Октавы и (октонионная) проективная плоскость Кэли

И.А. Тайманов

Исследовательский семинар, 2-ой курс
мех.-мат. ф-т НГУ
9 ноября 2021 г.

Когда мы будем обладать еще несколькими хорошими монографиями, посвященными изучению отдельных областей, тогда и только тогда, группируя их данные, сравнивая и самым тщательным образом сопоставляя их, мы будем в состоянии снова поставить вопрос об общей картине, сообщить ему новое и плодотворное движение. Поступать иначе — значило бы мчаться в курьерском поезде со скудным багажом из двух или трех простых и грубых идей. Это значило бы проходить в большинстве случаев мимо частного, индивидуального, неправильного, словом, мимо самого интересного.

Люсьен Февр
"Земля и эволюция человека"

Удвоение Кэли–Диксона.I

Пусть $\mathbb{A}$ — алгебра над $\mathbb{R}$, т.е. линейное пространство над $\mathbb{R}$, на котором задана операция умножения элементов

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad (p, q) \to pq,$$

связанная со сложением правилами дистрибутивности:

$$(ap_1 + bp_2)q = ap_1q + bp_2q, \quad q(ap_1 + bp_2) = aqp_1 + bqp_2$$

для всех $p, q_1, q_2 \in \mathbb{A}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Пусть на $\mathbb{A}$ задана операция сопряжения

$$\mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad q \to \bar{q}$$

такая, что она инволютивна (ее квадрат является тождественным отображением)

$$\bar{\bar{q}} = q$$

и

$$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}.$$

Удвоение Кэли–Диксона.II

Каждой такой алгебре сопоставим ее удвоение (Кэли–Диксона):

$$\mathbb{A}' = \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$$

с умножением

$$(p, q)(r, s) = (pr - s\bar{q}, \bar{p}s + rq)$$

и сопряжением

$$\overline{(p, q)} = (\bar{p}, -q).$$

Удвоение Кэли–Диксона.III

Примеры:
1) $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$, $\bar{q} = q$. $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_1'$ порождается (над $A_0 = \mathbb{R}$) элементами $(1,0)$ (одномерное пространство, порожденное этим элементом, мы будем отождествлять с $\mathbb{R}$) и $i = (0,1)$ с умножением

$$i^2 = -1$$

и сопряжением

$$\overline{x + yi} = x - yi,$$

т.е.

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{C}$$

как алгебра над $\mathbb{R}$.
2) $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1'$ порождается (над $\mathbb{A}_1 = \mathbb{C}$) элементами $(1,0)$ и $j = (0,1)$: $\mathbb{A}_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$, и, как легко проверить, изоморфна алгебре кватернионов: $A_2 = \mathbb{H}$.

Удвоение Кэли–Диксона.IV

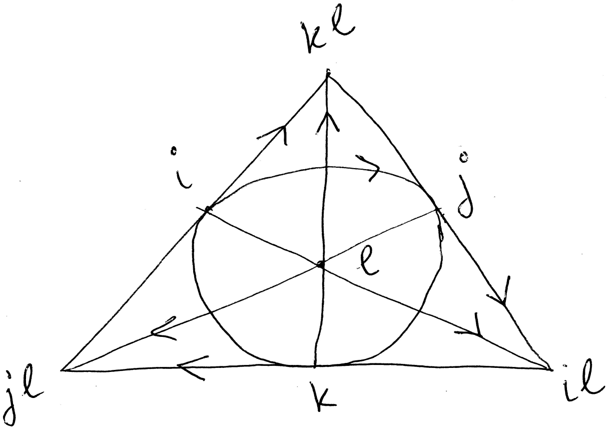
3) $\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}'$ порождается (над $\mathbb{A}_2 = \mathbb{H}$) элементами $(1, 0)$ и $l = (0, 1)$: $\mathbb{A}_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l$, и называется алгеброй октав (octonions) $\mathbb{O}$. Они были открыты независимо Грейвсом (1843) и Кэли (1845).

Алгебры A_n определяются для всех $n \geq 0$ и $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}_n = 2^n$.

Алгебра A_4 называется алгеброй седенионов (sedenions), однако она, как и все алгебры A_n при $n \geq 4$, не является алгеброй с делением, а содержит делители нуля, т.е. существуют такие ненулевые элементы x и y, что $xy = 0$.

Октавы

Алгебра октав $\mathbb{O}$ порождается над $\mathbb{R}$ элементами $1, i, j, ij = k, l, il, jl$ и kl.



Умножение в октавах.I

На рисунке отмечены семь точек, лежащих на шести отрезках и окружности. Мы отождествим крайние точки отрезков, получив окружности. Каждая окружность проходится с указанной ориентацией. Три базисных элемента a, b, c, лежащие на одной окружности и проходимые в такой последовательности, порождают, вместе с $\mathbb{R} \subset \mathbb{O}$, алгебру, изоморфную $\mathbb{H}$:

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1,$$

$$ab = -ba = c, \quad bc = -bc = a, \quad ca = -ac = b.$$

Центральная окружность, на которой лежат точки i, j и k, в точности, отвечает $\mathbb{H}$.

Умножение в октавах.II

Умножение в октавах неассоциативно. Например,

$$(ij)l = kl, \quad i(jl) = -kl.$$

Однако любая подалгебра, порожденная над $\mathbb{R}$ двумя элементами, ассоциативна. Это видно из картинки для любой пары образующих и легко показать, что выполняется и для любых других пар. Такие алгебры и, более общо, кольца называются *альтернативными*.

Умножение в октавах.III

На $\mathbb{O}$ определена норма

$$|q|^2 = q\bar{q} \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $q + \bar{q} \in \mathbb{R}$ и, если $q \neq 0$, то $q\bar{q} > 0$ для $q \in \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. Поэтому $|pq|^2 = (pq)\overline{(pq)} = (pq)(\bar{q}\bar{p}) = (pq)((r-q)(s-p))$, где $r = q + \bar{q}, s = p + \bar{p} \in \mathbb{R}$. Так как подалгебра, порожденная p и q, ассоциативна, то

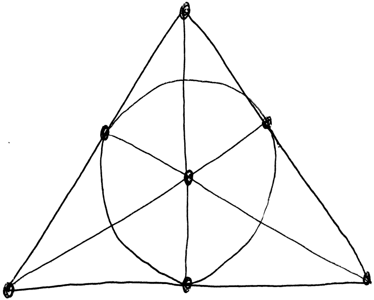
$$|pq|^2 = (pq)(\bar{q}\bar{p}) = p(q\bar{q})\bar{p} = p|q|^2\bar{p} = |p|^2|q|^2.$$

Опять из того, что $q + \bar{q} \in \mathbb{R}$ и альтернативности, следует, что при $q \neq 0$

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

является левым и правым обратным к q. Следовательно, $\mathbb{O}$ является алгеброй с делением.

Плоскость Фано.I



Треугольник с 7 отмеченными точками и 7 "прямыми", который использовался при определении умножения в $\mathbb{O}$, называется *плоскостью Фано*. Это - модель проективной плоскости $\mathbb{F}_2 P^2$ над полем $\mathbb{F}_2$ из двух элементов.

Проективные плоскости $\mathbb{K}P^2$

Если $\mathbb{K}$ — кольцо с делением и ассоциативным умножением, то точками в $\mathbb{K}P^2$ являются прямые в $\mathbb{K}^3$, проходящие через $0 \in \mathbb{K}^3$. Прямая в $\mathbb{K}^3$ — это множество точек вида $\{\mathbf{a}t \ : t \in \mathbb{K}\}$, где направляющий вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$.

Направляющие векторы прямых задают однородные координаты $(x : y : z)$, определенные с точностью до умножения справа на ненулевой множитель λ (в случае $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ этот множитель может быть только единицей) и не равные одновременно нулю. Действительно, прямые $\{(\mathbf{a}\lambda)t = \mathbf{a}(\lambda t) = = \mathbf{a}t', t' \in \mathbb{K}\}$ и $\{\mathbf{a}t, t \in \mathbb{K}\}$ совпадают.

Прямым в $\mathbb{K}P^2$ отвечают плоскости в $\mathbb{K}^3$, проходящие через $0 \in \mathbb{K}^3$, и точка $P \in \mathbb{K}P^2$ лежит на прямой $L \subset \mathbb{K}P^2$, если отвечающая P прямая в $\mathbb{K}^3$ содержится в плоскости, отвечающей L.

Плоскость Фано.II

При $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ однородные координаты $(x : y : z)$ однозначно задают точку из $\mathbb{F}_2 P^2$ и поэтому $\mathbb{F}_2 P^2$ содержит $2^3 - 1 = 7$ точек (координаты не могут одновременно быть равны нулю).
Каждое одномерное подпространство состоит из двух точек: $(0, 0, 0)$ и (x, y, z).
Двумерные подпространства в $\mathbb{F}_2^3$ задаются уравнениями

$$ax + by + cz = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbb{F}_2$ не равны одновременно нулю. Любое такое уравнение имеет три ненулевых решения, т.е. на каждой прямой в $\mathbb{F}_2 P^2$ лежат три точки.
Через каждую пару точек проходит единственная прямая.
Число пар точек из 7 равно $\frac{7!}{5!2!} = 21$, каждая прямая задается тремя различными парами точек, следовательно, число прямых в $\mathbb{F}_2 P^2$ равно $7 = \frac{21}{3}$. Им отвечают, подгруппы порядка 4 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Проективная плоскость.I

Проективная плоскость — это множество, состоящее из точек и прямых, с отношением $P \in L$ (точка P лежит на прямой L) такое, что

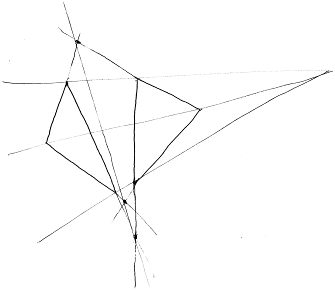
1) для каждой пары P, Q различных точек существует единственная прямая PQ, проходящая через них;

2) для двух различных прямых существует единственная точка, которая лежит на обеих прямых;

3) существуют такие четыре точки, что любые три из них не лежат на одной прямой;

4) существуют четыре прямых, любые три из которых не пересекаются в одной точке.

Теорема Дезарга



Если прямые, проходящие через пары вершин двух треугольников пересекаются в одной точке, то прямые, продолжающие соответствующие стороны треугольников, лежат на одной прямой.

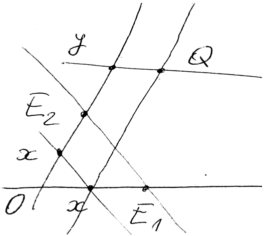
Проективная плоскость.II

Рассмотрим в проективной плоскости X пару прямых L_1 и L_2, пересекающихся в точке O. Выберем на каждой прямой еще по две точки: $E_1, D_1 \in L_1$ и $E_2, D_2 \in L_2$. Положим $O = 0$, $E_1 = E_2 = 1$, $D_1 = D_2 = \infty$ и удалим бесконечно удаленную прямую $D_1 D_2$. Мы получим "плоскость" $Y = X \setminus D_1 D_2$.

Точки $P_1 \in L_1$ и $P_2 \in L_2$ отвечают одному и тому же параметру x, если прямая $P_1 P_2$ параллельна (не пересекается с ней в Y) прямой $E_1 E_2$.

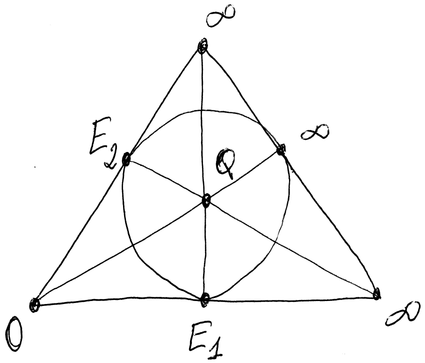
Координаты на двумерной плоскости

Точка $Q \in Y$ имеет координаты x, y, если прямая, проходящая через Q и параллельная прямой L_2, пересекает L_1 в точке с параметром x, и прямая, проходящая через Q и параллельная L_1, пересекает L_2 в точке с параметром y.



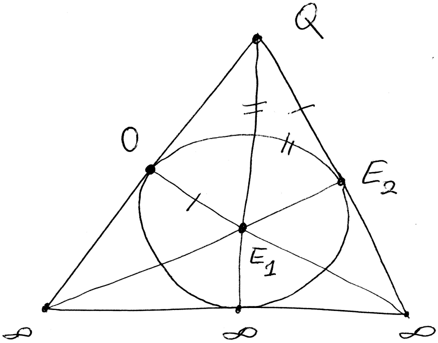
$O = (0,0)$, $E_1 = (1,0)$ и $E_2 = (0,1)$.

Плоскость $\mathbb{F}_2^2$.I



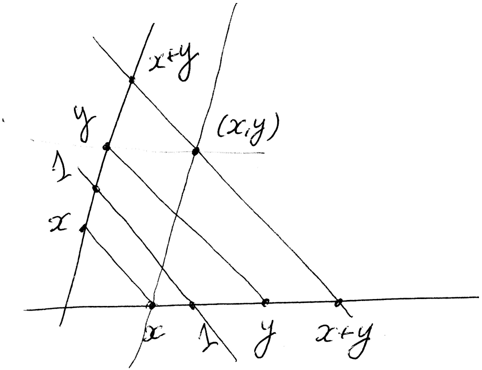
Указанная процедура, примененная к плоскости Фано, приводит к двумерной плоскости $\mathbb{F}_2^2$.
Координаты точек плоскости: $O = (0,0)$, $E_1 = (1,0)$, $E_2 = (0,1)$ и $Q = (1,1)$.

Плоскость $\mathbb{F}_2^2$.II



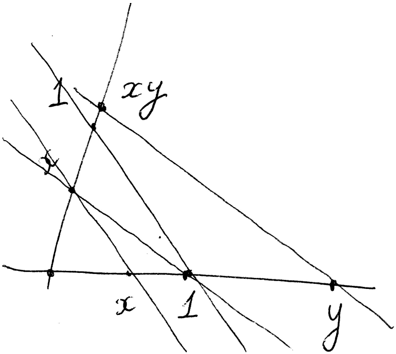
Процедура координатизации естественно неоднозначна. На рисунке дан другой результат, параллельные прямые отмечены одним или двумя штрихами. Координаты точек плоскости: $O = (0,0)$, $E_1 = (1,0)$, $E_2 = (0,1)$ и $Q = (1,1)$.

Сложение координат



Сложение параметров определяется следующим образом: проведем через точку с координатами (x, y) прямую, параллельную прямой E_1E_2. Ее пересечения с прямыми L_1 и L_2 будут иметь координаты $(x + y, 0)$ и $(0, x + y)$.

Умножение координат



Через точки $(1, 0)$ и $(0, x)$ проведем прямую L, а через точку $(y, 0)$ проведем прямую L', параллельную L. Определим умножение x и y через точку пересечения L' с координатной прямой L_2: положим координаты этой точки за $(0, xy)$.

Дезарговы плоскости

Если проективная плоскость X удовлетворяет теореме Дезарга (является дезарговой), то так определенные сложение и умножение координат задают на них структуру *координатного кольца* $\mathbb{K}$, которое коммутативно по сложению:

$$x + y = y + x \text{ для всех } x, y \in \mathbb{K},$$

и ассоциативно по умножению:

$$(xy)z = x(yz) \text{ для всех } x, y, z \in \mathbb{K}.$$

В этом случае

$$X = \mathbb{K}P^2, \quad Y = \mathbb{K}^2.$$

$\mathbb{K}$ не обязано быть коммутативным по умножению. Например, существует $\mathbb{H}P^2$.

Доказательство этого факта было получено Гильбертом (“Основания геометрии”, 1899).

Проективная плоскость Кэли.I

Проективная плоскость $\mathbb{O}P^2$ не может быть определена как множество троек однородных координат $(x : y : z)$, где x, y, z не равны одновременно нулю, взятых с точностью до умножения справа на ненулевые элементы из $\mathbb{O}$.

Пример. $x = i, y = j, z = l$.

$$(i : j : l) \sim (1 : ji^{-1} : li^{-1}) = (1 : k : il),$$

$$(i : j : l) \sim (il^{-1} : jl^{-1} : 1) \sim (1, (jl^{-1}i)(il^{-1})^{-1} : (il^{-1})^{-1}) =$$

$$= (1 : (-jl)(il) : il) = (1 : -k : il).$$

Проективная плоскость Кэли.II

Проективная плоскость Кэли $\mathbb{O}P^2$ строится как 16-мерное многообразие, которое покрывается тремя картами, в каждой из которых одна из трех однородных координат предполагается ненулевой и вещественной. Однородные координаты берутся с точностью до умножения на ненулевые вещественные числа.
В этих картах координаты приводятся к виду

$$(1 : x : y), \quad (u : 1 : v), \quad (s : t : 1).$$

Карты склеиваются по отношениям эквивалентности

$$(1 : x : y) \sim (1 : u^{-1} : vu^{-1}) \sim (1 : ts^{-1} : s^{-1}) \text{ и т.д..}$$

Это было сделано Муфанг в середине 1930-ых.
В римановой геометрии для $\mathbb{O}P^2$ принято обозначение $\mathbb{C}aP^2$.

Несуществование $\mathbb{O}P^n$ при $n \geq 3$

1) Если бы пространство $\mathbb{O}P^3$ существовало, то естественно, что $\mathbb{O}P^2 \subset \mathbb{O}P^3$ и тогда в $\mathbb{O}P^2$ выполнялась бы теорема Дезарга. Отсюда, согласно результату Гильберта, следовала бы ассоциативность $\mathbb{O}$.

2) Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{O}P^n)$ многообразия $\mathbb{O}P^n$ порождалось бы одним элементом $[x]$ степени 8 и при этом $[x]^n \neq 0, [x]^{n+1} = 0$. Но таких многообразий при $n \geq 3$ не существует.