Произведения топологических пространств и вполне регулярные пространства

(курс топологии, лектор — И.А. Тайманов)

Пусть задано семейство топологических пространств X_α, $\alpha \in A$, параметризованное элементами множества A.

Построим прямое произведение множеств X_α, $\alpha \in A$:

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

точками которого являются все такие функции $f : A \to \cup_\alpha X_\alpha$, что $f(\alpha) \in X_\alpha$. Можно понимать это проще: точки пространства X — это такие наборы точек $(\dots, x_\alpha, x_\beta, \dots)$, параметризованных элементами из A, что каждая α-ая координата x_α принадлежит множеству X_α.

Для каждого индекса $\alpha \in A$ определена проекция отображение

$$\pi_\alpha : X \to X_\alpha,$$

сопоставляющая точке из X ее α-ую координату:

$$f \in X \longrightarrow f(\alpha) \in X_\alpha.$$

Введем на множестве X слабейшую топологию, по отношению к которой любая проекция π_α, где $\alpha \in A$, является непрерывным отображением. Предбазой этой топологии будут всевозможные множества вида

$$\pi_\gamma^{-1}(U) \subset X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

где γ пробегает все множество индексов A, а U — все открытые множества из X_γ. Так определенное топологическое пространство X называется *произведением топологических пространств* $X_\alpha, \alpha \in A$.

Примеры.

1) Множество всех отображений (возможно разрывных) из X в Y является произведением копий пространства Y:

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y_x, \quad Y_x = Y.$$

При этом каждое отображение $f : X \to Y$ однозначно отвечает такой точке $f \in Y^X$, что ее x-ая координата f_x равна $f(x)$. Рассмотрим на Y^X топологию произведения и вложим в него множество $C(X, Y)$, образованное всеми непрерывными отображениями. Индуцированная топология на $C(X, Y)$ есть *топология поточечной сходимости.*

2) Пусть X — дискретное пространство, состоящее из двух точек: $X = \{0, 1\}$, и A — счетное множество (например, $A = \mathbb{N}$). Рассмотрим топологическое произведение $\{0, 1\}^\omega$ счетного числа копий пространства X. Полученное пространство гомеоморфно *канторову дисконтинууму.*

Теорема 1 (Тихонов) *Произведение компактных топологических пространств $X_\alpha, \alpha \in A$, тоже является компактным топологическим пространством.*

Прежде всего докажем один технический факт.

Лемма 1 *Пусть X — топологическое пространство и A — такое максимальное (по включению) семейство открытых множеств в X, что оно покрывает X, но никакое его конечное подсемейство не образует покрытия пространства X. Тогда, если открытые множества U и V не принадлежат A, то и их пересечение $U \cap V$ не принадлежит A.*

Доказательство. Так как A — максимальное семейство, не содержащее конечных покрытий X, то подмножество $W \subset X$ не принадлежит A, если и только если существует такое конечное подсемейство в A: $S_1, \dots, S_n \in A$, что

$$W \cup S_1 \cup \dots \cup S_n = X.$$

Действительно, из существования такого покрытия следует, что $W \notin A$. Если $W \in A$, но такого покрытия не существует, то семейство $A \cup \{W\}$ не содержит конечных покрытий и включает в себя A, что противоречит условию максимальности A.

Заметим, что существование максимального семейства A с таким свойством, как обычно в таких случаях, вытекает из аксиомы выбора (точнее, в данном случае, из эквивалентной ей леммы Цорна).

Так как $U \notin A$ и $V \notin A$, то существуют такие множества $Y_1, \dots, Y_k$, Z_1, $\dots$, $Z_l \in A$, что

$$U \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_k = X,$$

$$V \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_l = X.$$

Это очевидно влечет равенство

$$(U \cap V) \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_k \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_l = X,$$

из которого следует, что $U \cap V \notin A$. Лемма доказана.

Следствие 1 *Пусть X имеет такую предбазу β, что из любого покрытия пространства X множествами из β можно выбрать конечное подпокрытие. Тогда X — компактное пространство.*

Доказательство. Предположим противное: X — не является компактным, и рассмотрим A — максимальное семейство открытых множеств, не содержащее конечного покрытия пространства X и образующее покрытие X. Для любой точки x существует ее окрестность V из семейства A и, согласно определению предбазы, каждая такая окрестность V содержит окрестность вида $U = U_1 \cap \ldots \cdots \cap U_n$, где $U_k \in \beta, k = 1, \ldots, n$:

$$x \in U = U_1 \cap \ldots \cdots \cap U_n \subset V.$$

Так как семейство A максимально, то $U \in A$. Из предыдущей леммы следует, что, если все области $U_k, k = 1, \ldots, n$, не принадлежат A, то $U \notin A$. Поэтому существует такая окрестность $U_x = U_i \in A$, что $x \in U_x$. Области $\{U_x\}_{x \in X}$ образуют покрытие пространства X открытыми множествами, которые одновременно принадлежат и предбазе β, и семейству A. Но, по исходному предположению, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, и мы приходим к противоречию с определением семейства A. Следствие доказано.

Теперь мы можем непосредственно перейти к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие X элементами предбазы. Предположим, что оно не содержит конечного подпокрытия.

Для каждого значения индекса $\alpha \in A$ рассмотрим совокупность тех множеств из $\mathcal{U}$, которые имеют вид $\pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta})$, где $V_{\alpha\beta}$ — открытые множества в сомножителе X_α. Очевидно, что множества $V_{\alpha\beta}$ не образуют покрытие пространства X_α, потому что иначе из него бы выделялось конечное покрытие $V_{\alpha 1}, \ldots, V_{\alpha n}$ компактного пространства X_α, а, следовательно, $\mathcal{U}$ содержало бы конечное подпокрытие $\pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha 1}), \ldots, \pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha n})$ всего пространства X. Выберем теперь x_α точку так, что

$$x_\alpha \notin \cup_\beta V_{\alpha\beta}.$$

Теперь легко заметить, что точка $\widehat{x} \in X$, у которой каждая α-ая координата равна x_α, не содержится ни в одном множестве из $\mathcal{U}$. Мы приходим к противоречию с тем, что $\mathcal{U}$ — покрытие пространства X. Теорема доказана.

Следствие 2 *Для любого кардинала τ произведение τ экземпляров отрезка $[0,1]$ — пространство $[0,1]^\tau$ — компактно.*

Подпространства пространств $[0,1]^\tau$, как сейчас будет показано, допускают очень красивую характеризацию в терминах отделимости.

Топологическое пространство X называется *вполне регулярным*, если оно является T_1-пространством (т.е. все одноточечные подмножества замкнуты) и удовлетворяет следующей аксиоме отделимости:

Аксиома $T_{3\frac{1}{2}}$. *Для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует такая непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, что $f(x) = 0$ и $f \equiv 1$ вне области U.*

Эта аксиома означает, что любая точка x и любое не содержащее ее замкнутое множество $A = X \setminus U$ функционально отделимы.

Имеет место несложная

Лемма 2 *Если два множества A и B функционально отделимы, то они отделимы.*

Доказательство. Пусть $f : X \to [0,1]$ — непрерывная функция, которая тождественно равна нулю на A и единице — на B. Тогда открытые множества $U = f^{-1}([0, 1/3))$ и $V = f^{-1}((2/3, 1])$ разделяют A и B:

$$A \in U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Лемма доказана.

Следствие 3 *1) Каждое вполне регулярное пространство регулярно и, тем более, хаусдорфово.*

2) Каждое нормальное пространство (а тем самым и каждое компактное хаусдорфово пространство) вполне регулярно.

Первое утверждение этого следствия очевидно, а второе вытекает из теоремы Титце–Урысона. Заметим, что эта теорема утверждает, что, если в хаусдорфовом пространстве любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы, то они и функционально отделимы.

В случае регулярных пространств аналог этого утверждения не верен:

существуют регулярные, но не вполне регулярные, пространства.

Также

существуют вполне регулярные, но не нормальные, пространства.

Как показывает следующая лемма условие вполне регулярности наследуется подпространствами и сохраняется при произведениях.

Лемма 3 *1) Если X — вполне регулярное пространство и Y — его подпространство (с индуцированной топологией), то Y — тоже вполне регулярно.*

2) Произведение вполне регулярных пространств — вполне регулярно.

Доказательство. 1) Пусть $y \in Y$ и U — ее окрестность в Y. По определению индуцированной топологии, $U = V \cap Y$, где V — открытое множество в X. Пусть $f : X \to [0,1]$ — функция, равную единице в точке y и нулю вне V. Ограничим f на Y и получим функцию со свойствами, указанными в аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$, что, вследствие произвольности выбора x и U, влечет вполне регулярность пространства Y.

2) Пусть $x' = (\dots, x'_\alpha, \dots) \in X$, где $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, и U — окрестность точки x'. Возьмем $V = V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_n} \subset U$ — элемент из базы пространства X, где $V_{\alpha_k} = \pi^{-1}_{\alpha_k}(U_{\alpha_k}), k = 1, \dots, n$. Для каждого значения k возьмем функцию $f_k : X_{\alpha_k} \to [0,1]$, равную нулю в точке x'_{α_k} и единице вне U_{α_k}. Определим теперь функцию $f : X \to [0,1]$ по формуле

$$f(x) = 1 - (1 - f_{\alpha_1}(x_{\alpha_1})) \dots (1 - f_{\alpha_n}(x_{\alpha_n})),$$

где $x = (\dots, x_\alpha, \dots) \in X$. Очевидно, $f(x') = 0$ и $f \equiv 1$ вне V, а, следовательно, и вне U. Мы тем самым доказали, что X — вполне регулярное пространство.

Лемма доказана.

Следствие 4 *Любое подпространство пространства вида* $[0,1]^\tau$ *является вполне регулярным.*

В следующей теореме мы объединим это следствие из леммы с обратным утверждением, получив характеризацию подпространств в пространствах $[0,1]^\tau$.

Теорема 2 (Тихонов) *Пространство* X *вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно вкладывается в пространство* $[0,1]^\tau$ *(для подходящего значения* τ*).*

Замечание. Если вес пространства X бесконечен, то его можно взять в качестве τ.

Доказательство. Из предыдущей леммы вытекает, что любое подпространство в $[0,1]^\tau$ вполне регулярно. Поэтому нам остается доказать, что любое вполне регулярное пространство X вкладывается в $[0,1]^\tau$ для подходящего τ.

Пусть β — база топологии, имеющая мощность τ. Для каждой точки $x \in X$ и для любой ее окрестности U существует такая окрестность V точки x, что V принадлежит базе β,

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U \tag{1}$$

и существует такая непрерывная функция $f_{UV} : X \to [0,1]$, что

$$f_{UV}|_{\overline{V}} \equiv 0, \quad f_{UV}|_{X \setminus U} \equiv 1.$$

Действительно, возьмем функцию g, равную нулю в x и единице вне U, положим $W = g^{-1}([0,1/3))$, за V возьмем такую окрестность точки x из базы β, что $V \subset W$, и определим f как

$$f_{UV}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } g(x) \le \frac{1}{2}, \\ 2\left(g(x) - \frac{1}{2}\right) & \text{при } g(x) \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим множество M, образованное всевозможными парами областей (U,V) из базы β. Обозначим мощность множества M через τ. Если β имеет бесконечную мощность, равную τ, то число таких пар не больше, чем $\tau^2 = \tau$. Построим отображение

$$f : X \to [0,1]^\tau = \prod_{\alpha \in M} I_\alpha \quad : \quad f(x) = (\dots, f_{UV}(x), \dots)_{(U,V) \in M},$$

где $I = [0,1]$. Это отображение является взаимно однозначным отображением на образ: $f : X \to f(X)$:

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{при } x \neq y.$$

Это несложно доказать. Пусть U — окрестность точки x, не содержащая точки y. Можно взять такую окрестность из базы. Возьмем теперь другую окрестность V из базы, удовлетворяющую условию (1). Нам осталось заметить, что $f_{UV}(x) = 0$, а $f_{UV}(y) = 1$, что влечет неравенство $f(x) \neq f(y)$.

Отображение $f : X \to f(X)$ непрерывно по построению. Действительно, предбазу топологии на $f(X)$ образуют пересечения $f(X)$ с множествами вида $\pi_\alpha^{-1}(W)$, где $W \subset I_\alpha = [0,1]$ — открытое множество в $[0,1]$. Из непрерывности f_α следует, что прообразы таких множеств тоже открыты:

$$f^{-1}\left(f(X) \cap \pi_\alpha^{-1}(W)\right) = f_\alpha^{-1}(W).$$

Докажем, что отображение $f^{-1} : f(X) \to X$ непрерывно. Для этого надо доказать, что для любого открытого множества $U \subset X$ существует такое открытое множество $W \subset f(X)$, что $f^{-1}(W) \subset U$. Более того, это достаточно показать для случая, когда U принадлежит базе β. Пусть $x \in U \in \beta$. Возьмем множество V из базы, удовлетворяющее (1). Этой паре отвечает функция $f_{UV} = f_\alpha$. По ее построению, $f_\alpha^{-1}([0,1)) \subset U$. Поэтому за W можно принять множество $\pi_\alpha^{-1}([0,1)) \cap f(X)$.

Теорема доказана.