Кватернионы и группы вращений

И.А. Тайманов

Исследовательский семинар, 2-ой курс
мех.-мат. ф-т НГУ
2 ноября 2021 г.

Группа вращений евклидова пространства.I

Группа вращений евклидова пространства — это группа всех линейных преобразований, которые сохраняют длины векторов и ориентацию.
Длина вектора v есть $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$,

$$\langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle$$

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2),$$

т.е. длины векторов определяют скалярное произведение.
Следовательно, вращения сохраняют скалярное произведение.

Группа вращений n-мерного евклидова пространства обозначается через $SO(n)$ (special orthogonal).

Она является подгруппой группы $O(n)$ (orthogonal), образованной всеми линейными преобразованиями, сохраняющими длины векторов, но, возможно, изменяющими ориентацию.

Группа вращений евклидова пространства.II

Если $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$, то

$$\langle v, w\rangle = v^1 w^1 + \cdots + v^n w^n = \begin{pmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = v^\top w,$$

$$\langle Av, Aw\rangle = (Av)^\top Aw = v^\top A^\top Aw = v^\top (A^\top A) w$$

и A сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда

$$A^\top A = \mathbf{I}.$$

Условие сохранения ориентации имеет вид

$$\det A > 0.$$

Группа вращений трехмерного пространства.I

Теорема. *Каждое вращение трехмерного пространства имеет собственный вектор с собственным значением* $\lambda = 1$.

Доказательство. Пусть $A \in SO(3)$. Характеристический многочлен имеет вид

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + \cdots + 1.$$

Его степень равна трем и поэтому он имеет по крайней мере один вещественный корень. Так как A сохраняет длины векторов, то этот корень равен ± 1.
Если этот корень равен $\lambda = 1$, то соответствующий ему собственный вектор является искомым.
Пусть $\lambda = -1$ и $Av = -v$. Рассмотрим ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 такой, что $e_1 = v$. В этом базисе

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Группа вращений трехмерного пространства.II

Так как $1 = \det A = -\det A_0$, то $\det A_0 = -1$ и

$$p_{A_0}(\lambda) = \det(A_0 - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - \operatorname{Tr} A_0 \lambda - 1.$$

Дискриминант этого многочлена положительный, оба корня вещественны и равны по по модулю единице, их произведение равно $\det A_0 = -1$ и, следовательно, один из корней равен 1. Мы заключаем, что $p_A(1) = 0$ и соответствующий $\lambda = 1$ собственный вектор является искомым.
Теорема доказана.

Следствие. *Любое вращение трехмерного пространства представляется как поворот вокруг некоторой неподвижной оси.*

Группа вращений трехмерного пространства.III

Очевидно, что, если вращение нетривиально, то оно имеет одну неподвижную ось. Пусть $v = (v_1, v_2, v_3)$ — единичный вектор, направленный вдоль этой оси. Обозначим через ρ угол, на который вращается пространство в положительном направлении вокруг оси, заданной вектором v.
Мы имеем

- Каждое вращение задается парой (v, ρ), где $|v| = 1$ и $0 \leq \rho \leq \pi$.
- При $0 < \rho < \pi$ эта пара однозначно задает вращение.
- При $\rho = 0$ мы получаем тождественное преобразование.
- Вращения, которые задаются парами (v, π) и $(-v, \pi)$ совпадают.

Группа вращений трехмерного пространства.IV

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ шар радиуса π, образованный всеми точками вида ρv.

1) Каждая внутренняя точка шара однозначно задает вращение пространства $\mathbb{R}^3$. Противоположные граничные точки шара задают одни и те же вращения, отличные от заданных внутренними точками.
Топологически группа $SO(3)$ устроена как трехмерный шар, у которого отождествлены противоположные точки границы.

2) Отобразим точку ρv в $\operatorname{tg}\frac{\rho}{2}v$. Внутренность шара однозначно покрывает $\mathbb{R}^3$, а граничные точки шара при этом естественно переходят в бесконечно удаленные точки, отвечающие прямым, проходящим в направлении векторов v, осей вращения.
Мы видим, что при этом, вращения $\mathbb{R}^3$ однозначно параметризуются точками трехмерного проективного пространства $\mathbb{R}P^3$.

Углы Эйлера

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, B — вращение, которое переводит в базис e_1, e_2, e_3 другой базис e_1', e_2', e_3'.

Пусть C — вращение, которое переводит e_3' в e_3. Тогда вращение BC^{-1} сохраняет вектор e_3 и с ним ось Oz на месте и есть поворот вокруг оси Oz.

Вращение C представим как композицию двух поворотов:

1) $R_{z,\alpha}$ — на угол α вокруг оси Oz,

2) $R_{x,\beta}$ — на угол β вокруг оси Ox.

Тогда B есть композиция поворотов $R_{z,\alpha}, R_{x,\beta}$ и $R_{z,\gamma}$:

$$B = R_{z,\gamma} \cdot R_{x,\beta} \cdot R_{z,\alpha}.$$

Углы α, β, γ называются *углами Эйлера*.

Величины $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\theta = \beta$ являются сферическими координатами конца вектора e_3'.

Кватернионы (Quaternions)

Кватернионы образуют четырехмерное линейное пространство над $\mathbb{R}$, в котором дополнительно к операции сложения определена операция умножения. Умножение удовлетворяет следующим условиям:

$$(ap_1 + bp_2)q = ap_1 q + bp_2 q, \quad q(ap_1 + bp_2) = aqp_1 + bqp_2$$

для всех $p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Поэтому его достаточно задать на базисных векторах. Выберем в $\mathbb{H}$ базис (над $\mathbb{R}$) $1, i, j, k$ и положим

$$a \cdot q = q \cdot a = q \text{ для всех } q \in \mathbb{H},\ a = a \cdot 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H},$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

Кватернионы образуют расширение поля комплексных чисел, порождаемое элементами 1 и i: $z = x + yi = x + iy \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Нормирование кватернионов

На пространстве кватернионов зададим инволюцию (сопряжение)

$$q = t + xi + yj + zk \longrightarrow \bar{q} = t - xi - yj - zk$$

и норму

$$|q|^2 = q\bar{q} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Легко заметить, что на $\mathbb{C}$ они совпадают с комплексным сопряжением и обычной нормой. Более того,

$$|q_1 q_2| = |q_1||q_2|.$$

Заданное этой нормой скалярное произведение совпадает с евклидовым в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, для которого t, x, y, z — ортонормированные координаты.

Алгебраические свойства кватернионов

Алгебра кватернионов ассоциативна: $(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)$ для всех наборов q_i, но некоммутативна: существуют такие q_1 и q_2, что $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$.

Алгебра A (со сложением и умножением) называется *алгеброй с делением*, если для любого $p \in A$ и любого ненулевого $q \in A \setminus \{0\}$ существуют и притом единственные $x, y \in A$ такие, что

$$p = qx = yq.$$

В этом случае x — результат деления a на q слева, а y — справа.

$\mathbb{H}$ является алгеброй с делением: для любого ненулевого элемента $q \in \mathbb{H}$ существует обратный q^{-1}:

$$q^{-1} q = q q^{-1} = 1, \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

и, следовательно,

$$x = q^{-1} p, \quad y = p q^{-1}.$$

Алгебры с делением

Теорема (Фробениус). *С точностью до изоморфизма существуют три ассоциативных алгебры с делением над полем* $\mathbb{R}$*: само* $\mathbb{R}$*, поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *и* $\mathbb{H}$*.*

$\mathbb{H}$ удовлетворяет всем аксиомам алгебраического поля, кроме коммутативности умножения. В русскоязычной литературе такие алгебры называются *телами*, в англоязычной — некоммутативными полями (non-commutative fields).

Теорема (Хопф). *Каждая конечномерная коммутативная алгебра с делением над* $\mathbb{R}$ *имеет размерность* 1 *или* 2*.*
Существует бесконечно много попарно неизоморфных коммутативных неассоциативных двумерных алгебр с делением.

Теорема *Каждая конечномерная алгебра с делением над* $\mathbb{R}$ *имеет размерность* $1, 2, 4$ *или* 8*.*
Пример неассоциативной некоммутативной восьмимерной алгебры с делением дает алгебра октав (октонионов) $\mathbb{O}$.

Представление кватернионов матрицами.I

Построим гомоморфизм φ алгебры кватернионов в алгебру 2×2-матриц с комплексными коэффициентами. Этот гомоморфизм линеен над $\mathbb{R}$ и поэтому его достаточно задать на образующих:

$$1 \to \varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \to \varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$j \to \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \to \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Произведения элементов переходят в произведения их образов:

$$\varphi(q_1 q_2) = \varphi(q_1)\varphi(q_2).$$

Представление кватернионов матрицами.II

Алгебру $\mathbb{H}$ можно отождествить с пространством всех матриц вида

$$q \longrightarrow \varphi(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где $a = t + ix, b = y + iz, t, x, y, z \in \mathbb{R}$. При этом

$$|q|^2 = \det \varphi(q) = |a|^2 + |b|^2.$$

Единичные кватернионы, т.е. кватернионы единичной нормы, образуют группу

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

(special unitary). Ее элементы параметризуются точками трехмерной сферы $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в четырехмерном евклидовом пространстве.

Вращения и единичные кватернионы.I

Кватернион называется мнимым, если $\bar{q} = -q$. Пространство мнимых кватернионов $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ трехмерно и порождено элементами i, j и k.

Отождествим трехмерное евклидово пространство с пространством мнимых кватернионов:

$$X = xi + yj + zk, \quad |X|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Каждому единичному кватерниону q сопоставим линейное отображение

$$A(q) : \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

по формуле

$$A(q)(X) = qX\bar{q} = qXq^{-1}.$$

Очевидно, что

$$A(pq) = A(p) \cdot A(q),$$

$$|A(q)(X)| = |X| \quad \text{для всех } X \in \mathbb{R}^3.$$

Более того, $A(1)$ — тождественно и $A(q^{-1}) = A^{-1}(q)$.

Вращения и единичные кватернионы.II

Мы получили гомоморфизм

$$A : SU(2) \to SO(3).$$

Вычислим его значение для

$$q = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Мы имеем

$$(xi + yj + zk) \xrightarrow{A(q)} q(xi + yj + zk)\bar{q} =$$

$$= xi + (y\cos 2\alpha - z\sin 2\alpha)j + (y\sin 2\alpha + z\cos 2\alpha)k.$$

Следовательно,

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Вращения и единичные кватернионы.III

Така как любой элемент $B \in SO(3)$ представляется как композиция трех поворотов на углы Эйлера

$$B = R_{z,\gamma} \cdot R_{x,\beta} \cdot R_{z,\alpha}$$

и лежит в образе A:

$$B = A(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}k) \cdot A(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}i) \cdot A(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}k),$$

то A — эпиморфизм.
$A(q_1) = A(q_2)$ тогда и только тогда, когда $q_2^{-1}q_1$ коммутирует с любым мнимым кватернионом, а это возможно только при $q_2^{-1}q_1 \in \mathbb{R}$. Так как q_1 и q_2 единичны, то отсюда следует, что $q_1 = \pm q_2$. Поэтому $\mathrm{Ker}\, A = \pm\mathbf{I}$ и

$$SO(3) = SU(2)/\pm\mathbf{I}.$$

Топологически $SO(3)$ получается из трехмерной сферы отождествлением противоположных точек:

$$SO(3) = \mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2.$$

Вращения четырехмерного пространства

Отождествим четырехмерное евклидово пространство с $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. Каждой паре единичных кватернионов (q_1, q_2) сопоставим вращение пространства $\mathbb{R}^4$ по формуле

$$X \to q_1 X q_2^{-1}.$$

Это соответствие задает гомоморфизм

$$SU(2) \times SU(2) \to SO(4),$$

который является эпиморфизмом. Его ядро состоит из преобразований вида $(\pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{I})$ и, в частности, изоморфно $\mathbb{Z}_2$. Тем самым

$$SO(4) = (SU(2) \times SU(2))\,/\mathbb{Z}_2.$$

Доказательства этих фактов аналогичны случаю вращений трехмерного пространства.