Теорема Стоуна–Вейерштрасса

(курс топологии, лектор — И.А. Тайманов)

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Через $C(X)$ обозначается нормированное линейное пространство, образованное всеми непрерывными функциями
$$f : X \to \mathbb{R},$$
и наделенное нормой
$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$
(напомним, что на компактном пространстве любая непрерывная функция достигает свои максимум и минимум).

Пространство $C(X)$ является кольцом над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ по отношению к операциям сложения и умножения
$$(f, g) \to f + g, \quad (f, g) \to fg,$$
которые непрерывны в топологии, заданной нормой.

В 19-ом веке Вейерштрасс доказал, что для отрезка $X = [0, 1]$ подкольцо $\mathbb{R}[x]$, образованное всеми многочленами, всюду плотно в $C(X)$. Этот факт имеет множество важных применений в различных областях математики и, в частности, при приближении непрерывных отображений $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ гладкими.

Как показал Стоун, эта теорема носит топологический характер. А именно, имеет место

Теорема 1 (Стоун–Вейерштрасс) *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $C(X)$ — кольцо непрерывных функций на X. Пусть A — такое подкольцо в $C(X)$, что*

1) A разделяет точки из X, т.е. для любых точек $x, y \in X$ существует функция $f \in A$ такая, что $f(x) \neq f(y)$;

2) A содержит подкольцо, образованное постоянными функциями: $\mathbb{R} \subset A$ (так как мы подразумеваем, что A подкольцо, то это условие эквивалентно тому, что A содержит функцию, равную тождественно единице: $1 \in A$).

Тогда A всюду плотно в $C(X)$.

Доказательство.

1) Условие, что A всюду плотно в $C(X)$, означает, что для любой функции $f \in C(X)$ и любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in A$ такая, что

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

Поэтому можно считать, что *кольцо A замкнуто, как подмножество в $C(X)$*. Если это не так, то мы перейдем к его замыканию $\overline{A}$ и, доказав теорему для $\overline{A}$, мы докажем ее и для A.

2) *Для любых точек $x, y \in X$ и любых чисел $r, s \in \mathbb{R}$ существует такая функция $g : X \to \mathbb{R}$ из A, что $g(x) = r$ и $g(y) = s$.*

Действительно, возьмем функцию f, разделяющую точки x и y: $f(x) = r', f(y) = s', r' \neq s'$. Построим функцию g в виде $g = af + b$. Значения постоянных a и b легко найти:

$$a = \frac{r - s}{r' - s'}, \quad b = \frac{r's - rs'}{r' - s'}.$$

3) *Если $f \in A$, то $|f| \in A$.*

Докажем это утверждение. Пусть $M = \max_{x \in X} |f(x)|$. Тогда

$$|f| = \sqrt{M^2 - M^2 + f^2} = M\sqrt{1 - (1 - \left(\frac{f}{M}\right)^2)} = M\sqrt{1 - g},$$

где $g(x) = 1 - \left(\frac{f(x)}{M}\right)^2, x \in X$. Функция g лежит в кольце A. При $0 \leq y \leq 1$, ряд Тейлора функции $\varphi(y) = M\sqrt{1 - y}$ сходится к ней равномерно. Подставив вместо y функцию g, мы получим ряд по степеням g, который равномерно будет сходиться к функции $|f|$. Частичные суммы этого ряда — многочлены от g и, поэтому, принадлежат кольцу A. Так как кольцо A замкнуто, то и сумма ряда, следовательно, принадлежит этому кольцу.

4) *Если $f_1, \ldots, f_n \in A$, то $M_{f_1,\ldots,f_n}, m_{f_1,\ldots,f_n} \in A$, где*

$$M_{f_1,\ldots,f_n}(x) = \max_{x \in X}\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\},$$

$$m_{f_1,\ldots,f_n}(x) = \min_{x \in X}\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

Это утверждение достаточно доказать для пары функций ($n = 2$). Но в этом случае оно очевидно вытекает из следующего представления:

$$M_{f,g} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad m_{f,g} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

5) Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Пусть нам дана функция $f \in C(X)$ и положительная постоянная $\varepsilon > 0$.

Для любых точек $p, q \in X$ существует функция $g_{p,q} \in A$ такая, что

$$g_{p,q}(p) = f(p), \quad g_{p,q}(q) = f(q).$$

Из непрерывности функций f и $g_{p,q}$ следует, что существуют такие окрестности $U_{p,q}$ и $V_{p,q}$ точек p и q, соответственно, что

$$|f(x) - g_{p,q}(x)| < \varepsilon, \quad x \in U_p \text{ или } x \in V_q.$$

Зафиксируем точку $q \in X$. Соответствующие окрестности $U_{p,q}$, $p \in X$, образуют открытое покрытие пространства X, из которого, согласно компактности X, можно выделить конечное подпокрытие $U_{p_1,q}, \ldots, U_{p_k,q}$. Определим функцию $g_q \in A$ как

$$g_q(x) = \min_{x \in X}\{g_{p_1,q}(x), \ldots, g_{p_k,q}(x)\}.$$

По построению функция g_q удовлетворяет неравенствам

$$g_q(x) < f(x) + \varepsilon, \quad x \in X, \tag{1}$$

$$|g_q(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in W_q = \cap_{i=1}^{k} V_{p_i,q}. \tag{2}$$

Открытые множества W_q, где $q \in X$, тоже образуют открытое покрытие пространства X. Выделим из него конечное подпокрытие $W_{q_1}, \ldots, W_{q_n}$ и определим функцию $g \in A$ следующей формулой:

$$g(x) = \max_{x \in X}\{g_{q_1}(x), \ldots, g_{q_n}(x)\}.$$

Согласно (1), мы имеем неравенство

$$g(x) < f(x) + \varepsilon, \quad x \in X,$$

а из (2) и построения функции g следует, что

$$f(x) - \varepsilon < g(x), \quad x \in X.$$

Следовательно, функция g является искомой, т.е. всюду удовлетворяет неравенству $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Теорема доказана.