Кольца и пространства максимальных идеалов

(курс топологии, лектор — И.А. Тайманов)

Как оказалось, в ряде важных случаев существует взаимно однозначное соответствие между алгебраическими и топологическими объектами, а именно, между некоторыми кольцами A и топологическими пространствами M_A, образованными всеми максимальными идеалами в этих кольцах и наделенными некоторой естественной топологией. Это соответствие продолжается на отображения между ними: непрерывные отображения $f : M_A \to M_B$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами колец $f^* : B \to A$.

Мы изложим эту теорию для исторически первых примеров: булевых колец и колец непрерывных функций $C(X)$.

Но прежде, чем делать это, напомним некоторые факты об идеалах колец.

Подмножество $I \subset A$ произвольного кольца A (с коммутативным и ассоциативным умножением) называется *идеалом кольца*, если оно является подкольцом (т.е. его элементы сами образуют кольцо относительно операций из A) и для любого его элемента $a \in I$ его произведение с любым элементом b из кольца A опять лежит в I: $ab \in I$:

$$a \in I, \quad b \in A \quad \Longrightarrow \quad ab \in I.$$

Идеал называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом идеале, отличном от всего кольца A.

Предложение 1 *Пусть A — кольцо с коммутативным и ассоциативным умножением и I — идеал в A. Тогда*

1) множество классов смежности A/I, элементы в котором имеют вид $[a] = \{a + I\}$, $a \in A$, и при этом $[a] = [b]$, если и только если $a - b \in I$, наследует из A структуру кольца с с операциями

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a][b] = [ab].$$

При этом проекция

$$\pi : A \to A/I \quad : \quad \pi(a) = [a],$$

является гомоморфизмом колец;

2) если $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм колец и J — идеал в B, то его прообраз $\varphi^{-1}(I)$ — идеал в A;

3) идеал I — максимальный тогда и только тогда, когда фактор-кольцо A/I является полем, т.е. каждый ненулевой элемент $x \in A/I$ обратим: существует другой элемент $y \in A/I$ такой, что $xy = 1$.

Доказательство. Утверждение 1 почти очевидно и доказывается простой проверкой (оно известно из стандартных курсов алгебры).

Если $J \subset B$ — идеал и $\varphi(a) = x \in J$, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = x\varphi(b) \in J$ и, следовательно, $ab \in \varphi^{-1} \subset A$ для любого $b \in B$. Утверждение 2 доказано.

Пусть кольцо A/I содержит необратимый элемент x. Тогда он порождает идеал $J = x \cdot A/I$, который отличен от A/I. Его прообраз $\pi^{-1}(J)$ — идеал в A такой, что $I \subset J$, $J \neq I$ и $J \neq A$, и, следовательно, идеал I — не максимальный.

Предположим теперь, что все элементы кольца A/I обратимы. Тогда, если бы существовал идеал J такой, что $I \subset J$, $J \neq I$ и $J \neq I$, то его образ $\pi(J)$ был бы нетривиальным идеалом в A/I, состоящим из необратимых элементов. Следовательно, I — максимальный идеал.

Предложение доказано.

Так как каждый необратимый элемент $x \in A$ в кольце A порождает идеал xA, отличный от A, то из предложения 1 вытекает

Следствие 1 *Каждый идеал $I \subset A$, отличный от самого кольца A, содержится в каком-то максимальном идеале.*

1) Булевы кольца.

Пусть A — кольцо, которое является коммутативной группой относительно сложения $+$ с единичным элементом 0 и на котором задано коммутативное умножение с единицей 1. Естественно предполагается выполненным условие

$$a(b + c) = ab + ac, \quad a, b, c \in A.$$

Кольцо A называется *булевым кольцом*, если оно дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

$$a^2 = a, \quad a + a = 0, \quad a \in A.$$

Примером булева кольца является множество 2^X, состоящее из всех подмножеств заданного множества X, с операциями симметрической разности

$$a + b = (a \cup b) \setminus (a \cap b)$$

и пересечения

$$ab = a \cap b.$$

Нулем (единичным элементом абелевой группы относительно сложения) является пустое множество: $0 = \emptyset$, а единицей (относительно умножения) — все множество X: $1 = X$.

Пусть A — булево кольцо и M — множество, образованное всеми его максимальными идеалами. Введем на M топологию, взяв в качестве базы топологии подмножества вида U_a, где $a \in A$, образованные всеми идеалами, не содержащими заданный элемент $a \in A$:

$$U_a = M \setminus \{I \in M \ : \ a \in I\} = \{I \in M \ : \ a \notin I\}.$$

Эта топология была введена Стоуном, который предложил использовать переход от булевых колец к пространствам их максимальных идеалов для изучения самих колец и доказал следующий факт.

Теорема 1 (Стоун) *M — компактное хаусдорфово пространство.*

Кольцо A изоморфно булеву кольцу, образованному всеми открыто-замкнутыми подмножествами в M относительно операций симметрической разности и пересечения, или, что то же самое, кольцу непрерывных функций вида $f : M \to \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, где $\mathbb{Z}_2$ — кольцо вычетов по модулю два.

Доказательство. 1) Имеет место равенство

$$U_a \cap U_b = U_{ab}, \quad a, b \in A,$$

которое мы сейчас докажем. Прежде всего, если $I \in U_{ab}$, то $ab \notin I$, а, следовательно, так как I — идеал, то a и b тоже не принадлежат I: $a \notin I$ и $b \notin I$. Мы заключаем, что

$$U_{ab} \subset U_a \cap U_b.$$

Предположим теперь, что $I \in U_a \cap U_b$, т.е. a и b не принадлежат I. Так как I — максимальный идеал, то любой элемент $c \in A$ представляется в виде

$$c = i + ax = j + by,$$

где $i, j \in I$ и $x, y \in A$. Действительно, в противном случае множества элементов вида $\{i + ax\}$ или $\{i + bx\}$, где $i \in I, x \in A$, образуют идеалы, которые не содержат элемент c, что противоречит максимальности идеала I. В частности, единица кольца представляется в виде

$$1 = i_1 + ax_1 = i_2 + bx_2,$$

где $i_1, i_2 \in I$ и $x_1, x_2 \in A$. Возведем единицу в квадрат, умножив эти два представления:

$$1 = 1^2 = (i_1 i_2 + i_1 b x_2 + i_2 a x_1) + ab x_1 x_2.$$

Сумма трех слагаемых, выделенная в скобки, принадлежит идеалу I, и, так как единица не принадлежит I (в противном случае $I = A$), то $abx_1x_2 \notin I$. Мы заключаем, что $ab \notin I$, и ,следовательно, имеет место следующее вложение:

$$U_{ab} \subset U_a \cap U_b,$$

что вместе с обратным вложением, доказанным выше, влечет совпадение левых и правых частей этой формулы.

2) Для любого элемента $a \in A$ выполняются следующие соотношения:

$$U_a \cap U_{1+a} = U_0 = \emptyset, \quad U_a \cup U_{1+a} = M.$$

Первое из них очевидно следует из п.1:

$$U_a \cap U_{1+a} = U_{a(1+a)} = U_{a+a} = U_0 = \emptyset.$$

Втрое докажем от противного: пусть существует максимальный идеал I, который не принадлежит ни U_a, ни U_{1+a}. Это означает, что $a \in I$ и $(1+a) \in I$. Следовательно, $1 = a + (1+a) \in I$ и поэтому $I = A$, что противоречит максимальности идеала $I : I \neq A$.

3) *M — хаусдорфово пространство.*

Действительно, если два максимальных идеала I и J не совпадают, то возьмем элемент $a \in I \setminus J$. Тогда $J \in U_a$ и $I \in M \setminus U_a = U_{1+a}$. Мы заключаем, что непересекающиеся окрестности U_a и U_{1+a} разделяют точки J и I.

4) *M — компактное пространство.*

Достаточно доказать, что из любого покрытия, состоящего из открытых множеств из базы пространства, можно выделить конечное подпокрытие. Пусть

$$M = \cup_{b \in B} U_b, \quad B \subset A.$$

Обозначим через J идеал, порожденный элементами из B. Любой идеал, отличный от всего кольца A, можно вложить в какой-то максимальный идеал I. Если $J \neq A$, то $J \subset I$ и, по построению, $I \notin U_b$ для любого $b \in B$. Но это противоречит тому, что множества $U_b, b \in B$, образуют покрытие пространства M. Следовательно, $J = A$ и существует представление единицы вида

$$1 = b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n,$$

где $b_i \in B, x_i \in A, i = 1, \ldots, n$.

Пусть $I \in M$. Так как $1 \notin I$, то существует хотя бы один элемент вида b_k такой, что $b_k \notin I$. Но это означает, что $I \in U_{b_k}$. Следовательно, мы имеем конечное покрытие

$$M = \cup_{k=1}^{n} U_{b_k}.$$

5) *Каждое открыто-замкнутое подмножество в M имеет вид U_a для подходящего элемента $a \in A$.*

Докажем это утверждение. Пусть V — открыто-замкнутое подмножество в M. Это означает, что оно и его дополнение $W = M \setminus V$ открыты, а, следовательно, представимы в виде

$$V = \cup_{b \in B} U_b, \quad W = \cup_{c \in C} U_c, \quad B \subset A, C \subset A.$$

Так как M — компактно, то из открытого покрытия $M = (\cup_{b \in B} U_b) \cup (\cup_{c \in C} U_c)$ можно выделить конечное подпокрытие: $U_{b_1}, \ldots, U_{b_k}, U_{c_1}, \ldots, U_{c_l}$, где $b_1, \ldots, b_k \in B, c_1, \ldots, c_l \in C$.

Заметим, что для любой пары элементов $a, b \in A$ мы имеем

$$U_a \cup U_b = M \setminus ((M \setminus U_a) \cap (M \setminus U_b)) = M \setminus (U_{1+a} \cap U_{1+b}) =$$

$$M \setminus U_{(1+a)(1+b)} = U_{1+(1+a)(1+b)} = U_{a+b+ab}.$$

Следовательно, $U_a \cup U_b = U_{a+b+ab}$ и объединение любого конечного семейства множеств вида U_a имеет такой же вид. В частности, мы имеем

$$V = U_{b_1} \cup \cdots \cup U_{b_k} = U_a$$

для какого-то элемента $a \in A$.

6) *Кольцо A изоморфно булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств в M.*

Действительно, из п.2 следует, что любое множество вида U_a открыто и замкнуто одновременно, а п.5 утверждает, что любое открыто-замкнутое множество в M имеет такой вид. Изоморфизм теперь устанавливается следующими формулами:

$$U_{a+b} = (U_a \cup U_b) \setminus (U_a \cap U_b), \quad U_{ab} = U_a \cap U_b.$$

В доказательстве нуждается только первая формула, которая выводится из следующей цепочки равенств:

$$(U_a \cup U_b) \setminus (U_a \cap U_b) = U_{a+b+ab} \cap (M \setminus (U_a \cap U_b)) = U_{a+b+ab} \cap (M \setminus U_{ab}) =$$

$$= U_{a+b+ab} \cap U_{1+ab} = U_{(a+b+ab)(1+ab)} = U_{a+b}.$$

Каждому элементу $a \in A$ отвечает так же непрерывная функция со значениями в $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — характеристическая функция множества U_a:

$$a(I) = \begin{cases} 1, & \text{если } I \in U_a, \\ 0, & \text{если } I \notin U_a. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$a(I) + b(I) = (a+b)(I), \quad a(I)b(I) = (ab)(I).$$

Так как прообразы нуля и единицы для непрерывной функции $f : M \to \mathbb{Z}_2$ — открыто-замкнутые множества, то любая такая функция строится по некоторому элементу a указанным способом.

Теорема доказана.

Осталось указать соответствие между гомоморфизмами булевых колец и непрерывными отображениями пространств максимальных идеалов.

Прежде всего докажем необходимое в дальнейшем

Предложение 2 *1) Пусть A — булево кольцо и I — максимальный идеал в A. Тогда фактор-кольцо изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_2$: $A/I = \mathbb{Z}_2$.*

2) Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм булевых колец. Тогда прообраз $I = \varphi^{-1}(J)$ любого максимального идеала $J \subset B$ — максимальный идеал в A.

Доказательство. 1) Из предложения 1 следует, что любой ненулевой элемент $x \in A/I$ из фактор-кольца обратим. Но $x(1+x) = x + x = 0$ и, следовательно, ненулевой элемент $x \in A/I$ обратим тогда и только тогда, когда $1+x = 0$, что влечет $x = 1$. Отсюда немедленно следует, что $A/I = \mathbb{Z}_2$.

2) Рассмотрим композицию $\psi : A \to \mathbb{Z}_2$ гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} B/J = \mathbb{Z}_2.$$

Так как единица переходит в единицу, то $\psi(A) = \mathbb{Z}_2$. Очевидно, что $\mathrm{Ker}\,\psi = I$ и поэтому, из того, что $A/\mathrm{Ker}\,\psi = \psi(A) = \mathbb{Z}_2$, следует, что идеал I — максимален.

Предложение доказано.

Если M_A и M_B — пространства максимальных идеалов колец A и B, соответственно, и

$$f : M_B \to M_A$$

— непрерывное отображение, то прообраз любого открыто-замкнутого множества $V \subset M_A$ — тоже открыто-замкнут. Так как открыто-замкнутые множества однозначно отвечают элементам кольца, мы получаем отображение

$$f^* : A \to B \quad : \quad U_{f^*(a)} = f^{-1}(U_a).$$

Рассматривая элементы колец как непрерывные функции со значениями в $\mathbb{Z}_2$, перепишем это отображение в виде

$$f^* : A \to B \quad : \quad f^*(a)(I) = a(f(I)), \tag{1}$$

из которого очевидно, что f^* — гомоморфизм колец.

Пусть теперь задан гомоморфизм колец

$$\varphi : A \to B.$$

Прообраз любого максимального идеала $I \subset B$ — максимальный идеал $\varphi^{-1}(I) \subset A$ и мы получаем отображение

$$\varphi^* : M_B \to M_A \quad : \quad \varphi^*(I) = \varphi^{-1}(I).$$

Так как идеал очевидно определяется своими элементами, т.е. значениями элементов кольца на нем, это отображение переписывается в виде

$$\varphi^* : M_B \to M_A \quad : \quad a(\varphi^*(I)) = \varphi(a)(I), \ a \in A. \tag{2}$$

Легко доказать (мы оставляем это в качестве упражнения), что φ^* — непрерывное отображение. Из (1) и (2) выводим

$$\varphi^{**}(a)(I) = a(\varphi^*(I)) = \varphi(a)(I),$$

$$a(f^{**}(I)) = f^*(a)(I) = a(f(I)).$$

Тем самым доказана

Теорема 2 *Формулы (1) и (2) устанавливают взаимно однозначные соответствия*

$$\varphi \to \varphi^*, \quad f \to f^*,$$

между гомоморфизмами булевых колец $\varphi : A \to B$ и непрерывными отображениями $f : M_B \to M_A$ пространств их максимальных идеалов. При этом выполнены соотношения

$$\varphi^{**} = \varphi : A \to B, \quad f^{**} = f : M_B \to M_A.$$

2) Кольца непрерывных функций $C(X)$.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Известно, что такое пространство нормально и поэтому на нем существует достаточно много непрерывных вещественнозначных функций. Эти функции образуют алгебру $C(X)$. Обозначим через $\gamma(X)$ пространство максимальных идеалов в $C(X)$, снабженное стоуновской топологией:

$$a \in \overline{B} \iff \cap_{b \in B} b \subset a. \tag{3}$$

Имеет место общее утверждение об идеалах в $C(X)$:

Лемма 1 *[Гельфанд–Колмогоров] Если A — идеал в $C(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, и $A \neq C(X)$, то существует точка $x \in X$ такая, что все функции из A обращаются в нуль в этой точке.*

Если при этом идеал A максимален, то он, в точности, состоит из функций равных нулю в данной точке x и при этом точка с таким свойством единственна.

Доказательство. Докажем первое утверждение от противного: предположим, что для каждой точки $x \in X$ существует функция $g_x \in A$ такая, что $g_x(x) \neq 0$. Из непрерывности этой функции следует, что она не обращается в нуль в целой окрестности U_x точки x. Области U_x образуют открытое покрытие пространства X и, так как X компактно, из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Функция

$$g = g_{x_1}^2 + \dots + g_{x_n}^2$$

тоже принадлежит идеалу A и нигде не равна нулю. Любая функция $f \in C(X)$ представляется в виде произведения

$$f = g\frac{f}{g}, \quad \frac{f}{g} \in C(X), g \in A,$$

и, следовательно, $f \in A$, что противоречит тому, что $A \neq C(X)$.

Рассмотрим теперь максимальный идеал A. Он содержится в идеале $I(x)$, образованный всеми функциями, равными нулю в некоторой точке x. Так как, по теореме Титце–Урысона, для любой точки нормального (а, следовательно, и компактного хаусдорфова) пространства существует непрерывная функция, отличная от нуля в этой точке, мы заключаем, что

$I(x) \neq C(X)$ и более того $C(X)/I(x) = \mathbb{R}$. Поэтому, если $A \neq I(x)$, то идеал A не является максимальным и мы приходим к противоречию. Осталось доказать, что такая точка единственна, но это немедленно вытекает из того, что для любой другой точки $y \in X$ существует функция $f : X \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) \neq 0$ (мы опять используем теорему Титце–Урысона). Так как $f(x) = 0$, то $f \in A$.

Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что существует отображение пространства $\gamma(X)$ в X, однозначно сопоставляющее каждому максимальному идеалу A точку x такую, что $A = I(x)$:

$$I : \gamma(X) \to X.$$

Теорема 3 (Гельфанд–Колмогоров) *Отображение I является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Для каждой точки x идеал $I(x)$ является максимальным. Действительно, $A/I(x) = \mathbb{R}$, как показано в доказательстве леммы 1, и кольцо $\mathbb{R}$ является полем. Поэтому достаточно применить предложение 1. Следовательно, I является отображением на все пространство X, и мы заключаем, что оно — взаимно однозначное отображение.

Для доказательства теоремы осталось теперь перевести определение топологии (3) на язык непрерывных функций: пусть $V \subset X$, тогда точка $I(x)$ принадлежит его замыканию, если и только если любая непрерывная функция, обращающаяся в нуль тождественно на V, равна нулю в точке x.

Очевидно, что, если $x \in \overline{V}$, то $I(x) \in \overline{I(V)}$.

Если же x не лежит в замыкании множества V, из нормальности пространства X следует, что существует непрерывная функция, равная нулю всюду на V и равная единице в точке x (это следует из более слабого условия вполне регулярности пространства X). Мы видим, что отображение I и его обратное I^{-1} переводит замкнутые множества в замкнутые и поэтому являются гомеоморфизмами.

Теорема доказана.