gamma^2_{11} \equiv 0$. Значит $\partial\lambda/\partial s = 0$ (см. задачу 10) и координаты

$$u^1 = \int_0^t \sqrt{\lambda(\tau)}\, d\tau, \quad u^2 = s$$

являются искомыми. Лемма 15 доказана.

Координаты, даваемые этой леммой, называются *полугеодезическими.*

Перейдем к доказательству теоремы. Введем в окрестности x_0 полугеодезическую систему координат, связанную с x_0 и γ как в лемме 15. Можно считать, что $x_0 = (0, 0)$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что круг $B = \{|u| \le \varepsilon\}$ полностью лежит в этой окрестности. Пусть $C = \min_{x \in B} G(x)$ и $D = \min\{1, C\}$.

Если x_1 и x_2 лежат круге $B_0 = \{|u| \le \rho\varepsilon\}$, где $\rho = D/(D+2)$, то

1) $|u^1(x_1) - u^1(x_2)| \le 2\rho\varepsilon$;

2) любая гладкая кривая, соединяющая x_1 и x_2 и выходящая в какой-то момент из круга B, имеет длину $\ge 4\rho\varepsilon$;

3) длина гладкой кривой, соединяющей x_1 и x_2 и полностью лежащей в B, равна

$$\int \sqrt{(\dot{u}^1)^2 + G\,(\dot{u}^2)^2}\, dt \ge \int \sqrt{(\dot{u}^1)^2} \ge |u^1(x_1) - u^1(x_2)|. \qquad (19)$$

Но в (19) равенство достигается в точности на отрезке γ.

Теорема 17 доказана.

Задача 14. Доказать, что гауссова кривизна поверхности с полугеодезическими координатами (u^1, u^2) равна

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

Задача 15. Доказать, что, если гауссова кривизна K поверхности постоянна и $K \ne 0$, то первая квадратичная форма в полугеодезических координатах имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\left(\sqrt{K} u^1\right) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad K > 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2\left(\sqrt{-K}u^1\right) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad K < 0.$$

§12. Геодезическая кривизна и формула Гаусса–Бонне

Геодезические являются естественным обобщением прямых на случай произвольных поверхностей (прямые являются геодезическими на плоскости: в этом случае $\Gamma^i_{jk} = 0$ в линейных координатах и уравнение геодезических становится линейным $\ddot{u}^i = 0$). Отклонение произвольной кривой от геодезической описывается аналогом кривизны плоской кривой, а именно геодезической кривизной.

Пусть $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbf{R}^2$ натурально параметризованная кривая на поверхности $\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3$. Выберем в касательных плоскостях к поверхности ориентацию, считая базис $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ положительно ориентированным. В каждой точке $\gamma(l)$ кривой выберем ортонормированный положительно ориентированный базис $(\dot{\gamma}, n)$ в касательном пространстве. *Геодезической кривизной* называется величина

$$k_g = (\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, n),$$

т.е. прямой аналог кривизны плоской кривой (3). Из леммы 11 следует, что гладкая кривая является геодезической, если и только если ее геодезическая кривизна всюду равна нулю.

Пусть W малая окрестность точки поверхности, в которой введены полугеодезические координаты $(u, v) := (u^1, u^2)$.

Пусть $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ кусочно-гладкий замкнутый контур (т. е. семейство последовательно пройденных регулярных кривых: конец γ_j совпадает с началом γ_{j+1} и мы положим при этом $\gamma_{n+1} = \gamma_1$). Пусть контур γ не имеет точек самопересечения и ограничивает область $V \subset W$.

Обозначим через α_j угол между γ_j и γ_{j+1}, направленный внутрь V, и через $d\sigma$ форму площади на поверхности

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1\, du^2.$$

Теорема 18 *(Формула Гаусса–Бонне)*

$$\int_\gamma k_g dl = 2\pi - \sum_{j=1}^{n} (\pi - \alpha_j) - \int_V K\, d\sigma. \qquad (20)$$

Доказательство.

В полугеодезических координатах $(u,v) := (u^1,u^2)$ первая квадратичная форма имеет вид $g_{11}=1, g_{12}=0, g_{22}=G$ и символы Кристоффеля принимают вид (см. задачу 10)

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}G_u, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G}G_u, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}G_v,$$

остальные символы Кристоффеля равны нулю. Вектор нормали к кривой тоже вычисляется явно

$$n = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(-G\dot{v}\mathbf{r}_1 + \dot{u}\mathbf{r}_2\right)$$

(напомним, что под точкой понимается дифференцирование по натуральному параметру l: $|\dot{\gamma}| = 1$). Теперь подставим эти выражения в формулу для геодезической кривизны и получим

$$k_g = \sqrt{G}\left(-\ddot{u}\dot{v} + \dot{u}\ddot{v} + \frac{1}{2}G_u\dot{v}^3 + \frac{1}{G}G_u\dot{u}^2\dot{v} + \frac{1}{2G}G_v\dot{u}\dot{v}^2\right).$$

Так как $|\dot{\gamma}|^2 = \dot{u}^2 + G\dot{v}^2 = 1$, то

$$\frac{d}{dl}\arctan\left(\frac{\sqrt{G}\dot{v}}{\dot{u}}\right) = \sqrt{G}\left(-\ddot{u}\dot{v} + \dot{u}\ddot{v} + \frac{1}{2G}G_u\dot{u}^2\dot{v} + \frac{1}{2G}G_v\dot{u}\dot{v}^2\right)$$

и

$$\left(\sqrt{G}\right)_u\dot{v} = \left(\dot{u}^2 + G\dot{v}^2\right)\frac{G_u\dot{v}}{2\sqrt{G}} = \sqrt{G}\left(\frac{1}{2}G_u\dot{v}^3 + \frac{1}{2G}G_u\dot{u}^2\dot{v}\right).$$

Отсюда следует

$$k_g\,dl = d\arctan\left(\frac{\sqrt{G}\dot{v}}{\dot{u}}\right) + \left(\sqrt{G}\right)_u\dot{v}\,dl.$$

По формуле Стокса ([3])

$$\int_\gamma \left(\sqrt{G}\right)_u\dot{v}\,dl = \int_\gamma \left(\sqrt{G}\right)_u dv = \int_V \left(\sqrt{G}\right)_{uu} du\,dv$$

и, принимая во внимание формулу для гауссовой кривизны в полугеодезических координатах (см. задачу 14), выводим

$$\int_\gamma \left(\sqrt{G}\right)_u\dot{v}\,dl = -\int_V K\,d\sigma.$$

Заметим теперь, что угол

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{G}\dot{v}}{\dot{u}}\right)$$

равен (с точностью до π) углу φ между $\dot{\gamma}$ и $\mathbf{r}_1$. Если контур γ гладкий, то

$$\int_\gamma d\varphi = 2\pi,$$

если же последовательные участки γ_j примыкают друг к другу под ненулевыми углами, то легко заметить, что

$$\int_\gamma d\varphi = 2\pi - \sum_n (\pi - \alpha_j).$$

Теорема 18 доказана.

Покажем, что формула Гаусса–Бонне верна и для больших областей V, гомеоморфных кругу. Прежде всего определим понятие симплициального разбиения.

Пусть V либо замкнутая область (замыкание открытого множества) на плоскости с кусочно-гладкой границей, либо компактная поверхность в $\mathbf{R}^3$. *Симплициальным разбиением* V называется такое представление ее в виде конечного объединения треугольников

$$V = \cup_j \delta_j,$$

что

1) внутренность каждого треугольника δ_j является областью в V и замыкание этой области гомеоморфно треугольнику

2) на границе каждого треугольника отмечены три вершины и участки границы между ними называются ребрами ;

3) два различных треугольника могут пересекаться только по одному общему ребру и два различных ребра могут пересекаться только по одной общей вершине.

Если границы треугольников являются кусочно-гладкими контурами, то разбиение называется кусочно-гладким.

Пусть Δ симплициальное разбиение V. Обозначим через a_0 число вершин, через a_1 число ребер и через a_2 число треугольников. Величина

$$\chi(\Delta) = a_0 - a_1 + a_2$$

называется *эйлеровой характеристикой* разбиения.

Теорема 19 *(Теорема Эйлера) Если V гомеоморфна кругу на плоскости, то эйлерова характеристика любого симплициального разбиения V равна единице.*

Доказательство. Проведем его индукцией по a_2. При $a_2 = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при $a_2 \leq k$.

Возьмем произвольное разбиение Δ замкнутой области V с $a_2 = k+1$. Выберем треугольник δ_j, примыкающий к границе по ребру γ^*. Удалим ребро γ^* и внутренность δ_j из V, получив в итоге новую замкнутую область V' с разбиением $\Delta \setminus \delta_j$. Возможна одна из двух ситуаций:

1) замкнутая область V' гомеоморфна кругу;

2) замкнутая область V' гомеоморфна объединению двух замкнутых областей V_1 и V_2, на которых заданы разбиения Δ_1 и Δ_2 и эти области пересекаются по общей вершине.

В первом случае очевидно, что $\chi(\Delta) = \chi(\Delta') = 1$. В втором случае $\chi(\Delta) = \chi(\Delta') = \chi(\Delta_1) + \chi(\Delta_2) - 1 = 1$.

Теорема 19 доказана.

Докажем теперь формулу Гаусса–Бонне для больших областей.

Теорема 20 *Если V гомеоморфная кругу замкнутая область с кусочно-гладкой границей на поверхности, то для нее верна формула Гаусса–Бонне (20).*

Доказательство. Выберем кусочно-гладкое симплициальное разбиение области V на маленькие треугольники δ_k, каждый из которых лежит в области с полугеодезическими координатами. Обозначим через c_0 число вершин, лежащих на границе V, и через c_1 число ребер, лежащих на границе. Так как граница гомеоморфна окружности, $c_0 = c_1$.

Выпишем для каждого треугольника δ_k формулу (20) и просуммируем их. Так как интегралы от k_g по внутренним ребрам берутся дважды с разными знаками, сумма левых частей равна $\int_\gamma k_g\,dl$, где γ граница V. Справа мы получим

$$2\pi a_2 - 3\pi a_2 + 2\pi(a_0 - c_0) + \sum_j \alpha_j - \int_V K\,d\sigma,$$

где α_j углы между гладкими участками границы V. Очевидно, что $3a_2 = 2a_1 - c_1$ и мы выводим, что

$$\int_\gamma k_g\,dl = 2\pi a_2 - 2\pi a_1 + \pi c_1 + 2\pi(a_0 - c_0) + \sum_j \alpha_j - \int_V K\,d\sigma$$

и, так как $c_0 = c_1$, с помощью теоремы 19 мы получаем

$$\int_\gamma k_g\,dl = 2\pi(a_2 - a_1 + a_0) - \sum_j (\pi - \alpha_j) - \int_V K\,d\sigma =$$

$$2\pi - \sum_j (\pi - \alpha_j) - \int_V K\,d\sigma.$$

Теорема 20 доказана.

Формула Гаусса–Бонне имеет ряд красивых следствий.

Во-первых ее можно применить к *замкнутым* поверхностям в $\mathbf{R}^3$, т.е. к компактным поверхностям без края. Поверхность называется *ориентируемой*, если в касательном пространстве в каждой точке можно выбрать так ориентацию, чтобы она менялась непрерывно при движении точки по поверхности. Простейшими примерами таких поверхностей являются тор и сфера. Вырежем теперь из сферы и g кругов и получим сферу с g дырами. Возьмем g торов, из каждого из которых вырезано по внутренности круга, и приклеим каждый из этих торов к сфере с дырами, отождествив граничные контуры. Мы получим *сферу с g ручками.* Известно, что *каждая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с ручками.* Мы не будем вдаваться в топологические детали, отослав за ними к [2].

Если ориентация на поверхности выбрана, то поверхность называется *ориентированной* и по ней мы можем брать поверхностные интегралы ([3]), в частности, интегралы от $K\,d\sigma$.

Теорема 21 *Пусть Σ замкнутая ориентированная поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда для любого ее симплициального разбиения Δ*

$$\int_\Sigma K\,d\sigma = 2\pi\chi(\Delta).$$

Доказательство. Всякое симплициальное разбиение можно так слегка пошевелить, что оно станет кусочно-гладким (это выводится из того, что любая функция на отрезке сколь угодно близко приближается полиномами). При этом числа вершин, ребер и треугольников не изменится.

Предположим, что Δ кусочно-гладкое разбиение и применим к каждому треугольнику из Δ формулу Гаусса–Бонне (теорема 20). Просуммируем эти формулы и так как интегралы от k_g по ребрам берутся дважды с разными знаками, то получим в левой части нуль. правая часть суммы равна

$$2\pi a_2 - 3\pi a_2 + 2\pi a_0 - \int_\Sigma K\,d\sigma,$$

но $3a_2 = 2a_1$ так как все ребра внутренние и мы в итоге получим

$$2\pi\chi(\Delta) = \int_\Sigma K\, d\sigma.$$

Теорема 21 доказана.

Следствие 4 *Для замкнутой ориентируемой поверхности Σ эйлерова характеристика симплициального разбиения не зависит от разбиения и определяется только поверхностью. Она называется эйлеровой характеристикой $\chi(\Sigma)$ поверхности Σ.*

Задача 16. Доказать, что эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$ и, в частности, эйлеровы характеристики сферы и тора равны 2 и 0 соответственно.

Другое замечательное применение формулы Гаусса–Бонне это формула для суммы углов треугольника. Область гомеоморфную треугольнику и ограниченную тремя отрезками геодезических называется *геодезическим треугольником.*

Теорема 22 *Сумма углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ геодезического треугольника $\triangle$ на поверхности равна*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \int_\triangle K\, d\sigma.$$

Доказательство теоремы немедленно следует из формулы Гаусса–Бонне с учетом того, что геодезическая кривизна сторон геодезического треугольника всюду равна нулю. Из теоремы следует, что, если K положительна, то суммы углов треугольников больше π, а, если отрицательна, то меньше.

§13. Минимальные поверхности

Обобщением геодезических на двумерный случай являются минимальные поверхности.

На ориентируемой поверхности определена форма площади

$$d\sigma = \sqrt{\det(g_{ij})}\, du^1\, du^2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1\, du^2.$$

Выберем на поверхности $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ область W с компактным замыканием и рассмотрим всевозможные однопараметрические гладкие деформации

Σ_ε поверхности $\Sigma = \Sigma_0$ такие, что часть поверхности, лежащая вне W, не деформируется. Площадь $S(\varepsilon)$ деформируемой части V_ε является гладкой функцией от параметра ε. Поверхность называется *минимальной*, если

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

для любой такой деформации.

Происхождение этого понятия довольно ясно: если мы имеем замкнутый контур γ в $\mathbf{R}^3$ и существует затягивающая его поверхность Σ такая, что она имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, ограниченных контуром γ, то эта поверхность Σ минимальна.

В случае же геодезических мы рассматриваем 1-мерные объекты — кривые, минимизирующие 1-мерный объем — длину — среди всех кривых, ограниченных парой точек. Как и в случае геодезических минимальная поверхность, ограниченная контуром γ, не обязательно реализует минимум функционала площади — она лишь формально удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа для этого функционала, которые мы и выведем.

Теорема 23 *Регулярная поверхность Σ, заданная отображением $\mathbf{r} : U \to \mathbf{R}^3$, является минимальной, если и только если ее средняя кривизна всюду равна нулю:*

$$H = 0.$$

Доказательство. Пусть V подобласть U и γ граница V. Деформация поверхности, сосредоточенная на V, имеет вид

$$\mathbf{r}^\varepsilon(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \varepsilon\varphi\mathbf{m} + O(\varepsilon^2),$$

где функция φ равна нулю вне V. Площадь продеформированной части $\mathbf{r}^\varepsilon V$ равна

$$S(\varepsilon) = \int_V \sqrt{(\mathbf{r}_1^\varepsilon, \mathbf{r}_1^\varepsilon)\,(\mathbf{r}_2^\varepsilon, \mathbf{r}_2^\varepsilon) - (\mathbf{r}_1^\varepsilon, \mathbf{r}_2^\varepsilon)\,(\mathbf{r}_1^\varepsilon, \mathbf{r}_2^\varepsilon)}\, du^1\, du^2.$$

Так как

$$\mathbf{r}_k^\varepsilon = \mathbf{r}_k + \varepsilon\varphi\mathbf{m}_k + \varepsilon\varphi_k\mathbf{m} + O(\varepsilon^2)$$

и $(\mathbf{r}_1, \mathbf{m}) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{m}) = 0$, мы выводим

$$\left(\mathbf{r}_i^\varepsilon, \mathbf{r}_j^\varepsilon\right) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \varepsilon\varphi\left((\mathbf{r}_i, \mathbf{m}_j) + (\mathbf{r}_j, \mathbf{m}_i)\right) + O(\varepsilon^2).$$

Из (11) следует, что $(\mathbf{r}_i, \mathbf{m}_j) = -b_{ij}$, и мы получаем

$$S(\varepsilon) =$$

$$\int_V \sqrt{1 - 2\varepsilon\varphi\frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} + O(\varepsilon^2)}\, d\sigma =$$

$$S(0) - \varepsilon \int_V \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\varphi\, d\sigma + O(\varepsilon^2).$$

Сумма корней k_1 и k_2 уравнения $P(\lambda) = \det(b_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$ равна, как легко проверить,

$$k_1 + k_2 = \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

и по лемме 9 это в точности удвоенная средняя кривизна поверхности: $2H = k_1 + k_2$.

В итоге получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}S(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = -2\int_V H\varphi\, d\sigma.$$

Эта величина обращается в ноль при всех деформациях, т.е. для любых гладких функций φ равных нулю на границе V, если и только если $H = 0$.

Теорема 23 доказана.

Задача 17. Доказать, что

1) поверхности вращения (см. задачу 6), полученные вращением графиков функций $f(x) = a\cosh(x/a + b)$, где $a \neq 0$, минимальны (они называются *катеноидами*);

2) если поверхность вращения минимальна, то она является катеноидом.

Список литературы

[1] Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, Наука, 1969.

[2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Москва: Наука, 1986.

[3] Зорич В. А. Математический анализ. Москва: Наука, 1981.

[4] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1970.

[5] Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. Москва, Наука, 1969.

[6] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1969.