В заключение автор благодарит А. Г. Витушкина за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 19.04.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudin W. Problem 3. // Function Algebras (Proc. Int'l Symp. Function Algebras, Tulane U., 1965, ed. F. Birtel), Chicago, 1965. P. 349. 2. Витушкин А. Г. // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 1. С. 14—15. 3. Sibony N. // Math. Ann. 1985. Bd. 273. № 1. P. 115—121. 4. Александров А. Д. // Уч. записки ЛГУ. Сер. мат. 1939. Вып. 6.— С. 3—35. 5. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Физматгиз. 1948. С. 156.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

И. А. Тайманов

При описании топологических свойств геодезических потоков, имеющих полный по Лиувиллю набор аналитических первых интегралов, в [1] был выделен класс геометрически простых геодезических потоков и найдены топологические препятствия к существованию таких потоков. Геодезический поток метрики g^{ij} на замкнутом многообразии M^n называется *геометрически простым*, если существует ненулевой уровень интеграла энергии $L = \{H = \frac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j = \text{const} \neq 0\}$ и выполнены условия:

1) в L содержится замкнутое инвариантное (относительно пото ка) множество Γ такое, что дополнение к нему $L \setminus \Gamma$ всюду плотно и имеет конечное число компонент связности, которые расслаиваются над дисками на n-мерные торы;

2) для любой точки $q \in L$ и любой ее окрестности W существует такая область $V \subset L$, что $V \cap (L \setminus \Gamma)$ имеет конечное число компонент связности и $q \in V \subset W$.

Топологические препятствия к существованию таких потоков в терминах фундаментальной группы и первой группы гомологий M^n в [1] были найдены с помощью основного в техническом отношении результата, который не был явно выделен (хотя его доказательство содержится в доказательстве теоремы 1 [1]).

ТЕОРЕМА 1. *Если геодезический поток на замкнутом многообразии M^n геометрически прост, то его фазовое пространство T^*M^n содержит инвариантный n-мерный тор T^n ($n = \dim M^n$), проекция которого на конфигурационное пространство p: $\mathrm{T}^n \to M^n$ индуцирует такой гомоморфизм фундаментальных групп p_*: $\pi_1(\mathrm{T}^n) \to \pi_1(M^n)$, что его образ $p_*(\pi_1(\mathrm{T}^n))$ имеет конечный индекс в $\pi_1(M^n)$.*

В этой работе мы укажем новые топологические свойства многообразий с геометрически простыми геодезическими потоками, которые могут быть получены с помощью теоремы 1. Заметим, что геодезические потоки, имеющие полные по Лиувиллю наборы аналитических первых интегралов, включающие интеграл энергии, геометрически просты [1]. Полученные результаты, тем самым, позволяют указать топологические препятствия к существованию таких первых интегралов. Задача нахождения таких препятствий полностью решена лишь в двумерном случае [2].

ТЕОРЕМА 2. *Если геодезический поток на замкнутом многообразии* M^n *геометрически прост и* $\dim H_1(M^n, \mathbf{R}) = k$, *то кольцо вещественных когомологий* $H^*(M^n, \mathbf{R})$ *содержит подкольцо, изоморфное кольцу вещественных когомологий k-мерного тора* $H^*(T^k, \mathbf{R})$.

Доказательство. Если отображение $p\colon \mathbf{T}^n \to M^n$ таково, что $p_*(\pi_1(\mathbf{T}^n))$ имеет конечный индекс в $\pi_1(M^n)$, то индуцируемый гомоморфизм вещественных гомологий $p_*\colon H_1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}) \to H_1(M^n, \mathbf{R})$ является эпиморфизмом, а гомоморфизм когомологий $p^*\colon H^1(M^n, \mathbf{R}) \to H^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ мономорфизмом. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — образующие $H^1(M^n, \mathbf{R})$, а $b_1 = p^*(a_1), \ldots, b_k = p^*(a_k)$ — их образы в $H^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$. Произведения вида $b_{i_1} \cup \ldots \cup b_{i_l}$ ($i_1, \ldots, i_l$ различны) образуют набор линейно независимых элементов в $H^*(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$, так как $b_1, \ldots, b_k$ линейно независимы. Поэтому $a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_l}$ — их прообразы относительно p^* — образуют набор линейно независимых элементов в $H^*(M^n, \mathbf{R})$, а их линейная оболочка образует подкольцо, изоморфное $H^*(\mathbf{T}^k, \mathbf{R})$.

В случае $\dim H_1(M^n, \mathbf{R}) = \dim M^n$ теорема 2 допускает усиление.

ТЕОРЕМА 3. *Если геодезический поток на замкнутом многообразии* M^n *геометрически прост и* $\dim H_1(M^n, \mathbf{R}) = \dim M^n = n$, *то* $H^*(M^n, \mathbf{R})$ *изоморфно кольцу вещественных когомологий n-мерного тора.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $H_n(M^n, \mathbf{R}) \neq 0$ и $p_*\colon H_n(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}) \to H_n(M^n, \mathbf{R})$ — изоморфизм. Значит M^n — ориентируемо и $p\colon T^n \to M^n$ имеет ненулевую степень, что влечет выполнение неравенств $\dim H_k(M^n, \mathbf{R}) \leqslant \dim H_k(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ при всех $k \geqslant 0$. Согласно теореме 2 верны и обратные неравенства, поэтому $p^*\colon H^*(M^n, \mathbf{R}) \to H^*(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ является изоморфизмом.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
08.04.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тайманов И. А. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 2. С. 429—435. 2. Козлов В. В. // ДАН СССР.— 1979. Т. 249, № 6. С. 1299—1302.